الأستاذ :بـخدة أمـين

مـذكـرة رقـم 33

ثانوية ساجي مختار السمار-غليزان

السنة الدراسية : $2018 - 2019$

اليوم :

المدة : 1 ساعة

المستوى : السنة الأولى ج.م.ع و تكنولوجيا

ميدان التعلم : النهايات.

موضوع الحصة : نهاية غير منتهية عند عدد حقيقي .

المكتسبات القبليـة : دراسة الدوال العددية.

الكفاءات المستهدفة : حساب نهاية دالة عندما يؤول x إلى x_0 أو إلى $+\infty$ أو $-\infty$.

المراجع : الكتاب المدرسي ، مراجع، الأنترنت

<table>
<tr><th>المراحل</th><th>عناصر الدرس</th><th>المدة</th></tr>
<tr><td>مرحلة الإنطلاق

بناء معـــارف

التقويم</td><td>

نشاط رقم 1 صفحة 110

نهاية غير منتهية عند عدد حقيقي

تعريف

القول أن نهاية دالة f عند عدد حقيقي x_0 هي $+\infty$ يعني انه جعل قيم $f(x)$ كبيرة جدا بالقدر الكافي الذي نريد شريطة أن ياخذ x قيما قريبة من x_0 بالقدر الكافي ونكتب $\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty}$.

مـــثال (1)

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{3\}$ كما يلي : $f(x) = \frac{1}{(x-3)^2}$

نلاحظ انه كلما اقترب x من 3 بالقدر الكافي إلا و أخذ $f(x)$ قيم كبيرة جدا، نقول في هذه الحالة أن نهاية الدالة f هي $+\infty$ عند 3 (او لما يؤول x إلى 3) ونكتب: $\boxed{\lim_{x \to 3} f(x) = \lim_{x \to 3} \frac{1}{(x-3)^2} = +\infty}$

مـبرهنة

نقبل دون برهان النتيجة التالية $\boxed{\lim_{x \to a} \frac{1}{(x-a)^2} = +\infty}$

مـــثال (2)

$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ و $\lim_{x \to 5} \frac{1}{(x-5)^2} = +\infty$

تطبيق (1)

تمرين رقم 16 صفحة 132

مـلاحظات حول سير الدرس

....

....

</td><td></td></tr>
</table>

ثانوية ساجي مختار السمار-غليزان

السنة الدراسية : 2018 − 2019
المستوى : السنة 02 رياضيات
اليوم :
ميدان التعلم : النهايات.
المدة : 2 ساعة
موضوع الحصة : النهاية من اليمين والنهاية من اليسار.

المكتسبات القبلية : دراسة الدوال العددية.
الكفاءات المستهدفة : حساب نهاية دالة عندما يؤول x إلى x_0 أو إلى $+\infty$ أو $-\infty$.
المراجع : الكتاب المدرسي ، مراجع، الأنترنت

المراحل	عناصر الدرس	المدة
مرحلة الإنطلاق بناء معـــارف	**نشاط رقم1صفحة110** ## النهاية من اليمين والنهاية من اليسار **تعريف ①** القول أن نهاية دالة f عند عدد حقيقي x_0 بقيم صغرى (النهاية من اليسار) هي $-\infty$ يعني انه جعل قيم $f(x)$ صغيرة جدا بالقدر الكافي الذي نريد شريطة أن ياخذ x قيما قريبة من x_0 بالقدر الكافي ونكتب $\boxed{\lim\limits_{x \overset{<}{\longrightarrow} x_0} f(x) = -\infty}$. **تعريف ②** القول أن نهاية دالة f عند عدد حقيقي x_0 بقيم كبرى (النهاية من اليمين) هي $+\infty$ يعني انه جعل قيم $f(x)$ كبيرة جدا بالقدر الكافي الذي نريد شريطة أن ياخذ x قيما قريبة من x_0 بالقدر الكافي ونكتب $\boxed{\lim\limits_{x \overset{>}{\longrightarrow} x_0} f(x) = +\infty}$. **مـــثال (1)** لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ كما يلي : $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ لتكن g_1 و g_2 الدالتان المعرفتان على $]1, +\infty[$ و $]-\infty, 1[$ على الترتيب. حيث $f(x) = g_1(x) = g_2(x)$ نلاحظ أن $g_1(x)$ تأخذ قيما كبيرة بالقدر الكافي الذي نريد شريطة أن يأخذ x قيما قريبة من العدد 1 من جهة اليمين بالقدر الكافي ونكتب $\lim\limits_{x \to 1} g_1(x) = +\infty$ ونلاحظ أن $g_2(x)$ تأخذ قيما صغيرة بالقدر الكافي الذي نريد شريطة أن يأخذ x قيما قريبة من العدد 1 من جهة اليسار بالقدر الكافي ونكتب $\lim\limits_{x \to 1} g_2(x) = -\infty$ نقول عندئذ أن نهاية f هي $+\infty$ عند 1 من اليمين ونكتب : $\lim\limits_{x \overset{>}{\longrightarrow} 1} f(x) = +\infty$ و نهاية f هي $-\infty$ عند 1 من اليسار ونكتب : $\lim\limits_{x \overset{<}{\longrightarrow} 1} f(x) = -\infty$ **مــبرهنة** نقبل دون برهان النتيجة التالية $\boxed{\lim\limits_{x \overset{<}{\longrightarrow} 1} \dfrac{1}{(x-a)} = -\infty}$ و $\boxed{\lim\limits_{x \overset{>}{\longrightarrow} 1} \dfrac{1}{(x-a)} = +\infty}$.	

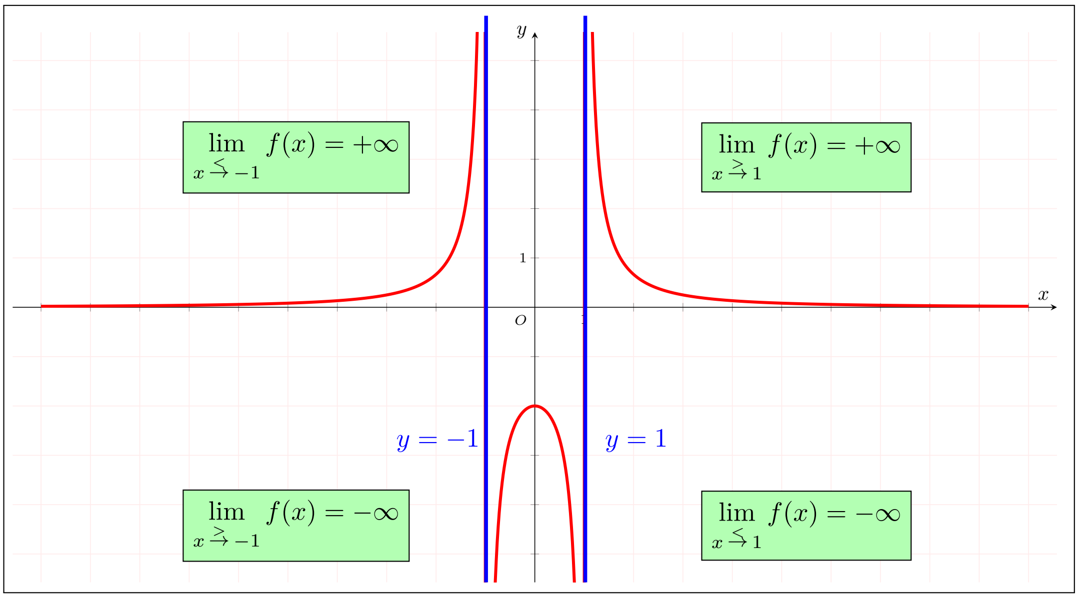
المستقيم المقارب الموازي لمحور التراتيب

تعريف ③

(C_f) هو التمثيل البياني لدالة f في معلم ، و a عدد حقيقي، إذا كانت النهاية (أو النهاية من اليمين أو من اليسار) للدالة f عند العدد a هي $(+\infty)$ أو $(-\infty)$ نقول أن المستقيم الموازي لمحور التراتيب ذو المعادلة $x = a$ هو مستقيم مقارب للمنحنى (C_f).

مثال (2)

الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1;1\}$ كمايلي : $f(x) = \dfrac{2}{x^2 - 1}$



التقويم

تطبيق (1)

تمرين رقم 1 -2 صفحة 113

ملا حظات حول سير الحصة

....

....

....

ثانوية ساجي مختار السمار-غليزان

السنة الدراسية : 2018 – 2019
المستوى : السنة 02 رياضيات
اليوم :
ميدان التعلم : النهايات.
المدة : 2 ساعة
موضوع الحصة : نهاية منتهية عند مالانهاية.

المكتسبات القبلية : دراسة الدوال العددية.
الكفاءات المستهدفة : حساب نهادية دالة عندما يؤول x إلى x_0 أو إلى $+\infty$ أو $-\infty$.
المراجع : الكتاب المدرسي ، مراجع، الأنترنت

المراحل	عناصر الدرس	المدة

مرحلة الإنطلاق

نشاط رقم3صفحة110

نهاية منتهية عند مالانهاية

تعريف ①

القول أن نهاية دالة f عند $-\infty$ هي b يعني انه جعل قيم $f(x)$قريبة جدا من b بالقدر الكافي الذي نريد شريطة أن ياخذ x قيما قريبة كبيرة بالقدر الكافي ونكتب $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = b}$.

بناء معارف

مــثال (1)

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{0\}$ كما يلي : $f(x) = 2 + \dfrac{1}{x}$
$f(x)$ تأخذ قيما قريبة من العدد 2 بالقدر الذي نريد شريطة ان يأخذ x قيما موجبة جد كبيرة، نقول في هذه الحالة ان نهاية f هي 2 عند $+\infty$ ونكتب $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$
$f(x)$ تاخذ قيما قريبة من العدد 2 بالقدر الذي نريد شريطة ان يكون x سالبا ويأخذ $|x|$ قيما كبيرة جدا ، نقول في هذه الحالة أن نهاية f هي 2 عند $+\infty$ ونكتب $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 2$

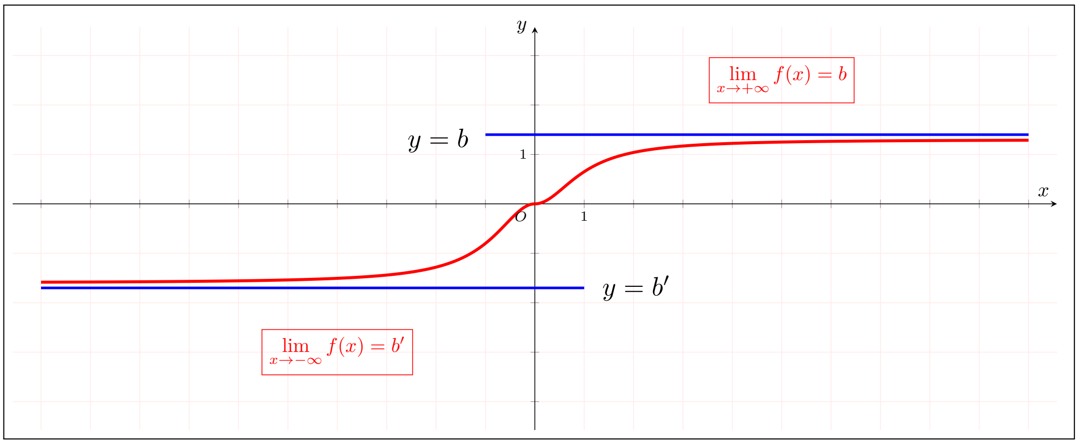
مــبرهنة

a عدد حقيقي. نقبل النتائج التالية :
$\boxed{\lim_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x+a} = 0}$ و $\boxed{\lim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x+a} = 0}$

المستقيم المقارب الموازي لمحور الفواصل

تعريف ②

(C_f) هو التمثيل البياني لدالة f في مستوي منسوب إلى معلم ، و b عدد حقيقي، القول أن المستقيم الموازي حامل لمحور الفواصل ذو المعادلة $y = b$ هو مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) عند $(+\infty)$ أو $(-\infty)$ يعني أن : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = b$ أو $\lim_{x\to-\infty} f(x) = b$ على الترتيب.



نهاية غيرمنتهية عند مالانهاية

تعريف ③

القول أن نهاية دالة f عند $+\infty$ $(-\infty)$ هي $+\infty$ يعني انه من اجل كل عدد حقيقي موجب تماما A يوجد عدد حقيقي موجب تماما B بحيث : إذا كان $x \succ B$ $(x \prec -B)$ يكون $f(x) \succ A$ ونكتب $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty (\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty)}$.

تعريف ④

القول أن نهاية دالة f عند $+\infty$ $(-\infty)$ هي $-\infty$ يعني انه من اجل كل عدد حقيقي موجب تماما A يوجد عدد حقيقي موجب تماما B بحيث : إذا كان $x \succ B$ $(x \prec -B)$ يكون $f(x) < -A$ ونكتب $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty (\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty)}$.

خواص

✘ النهاية عند $+\infty$ و $-\infty$ لدالة كثير حدود هي نهاية حدها الاعلى درجة عند$+\infty$ $(-\infty)$

✘ النهاية عند $+\infty$ و $-\infty$ لدالة ناطقة هي نهاية حاصل قسمة الحدين الأعلى درجة.

تطبيق (1)

التقويم

نعتبر الدالة h المعرفة على على $\mathbb{R}-\{1\}$ كما يلي : $f(x)=-3+\dfrac{4x-1}{2x+2}$، وليكن (C_g) المنحنى الممثل لها في مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس.

✍ بين أن المستقيم ذو المعادلة $y=-1$ هو مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) عند $+\infty$ وعند $-\infty$

مــــلا حظات حول سير الحصة

....

....

....

ثانوية ساجي مختار السمار-غليزان

السنة الدراسية : 2018 – 2019
اليوم :
المدة : 2 ساعة

المستوى : السنة 02 رياضيات
ميدان التعلم : النهايات.
موضوع الحصة : العمليات على النهايات.

المكتسبات القبلية : دراسة الدوال العددية.
الكفاءات المستهدفة : حساب نهاية دالة عند x_0 أو $+\infty$ أو $-\infty$ باستعمال المبرهنات الأولية للنهايات .
المراجع : الكتاب المدرسي ، مراجع، الأنترنت

المراحل	عناصر الدرس	المدة
مرحلة الإنطلاق		

ملاحظات

- يتم حساب نهاية دالة عند الحدود المفتوحة لمجموعة التعريف.
- إذا كانت دالة قابلة للإشتقاق عند عدد حقيقي a من مجموعة تعريفها فإن $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$
- إذا قبلت دالة f عند عدد حقيقي a فإن هذه النهاية وحيدة.
- يمكن لدالة لا تقبل نهاية عند حد من حدود من مجموعة تعريفها، فمثلا الدالة $x \mapsto sinx$ لا تقبل نهاية عند $+\infty$

بناء معارف

مبرهنات أولية على النهايات

f و g دالتان و α يمثل إما عدد حقيقي أو $+\infty$ أو $-\infty$ و L ، L' أعداد حقيقية.

نهاية مجموعة دالتين

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$	L	L	L	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to\alpha} [f(x)+g(x)]$	$L+L'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ح ع ت	$-\infty$

نهاية جداء دالتين

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$	L	$L\succ 0$	$L\succ 0$	$L\prec 0$	$L\prec 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0	0
$\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)$	L'	∞	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to\alpha} [f(x)\times g(x)]$	$L\times L'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ح ع ت	ح ع ت

نهاية حاصل قسمة دالتين

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$	L	L	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)$	$L'\neq 0$	$\pm\infty$	$L'\succ 0$	$L'\succ 0$	$L'\prec 0$	$L'\prec 0$	0	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{f(x)}{g(x)}$	$\dfrac{L}{L'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ح ع ت	ح ع ت	ح ع ت	ح ع ت	ح ع ت

ملاحظة

- تسمى الحالات التي لا تسمح فيها النظريات السابقة من استنتاج النهاية بحالات : " عدم التعيين (ح ع ت)"
- توجد أربع حالات عدم التعيين وهي من الشكل : $+\infty-\infty;0\times\infty;\frac{0}{0};\frac{\infty}{\infty}$

مــثال (1)

إذا اعتبرنا الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = 2x^3 + 3x^2$

لدينا : $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} 2x^3 = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} 3x^2 = +\infty \end{cases}$ ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

ولدينا : $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} 2x^3 = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} 3x^2 = +\infty \end{cases}$ في هذه الحالة لا يمكننا استنتاج نهاية f لإزالة حالة عدم التعيين نكتب $f(x) = x^2(2x+3)$

وبما ان $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} (2x+3) = -\infty \end{cases}$ ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

إزالة حالات عدم التعيين

✍ لإزالة حالات عدم التعيين عند وجودها نتبع مايلي :

☜ بالنسبة لدوال كثيرات الحدود عندما x يؤول إلى $+\infty$ أو $-\infty$ نأخذ نهاية الحد الأعلى (الأكبر) درجة .

☜ بالنسبة لدوال ناطقة عندماx يؤول إلى $+\infty$ أو $-\infty$ نأخذ نهاية الحد الأعلى درجة في البسط و المقام .

☜ بالنسبة لدوال الجذرية عندماx يؤول إلى $+\infty$ أو $-\infty$ أو x_0 في معظم الحالات نضرب و نقسم في المرافق .

☜ بالنسبة لحالات عدم التعيين عندما x يؤول إلى x_0 نستعمل الجداءات الشهيرة أو التحليل أو العامل المشترك أو العدد المشتق

تطبيق (1)

التقويم

أحسب النهايات التالية :

❶ $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1+x-x^2}{x^3-1}$ ❷ $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{x-2}{x^2-3x+2}$ ❸ $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{x^2-x}{\sqrt{x}}$ ❹ $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$

❹ $\lim\limits_{x\to5} \dfrac{x-5}{\sqrt{2x-1}-3}$ ❺ $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin(x)}{x}$

تطبيق (2)

تمـرين رقم 18-19 صــفـ 132 حــة

مـــلاحظات حول سير الحصة

....

....

....

نهاية مركب دالتين

مبرهنة

نعتبر u،v،f ثلاث دوال حيث $f = v \circ u$ ، ولتكن a ، b و c أعداد حقيقية إما منتهية أو $+\infty$ أو $-\infty$
إذا كانت $\lim\limits_{x\to a} u(x) = b$ و $\lim\limits_{x\to b} v(x) = c$ فإن: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = c$.

تطبيق (3)

أحسب النهايات التالية :

❶ $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{\dfrac{4x-1}{x}}$ ❷ $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(x^3-3x+2\right)^2$ ❸ $\lim\limits_{x\to 0} \cos\left(\pi-2x\right)$

النهايات بالمقارنة

نعتبر الدوال f ، g و h و ليكن a و ℓ عددان حقيقيان إما منتهيان أو $+\infty$ أو $-\infty$

مبرهنة ① إذا كان : $g(x) \le g(x) \le h(x)$ حيث : $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \ell$ و $\lim\limits_{x\to a} h(x) = \ell$ فإن : $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$

مبرهنة ② إذا كان : $f(x) \ge g(x)$ حيث $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$ فإن : $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$

مبرهنة ③ إذا كان : $f(x) \le g(x)$ حيث $\lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty$ فإن : $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$

مبرهنة ③ إذا كان : $|f(x)-\ell| \le g(x)$ حيث $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ فإن : $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$

تطبيق (4)

1. أحسب النهايتين التاليتين :

① $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sin(x)}{x}$ ② $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \left(2 + x\cos(\frac{1}{x})\right)$

2. في كل مايلي أحسب نهاية الدالة f عند $+\infty$

① $\dfrac{3x-1}{x+1} \le f(x) \le \dfrac{4x+2}{2x+1}$ ② $f(x) \le 1-3x$ ③ $f(x) \ge 3x^2-2x$

④ $|f(x)-4| \le \dfrac{1}{x}$ ⑤ $\dfrac{3x+2}{x+5} \le f(x) \le \dfrac{5x+2}{x+4}$

النهايات المثلثية

① $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$ ② $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan(x)}{x} = 1$ ③ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(\alpha x)}{\sin(\beta x)} = \dfrac{\alpha}{\beta}$ ④ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan(\alpha x)}{\tan(\beta x)} = \dfrac{\alpha}{\beta}$

⑤ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(x)}{x} = 0$ ⑥ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(x)}{x^2} = \dfrac{1}{2}$

تذكير من أجل كل عدد حقيقي x لدينا : $-1 \le \cos x \le 1$ ، $-1 \le \sin x \le 1$ ، $\cos^2(x) + sin^2(x) = 1$

$\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$ ، $\sin(2x) = 2\sin(x)\cdot\cos(x)$ ، $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$

تطبيق (5)

أحسب النهايات التالية : ❶ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(3x)}{x}$ ❷ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(x)}{x\cos(x)}$ ❸ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3\sin(x)}{\tan(x)}$ ❹ $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos^2(x)}{1-\sin(x)}$

لا تأخذ بعين الاعتبار غير مقررة على السنة الثانية

ثانوية ساجي مختار السمار-غليزان

السنة الدراسية : 2018 – 2019 | **المستوى :** السنة 02 رياضيات

اليوم : | **ميدان التعلم :** النهايات.

المدة : 2 ساعة | **موضوع الحصة :** النهايات و السلوك التقاربي لمنحنى دالة..

✍ **المكتسبات القبليـة :** دراسة الدوال العددية.

✍ **الكفاءات المستهدفة :** تبرير ان مستقيما معلوما هو مستقيم مقارب ، البحث عن مستقيم مقارب مائل .

✍ **المراجع :** الكتاب المدرسي ، مراجع، الأنترنت

المراحل	عناصر الدرس	المدة
مرحلة الإنطلاق		
بناء معـــــارف		

نـــشاط مقترح (1)

لتكن الدالة f المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ كما يلي : $f(x)=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}+\frac{1}{x}$ وليكن (C_f) المنحنى البياني الممثل لها في معلم متعامد ومتجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$ وليكن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$ ولتكن M نقطة من (C_f) فاصلتها x و P نقطة من المستقيم (Δ) فاصلتها x

❶ أحسب المسافة MP

❷ أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} MP$

❸ ارسم المنحنى (C_f) و (Δ) في نفس المعلم، ماذا تلاحظ.

خـــواص

ليكن (C_f) التمثيل البياني لدالة f في معلم متعامد ومتجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$ ، وليكن (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y=ax+b$ حيث $(a\neq 0)$. القول ان المستقيم (Δ) هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$ يعني

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(ax+b)]=0}$$

ملاحظة إذا كانت f دالة بحيث $f(x)=(ax+b)+g(x)$ وكانت $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$ فإن المستقيم ذو المعادلة $y=ax+b$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) لما يؤول x إلى $+\infty$ نفس الملاحظة عنـــــــــد $(-\infty)$.

البحث عن المستقيم المقارب المائل

نــتيــجة

ليكن (C_f) التمثيل البياني لدالة f في معلم متعامد ومتجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$ ، وليكن (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y=ax+b$ حيث $(a\neq 0)$. يكون المستقيم (Δ) هو مستقيما مقاربا مائلا للمنحنى (C_f) عند $+\infty$ (أو عند $-\infty$ على الترتيب)، إذا وفقط إذا كان : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=a}$ و $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-ax]=b}$

(على الترتيب $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=a}$ و $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-ax]=b}$)

إثبـــات

(C_f) التمثيل البياني لدالة f في معلم متعامد ومتجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$ ، وليكن (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y=ax+b$ حيث $(a\neq 0)$. نفرض ان $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ أو $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ أو $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ أو $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

① نفرض ان (Δ) مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) عند $+\infty$، ومنه حسب التعريف $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$

نضع $g(x)=f(x)-(ax+b)$

ومنه $f(x)=g(x)+ax+b$ حيث $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن 0 : $\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{g(x)+ax+b}{x}=\dfrac{1}{x}\times g(x)+a+\dfrac{b}{x}$

بماان : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}\times g(x)=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{b}{x}=0$ فإن : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=a}$

لدينا من جهة ثانية $f(x)-ax=g(x)+b$ و بما أن : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$ فإن

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}[f(x)-ax]=b}$$

② نفرض ان $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=a$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-ax]=b$

من الواضح أن $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$ ومنه فإن المستقيم ذو المعادلة $y=ax+b$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) لما يؤول x إلى $+\infty$

الوضع النسبي لمنحنى و المستقيم المقارب المائل

f دالة عددية و (C_f) التمثيل البياني لها في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

وليكن في نفس المستوي المستقيم المقارب المائل للمنحنى (C_f) ذو المعادلة $y=ax+b$

لمعرفة وظعية (C_f) بالنسبة للمستقيم المقارب المائل نقوم بحساب الفرق $f(x)-(ax+b)$ ثم ندرس إشارته أي

☜ إذا كان $f(x)-(ax+b)>0$ فإن (C_f) يقع فوق المستقيم المقارب المائل

☜ إذا كان $f(x)-(ax+b)<0$ فإن (C_f) يقع تحت المستقيم المقارب المائل

☜ إذا كان $f(x)-(ax+b)=0$ فإن (C_f) و المستقيم المقارب المائل يتقاطعان (حذاري فواصل التقاطع يجب أن تكون في D_f)

ملاحظـــة : f و g دالتان معرفتان بجوار $\pm\infty$ ، نضع (C_f) و (C_g) التمثيلات البيانية لهما على الترتيب .

إذا كانت : $\lim\limits_{x\to\pm\infty}[f(x)-g(x)]=0$ فإن المنحنيان (C_f) و (C_g) متقاربان بجوار $\pm\infty$.

التقويم

تطبيق (1)

لتكن الدالة f المعرفة على : $\mathbb{R}-\{2\}$ بـ : $f(x)=\dfrac{x^2+3x+3}{x+2}$ و (C_f) تمثيلها البياني في مستو مزود بمعلم متعامد ومتجانس.

✍ أثبت أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل عند $+\infty$ و $-\infty$ يطلب تحديد معادلته.

تطبيق (2)

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ كمايلي : $f(x)=x+1+\dfrac{5}{1-x}$ و (C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم

1. أحسب نهايات الدالة f عند حدود مجموعة التعريف .
2. أثبت أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x+1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$ و $-\infty$
3. أدرس وظعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ).

الحل التطبيق الأول

مستقيم مقارب معادلته من الشكل $y = ax + b$

$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+3x+3}{x^2+2x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{x^2} = 1$ ومنه $a = 1$

$\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-x] = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+3x+3}{x+2} - x\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x+3}{x+2} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x} = 1$ ومنه $b = 1$

إذ المستقيم ذو المعادلة $x+1$ مستقيم مقارب لـ (C_f) بجوار $+\infty$ و $-\infty$

الحل التطبيق الثاني

① حساب النهايات

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(x+1+\frac{5}{1-x}\right) = -\infty$ لأن: $\lim_{x\to-\infty}(x+1) = -\infty$ و $\lim_{x\to-\infty}\frac{5}{1-x} = 0$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(x+1+\frac{5}{1-x}\right) = +\infty$ لأن: $\lim_{x\to+\infty}(x+1) = +\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{5}{1-x} = 0$

$\lim_{x\lesssim 1} f(x) = \lim_{x\lesssim 1}\left(x+1+\frac{5}{1-x}\right) = +\infty$ لأن: $\lim_{x\lesssim 1}(x+1) = 2$ و $\lim_{x\lesssim 1}(1-x) = 0^+$ و $\lim_{x\lesssim 1}\frac{5}{1-x} = +\infty$

$\lim_{x\gtrsim 1} f(x) = \lim_{x\gtrsim 1}\left(x+1+\frac{5}{1-x}\right) = -\infty$ لأن: $\lim_{x\gtrsim 1}(x+1) = 2$ و $\lim_{x\gtrsim 1}(1-x) = 0^-$ و $\lim_{x\gtrsim 1}\frac{5}{1-x} = -\infty$

② إثبات أنّ المستقيم $(\Delta) : y = x+1$ مقارب مائل

بما أن $\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-y] = \lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-(x+1)] = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{5}{1-x} = 0$

فإن المستقيم $(\Delta) : y = x+1$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $\pm\infty$

③ دراسة وظعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ) :

لدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{1\}$: $f(x)-(x+1) = \frac{5}{x-1}$، إذن إشارة الفرق من نفس إشارة $(1-x)$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)-y$	$+$	‖	$-$
الوضعية	(C_f) فوق (Δ)	‖	(C_f) تحت (Δ)

مـــلا حظات حول سير الحصة

....

....

....

ثانوية ساجي مختار السمار-غليزان

السنة الدراسية : 2018 − 2019
اليوم :
المدة : 2 ساعة

المستوى : السنة 02 رياضيات
ميدان التعلم : النهايات.
موضوع الحصة : دراسة دالة.

المكتسبات القبلية : دراسة الدوال العددية.
الكفاءات المستهدفة : دراسة دالة.
المراجع : الكتاب المدرسي ، مراجع، الأنترنت

المراحل	عناصر الدرس	المدة
مرحلة الإنطلاق بناء معارف	(انظر أدناه)	

دراسة دالة :

لدراسة دالة نتبع المخطط التالي :

❶ تحديد مجموعة تعريف الدالة ان لم تكن اعطيت

❷ دراسة شفعية الدالة(زوجية او فردية الدالة)ان امكن و دورية الدالة قصد تقليص مجال الدراسة

- ✔ - اذا كانت الدالة دورية و دورها t فيمكن دراستها على مجال طوله t
- ✔ اذا كانت الدالة فردية او زوجية فيكفي دراستها على نصف مجال التعريف

❸ حساب النهايات عند حدود مجموعة التعريف

❹ دراسة اتجاه التغير و يتم فيها ما يلي:

- ✔ حساب المشتقة على المجالات التي تقبل فيها الدالة الاشتقاق
- ✔ دراسة اشارة المشتقة و استنتاج تغيرات الدالة
- ✔ تحديد القيم الحدية في حالة وجودها

❺ تشكيل جدول التغيرات

❻ التمثيل البياني للدالة و يتم فيه ما يلي:

- ✔ رسم المستقيمات المقاربة
- ✔ تمثيل بعض النقط المساعدة و خاصة القيم الحدية و نقاط تقاطع المحنى مع محوري الاحداثيات
- ✔ رسم المماسات عند القيم الحدية و المماسات الاخرى المطلوبة في النص
- ✔ استغلال عناصر تناظر المنحنى ان وجدت(مراكز التناظر و محاور التناظر)

نعتبر الدالة f المعرفة على $]-\infty,+\infty[$ بـ: $f(x)=x^3-3x+1$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} x^3-3x+1=\lim_{x\to-\infty} x^3=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x^3-3x+1=\lim_{x\to+\infty} x^3=+\infty$$

الدالة f قابلة للإشتقاق على $]-\infty,+\infty[$ ودالتها المشتقة f' حيث : $f'(x)=3x^2-3=3(x^2-1)$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	3	↘	-1	↗	$+\infty$

تعيين معادلة للمستقيم (Δ) مماس منحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0

$y=f'(0)(x-0)+f(0)=-3x+1$

دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) في مجال $[-1;1]$

ندرس إشارة الفرق $f(x)-y$ أي إشارة x^3

x	-1		0		1
$f(x)-y$		$-$	0	$+$	
الوضعية		(C_f) تحت (Δ)	(C_f) يقطع (Δ) في النقطة $A\,(0;1)$	(C_f) فوق (Δ)	

نقطة الإنعطاف

تعريف

لتكن f دالة معرفة و قابلة للاشتقاق مرتين على مجال I وليكن x_0 عنصرا من I.

❖ إذا انعدمت المشتقة الثانية f'' عند قيمة x_0 من I مغيرة إشارتها فإن النقطة $M(x_0;f(x_0))$ هي **نقطة إنعطاف** للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ على I .

❖ إذا كانت المشتقة الأولىf' تنعدم من أجل x_0 دون أن تغير إشارتها فإن النقطة $I(x_0;f(x_0))$ هي **نقطة إنعطاف** للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ على I

وعند هذه النقطة يخترق مماس منحنى (C_f)

x	$-\infty$	$1-\sqrt{3}$	1	$1+\sqrt{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$ || $-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$f(1-\sqrt{3})$	$+\infty$ || $+\infty$	$f(1+\sqrt{3})$	$+\infty$

x	-3	-1.9		-1	0		4.9	3		5
$f''(x)$			$-$			$+$		0	$-$	
$f'(x)$	9	0		$-\frac{3}{2}$	0		0	3		-2

التقويم