بكالوريا شعبة علوم تجريبية 2023 - الموضوع الثاني -

عيّن الإقتراح الصحيح الوحيد من بين الإقتراحات الثلاثة في كل حالة من الحالات التالية مع التبرير :

① حلا المعادلة $8z^2-4z+1=0$ ذات المجهول z في $\mathbb{C}$ هما :

أ/ $-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}i$ و $\frac{1}{4}-\frac{1}{4}i$ ب/ $-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}i$ و $-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}i$ ج/ $\frac{1}{4}-\frac{1}{4}i$ و $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}i$

② الشكل الجبري للعدد المركب $\frac{1+\sqrt{3}+i}{1-i}$ هو:

أ/ $\frac{\sqrt{3}}{2}+i\left(\frac{2+\sqrt{3}}{2}\right)$ ب/ $\frac{\sqrt{3}}{2}-i\left(\frac{2+\sqrt{3}}{2}\right)$ ج/ $\frac{\sqrt{3}}{2}+i\left(\frac{-2+\sqrt{3}}{2}\right)$

③ الجدران التربيعيان للعدد المركب $-8+6i$ هما :

أ/ $-1-3i$ و $1+3i$ ب/ $1-3i$ و $1+3i$ ج/ $-3-i$ و $3+i$

④ الشكل المثلثي للعدد المركب $\frac{1+i}{\sqrt{3}-i}$ هو:

أ/ $\sqrt{2}\left(cos\frac{\pi}{12}+i\,sin\frac{\pi}{12}\right)$ ب/ $\frac{\sqrt{2}}{2}\left(cos\frac{5\pi}{12}+i\,sin\frac{5\pi}{12}\right)$ ج/ $\frac{\sqrt{2}}{2}\left(cos\frac{7\pi}{12}+i\,sin\frac{7\pi}{12}\right)$

بكالوريا شعبة علوم تجريبية 2024 - الموضوع الثاني -

I) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z: $\left(z-1+2\sqrt{3}\right)\left(z^2-2\left(1-\sqrt{3}\right)z+5-2\sqrt{3}\right)=0$

II) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$، نعتبر النقط A ;B و C التي لاحقاتها على الترتيب z_A ;z_B و z_C حيث $z_A=1-\sqrt{3}+i$;$z_B=1-2\sqrt{3}$ و $z_C=\overline{z_A}$.

① أكتب كلا من z_A-1 ;z_C-1 و z_B على الشكل المثلثي .

② جد z_D لاحقة النقطة D مرجح الجملة المثقلة $\{(A;1);(B;-1);(C;1)\}$.

③ بيّن أن الرباعي $ABCD$ معين.

بكالوريا شعبة رياضيات 2024 - الموضوع الأول -

I) أ-حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z الآتية: $\left(z-8+6i\right)\left(z^2-2z+4\right)=0$

ب-الجذرين التربيعين للعدد المركب $8-6i$.

II) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$. نعتبر النقط A ;B و C التي لاحقاتها على الترتيب z_A ;z_B و z_C حيث $z_A=1+i\sqrt{3}$;$z_B=iz_A$ و $z_C=-z_A$.

① تحقق أنّ: $z_A-z_B=i\left(z_C-z_B\right)$ ثم بين أن المثلث ABC قائم و متساوي الساقين .

② أ - أكتب كلا من z_A ;z_B و z_C على الشكل المثلثي .

ب-استنتج أن النقط A ;B و C تنتمي إلى نفس الدائرة ، يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها.

③ النقطة D هي نظيرة B بالنسبة إلى مبدأ المعلم .

بيّن أن الرباعي $ABCD$ مربع.

بكالوريا شعبة رياضيات 2024 - الموضوع الثاني-

I) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z الآتية: $\left(z^2+2i\right)\left(z^2-2\sqrt{3}z+6\right)=0$

II) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ ، نعتبر النقط A ;B و C التي لاحقاتها على الترتيب z_A ;z_B و z_C حيث $z_A=1-i$;$z_B=-z_A$ و $z_C=(1+i)\sqrt{3}$.

① أكتب كلا من z_A ;z_B و z_C على الشكل المثلثي.

② أكتب العدد المركب $\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ على الشكل الجبري ثم المثلثي وبيّن أن المثلث ABC متقايس الأضلاع .

③ أ- عيّن z_D لاحقة النقطة D مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABC ثم أحسب نصف قطرها .

ب-النقطة D هي نظيرة C بالنسبة إلى مبدأ المعلم. | ✪ بيّن أن الرباعي $ACDB$ معين.

بكالوريا شعبة رياضيات 2023 - الموضوع الثاني-

① حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $\left(\bar{z}-1+i\sqrt{3}\right)\left(z^2-2\sqrt{2}z+4\right)=0$

② المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$، نعتبر النقط A ;B و C التي لاحقاتها على الترتيب z_A ;z_B و z_C حيث $z_A=\sqrt{2}(1+i)$;$z_B=\overline{z_A}$ و $z_C=1+i\sqrt{3}$

أ/ أكتب z_A ;z_B و z_C على الشكل المثلثي.

ب/استنتج أن النقط A ;B و C التي تنتمي إلى نفس الدائرة يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها .

③ نضع: $K=\dfrac{z_C}{2z_A}$

أ/ أحسب طويلة العدد المركب K وعمدة له ثم أكتبه على الشكل الجبري.

ب/استنتج القيمة المضبوطة لكل من: $\cos\dfrac{\pi}{12}$ و $\sin\dfrac{\pi}{12}$

④ n عدد طبيعي ، نضع: $L_n=z_A^n+z_B^n$. | ✪ بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، العدد المركب L_n حقيقي.

بكالوريا شعبة علوم 2015 - الموضوع الثاني-

في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$، نعتبر النقط A ;B و C التي لاحقاتها على الترتيب z_A ;z_B و z_C حيث $z_A=2e^{i\frac{\pi}{6}}$; $z_B=-\overline{z_A}$ و $z_C=-\left(z_A+z_B\right)$

① أ/أكتب كلا من العددين المركبين z_B و z_C على الشكل الأسي .

ب/استنتج أنّ النقط A ;B و C تنتمي إلى دائرة (γ) يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها .

جـ/أنشئ الدائرة (γ) والنقط A ;B و C.

② أ/تحقق أنّ: $\dfrac{z_B-z_C}{z_B-z_A}=e^{-i\frac{\pi}{3}}$. ب/استنتج أن المثلث ABC متقايس الأضلاع وأن النقطة O مركز ثقل هذا المثلث .

جـ/ عيّن و أنشئ (E) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث : $|z|=\left|z-\sqrt{3}-i\right|$.

③ أ/عيّن زاوية للدوران r الذي مركزه O ويحول C إلى A . ب/ أثبت أن صورة (E) بالدوران r هي محور القطعة $[OB]$.

تعيين الإقتراح الصحيح الوحيد من بين الإقتراحات الثلاثة في كل حالة من الحالات التالية مع التبرير :

① حلا المعادلة $8z^2-4z+1=0$ ذات المجهول z في $\mathbb{C}$ هما: $\boxed{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}i}$ و $\boxed{\frac{1}{4}-\frac{1}{4}i}$ الإجابة جـ/

التبرير: نحل المعادلة $8z^2-4z+1=0$ في $\mathbb{C}$:

◄ حساب المميز: $\Delta=(-4)^2-4(8)(1)=-16=16i^2=(4i)^2$

المعادلة تقبل حلين مركبان مترافقان.

◄ $z_1=\frac{4-4i}{2(8)}=\frac{4}{16}-\frac{4}{16}i=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}i$ أو $z_2=\overline{z_1}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}i$

② الشكل الجبري للعدد المركب $\frac{1+\sqrt{3}+i}{1-i}$ هو: الإجابة أ/

التبرير: الكتابة على الشكل الجبري للعدد المركب $\frac{1+\sqrt{3}+i}{1-i}$: $\boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}+i\left(\frac{2+\sqrt{3}}{2}\right)}$

لدينا: $\frac{1+\sqrt{3}+i}{1-i}=\frac{(1+\sqrt{3}+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}$ **(الضرب البسط والمقام في مرافق المقام)**

ومنه: $\frac{1+\sqrt{3}+i}{1-i}=\frac{1+\sqrt{3}-1+i(1+\sqrt{3}+1)}{1^2+1^2}$ ومنه: $\boxed{\frac{1+\sqrt{3}+i}{1-i}=\frac{\sqrt{3}}{2}+i\left(\frac{2+\sqrt{3}}{2}\right)}$

③ الجذران التربيعيان للعدد المركب $-8+6i$ هما : الإجابة أ/

الطريقة 1) في هذه الطريقة نستغل مفهوم إتمام للمربع لكتابة على شكل متطابقة شهيرة.

لدينا: $-8+6i=-8+2(3)i=-9+1+2(3)i=9i^2+1+2(3)i$ ومنه: $-8+6i=(3i)^2+1+2(3)i$

ومنه: $-8+6i=(3i+1)^2$ إذن: الجذران التربيعيان للعدد المركب $-8+6i$ هما: $1+3i$ و $-1-3i$

الطريقة 2) نضع: $-8+6i=(x+iy)^2$ حيث x و y عددان حقيقيان يطلب تعينهما.

لدينا: $8-6i=(x+iy)^2$ ومنه: $8-6i=x^2-y^2+i2xy$

ومنه: $-8+6i=(x+iy)^2$ $\begin{cases}\left|(x+iy)^2\right|=|8-6i|\\ x^2-y^2=8\\ 2xy=-6\end{cases}$ يكافئ: $\begin{cases}x^2-y^2=-8.....(1)\\ x^2+y^2=10.....(2)\\ 2xy=6............(3)\end{cases}$

بجمع (1) و (2) نجد: $2x^2=2$ أي أن: $x^2=1$ أي: $x=1$ أو $x=-1$

بتعويض قيمة في (3) نجد: $\begin{cases}2(1)y=6\\ 2(-1)y=6\end{cases}$ أي أن: $y=3$ أو $y=-3$

إذن: الجذران التربيعيان للعدد المركب $-8+6i$ هما: $1+3i$ و $-1-3i$

④ الشكل المثلثي للعدد المركب $\frac{1+i}{\sqrt{3}-i}$ هو: $\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12}\right)$ **الإجابة ب/**

لدينا: $\begin{cases}1+i=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\\ \sqrt{3}-i=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}\right)\end{cases}$ ومنه: $\begin{cases}1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\\ \sqrt{3}-i=2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)\end{cases}$ ومنه: $\boxed{\begin{cases}1+i=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\\ \sqrt{3}-i=2e^{-i\frac{\pi}{6}}\end{cases}}$

وبالتالي: $\frac{1+i}{\sqrt{3}-i}=\frac{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}{2e^{-i\frac{\pi}{6}}}$ وبالتالي: $\frac{1+i}{\sqrt{3}-i}=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\times e^{i\frac{\pi}{6}}$ وبالتالي: $\boxed{\frac{1+i}{\sqrt{3}-i}=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{5\pi}{12}}}$

بكالوريا شعبة علوم تجريبية 2024 - الموضوع الثاني -

I) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة: $(z-1+2\sqrt{3})(z^2-2(1-\sqrt{3})z+5-2\sqrt{3})=0$

إما: $z-1+2\sqrt{3}=0$ أي أن: $\boxed{z=1-2\sqrt{3}}$

أو: $z^2-2(1-\sqrt{3})z+5-2\sqrt{3}=0$

◄ حساب المميز: $\Delta=\left(-2(1-\sqrt{3})\right)^2-4(1)(5-2\sqrt{3})=4(1+3-2\sqrt{3})-20+8\sqrt{3}$

ومنه: $\Delta=16-8\sqrt{3}-20+8\sqrt{3}$ أي أن: $\Delta=-4=4i^2=(2i)^2$

المعادلة تقبل حلين مركبان مترافقان.

$z_1=\frac{2(1-\sqrt{3})-2i}{2}=(1-\sqrt{3})-i$ أو $z_2=\overline{z_1}=(1-\sqrt{3})+i$

إذن: $\boxed{S=\left\{(1-\sqrt{3})-i\ ;\ (1-\sqrt{3})+i\ ;\ 1-2\sqrt{3}\right\}}$

II) لدينا: $z_A=1-\sqrt{3}+i$; $z_B=1-2\sqrt{3}$ و $z_C=\overline{z_A}$.

① كتابة كلا من z_A-1; z_C-1 و z_B على الشكل المثلثي .

◄ لدينا: $z_A-1=-\sqrt{3}+i=2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)$ إذن: $\boxed{z_A-1=2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)}$

◄ لدينا: $z_C-1=\overline{z_A-1}=\overline{z_A}-1$ إذن: $\boxed{z_C-1=2\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right)}$

② إيجاد z_D لاحقة النقطة D مرجح الجملة المثقلة $\{(A;1);(B;-1);(C;1)\}$.

نعلم أنّ: $z_D=\frac{z_A-z_B+z_C}{1-1+1}$ ومنه: $z_D=1-\sqrt{3}+\cancel{i}-(1-2\sqrt{3})+1-\sqrt{3}-\cancel{i}$

ومنه: $z_D=1-\cancel{\sqrt{3}}-\cancel{1}+\cancel{2\sqrt{3}}+\cancel{1}-\cancel{\sqrt{3}}$ ومنه: $\boxed{z_D=1}$

③ تبيان أن الرباعي $ABCD$ معين.

تذكير: المعين هو متوازي أضلاع فيه كل ضلعان متجاوران متقايسان وغير متعامدان.

◄ لدينا مما سبق: $z_C-1=2\left(cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right)+i\,sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right)$ و $z_A-1=2\left(cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)+i\,sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)$

ومنه: $\begin{cases} z_C-1=2e^{-i\frac{5\pi}{6}} \\ z_A-1=2e^{i\frac{5\pi}{6}} \end{cases}$ وبالتالي: $\frac{z_A-1}{z_C-1}=\frac{2e^{i\frac{5\pi}{6}}}{2e^{-i\frac{5\pi}{6}}}$ وبالتالي: $\frac{z_A-1}{z_C-1}=e^{i\frac{5\pi}{6}}\times e^{i\frac{5\pi}{6}}=e^{i\frac{5\pi}{3}}$

وبما أن: $z_D=1$ فإن: $\frac{z_A-z_D}{z_C-z_D}=e^{i\frac{5\pi}{3}}$ هذا يعني أنّ: $\begin{cases} \left|\frac{z_A-z_D}{z_C-z_D}\right|=1 \\ arg\left(\frac{z_A-z_D}{z_C-z_D}\right)=\frac{5\pi}{3}+2k\pi \end{cases}$ حيث $k\in\mathbb{Z}$

هذا يعني أنّ: $(*)$...... $\begin{cases} \frac{DA}{DC}=1 \\ \left(\overrightarrow{DC};\overrightarrow{DA}\right)=\frac{5\pi}{3}+2k\pi \end{cases}$ حيث $k\in\mathbb{Z}$

هذا يعني أنّ: $\boxed{\begin{cases} DA=DC \\ \overrightarrow{DC}\not\perp\overrightarrow{DA} \end{cases}......(*)}$ (كل ضلعان متجاوران متقايسان وغير متعامدان)

◄ مما سبق: $z_A-1=-\sqrt{3}+i$ وبالتالي: $z_A-z_D=-\sqrt{3}+i$

لدينا: $z_B-z_C=1-2\sqrt{3}-\left(1-\sqrt{3}-i\right)$ وبالتالي: $z_B-z_C=1-2\sqrt{3}-1+\sqrt{3}+i$

وبالتالي: $z_B-z_C=-\sqrt{3}+i$

بما أن: $z_A-z_D=z_B-z_C$ فإن: $z_{\overrightarrow{DA}}=z_{\overrightarrow{CB}}$ أي أن: $\boxed{\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{CB}.......(\#)}$ ($ABCD$ متوازي أضلاع)

من نستنتج أنّ: الرباعي $ABCD$ معين.

بكالوريا شعبة رياضيات 2024 - الموضوع الأول -

I) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة: $(z-8+6i)(z^2-2z+4)=0$

لدينا: $(z-8+6i)(z^2-2z+4)=0$ هذا يكافئ: $\begin{cases} z-8+6i=0.........(1) \\ ou \\ z^2-2z+4=0.......(2) \end{cases}$

◄ من (1) نجد: $z=8-6i$

◄ حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة (2):

لدينا: $\Delta=b^2-4ac=(-2)^2-4(1)(4)=-12=\left(2\sqrt{3}i\right)^2$ ومنه: المعادلة (2) تقبل حلين مركبين مترافقين.

أي أن: $z_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{2-i2\sqrt{3}}{2}=1-i\sqrt{3}$ و $z_2=\overline{z_1}=1+i\sqrt{3}$

إذن: $\boxed{S=\left\{8-6i;1-i\sqrt{3};1+i\sqrt{3}\right\}}$

ب) إيجاد الجذرين التربيعيين للعدد المركب $8-6i$:

الطريقة 1) نضع: $8-6i=(x+iy)^2$ ومنه: $8-6i=x^2-y^2+i2xy$

ومنه: $\begin{cases}|(x+iy)^2|=|8-6i|\\ x^2-y^2=8\\ 2xy=-6\end{cases}$ يكافئ: $\begin{cases}x^2+y^2=10 \quad(1)\\ x^2-y^2=8 \quad(2)\\ 2xy=-6 \quad(3)\end{cases}$

بجمع (1) و(2) نجد: $2x^2=18$ أي أن: $x^2=9$ وبالتالي: $x=3$ أو $x=-3$

من أجل $x=3$ وبالتعويض في (3) نجد: $2(3)y=-6$ أي أن: $y=-1$

من أجل $x=-3$ وبالتعويض في (3) نجد: $2(-3)y=-6$ أي أن: $y=1$

إذن: الجذرين التربيعيين للعدد المركب $8-6i$ هما: $\boxed{3-i}$ و$\boxed{-3+i}$

الطريقة 2) لدينا: $8-6i=9-1-2(3)i$ ومنه: $8-6i=3^2+i^2-2(3)i$ أي أن: $8-6i=(3-i)^2$

إذن: الجذرين التربيعيين للعدد المركب $8-6i$ هما: $\boxed{3-i}$ و$\boxed{-3+i}$

II) لدينا: $z_A=1+i\sqrt{3}$; $z_B=iz_A=-\sqrt{3}+i$ و $z_C=-z_A=-1-i\sqrt{3}$

① التحقق أنّ: $z_A-z_B=i(z_C-z_B)$

الطريقة 1) لدينا: $z_A-z_B=1+i\sqrt{3}-(-\sqrt{3}+i)$ ومنه: $z_A-z_B=1+i\sqrt{3}+\sqrt{3}-i$

أي أن: $z_A-z_B=1+\sqrt{3}+i(\sqrt{3}-1)$

لدينا من جهة أخرى: $i(z_C-z_B)=i(-1-i\sqrt{3}-(-\sqrt{3}+i))$ ومنه: $i(z_C-z_B)=i(-1-i\sqrt{3}+\sqrt{3}-i)$

ومنه: $i(z_C-z_B)=-i+\sqrt{3}+i\sqrt{3}+1$ أي أن: $i(z_C-z_B)=1+\sqrt{3}+i(\sqrt{3}-1)$

إذن: $\boxed{z_A-z_B=i(z_C-z_B)}$

الطريقة 2) لدينا: $i(z_C-z_B)=i(-z_A-iz_A)$ ومنه: $i(z_C-z_B)=-iz_A-i^2z_A$

ومنه: $i(z_C-z_B)=-iz_A+z_A$

ومنه: $i(z_C-z_B)=-z_B+z_A$ إذن: $\boxed{i(z_C-z_B)=z_A-z_B}$

تبيان أنّ المثلث ABC قائم ومتساوي الساقين.

لدينا مما سبق: $z_A-z_B=i(z_C-z_B)$ ومنه: $\dfrac{z_A-z_B}{z_C-z_B}=i$ ومنه: $\dfrac{z_A-z_B}{z_C-z_B}=e^{i\frac{\pi}{2}}$

هذا يعني أن: $\begin{cases}\left|\dfrac{z_A-z_B}{z_C-z_B}\right|=1\\ arg\left(\dfrac{z_A-z_B}{z_C-z_B}\right)=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\end{cases}$;$k\in\mathbb{Z}$ أي أن: $\begin{cases}\dfrac{BA}{BC}=1\\ (\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA})=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\end{cases}$;$k\in\mathbb{Z}$

إذن: المثلث ABC قائم في B ومتساوي الساقين.

② أ) كتـابة كلاّ من z_A ؛ z_B و z_C على الشكل المثلثي.

◄◄ طويلة z_A: $|z_A|=\sqrt{1^2+\sqrt{3}^2}=2$

◄◄ عمدة z_A: نضع: $\arg(z_A)=\theta$ وبـالتـالي: $\begin{cases} \cos(\theta)=\dfrac{1}{2} \\ \sin(\theta)=\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ أي أن: $\theta=\dfrac{\pi}{3}+2k\pi\ ;k\in\mathbb{Z}$

إذن: $\boxed{z_A=2\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\right)}$

بـمـا أن: $z_B=iz_A$ و $\begin{cases} i=e^{i\frac{\pi}{2}} \\ z_A=2e^{i\frac{\pi}{3}} \end{cases}$ فإن: $z_B=e^{i\frac{\pi}{2}}\times 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ ومنه: $z_B=2e^{i\frac{5\pi}{6}}$

إذن: $\boxed{z_B=2\left(\cos\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)\right)}$

بـمـا أن: $z_C=-z_A$ و $\begin{cases} -1=e^{i\pi} \\ z_A=2e^{i\frac{\pi}{3}} \end{cases}$ فإن: $z_C=e^{i\pi}\times 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ ومنه: $z_C=2e^{i\frac{4\pi}{3}}$

إذن: $\boxed{z_C=2\left(\cos\left(\dfrac{4\pi}{3}\right)+i\sin\left(\dfrac{4\pi}{3}\right)\right)}$

ب) إستنتـاج أنّ النقط A ؛ B و C تنتمي إلى نفس الدائرة، يطلب تعيين مركزهـا ونصف قطرهـا.

بـمـا أن: $|z_A|=|z_B|=|z_C|=2$ فإن: $OA=OB=OC=2$

إذن: النقط $A;B$ و C تنتمي إلى الدائرة التي مركزها O ونصف القطر $r=2$

③ النقطة D هي نظيرة B بـالنسبة إلى مبدأ المعلم.

☙ تبيـان أنّ الربـاعي $ABCD$ مربع.

لدينا ممـا سبق: المثلث ABC قـائم في B ومتسـاوي السـاقين هذا يعني أن: $\boxed{\begin{cases} BA=BC \\ \overrightarrow{BC}\perp\overrightarrow{BA} \end{cases}\ldots\ldots(*)}$

بـمـا أن: النقطة D هي نظيرة B بالنسبة إلى مبدأ المعلم فإن: $z_D=-z_B$

ولدينـا: $z_C=-z_A$ وبـالتـالي: $z_D-z_C=z_A-z_B$ هذا يعني أن: $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BA}\ldots\ldots\ldots(\#)$

من $(*)$ و $(\#)$ نستنتج أن: الربـاعي $ABCD$ مربع

بكـالوريـا شعبة ريـاضيـات 2024 - الموضوع الثـاني-

I) حل في مجموعة الأعداد المركبة المعـادلة: $(z^2+2i)(z^2-2\sqrt{3}z+6)=0$

لدينـا: $(z^2+2i)(z^2-2\sqrt{3}z+6)=0$ هذا يكـافئ: $\begin{cases} z^2+2i=0\ldots\ldots\ldots(1) \\ ou \\ z^2-2\sqrt{3}z+6=0\ldots\ldots.(2) \end{cases}$

◄ من (1) نجد: $z^2=-2i$ ومنه: $z^2=1-1-2i$ ومنه: $z^2=1+i^2-2i$ ومنه: $z^2=(1-i)^2$

هذا يعني أن: $\boxed{z=1-i}$ أو $\boxed{z=-1+i}$

◄ حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة (2):

لدينا: $\Delta=b^2-4ac=\left(-2\sqrt{3}\right)^2-4(1)(6)=-12=\left(2\sqrt{3}i\right)^2$ ومنه: المعادلة (2) تقبل حلين مركبين مترافقين.

أي أن: $z_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{2\sqrt{3}-i2\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}-i\sqrt{3}$ و $z_2=\overline{z_1}=\sqrt{3}+i\sqrt{3}$

إذن: $\boxed{S=\left\{1-i;-1+i;\sqrt{3}-i\sqrt{3};\sqrt{3}+i\sqrt{3}\right\}}$

II) لدينا: $z_A=1-i\ ;\ z_B=-z_A=-1+i\ ;\ z_C=\sqrt{3}(1+i)$

① كتابة كلا من $z_A;z_B$ و z_C على الشكل المثلثي.

◄ طويلة z_A: $|z_A|=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$

◄ عمدة z_A: نضع: $\arg(z_A)=\theta$ وبالتالي: $\begin{cases}\cos(\theta)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin(\theta)=\dfrac{-1}{\sqrt{2}}=\dfrac{-\sqrt{2}}{2}\end{cases}$ أي أن: $\theta=-\dfrac{\pi}{4}+2k\pi\ ;k\in\mathbb{Z}$

إذن: $\boxed{z_A=\sqrt{2}\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right)}$

بما أن: $z_B=-z_A$ و $\begin{cases}-1=e^{i\pi}\\ z_A=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}\end{cases}$ فإن: $z_B=e^{i\pi}\times\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ ومنه: $z_B=\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$

إذن: $\boxed{z_B=\sqrt{2}\left(\cos\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)\right)}$

بما أن: $z_C=\sqrt{3}(1+i)=\sqrt{3}\,\overline{z_A}$ و $\overline{z_A}=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ فإن: $z_C=\sqrt{3}\times\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ ومنه: $z_C=\sqrt{6}e^{i\frac{\pi}{4}}$

إذن: $\boxed{z_C=\sqrt{6}\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\right)}$

② كتابة العدد المركب $\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ على الشكل الجبري:

لدينا: $\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\dfrac{\sqrt{3}+i\sqrt{3}-1+i}{-1+i-1+i}$ ومنه: $\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\dfrac{\sqrt{3}-1+i\left(\sqrt{3}+1\right)}{-2+2i}$

ومنه: $\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\dfrac{\left(\sqrt{3}-1+i\left(\sqrt{3}+1\right)\right)(-2-2i)}{(-2+2i)(-2-2i)}$

ومنه: $\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\dfrac{-2\sqrt{3}+2+2\sqrt{3}+2+i\left(-2\sqrt{3}+2-2\sqrt{3}-2\right)}{2^2+2^2}$

ومنه: $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{4 - i4\sqrt{3}}{8}$ إذن: $\boxed{\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}}$

كتابة العدد المركب $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ على الشكل المثلثي:

لدينا مما سبق: $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ومنه: $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = 1\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$

إذن: $\boxed{\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)}$

تبيان أن المثلث ABC متقايس الأضلاع

لدينا مما سبق: $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ ومنه: $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$

هذا يعني أن: $\begin{cases} \left|\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = 1 \\ \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$;$k \in \mathbb{Z}$ أي أن: $\begin{cases} \frac{AC}{AB} = 1 \\ \left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AB}\right) = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$;$k \in \mathbb{Z}$

إذن: المثلث ABC متقايس الأضلاع.

③ أ) تعيين لاحقة النقطة G مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABC ثم حساب نصف قطرها.

بما أن المثلث ABC متقايس الأضلاع فإن مركز الدائرة المحيطة به هي مركز ثقله

نعلم أن: $z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3}$ ومنه: $z_G = \frac{z_A - z_A + \sqrt{3}(1+i)}{3}$ إذن: $\boxed{z_G = \frac{\sqrt{3}}{3} + i\frac{\sqrt{3}}{3}}$

حساب r نصف قطر الدائرة المحيطة بالمثلث ABC: لدينا: $r = GC$

ومنه: $r = |z_C - z_G|$ ومنه: $r = \left|\sqrt{3} + i\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} - i\frac{\sqrt{3}}{3}\right|$ ومنه: $r = \left|\frac{2\sqrt{3}}{3} + i\frac{2\sqrt{3}}{3}\right|$ ومنه: $r = \frac{2\sqrt{3}}{3}|1+i|$

وبالتالي: $r = \frac{2\sqrt{3}}{3}\sqrt{2}$ أي أن: $\boxed{r = \frac{2\sqrt{6}}{3}}$ إذن: نصف قطر الدائرة المحيطة بالمثلث ABC: $\boxed{r = \frac{2\sqrt{6}}{3}}$

ب) تبيان أن الرباعي $ACBD$ معيّن.

لدينا مما سبق: المثلث ABC متقايس الأضلاع هذا يعني أن: $\left\{\begin{matrix} CA = CB \\ \overrightarrow{CA} \not\perp \overrightarrow{CB} \end{matrix}\right. .....(*)$

(كل ضلعان متجاوران متقايسان وغير متعامدان)

بما أن: النقطة D هي نظيرة C بالنسبة إلى مبدأ المعلم فإن: $z_D = -z_C$

ولدينا: $z_B = -z_A$ وبالتالي: $z_D - z_B = z_A - z_C$ هذا يعني أن: $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CA}.........(\#)$ ($ACBD$ متوازي أضلاع)

يمكن إستغلال، بما أن القطران $[DC]$ و$[AB]$ متناصفان ($z_D = -z_C$ و $z_B = -z_A$) فإن $ACBD$ متوازي أضلاع

من $(*)$ و$(\#)$ نستنتج أن: الرباعي $ACBD$ معين

① حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z: $(\bar{z}-1+i\sqrt{3})(z^2-2\sqrt{2}z+4)=0$

لدينا: $(\bar{z}-1+i\sqrt{3})(z^2-2\sqrt{2}z+4)=0$ هذا يكافئ: $\begin{cases}\bar{z}-1+i\sqrt{3}=0.........(1)\\ ou\\ z^2-2\sqrt{2}z+4=0.......(2)\end{cases}$

◄ من (1) نجد: $\bar{z}=1+i\sqrt{3}$ ومنه: $\boxed{z=1+i\sqrt{3}}$

◄ حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة (2):

لدينا: $\Delta=b^2-4ac=(-2\sqrt{2})^2-4(1)(4)=-8=(2\sqrt{2}i)^2$ ومنه: المعادلة (2) تقبل حلين مركبين مترافقين.

أي أن: $z_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{2\sqrt{2}-i2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}-i\sqrt{2}$ و $z_2=\bar{z}_1=\sqrt{2}+i\sqrt{2}$

إذن: $\boxed{S=\{1+i\sqrt{3};\sqrt{2}-i\sqrt{2};\sqrt{2}+i\sqrt{2}\}}$

② لدينا: $z_A=\sqrt{2}(1+i);z_B=\bar{z}_A$ و $z_C=1+i\sqrt{3}$

ج/ كتابة $z_A;z_B$ و z_C على الشكل المثلثي.

لدينا: $z_A=\sqrt{2}\times\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$ ومنه: $z_A=2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$ إذن: $\boxed{z_A=2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)}$

لدينا: $z_B=\bar{z}_A$ إذن: $\boxed{z_B=2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)}$

لدينا: $z_C=1+i\sqrt{3}$ ومنه: $z_C=2\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$ إذن: $\boxed{z_C=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)}$

د/ استنتاج أن النقط $A;B$ و C التي تنتمي إلى نفس الدائرة يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها .

بما أن: $|z_B|=|z_A|=|z_C|=2$ فإن: $OB=OA=OC=2$

إذن: النقط $A;B$ و C التي تنتمي إلى نفس الدائرة التي مركزها O و نصف قطرها $r=2$

③ نضع: $K=\frac{z_C}{2z_A}$

أ/ حساب طويلة العدد المركب K وعمدة له .

نعلم أن: $\begin{cases}|K|=\left|\frac{z_C}{2z_A}\right|=\frac{|z_C|}{2|z_A|}\\ \arg(K)=\arg\left(\frac{z_C}{2z_A}\right)=\arg(z_C)-\arg(2z_A)\end{cases}$ أي أن: $\boxed{\begin{cases}|K|=\frac{2}{2(2)}=\frac{1}{2}\\ \arg(K)=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{12}\end{cases}}$

إذن: طويلة العدد المركب K هي $\frac{1}{2}$ وعمدة له $\frac{\pi}{12}+2k\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$

كتابة K على الشكل الجبري.

لدينا: $K=\frac{1+i\sqrt{3}}{2\sqrt{2}(1+i)}$ ومنه: $K=\frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{(1+i\sqrt{3})(1-i)}{(1+i)(1-i)}$

ومنه: $K=\frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{1-\sqrt{3}+i(-1+\sqrt{3})}{1^2+1^2}$

ومنه: $\boxed{K=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}+i\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right)}$

ب/استنتاج القيمة المضبوطة لكل من: $\cos\frac{\pi}{12}$ و $\sin\frac{\pi}{12}$

مما سبق: $\begin{cases}|K|=\frac{2}{2(2)}=\frac{1}{2}\\ \arg(K)=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{12}\end{cases}$ وبالتالي: $K=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$

هذا يعني أن: $\begin{cases}\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{12}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)\\ \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{12}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right)\end{cases}$ هذا يعني أن: $\boxed{\begin{cases}\cos\frac{\pi}{12}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)\\ \sin\frac{\pi}{12}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right)\end{cases}}$

④ تبيان أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، العدد المركب L_n حقيقي.

نعلم أنّ: $\begin{cases}z_A^n=2^n\left(\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right)\\ z_B^n=2^n\left(\cos\left(-\frac{n\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{n\pi}{4}\right)\right)\end{cases}$ **حسب دستور موافر.**

ومنه: $\begin{cases}z_A^n=2^n\left(\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right)\\ z_B^n=2^n\left(\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)-i\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right)\end{cases}$ إنطلاقا من شفعية الدالتين $\cos$ و $\sin$.

بالجمع طرف نجد: $z_A^n+z_B^n=2^n\left(2\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right)$ هذا يعني أن: $\boxed{L_n=2^n\left(2\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right)}$

إذن: من أجل كل عدد طبيعي n ، العدد المركب L_n حقيقي

① أ. كتابة كلا من العددين المركبين $z_C; z_B$ على الشكل الأسي.

« لدينا $\begin{cases} z_A = 2e^{i\frac{\pi}{6}} \\ z_B = -\overline{z_A} \end{cases}$ ومنه: $z_B = -2\overline{e^{i\frac{\pi}{6}}} = 2e^{i\pi}e^{-i\frac{\pi}{6}} = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$ ومنه: $z_B = 2e^{i\pi}e^{-i\frac{\pi}{6}}$ إذن: $\boxed{z_B = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}}$

« لدينا $z_C = -(z_A + z_B)$ ومنه: $z_C = -\left(2e^{i\frac{\pi}{6}} + 2e^{i\frac{5\pi}{6}}\right)$

ومنه: $z_C = -2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)$

ومنه: $z_C = -2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right)$ أي أن: $z_C = -2(i)$

وبالتالي: $z_C = -2i$ بما أن: z_C تخيلي صرف سالب فإن: $\boxed{z_C = 2e^{-i\frac{\pi}{2}}}$

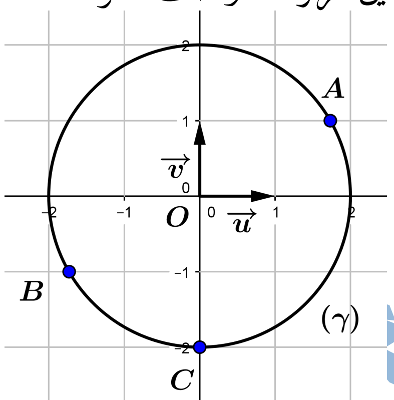
ب. استنتاج أن النقط $C;B;A$ تنتمي إلى نفس الدائرة (γ) يطلب تعين مركزها ونصف قطرها

بما أن: $|z_C| = |z_B| = |z_A| = 2$ فإن $OC = OB = OA = 2$

إذن: النقط $C;B;A$ تنتمي إلى نفس الدائرة (γ) التي مركزها O

ونصف قطرها $r = 2$.

ج. إنشئ الدائرة (γ) والنقط $C;B;A$



② أ. التحقق من أن: $\frac{z_B - z_C}{z_B - z_A} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$:

لدينا: $\begin{cases} z_B - z_C = 2e^{i\frac{5\pi}{6}} - 2e^{i\frac{-\pi}{2}} \\ z_B - z_A = 2e^{i\frac{5\pi}{6}} - 2e^{i\frac{\pi}{6}} \end{cases}$ ومنه: $\begin{cases} z_B - z_C = 2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right) - 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) \\ z_B - z_A = 2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right) - 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) \end{cases}$

ومنه: $\begin{cases} z_B - z_C = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) - 2(-i) \\ z_B - z_A = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) - 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) \end{cases}$

ومنه: $\begin{cases} z_B - z_C = -\sqrt{3} + 3i \\ z_B - z_A = -2\sqrt{3} \end{cases}$

وبالتالي: $\frac{z_B - z_C}{z_B - z_A} = \frac{-\sqrt{3} + 3i}{-2\sqrt{3}}$ وبالتالي: $\frac{z_B - z_C}{z_B - z_A} = \frac{-\sqrt{3}}{-2\sqrt{3}} + \frac{3i}{-2\sqrt{3}}$ وبالتالي: $\frac{z_B - z_C}{z_B - z_A} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

وبالتالي: $\frac{z_B - z_C}{z_B - z_A} = 1\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$ إذن: $\boxed{\frac{z_B - z_C}{z_B - z_A} = e^{-i\frac{\pi}{3}}}$

ب. استنتاج أن المثلث ABC متقايس الأضلاع أن النقطة O مركز ثقله.

◄ بما أن: $\dfrac{z_B-z_C}{z_B-z_A}=e^{-i\frac{\pi}{3}}$ ومنه: $\begin{cases}arg\left(\dfrac{z_B-z_C}{z_B-z_A}\right)=-\dfrac{\pi}{3}+2k\pi\\ \left|\dfrac{z_B-z_C}{z_B-z_A}\right|=1\end{cases}$ ، $k\in\mathbb{Z}$ وبالتالي: $\begin{cases}\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CB}\right)=-\dfrac{\pi}{3}\\ AB=CB\end{cases}$

هذا يعني أن المثلث ABC متقايس الأضلاع.

◄ بما أن O الدائرة المحيطة بالمثلث ABC ومنه النقطة O مركز ثقل المثلث ABC.

ج. تعيين وانشاء (E) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي تحقق: $|z|=|z-\sqrt{3}-i|$

لدينا: $|z|=|z-\sqrt{3}-i|$ ومنه $|z-0|=|z-(\sqrt{3}-i)|$ وبالتالي: $|z-z_O|=|z-z_A|$ وبالتالي $\boxed{OM=AM}$

إذن: (E) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي تحقق: $|z|=|z-\sqrt{3}-i|$ هي محور القطعة $[OA]$

③ أ. تعيين زاوية الدوران r الذي مركزه O ويحول C إلى A

بما أن r الدوران الذي مركزه O ويحول C إلى A

لدينا: $\dfrac{z_A-z_O}{z_C-z_O}=\dfrac{z_A}{z_C}$ ومنه: $\dfrac{z_A-z_O}{z_C-z_O}=\dfrac{2e^{i\frac{\pi}{6}}}{2e^{i\frac{-\pi}{2}}}$ ومنه: $\dfrac{z_A-z_O}{z_C-z_O}=e^{i\frac{\pi}{6}}e^{i\frac{\pi}{2}}$ ومنه: $\boxed{\dfrac{z_A-z_O}{z_C-z_O}=e^{i\frac{2\pi}{3}}}$

هذا يعني أن: زاوية الدوران r الذي مركزه O ويحول C إلى A هي: $\dfrac{2\pi}{3}$

✎ العبارة المركبة للدوران r هي: $\boxed{z'=e^{i\frac{2\pi}{3}}z}$

ب. إثبات أن صورة (E) بالدوران r هي محور القطعة $[OB]$

لدينا: O مركز الدوران r فإن O نقطة صامدة بالدوران r

ولدينا: $z'=e^{i\frac{2\pi}{3}}z_A$ وبالتالي: $z'=e^{i\frac{2\pi}{3}}\left(2e^{i\frac{\pi}{6}}\right)$ ومنه: $z'=2e^{i\frac{5\pi}{6}}=z_B$

هذا يعني أن: الدوران r الذي مركزه O ويحول A إلى B (B صورة A بالدوران r)

لدينا مما سبق: (E) هي محور القطعة $[OA]$

وبالتالي صورة محور القطعة $[OA]$ بالدوران r هي محور القطعة $[OB]$