★ محور: ا المرجـــح في المستـــوي ★

ثانوية الشهيد حميدي عيسى - أولاد دراج - المسيلة

يسرني أن أتقدم لكم بهذا العمل المتواضع والمتمثل في
مذكرات مادة الرياضيات لسنة ثانية ثانوي شعبة:

★ علوم تجريبية ★ رياضيات ★ تقني رياضي ★

يتضمن هذه العمل:

- **مذكرة 26:** مرجح نقطتيـــن.
- **مذكرة 27:** مرجح ثلاث نقـــاط.
- **مذكرة 28:** حساب إحداثيي المرجح.
- **مذكرة 29:** تعيين مجموعة نقط بتوضيف المرجح.
- **مذكرة 30:** استقامية نقط - تلاقي مستقيمات.

لا تنسونا من صالح الدعاء للوالدين الكريمين ولي. محبكم في الله الأستاذ: فراحتية المحفوظ

آخر تحديث: 22 / 12 / 2022

السنة الدراسية: 2022 / 2023

أنشطة محور المرجح في المستوي

نشـــاط : (حساب إحداثي المرجح)

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(o, \vec{i}, \vec{j}\right)$.
النقط A، B و C. إحداثياتها على الترتيب $(x_A; y_A)$ ، $(x_B; y_B)$ ، $(x_C; y_C)$. ولتكن G مرجح الجملة $\{(A,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma)\}$ حيث α ، β و γ ثلاث أعداد حقيقية معلومة تحقق $\alpha+\beta+\gamma \neq 0$

1. أثبت أن $\overrightarrow{OG} = \dfrac{\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}+\gamma\overrightarrow{OC}}{\alpha+\beta+\gamma}$
2. إستنتج إحداثيات النقطة G.

الأستاذ: فراحتية المحفوظ

الأستاذ:
فَرَاحْتِيَة
المَحْفُوظ

مـــذكـــرة رقـــم 26

ثانوية : حميدي عيسى – أولاد دراج –
السنة الدراسية : 2022 – 2023
يـــوم :
المدة : 2 ساعة.

المستوى : السنة الثانية علوم تجريبية.
ميدان التعلم : الهنـدسـة .
المحور : المرجـع في المستـوي.
الموضوع : مرجع نقطتيـن.

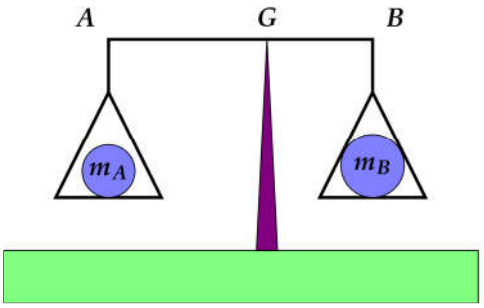
✍ **المكتسبات القبلية:** الأشعة وخواصها ،الإستقامية والتوازي.
✍ **الكفاءات المستهدفة:** انشاء مرجع نقطتين.
✍ **الأدوات المستعملة:** المنهاج، الكتاب المدرسي، مراجع، الأنترنت.

المراحل	عناصـر الـدرس	المدة

مرحلة الإنطلاق

التشخيـص والاكتشـاف

مناقشة نشـاط 01 صفحـة 178 :



1. حساب قيمة m_B بدلالة GA و GB :

لدينا حسب قانون أرخميدس: $m_A GA = m_B GB$ ومنه: $6GA = m_B GB$ إذن: $m_B = 6\dfrac{GA}{GB}$

2. نضع $m_A = 6\,kg$ و $m_B = 3\,kg$

- كتابة $\overrightarrow{GA}$ بدلالة $\overrightarrow{GB}$:

لدينا: $7\overrightarrow{GA} = -3\overrightarrow{GB}$ ومنه: $\overrightarrow{GA} = -\frac{3}{7}\overrightarrow{GB}$

- إثبات أن $\overrightarrow{AG} = \frac{3}{10}\overrightarrow{AB}$:

لدينا: $7\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0}$
يكافئ $7\overrightarrow{GA} + 3(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{0}$ (حسب علاقة شال $\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB}$)
يكافئ $7\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}$
يكافئ $10\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}$
يكافئ $\overrightarrow{AG} = \dfrac{3}{10}\overrightarrow{AB}$

- $AG = 6cm$.

3. تعيين الكتلتين m_A و m_B في الوضعيتين:

b. لدينا: $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB}$ ومنه: $6\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB}$ معناه: $5\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{GB}$ إذن: $5\overrightarrow{GA} = -\overrightarrow{GB}$
ومنه: $m_A = 5\,kg$ و $m_B = 1\,kg$

a. بنفس الطريقة في الحالة الثانية.

بنـــاء معـــارف

مرجح نقطتيـن :

تعريف

✍ لتكن A و B نقطتين متمايزتين وليكن α و β عددين حقيقيين حيث: $\alpha + \beta \neq 0$.
نسمي مرجح النقطتين A و B المرفقتين بالمعاملين α و β على الترتيب النقطة G حيث: $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0}$.

ملاحظـــــات :

❖ إذا كانت نقطة A مرفقة بالعدد الحقيقي α الثنائية $(A;\alpha)$ تسمى نقطة مثقلة.

❖ الجملة $\{(A;\alpha);(B;\beta)\}$ تسمى جملة نقطتين مثقلتين(يُمكن تعريف وبنفس الطريقة جملة n نقطة مثقلة).

❖ النقطة G هي مرجح الجملة المثقلة $\{(A;\alpha);(B;\beta)\}$.

❖ إذا كانت A منطبقة على B نحصل على $(\alpha+\beta)\overrightarrow{GA}=\overrightarrow{0}$ وبما أنّ $\alpha+\beta\neq 0$ فإنّ $\overrightarrow{GA}=\overrightarrow{0}$ أي: G ينطبق على A.

❖ إذا كان $\alpha+\beta=0$ أي: $\alpha=-\beta$ العلاقة تصبح $\alpha\left(\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GB}\right)=\vec{0}$ وهذا غير ممكن إذا كان $\alpha\neq 0$ و $A\neq B$ والنقطة G غير موجودة.

مثلا إذا كان $\alpha=1$ و $\beta=-1$ وإذا كان $A\neq B$ الجملة $\{(A;1);(B;-1)\}$ ليس لها مرجح.

نتيجة

إذا كان $\alpha=\beta$ نحصل $\overrightarrow{GA}=-\overrightarrow{GB}$ والنقطة G منتصف القطعة $[AB]$ تسمى عندئذ G مركز المسافتين المتساويتين للنقطتين A و B . وفي هذه الحالة نأخذ $\alpha=\beta=1$.

مـبرهـنة 01

✍ إذا كانت النقطة G مرجح النقطتين A و B المرفقتين بالمعاملين α و β على الترتيب فإنّ النقطة G وحيدة.

برهان.

$\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{0}$ معناه $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{0}$ (علاقة شال) ومنه $(\alpha+\beta)\overrightarrow{GA}=-\beta\overrightarrow{AB}$

بما أنّ $\alpha+\beta\neq 0$ فإنّ $\overrightarrow{AG}=\frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$ ، A و B نقطتان ثابتتان إذا G وحيد.

□

خـواص

1) إذا كانت النقطة G مرجح الجملة المثقلة $\{(A,\alpha);(B,\beta)\}$ فإنّ G مرجح الجملة المثقلة $\{(A,k\alpha);(B,k\beta)\}$ حيث k عدد حقيقي غير معدوم.

2) إذا كانت النقطة G مرجح الجملة المثقلة $\{(A,\alpha);(B,\beta)\}$ فإنّ النقط A، B و G على استقامة واحدة.

برهان.

1. $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{0}$ بضرب الطرفين في العدد الحقيقي غير المعدوم k نحصل على:

$k\alpha\overrightarrow{GA}+k\beta\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{0}$ ونعلم أنّ $\alpha+\beta\neq 0$ وبما أنّ $k\neq 0$ فإنّ $k\alpha+k\beta\neq 0$ وهذا يعني صحة الخاصية الثانية.

2. من المبرهنة 01 السابقة نعلم أنّ $\overrightarrow{GA}=-\frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$ معناه أن النقط A ، B و G على استقامة واحدة.

□

مـبرهـنة 02

✍ إذا كانت النقطة G مرجح النقطتين A و B المرفقتين بالمعاملين α و β على الترتيب فإنّ من أجل كل نقطة M لدينا $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}=(\alpha+\beta)\overrightarrow{MG}$.

برهان.

من أجل كل نقطة M : $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}=\alpha\overrightarrow{MG}+\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{MG}+\beta\overrightarrow{GB}$ (علاقة شال)

وبما أنّ $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{0}$ فإنّ $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}=(\alpha+\beta)\overrightarrow{MG}$.

□

بنـــاء المعـــارف

ملاحظـــــــة :

❖ إذا كان المرجح G منتصف القطعة $[AB]$ فإنّ من أجل كل نقطة M $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MG}$.

إنشاء مرجح نقطتين :

طريقـة

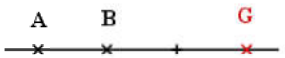
إذا كانت النقطة G مرجح الجملة المثقلة $\{(A,\alpha);(B,\beta)\}$ فإنه لدينا: $\overrightarrow{AG}=\frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$
لإنشاء النقطة G نتبع مايلي:
① نقسم القطعة $[AB]$ إلى $\alpha+\beta$ جزء متقايسة.
② إنطلاقا من A نضع G على بعد $\frac{\beta}{\alpha+\beta}$. (يمكن الإستعانة بمبرهنة طاليس)

تطبـــيق

أنشئ مرجح كل جملة من الجمل التالية:
① G مرجح الجملة المثقلة $\{(A,2);(B,-3)\}$.
② I مرجح الجملة المثقلة $\{(A,3);(B,1)\}$
③ K مرجح الجملة المثقلة $\{(A,2);(B,5)\}$.
④ L مرجح الجملة المثقلة $\{(A,-2);(B,5)\}$.

الحـل :

❶ لدينا النقطة G مرجح النقطتين A و C المرفقتين بالمعاملين 2 و -3 على الترتيب.
إذن (1) ..... $2\overrightarrow{GA}-3\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{0}$
لدينا (1) يكافئ $2\overrightarrow{GA}-3(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{0}$
(1) يكافئ $-\overrightarrow{GA}=3\overrightarrow{AB}$
(1) يكافئ $\overrightarrow{AG}=3\overrightarrow{AB}$



❷ لدينا النقطة I مرجح النقطتين A و C المرفقتين بالمعاملين 3 و 1 على الترتيب.
إذن (2) ..... $3\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\overrightarrow{0}$
لدينا (2) يكافئ $3\overrightarrow{IA}+(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{0}$
(2) يكافئ $4\overrightarrow{IA}=-\overrightarrow{AB}$
(2) يكافئ $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$

ملاحظـــــات مهمة :

- G نقطة وحيدة من المستقيم (AB) فاصلتها $\frac{\beta}{\alpha+\beta}$ في المعلم $(A;B)$.
- إذا كان α و β من نفس الإشارة فإنّ G تكون من القطعة $[AB]$.
- إذا كان α و β مختلفين في الإشارة فإنّ G تكون خارج القطعة $[AB]$.
- تكون G أقرب من النقطة ذات المعامل الأكبر بالقيمة المطلقة مثل الميزان.

عمـــل منـــزلي

تمارين 18 ← 28 الصفحـة 195

ملاحظات حول سير الحصة :

.....

.....

.....

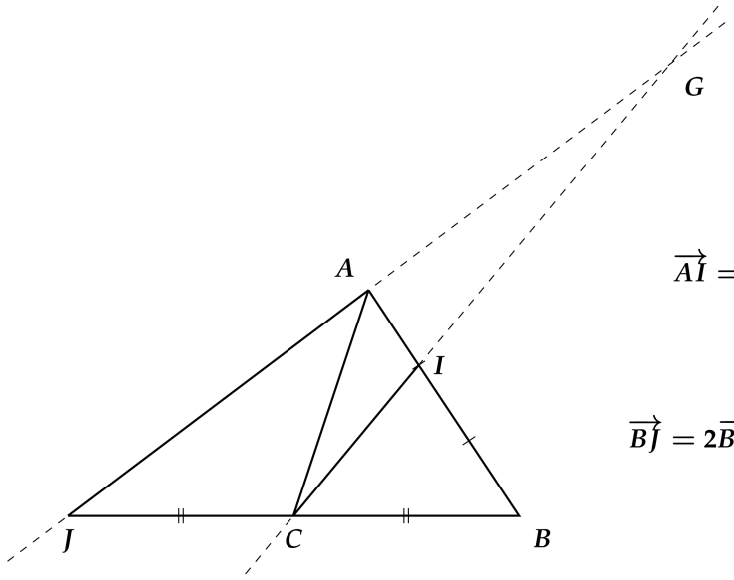
الأستاذ:
فَرَاحْتِيَة
الْمَحْفُوظ

مـــذكـــرة رقـــم 27

ثانوية : حميدي عيسى – أولاد دراج –
السنة الدراسية : 2022 – 2023
يـــوم :
المدة : ســاعة.

المستوى : السنة الثانية علوم تجريبية.
ميدان التعلم : الهنـدسـة .
المحور : المرجـع في المسـتـوي.
الموضوع : مرجح ثلاث نقـاط.

المكتسبات القبلية: الأشعة وخواصها ،الإستقامية والتوازي، مرجح نقطتين.
الكفاءات المستهدفة: انشاء مرجح ثلاث نقاط.
الأدوات المستعملة: المنهاج، الكتاب المدرسي، مراجع، الأنترنت.

المراحل	عناصـر الـدرس	المدة
مرحلة الإنطلاق		
التشخيص والاكتشاف	**مناقشة نشـاط 02 صفحـة 179 :** 1. الإنشـاء • إنشاء النقطة I: لدينا $2\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\overrightarrow{0}$ ومنه $3\overrightarrow{IA}=\overrightarrow{BA}$ إذن $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ • إنشاء النقطة J: لدينا $\overrightarrow{JB}-2\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}$ ومنه $\overrightarrow{BJ}=2\overrightarrow{BC}$ إذن $\overrightarrow{BJ}=\frac{2}{1-2}\overrightarrow{BC}$  2. إثبات أن $3\overrightarrow{GI}=2\overrightarrow{GC}$: لدينا: $2\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}-2\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}$ يكافئ $2\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}=2\overrightarrow{GC}$ يكافئ $2(\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{IA})+(\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{IB})=2\overrightarrow{GC}$ (حسب علاقة شال) يكافئ $3\overrightarrow{GI}+2\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=2\overrightarrow{GC}$ (لأن $2\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\overrightarrow{0}$) يكافئ $3\overrightarrow{GI}=2\overrightarrow{GC}$ ومنه النقط I ، C و G على إستقامية. 3. من العلاقة $2\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}-2\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}$ وتوضيف علاقة شال نجد $-\overrightarrow{GJ}+\overrightarrow{GA}=\overrightarrow{0}$ ومنه النقط J ، A و G على إستقامية. 4. G نقطة تقاطع المستقيمين (AJ) و (CI) . 6. استعمال علاقة شال في العلاقة $2\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}-2\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}$ نجد $\overrightarrow{BG}=2\overrightarrow{CA}$ 7. لدينا سابقا $\frac{CA}{BG}=\frac{1}{2}$ وحسب مبرهنة مستقيم المنتصفين في المثلث BGJ فإن (BG) و (AC) متوازيان.	
بناء معارف	**مرجح ثلاث نقاط :** **تعريف** A ، B و C ثلاث نقط ؛ α ، β و γ ثلاث أعداد حقيقية حيث $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$. نسمي مرجح النقط A ، B و C المرفقة بالمعاملات α ، β و γ على الترتيب النقطة G حيث: $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}$. و نسمي الجملة $\{(A,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma)\}$ جملة مثقلة.	

ملاحظـــــات :

❖ في حالة $\alpha+\beta+\gamma=0$ لايوجد مرجح للنقط A ، B و C

❖ إذا كان $\alpha=\beta=\gamma\neq 0$ فإنّ G تسمى مركز المسافات المتساوية للنقط A ، B و C . ونأخذ في هذه الحالة: $\alpha=\beta=\gamma=1$ ، عندئذ. وإذا كانت النقط A ، B و C ليست في استقامية فإنّ G مركز ثقل المثلث ABC.
(G هي نقطة تلاقي متوسطات المثلث ABC) ، ونكتب $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}$.

❖ يمكن تعميم الملاحظة السابقة بالنسبة لرباعي وخماسي و.....

خاصية

إذا كانت النقطة G مرجح الجملة المثقلة $\{(A,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma)\}$ فإنّ G مرجح الجملة المثقلة $\{(A,k\alpha);(kB,\beta);(C,k\gamma)\}$ حيث k عدد حقيقي غير معدوم.

مبرهنة 01

✍ إذا كانت النقطة G مرجح الجملة المثقلة $\{(A,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma)\}$ فإنّ النقطة G وحيدة.

برهان.

- لتكن النقطة G مرجح الجملة المثقلة $\{(A,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma)\}$

يكافئ $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}$

يكافئ $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{AB}+\gamma\overrightarrow{GA}+\gamma\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{0}$ (علاقة شال)

يكافئ $\overrightarrow{AG}=\dfrac{1}{\alpha+\beta+\gamma}(\beta\overrightarrow{AB}+\gamma\overrightarrow{AC})$

- بوضع $\lambda=\dfrac{1}{\alpha+\beta+\gamma}$ و $\overrightarrow{u}=\beta\overrightarrow{AB}+\gamma\overrightarrow{AC}$ نحصل على $\overrightarrow{AG}=\lambda\overrightarrow{u}$ إذا G وحيدة.

□

مبرهنة 02

✍ إذا كانت النقطة G مرجح النقط A ، B و C المرفقة بالمعاملات α ، β و γ على الترتيب فإنّ من أجل كل نقطة M ، $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}=(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MG}$.

برهان.

- من أجل كل نقطة M لدينا:

$\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}=\alpha\overrightarrow{MG}+\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{MG}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{MG}+\gamma\overrightarrow{GC}$ (علاقة شال)

- وبما أنّ $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}$ فإنّ $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}=(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MG}$

□

خـاصية التجميـع :

مبرهنة 03

✍ G مرجح النقط A ، B و C المرفقة بالمعاملات α ، β و γ على الترتيب.
إذا كان $\alpha+\beta\neq 0$ وكانت النقطة I مرجح النقطتين A و B المرفقتين بالمعاملين α و β على الترتيب.
فإن النقطة G مرجح النقطتين I و C المرفقتين بالمعاملين $\alpha+\beta$ و γ على الترتيب.

برهان.

- لدينا من الفرض $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}\ \cdots\cdots\cdots(I)$
- ولدينا أيضا النقطة I مرجح النقطتين A و B المرفقتين بالمعاملين α و β على الترتيب فإنه من أجل كل نقطة M لدينا: $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}=(\alpha+\beta)\overrightarrow{MG}$
- إذن كانت M منطبقة على G نجد $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=(\alpha+\beta)\overrightarrow{GI}\ \cdots\cdots\cdots(II)$

◁ بتعويض (I) في (II) نجد $(\alpha+\beta)\overrightarrow{GI}+\gamma\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}$

□

إنشاء مرجح ثلاث نقاط :

طريقـة

لإنشاء مرجح ثلاث نقط يمكن تعويض نقطتين من هذه النقط بمرجحهما بشرط أن نرفقه بمجموع معامليهما وبالتالي إنشاء مرجح ثلاث نقط يؤول إلى إنشاء مرجح نقطتين.

التقويم

تطبـــيق

أنشئ النقطة G مرجح النقط A ، B و C المرفقة بالمعاملات 1 ، -1 و 2 على الترتيب حيث A ، B و C ليست في إستقامية.

الحل :

❖ لتكن النقطة I مرجح النقطتين A و C المرفقتين بالمعاملين 1 و 2 على الترتيب.

إذن $\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{0}$ ..... (1) و $\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{GI}$ ..... (2)

✔ إنشاء I مرجح النقطتين A و C:

لدينا (1) يكافئ $\overrightarrow{IA}+2(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AC})=\overrightarrow{0}$

(1) يكافئ $3\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{0}$

(1) يكافئ $\overrightarrow{IA}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CA}$

✔ إنشاء النقطة G بحيث: $\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GB}+2\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}$ ..... (3)

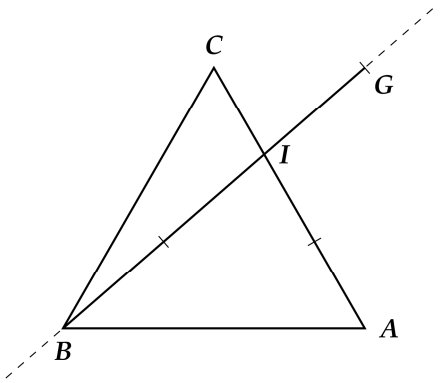
بتعويض (2) في (3) نجد $3\overrightarrow{GI}-\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{0}$ ..... (4)

العبارة (4) تدل علة أن G هي مرجح النقطتين I و B المرفقتين بالمعاملين 3 و -1 على الترتيب.

ومنه (4) يكافئ $3\overrightarrow{GI}-2(\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{GB})=\overrightarrow{0}$

(4) يكافئ $2\overrightarrow{GI}=\overrightarrow{IB}$

(4) يكافئ $\overrightarrow{GI}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{BI}$



عمـــل منـــزلي

تمارين 38 ← 44 الصفحة 196

ملاحظات حول سير الحصة :

.....

.....

.....

الأستاذ:
فَرَاحْتِيَة
المَحْفُوظ

مـذكـرة رقـم 28

ثانوية : حميدي عيسى – أولاد دراج –
السنة الدراسية : 2022 – 2023
يـوم :
المدة : سـاعة.

المستوى : السنة الثانية علوم تجريبية.
ميدان التعلم : الهنـدسـة .
المحور : المرجـع في المسـتـوي.
الموضوع : حساب إحداثي المرجح.

✍ **المكتسبات القبلية:** الأشعة وخواصها ،الإستقامية والتوازي، مرجح نقطتين وثلاث نقاط.
✍ **الكفاءات المستهدفة:** تعيين إحداثيات المرجح.
✍ **الأدوات المستعملة:** المنهاج، الكتاب المدرسي، مراجع، الأنترنت.

المراحل	عناصـر الـدرس	المدة

مرحلة الإنطلاق

التشخيص والاكتشاف

نشـاط مفتوح :

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(o, \vec{i}, \vec{j}\right)$.
النقط A، B و C. إحداثياتها على الترتيب $(x_A; y_A)$ ، $(x_B; y_B)$ ، $(x_C; y_C)$. ولتكن G مرجح الجملة $\{(A,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma)\}$ حيث α ، β و γ ثلاث أعداد حقيقية معلومة تحقق $\alpha+\beta+\gamma \neq 0$

1. أثبت أن $\overrightarrow{OG} = \dfrac{\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}+\gamma\overrightarrow{OC}}{\alpha+\beta+\gamma}$
2. إستنتج إحداثيات النقطة G.

مناقشة النشـاط :

1. G مرجح الجملة $\{(A,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma)\}$ معناه $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ ..... (I)

(I) يكافئ $\alpha(\overrightarrow{GO}+\overrightarrow{OA})+\beta(\overrightarrow{GO}+\overrightarrow{OB})+\gamma(\overrightarrow{GO}+\overrightarrow{OC})=\vec{0}$

(I) يكافئ $(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{GO}=-(\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}+\gamma\overrightarrow{OC})$

(I) يكافئ $\overrightarrow{OG}=\dfrac{\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}+\gamma\overrightarrow{OC}}{\alpha+\beta+\gamma}$. وهو الطلوب.

2. يتساوى شعاعان إذا وفقط إذا كانت إحداثياهما متساويتان.

ولدينا (I) يكافئ $\overrightarrow{OG}=\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{OA}+\dfrac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{OB}+\dfrac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{OC}$

ومنه نستنتج أن $x_G=\dfrac{\alpha x_A+\beta x_B+\gamma x_C}{\alpha+\beta+\gamma}$ و $y_G=\dfrac{\alpha y_A+\beta y_B+\gamma y_C}{\alpha+\beta+\gamma}$

بنـــاء معـــــارف

إحداثيات مرجح ثلاث نقاط :

مـبرهـنة 01

✍ المستوي منسوب إلى معلم $\left(o, \vec{i}, \vec{j}\right)$.
لتكن النقطة G مرجح النقط A ، B و C المرفقة بالمعاملات α ، β و γ على الترتيب. نضع $A(x_A; y_A)$ ، $B(x_B; y_B)$ و $C(x_C; y_C)$. إحداثيا النقطة G هي $(x_G; y_G)$ حيث:

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{\alpha x_A+\beta x_B+\gamma x_C}{\alpha+\beta+\gamma} \\ y_G = \dfrac{\alpha y_A+\beta y_B+\gamma y_C}{\alpha+\beta+\gamma} \end{cases}$$

مـــثـــال - 1 -

إحداثيات G مرجح الجملة $\{(A,2);(B,3);(C,-1)\}$ حيث $A(1;2)$ ، $B(-1;3)$ و $C(1;4)$ هي:

$$\begin{cases} x_G &= \dfrac{2\times 1+3\times(-1)-1\times 1}{2+3-1}=-\dfrac{1}{2} \\ y_G &= \dfrac{2\times 2+3\times 3-1\times 4}{2+3-1}=\dfrac{9}{4} \end{cases}$$

ملاحظـــــة :

❖إذا كانت النقطة G مرجح النقط A و B المرفقتين بالمعاملين α و β على الترتيب.
وكان $A(x_A;y_A)$ ، $B(x_B;y_B)$ و $G(x_G;y_G)$ فإنّ:

$$\begin{cases} x_G &= \dfrac{\alpha x_A+\beta x_B}{\alpha+\beta} \\ y_G &= \dfrac{\alpha y_A+\beta y_B}{\alpha+\beta} \end{cases}$$

حـالات خـاصة :

1) إذا كانت النقطة G منتصف القطعة $[AB]$ فإنّ:

$$\begin{cases} x_G &= \dfrac{x_A+x_B}{2} \\ y_G &= \dfrac{y_A+y_B}{2} \end{cases}$$

2) إذا كانت النقطة G مركز ثقل المثلث ABC فإنّ :

$$\begin{cases} x_G &= \dfrac{x_A+x_B+x_C}{3} \\ y_G &= \dfrac{y_A+y_B+y_C}{3} \end{cases}$$

تطبـــيق

في المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(o,\vec{i},\vec{j}\right)$. نعتبر النقطتين $A(5;-1)$ و $B(2;3)$ والنقطة I منتصف القطعة $[AB]$.
① بين أن I مرجح النقطتين A و B المرفقتين بالمعاملين α و β على الترتيب يطلب تعيينهما.
② عين إحداثيات النقطة I ثم أنشئها.

الحل :

❶ النقطة I مرجح النقطتين A و B المرفقتين بالمعاملين α و β على الترتيب يعني $\alpha\overrightarrow{IA}+\beta\overrightarrow{IB}=\overrightarrow{0}\cdots(1)$
ولدينا النقطة I منتصف القطعة $[AB]$ معناه $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\overrightarrow{0}\cdots(2)$
✔ بمقارنة (1) و (2) نجد $\alpha=1$ و $\beta=1$.
❷ تعين إحداثيات النقطة I

$$\begin{cases} x_I &= \dfrac{x_A+x_B}{2}=\dfrac{5+2}{2}=\dfrac{7}{2} \\ y_I &= \dfrac{y_A+y_B}{2}=\dfrac{-1+3}{2}=1 \end{cases}$$

مرجح عدة نقط (مرجح n نقطة حيث $n>3$) :

تعريف

✍ لتكن $A_1, A_2, \ldots, A_n$ n نقطة ($n>3$) مرفقة بالمعاملات $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ على الترتيب
حيث $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n\neq 0$
نسمي مرجح النقط A_1 ، A_2 ، ... ، A_n المرفقة بالمعاملات $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ النقطة G حيث

$$\alpha_1\overrightarrow{GA_1}+\alpha_2\overrightarrow{GA_2}+\cdots+\alpha_n\overrightarrow{GA_n}=\overrightarrow{0}$$

ملاحظـــــة :

❖ الخواص المعروفة في مرجح ثلاث نقط تبقى صحيحة في مرجح n نقطة حيث $n>3$.

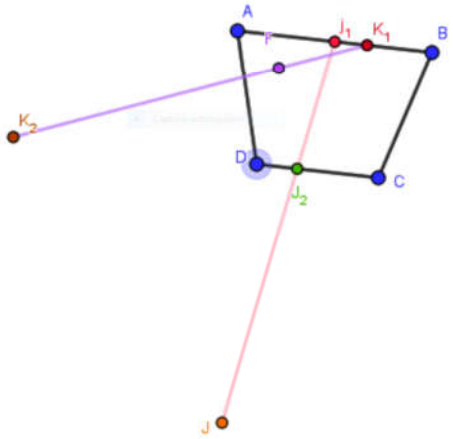
التقويم

تطبيق

$ABCD$ رباعي كيفي.
① أنشئ النقطة J مرجح الجملة المثقلة $\{(A,1);(B,1);(C,-1);(D,-2)\}$
② أنشئ النقطة K مرجح الجملة المثقلة $\{(A,1);(B,2);(C,-2);(D,3)\}$

الحل :

❶ لإنشاء النقطة J مرجح الجملة المثقلة $\{(A,1);(B,1);(C,-1);(D,-2)\}$ نتبع مايلي:
✔ ننشئ J_1 مرجح الجملة $\{(A,1);(B,1)\}$ أي $\overrightarrow{J_1A}+\overrightarrow{J_1B}=\overrightarrow{0}$.
✔ ننشئ J_2 مرجح الجملة $\{(C,-1);(D,-2)\}$ أي $-\overrightarrow{J_2C}-2\overrightarrow{J_2D}=\overrightarrow{0}$ ومنه $\overrightarrow{CJ_2}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CD}$.
✔ بإستعمال حاصية التجميع فإن J هي مرجح الجملة $\{(J_1,2);(J_2,-3)\}$
لدينا $2\overrightarrow{JJ_1}-3\overrightarrow{JJ_2}=\overrightarrow{0}$ ومنه $2\overrightarrow{JJ_1}-3\overrightarrow{JJ_1}-3\overrightarrow{J_1J_2}=\overrightarrow{0}$
بالتبسيط نجد $-\overrightarrow{JJ_1}=3\overrightarrow{J_1J_2}$ ومنه $\overrightarrow{J_1J}=3\overrightarrow{J_1J_2}$.



تطبيق

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$. لتكن النقط $A(3;2)$ ، $B(0;1)$ و $C(-1;0)$
ولتكن G_α مرجح الجملة $\{(A,\alpha);(B,-\alpha);(C,2)\}$ حيث α عدد حقيقي غير معدوم.
❖ عين إحداثيات G_α بدلالة α ثم بين أن النقطة G_α تنتمي إلى المستقيم (D) يطلب تعيين معادلته.

الحل :

❖ تعين إحداثيات G_α بدلالة α:

$$\begin{cases} x_{G_\alpha} = \dfrac{\alpha x_A-\alpha x_B+2x_C}{2}=\dfrac{3\alpha-0-2}{2}=\dfrac{3\alpha-2}{2} \\ y_{G_\alpha} = \dfrac{\alpha y_A-\alpha y_B+2y_C}{2}=\dfrac{2\alpha-\alpha+0}{2}=\dfrac{\alpha}{2} \end{cases}$$

❖ تعيين معادلة المستقيم (D)
لدينا $x_{G_\alpha}=\dfrac{3\alpha-2}{2}$ ومنه $2x_{G_\alpha}=3\alpha-2$ إذن $\alpha=\dfrac{2x_{G_\alpha}+2}{3}$
نعوض قيمة α في عبارة y_{G_α} نجد $y_{G_\alpha}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2x_{G_\alpha}+2}{3}\right)=\dfrac{1}{6}(2x_{G_\alpha}+2)=\dfrac{1}{3}X_{G_\alpha}+\dfrac{1}{3}$
إذن النقطة G_α تنتمي إلى المستقيم $(D):y=\dfrac{1}{3}x+\dfrac{1}{3}$.

عمـــل منـــزلي
تمارين 89 ← 96 الصفحة 203

ملاحظات حول سير الحصة :

الأستاذ:
فَرَاحْتِيَة
المَحْفُوظ

مـــذكـــرة رقـــم 29

ثانوية : حميدي عيسى – أولاد دراج –
السنة الدراسية : 2022 – 2023
يـــوم :
المدة : 2 ساعة.

المستوى : السنة الثانية علوم تجريبية.
ميدان التعلم : الهنـدسـة .
المحور : المرجـع في المسـتـوي.
الموضوع: تعيين مجموعة نقط بتوظيف المرجح.

المكتسبات القبلية: الأشعة وخواصها ،الإستقامية والتوازي، مرجح نقطتين وثلاث نقاط وخواصهما.
الكفاءات المستهدفة: توظيف المرجح في دراسة مجموعات نقطية وتعيينها وإنشائها.
الأدوات المستعملة: المنهاج، الكتاب المدرسي، مراجع، الأنترنت.

المراحل	عناصـر الـدرس	المدة
مرحلة الإنطلاق		
التشخيـص والاكتشـاف		

أعمـال موجهـة صفحـة 188 :

تعيين مجموعة نقط باستعمال المرجح :

ABC مثلث من المستوي. α ، β و γ ثلاثة أعداد حقيقية حيث $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$.
ليكن G مرجح النقط A، B و C المرفقة بالمعاملات α ، β و γ على الترتيب .
الهدف هو تعيين حسب قيم العدد الحقيقي k المجموعة (Γ_k) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق:

$$\|\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}\|=k$$

1. أكتب الشعاع $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}$ بدلالة الشعاع $\overrightarrow{MG}$ ثمّ بيّن أنّ $MG=\dfrac{k}{|\alpha+\beta+\gamma|}$.
2. ناقش تبعا لقيم العدد الحقيقي k طبيعة المجموعة (Γ_k) محددا عناصرها الهندسية.

الحـل :

1 - أ. كتابة الشعاع $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}$ بدلالة الشعاع $\overrightarrow{MG}$:

نستعمل علاقة شال (ندخل النقطة G):

$$\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}=\alpha\overrightarrow{MG}+\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{MG}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{MG}+\gamma\overrightarrow{GC}\cdots\cdots(1)$$

بمأنّ G مرجح الجملة المثقلة $\{(A,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma)\}$ فإن $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}$.

ومنه (1) تصبح : $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}=\alpha\overrightarrow{MG}+\beta\overrightarrow{MG}+\gamma\overrightarrow{MG}=(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MG}$

إذن : $\boxed{\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}=(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MG}}$

1 - ب. تبيين أنّ : $MG=\dfrac{k}{|\alpha+\beta+\gamma|}$

لدينا: $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}=(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MG}$

ومنه : $\left\|\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}\right\|=k$ تكافئ : $\left\|(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MG}\right\|=k$

أي : $|\alpha+\beta+\gamma|\left\|\overrightarrow{MG}\right\|=k$

إذن : $\boxed{MG=\dfrac{k}{|\alpha+\beta+\gamma|}}$ لأن : $(\alpha+\beta+\gamma\neq 0)$.

2 . مناقشة تبعا لقيم العدد الحقيقي k طبيعة المجموعة (Γ_k) محددا عناصرها الهندسية:

الحالة الأولى: :من أجل $k<0$ نجد $(\Gamma_k)=\varnothing$ (لأنّ الموجب لا يساوي السالب).

الحالة الثانية: : من أجل $k=0$ نجد $MG=0$ أي $M=G$ ومنه M تنطبق على G إذن : $(\Gamma_k)=\{G\}$.

الحالة الثالثة : :من أجل $k>0$ نجد : $MG=\dfrac{k}{|\alpha+\beta+\gamma|}>0$

إذن: المجموعة (Γ_k) هي دائرة مركزها G مرجح الجملة المثقلة $\{(A,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma)\}$

ونصف قطرها : $r=\dfrac{k}{|\alpha+\beta+\gamma|}$.

حل تطبيقات صفحة 188

1 . تبيين أن مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق: $\left\|\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}\right\|=6$ دائرة يُطلب تعيين مركزها و نصف قطرها:

لدينا: $\boxed{1-2+3\neq 0}$
لتكن G مرجح الجملة المثقلة $\{(A,1);(B,-2);(C,3)\}$ تكافئ $\left\|(1-2+3)\overrightarrow{MG}\right\|=6$ أي $MG=3$.
إذن مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق: $\left\|\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}\right\|=6$ هي دائرة مركزها G ونصف قطرها $r=3$.

2 .تعيين وانشاء مجموعة النقط M من المستوي حيث : $\left\|-2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}\right\|=\sqrt{5}$

لدينا: $\boxed{-2+1-3\neq 0}$ لتكن I مرجح الجملة المثقلة $\{(A,-2);(B,1);(C,-3)\}$
تكافئ $\left\|(-2+1-3)\overrightarrow{MI}\right\|=\sqrt{5}$ أي $MI=\frac{\sqrt{5}}{4}$.
إذن مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق: $\left\|-2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}\right\|=\sqrt{5}$ هي دائرة مركزها I ونصف قطرها $r=\frac{\sqrt{5}}{4}$

3 . تعيين وانشاء مجموعة النقط M من المستوي حيث: $\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right\|=\sqrt{3}$

لدينا: $\boxed{1-1+2\neq 0}$ لتكن J مرجح الجملة المثقلة $\{(A,1);(B,-1);(C,2)\}$
تكافئ $\left\|2\overrightarrow{MJ}\right\|=\sqrt{3}$ أي $MJ=\frac{\sqrt{3}}{2}$.
إذن مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق: $\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right\|=\sqrt{3}$ هي دائرة مركزها J ونصف قطرها $r=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

4 . تعيين مجموعة M النقط من المستوي حيث: $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right\|=2\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right\|$

لدينا: $\boxed{1+1+2\neq 0}$ لتكن P مرجح الجملة المثقلة $\{(A,1);(B,1);(C,2)\}$
ولدينا $\boxed{1+1\neq 0}$ لتكن Q مرجح الجملة المثقلة $\{(A,1);(B,1)\}$
$\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right\|=2\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right\|$ تكافئ $\left\|2\overrightarrow{MQ}\right\|=2\left\|4\overrightarrow{MP}\right\|$ أي $MP=MQ$
إذن مجموعة النقط M من المستوي حيث: $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right\|=2\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right\|$
هي محور القطعة المستقيمة $[PQ]$.

5 - أ . التحقق أن النقطة B تنتمي إلى المجموعة (Γ) :

نضع $M=B$ نجد $\left\|\overrightarrow{BA}-4\overrightarrow{BB}+\overrightarrow{BC}\right\|=\left\|\overrightarrow{BA}-2\overrightarrow{BB}+\overrightarrow{BC}\right\|$
ومنه $\left\|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right\|=\left\|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right\|$ إذن $B\in(\Gamma)$.

5 - ب. تبيين أن الشعاع $\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$ مستقل عن النقطة M : (مجموع المعاملات يساوي 0)

باستعمال علاقة شال ندخل A
نجد $\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}=-2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$
إذن $\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=-2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$
وبالتالي الشعاع $\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$ مستقل عن النقطة M.

5 - جـ. تبيين أن $GM=\alpha\frac{\sqrt{3}}{2}$:

لدينا $\left\|\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|\overrightarrow{MA}-4\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|$ تكافئ $\left\|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right\|=\left\|-2\overrightarrow{MG}\right\|$
ومنه $\left\|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right\|=2GM$ وباستعمال نظرية فيتاغورث نجد $\left\|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right\|=\alpha\sqrt{3}$ إذن $GM=\alpha\frac{\sqrt{3}}{2}$.

بناء المعارف

التقويم

5 - د . استنتاج طبيعة المجموعة (Γ) محددا عناصرها المميزة :

من المساواة $GM = \alpha\frac{\sqrt{3}}{2}$ نستنتج أنّ المجموعة (Γ) دائرة مركزها G ونصف قطرها $\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

تطبـــيق

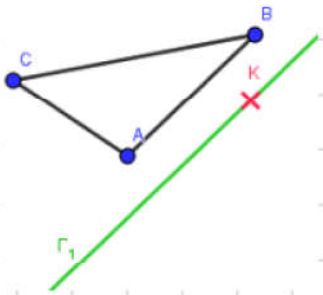
ABC مثلث. K مرجح الجملة $\{(A,2),(B,2),(C,-1)\}$ و G مرجح الجملة $\{(A,1),(B,1),(C,1)\}$.
عين و أنشئ مجموعات النقط M من المستوي المعرفة بـ

1. $(\Gamma_1) = \{M : (2\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}) /\!/ \overrightarrow{AB}\}$
2. $(\Gamma_2) = \{M : \|2\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\| = \|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\|\}$
3. $(\Gamma_3) = \{M : \|2\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\|\}$

الحل :

1. K مرجح الجملة $\{(A,2),(B,2),(C,-1)\}$ إذن $2\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MK}$ و $M \in (\Gamma_1)$ تكافئ $3\overrightarrow{MK} /\!/ \overrightarrow{AB}$ أي أن $\overrightarrow{MK} /\!/ \overrightarrow{AB}$

المجموعة (Γ_1) هي المستقيم الذي يمر بالنقطة K و يوازي المستقيم (AB).



2. لدينا $2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ إذن

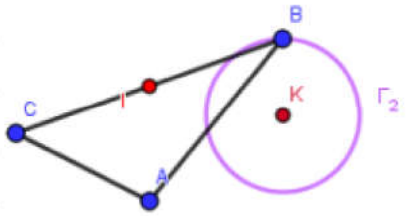
$$\begin{aligned}\|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\| &= \|-\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\| \\ &= \|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\|\end{aligned}$$

ليكن I منتصف $[BC]$ أي أن $\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \overrightarrow{0}$ و منه $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AI}$.
من جهة أخرى لدينا $M \in (\Gamma_2)$ تكافئ

$$\begin{aligned}\|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\| &= \|2\overrightarrow{AI}\| \\ \|3\overrightarrow{MK}\| &= \|2\overrightarrow{AI}\| \\ 3KM &= 2AI \\ KM &= \frac{2}{3}AI\end{aligned}$$

التقويم

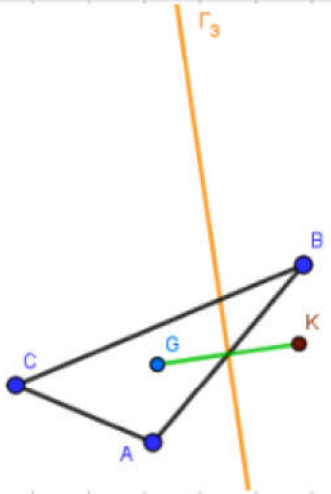
المجموعة (Γ_2) هي الدائرة التي مركزها K و نصف قطرها $\frac{2}{3}AI$ حيث I منتصف $[BC]$.



3. G مركز ثقل المثلث ABC إذن $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$

$M\in(\Gamma_3)$ تكافئ $\|3\overrightarrow{MK}\|=\|3\overrightarrow{MG}\|$ أي $3MK=3MG$ إذن $MK=MG$.

(Γ_3) هي محور القطعة $[KG]$.



جدول يلخص مجموعة النقط باستعمال المرجح :

مجموعة النقط M من المستوي المعرفة بـ	هي
$AM=k$ حيث $k\in\mathbb{R}_+^*$	الدائرة ذات المركز A ونصف قطر k
$MA=MB$	محور القطعة $[AB]$
$\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{BC}$ حيث $k\in\mathbb{R}$	المستقيم الموازي لـ (BC) والمار من النقطة A

عمـــل منـــزلي

تمارين 64 ← 75 الصفحة 199 - 200

تمارين 76 ← 87 الصفحة 201 - 202

ملاحظات حول سير الحصة :

.....

.....

.....

الأستاذ:
فَرَاحْتِيَة
المَحْفُوظ

مـــذكـــرة رقـــم 30

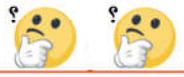
ثانوية : حميدي عيسى – أولاد دراج –
السنة الدراسية : 2022 – 2023
يـــوم :
المدة : 2 ساعة.

المستوى : السنة الثانية علوم تجريبية.
ميدان التعلم : الهنـدسة .
المحور : المرجـع في المستـوي.
الموضوع: استقامية نقط - تلاقي مستقيمات.

المكتسبات القبلية: الأشعة وخواصها ،الإستقامية والتوازي، مرجح نقطتين وثلاث نقاط وخواصهما.
الكفاءات المستهدفة: استعمال المرجح لإثبات استقامية نقط و تلاقي مستقيمات.
الأدوات المستعملة: المنهاج، الكتاب المدرسي، مراجع، الأنترنت.

المراحل	عناصـــر الـــدرس	المدة
مرحلة الإنطلاق		
التشخيـــص والاكتشـــاف		

إستقامية نقط :



تطبـــيق

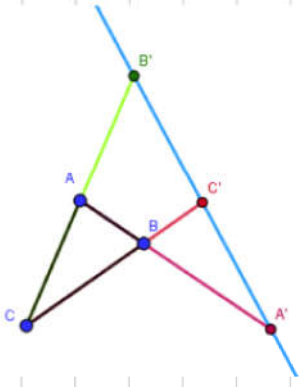
ABC مثلث, B' هي مرجح الجملة $\{(A,-2),(C,1)\}$
A' مرجح الجملة $\{(A,2),(B,-3)\}$
C' مرجح الجملة $\{(C,-1),(B,3)\}$

1. أنشئ الشكل.
2. بين أنه مهما تكن النقطة M من المستوي فإن $-\overrightarrow{MA'}-\overrightarrow{MB'}+2\overrightarrow{MC'}=\vec{0}$
3. استنتج أن النقط A', B', C' على استقامة واحدة .

الحل :

1. إنشاءالشكل:

B' هي مرجح الجملة $\{(A,-2),(C,1)\}$ أي أن: $-2\overrightarrow{B'A}+\overrightarrow{B'C}=\vec{0}$
ومنه $\overrightarrow{B'C}=2\overrightarrow{B'A}$ يمكن إنشاء B'.
A' مرجح الجملة $\{(A,2),(B,-3)\}$ ومنه $2\overrightarrow{A'A}-3\overrightarrow{A'B}=\vec{0}$ و منه $\overrightarrow{A'A}=\frac{3}{2}\overrightarrow{A'B}$ يمكن إنشاء A'.
C' مرجح الجملة $\{(C,-1),(B,3)\}$ ومنه $-\overrightarrow{C'C}+3\overrightarrow{C'B}=\vec{0}$ ومنه $\overrightarrow{C'C}=3\overrightarrow{C'B}$ يمكن إنشاء C'.



2. مهما تكن النقطة M من المستوي فإن :

(ا) $-\overrightarrow{MB'}=-2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}$ لأن B' مرجح الجملة $\{(A,-2),(C,1)\}$

(ب) $-\overrightarrow{MA'}=2\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}$ لأن A' مرجح الجملة $\{(A,2),(B,-3)\}$

(ج) $2\overrightarrow{MC'}=-\overrightarrow{MC}+3\overrightarrow{MB}$ لأن C' مرجح الجملة $\{(C,-1),(B,3)\}$

بجمع (أ)، (ب) و(ج) نجد

$$-\overrightarrow{MB'}-\overrightarrow{MA'}+2\overrightarrow{MC'}=-2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}+2\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}+3\overrightarrow{MB}=\vec{0}$$

و منه $-\overrightarrow{MB'}-\overrightarrow{MA'}+2\overrightarrow{MC'}=\vec{0}$ أي $-\overrightarrow{MA'}-\overrightarrow{MB'}+2\overrightarrow{MC'}=\vec{0}$

3. من العلاقات السابقة : $-\overrightarrow{MA'}-(\overrightarrow{MA'}+\overrightarrow{A'B'})+2(\overrightarrow{MA'}+\overrightarrow{A'C'})=\vec{0}$

$$-\overrightarrow{MA'}-\overrightarrow{MA'}-\overrightarrow{A'B'}+2\overrightarrow{MA'}+2\overrightarrow{A'C'}=\vec{0}\Rightarrow-\overrightarrow{A'B'}+2\overrightarrow{A'C'}=\vec{0}$$

ومنه $\overrightarrow{A'B'}=2\overrightarrow{A'C'}$

ومنه A', B', C' في استقامية.

تلاقي مستقيمات :

تطبيق

ABC مثلث و K منتصف القطعة $[AB]$ ولتكن I و J نقطتان من المستوي بحيث $\overrightarrow{BI}=\frac{1}{5}\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{CJ}=\frac{4}{5}\overrightarrow{CA}$

1. أنشئ النقطة G مرجح الجملة $\{(A,4),(B,4),(C,1)\}$

2. بين أن النقطة I مرجح الجملة $\{(B,4),(C,1)\}$

3. بين أن النقطة J مرجح الجملة $\{(A,4),(C,1)\}$

4. برهن أن المستقيمات (AI) و (BJ) و (CK) تتقاطع في نقطة وحيدة.

الحل :

1. إنشاء النقطة G: $4\overrightarrow{GA}+4\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ يكافئ $4\overrightarrow{GA}+4\overrightarrow{GA}+4\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AC}=\vec{0}$

يكافئ $9\overrightarrow{GA}+4\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\vec{0}$

يكافئ $9\overrightarrow{AG}=4\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$

يكافئ $\overrightarrow{AG}=\frac{4}{9}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{9}\overrightarrow{AC}$

2. إثبات أن النقطة I هي مرجح الجملة $\{(B,4),(C,1)\}$: $\overrightarrow{BI}=\frac{1}{5}\overrightarrow{BC}$ يكافئ $\overrightarrow{BI}=\frac{1}{5}\left(\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{IC}\right)$

يكافئ $5\overrightarrow{BI}=\left(\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{IC}\right)$

يكافئ $4\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=\vec{0}$

ومنه فان I مرجح الجملة $\{(B,4),(C,1)\}$

3. إثبات أن النقطة J مرجح الجملة $\{(A,4),(C,1)\}$:

$5\overrightarrow{CJ}=4\overrightarrow{CJ}+4\overrightarrow{JA}$ يكافئ $\overrightarrow{CJ}-4\overrightarrow{JA}=\vec{0}$

يكافئ $\overrightarrow{JC}+4\overrightarrow{JA}=\vec{0}$

ومنه J مرجح الجملة $\{(A,4),(C,1)\}$

4. بما أن G مرجح الجملة $\{(A,4),(B,4),(C,1)\}$ فانها ايضا مرجح الجملة $\{(J,5),(B,4)\}$ و بالتالي G تنتمي إلى المستقيم (BJ)

بما أن G مرجح الجملة $\{(A,4),(B,4),(C,1)\}$ فإنها أيضا مرجح الجملة $\{(I,5),(A,4)\}$ و بالتالي G تنتمي إلى المستقيم (AI)

إذن G هي نقطة تقاطع (AI) و (BJ)

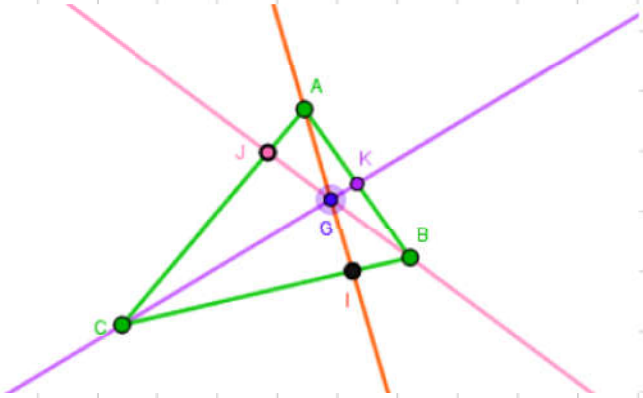
5. من أجل كل نقطة M من المستوي لدينا $4\overrightarrow{MA}+4\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=9\overrightarrow{MG}$

بوضع $K=M$ نجد $4\overrightarrow{KA}+4\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{KC}=9\overrightarrow{KG}$

ومنه ينتج $\overrightarrow{KC}=9\overrightarrow{KG}$

إذن النقطة G تنتمي إلى (KC)

وبالتالي $(KC)\cap(BJ)\cap(AI)=\{G\}$



بناء المعارف

التقويم

مستقيم اولار (Euler) :

أعمال موجهة صفحة 189 :

نتيجة

المستقيم الذي يشمل النقط O ، G و H يسمى مستقيم اولار (Droite d'Euler) للمثلث ABC حيث :

- O مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABC .
- G مركز ثقل المثلث ABC.
- H تقاطع الارتفاعات في المثلث ABC .

حالة خاصة :

إذا كان المثلث ABC متقايس الأضلاع فإن النقط الثلاثة O ، G و H منطبقة على بعضها.

عمل منزلي

- تمارين 30 ← 37 الصفحة 195
- تمارين 45 ← 56 الصفحة 196 - 197
- تمارين 57 ← 63 الصفحة 198 - 199

ملاحظات حول سير الحصة :

.....

.....

.....