الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

1) حساب إحتمال كل من الحوادث التالية :

أ. A " الكريات المسحوبة من نفس اللون"

معناه " سحب ثلاث كريات حمراء من U_1" أو " سحب ثلاث كريات سوداء من U_3" أو " سحب ثلاث كريات حمراء من U_3" أو " سحب ثلاث كريات بيضاء من U_3"

لدينا: $P(A)=\frac{3}{6}\times\frac{C_3^3}{C_5^3}+\frac{1}{6}\times\frac{3^3+1^3+1^3}{5^3}=\frac{133}{1500}$ إذن: $\boxed{P(A)=\frac{133}{1500}}$

ب. B " الكريات المسحوبة مختلفة اللون مثنى مثنى"

معناه"سحب كرية بيضاء وكرية سوداء وكرية حمراء من U_2" أو "سحب كرية بيضاء وكرية سوداء وكرية حمراء من U_3"

لدينا: $P(B)=\frac{2}{6}\times\frac{A_2^1\times A_2^1\times A_1^1\times 6}{A_5^3}+\frac{1}{6}\times\frac{3\times1\times1\times6}{5^3}=\frac{59}{375}$ إذن: $\boxed{P(B)=\frac{59}{375}}$

ج. C" الكريات المسحوبة من لونين مختلفين "

معناه " سحب كريتين حمراوتين وكرية بيضاء من U_1" أو" سحب كريتين بيضاوين وكرية حمراء من U_1"

أو " سحب كريتين بيضاوين وكرية (سوداء أو حمراء) من U_2" أو" سحب كريتين سوداوين وكرية (بيضاء أو حمراء) من U_2"

أو " سحب كريتين سوداوين وكرية (بيضاء أو حمراء) من U_3" أو " سحب كريتين بيضاوين وكرية (سوداء أو حمراء) من U_3"

أو " سحب كريتين حمراوتين وكرية (بيضاء أو سوداء) من U_3"

لدينا: $P(C)=\frac{3}{6}\times\frac{C_3^2\times C_2^1+C_3^1\times C_2^2}{C_5^3}+\frac{2}{6}\times\frac{\left(A_2^2\times A_3^1+A_2^2\times A_3^1\right)\times3}{A_5^3}+\frac{1}{6}\times\frac{\left(3^2\times2+1^2\times4+1^2\times4\right)\times3}{5^3}$

إذن: $\boxed{P(C)=\frac{377}{500}}$

يمكن حسابها أيضا بإستعمال الحادثة العكسية.

لدينا: $\overline{C}$ " الكريات المسحوبة من نفس اللون أو مختلفة اللون مثنى مثنى"

ومنه $P(C)=1-P(\overline{C})=1-(P(A)+P(B))=1-\left(\frac{133}{1500}+\frac{59}{375}\right)$ إذن: $\boxed{P(C)=\frac{377}{500}}$

2) X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب عدد الكريات البيضاء المسحوبة.

أ. تعيين قيم الممكنة للمتغير العشوائي X. $\boxed{\{0;1;2;3\}}$

ب. تحديد قانون احتمال المتغير العشوائي X

- من أجل $X=0$ معناه " سحب ثلاث كريات ليست بيضاء"

لدينا: $P(X=0)=\frac{3}{6}\times\frac{C_3^3}{C_5^3}+\frac{2}{6}\times\frac{A_3^3}{A_5^3}+\frac{1}{6}\times\frac{4^3}{5^3}=\frac{253}{1500}$ إذن: $\boxed{P(X=0)=\frac{253}{1500}}$

◄ من أجل $X=1$ معناه " سحب كرية بيضاء وكريتان ليستا بيضاء"

لدينا: $P(X=1)=\frac{3}{6}\times\frac{C_3^2\times C_2^1}{C_5^3}+\frac{2}{6}\times\frac{A_3^2\times A_2^1\times 3}{A_5^3}+\frac{1}{6}\times\frac{4^2\times 1\times 3}{5^3}=\frac{141}{250}$ إذن: $\boxed{P(X=1)=\frac{141}{250}}$

◄ من أجل $X=2$ معناه " سحب كريتان بيضاوين وكرية ليست بيضاء"

لدينا: $P(X=2)=\frac{3}{6}\times\frac{C_3^1\times C_2^2}{C_5^3}+\frac{2}{6}\times\frac{A_3^1\times A_2^2\times 3}{A_5^3}+\frac{1}{6}\times\frac{4\times 1^2\times 3}{5^3}=\frac{133}{500}$ إذن: $\boxed{P(X=2)=\frac{133}{500}}$

◄ من أجل $X=3$ معناه " سحب ثلاث كريات بيضاء"

لدينا: $P(X=3)=\frac{1}{6}\times\frac{1^3}{5^3}=\frac{1}{750}$ إذن: $\boxed{P(X=3)=\frac{1}{750}}$

x_i	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	$\frac{253}{1500}$	$\frac{141}{250}$	$\frac{133}{500}$	$\frac{1}{750}$

◄ حساب الأمل الرياضياتي.

لدينا : $E(X)=0\left(\frac{253}{1500}\right)+1\left(\frac{141}{250}\right)+2\left(\frac{133}{500}\right)+3\left(\frac{1}{750}\right)=\frac{11}{10}$ إذن: $\boxed{E(X)=\frac{11}{10}}$

التمرين الثاني: (05 نقاط)

I) البرهان باستعمال مبرهنة غوص أنّ : إذا كان b و c أوليين فيما بينهما فإن: $a\equiv 0[bc]$.

لدينا: $\begin{cases}a\equiv 0[b]\\ a\equiv 0[c]\end{cases}$ وبالتالي: $\begin{cases}a=bk\\ a=ck'\end{cases}$ حيث k و k' عددان صحيحان، هذا يعني أنّ: $bk=ck'$.

c يقسم bk، وبما أن c أولي مع b، فإنه حسب مبرهنة غوص فإن c يقسم k .

هذا يعني أنه يوجد عدد طبيعي k'' حيث $k=ck''$.

مما سبق $\begin{cases}a=bk\\ k=ck''\end{cases}$ وعليه $a=bck''$ ومنه a مضاعف للعدد bc إذن: $\boxed{a\equiv 0[bc]}$

II) 1) أ. دراسة حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية لكل من 4^n و 5^n على 9.

$4^0\equiv 1[9]$ | $4^1\equiv 4[9]$ | $4^2\equiv 7[9]$ | $4^3\equiv 1[9]$

بواقي القسمة الاقليدية للعدد 4^n على 9 تشكل متتالية دورية ودورها 3.

تعميم: من أجل $k\in\mathbb{N}$

$n=$	$3k$	$3k+1$	$3k+2$
$4^n\equiv$	1	4	7	[9]

$5^0\equiv 1[9]$ | $5^1\equiv 5[9]$ | $5^2\equiv 7[9]$ | $5^3\equiv 8[9]$ | $5^4\equiv 4[9]$ | $5^5\equiv 2[9]$ | $3^6\equiv 1[9]$

بواقي القسمة الاقليدية للعدد 5^n على 9 تشكل متتالية دورية ودورها 6.

تعميم: من أجل $\alpha\in\mathbb{N}$

$n=$	6α	$6\alpha+1$	$6\alpha+2$	$6\alpha+3$	$6\alpha+4$	$6\alpha+5$
$5^n\equiv$	1	5	7	8	4	2	[9]

ب.استنتاج باقي القسمة الإقليدية للعدد 21×1993^{2017} على 9 .

لدينا: $1993\equiv4[9]$ بالتالي: $1993^{2017}\equiv4^{2017}[9]$ بما أنّ: $2017=672(3)+1$ بالتالي: $1993^{2017}\equiv4[9]$

بما أنّ: $21\equiv3[9]$ و $1993^{2017}\equiv4[9]$ فإن: $21\times1993^{2017}\equiv12[9]$ أي أنّ: $\boxed{21\times1993^{2017}\equiv3[9]}$

إذن: باقي القسمة الإقليدية للعدد 21×1993^{2017} على 9 هو: 3

2) تعيين قيم العدد الطبيعي n التي تحقق :

$n=$	6α	$6\alpha+1$	$6\alpha+2$	$6\alpha+3$	$6\alpha+4$	$6\alpha+5$	من أجل $\alpha\in\mathbb{N}$
$5^n\equiv$	1	5	7	8	4	2	$[9]$
$4^n\equiv$	1	4	7	1	4	7	$[9]$
5^n+4^n	1	0	5	0	8	0	$[9]$

إذن: قيم العدد الطبيعي n التي تحقق $5^n+4^n\equiv0[9]$ هي: $n\in\{6\alpha+1;6\alpha+3;6\alpha+5\}$ حيث $\alpha\in\mathbb{N}$

$n=$	6α	$6\alpha+1$	$6\alpha+2$	$6\alpha+3$	$6\alpha+4$	$6\alpha+5$	من أجل $\alpha\in\mathbb{N}$
$5^n\equiv$	1	5	7	8	4	2	$[9]$
$4^n\equiv$	1	4	7	1	4	7	$[9]$
5^n-4^n	0	1	0	7	0	4	$[9]$

إذن: قيم العدد الطبيعي n التي تحقق $5^n-4^n\equiv0[9]$ هي: $n\in\{6\alpha;6\alpha+2;6\alpha+4\}$ حيث $\alpha\in\mathbb{N}$

$5^{2n}-4^{2n}\equiv0[9]$ هذا يعني أن: $\left(5^n\right)^2-\left(4^n\right)^2\equiv0[9]$ وبالتالي: $\left(5^n-4^n\right)\left(5^n+4^n\right)\equiv0[9]$

$\left(5^n-4^n\right)\left(5^n+4^n\right)\equiv0[9]$ يعني أن: $5^n+4^n\equiv0[9]$ أو $5^n-4^n\equiv0[9]$

إذن: قيم العدد الطبيعي n التي تحقق $5^{2n}-4^{2n}\equiv0[9]$: $n\in\{6\alpha;6\alpha+1;6\alpha+2;6\alpha+3;6\alpha+4;6\alpha+5\}/\alpha\in\mathbb{N}$

3) أ. التحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $4^{3n}\equiv1[7]$.

لدينا: $4^3=64=7(9)+1$ وبالتالي: $4^3\equiv1[7]$ هذا يعني أنّ: $4^{3n}\equiv1[7]$

إذن : من أجل كل عدد طبيعي n : $4^{3n}\equiv1[7]$.

ب. استنتاج أن العدد $4^{6k}-1$ يقبل القسمة على 63.

لدينا مما سبق: $\begin{cases}4^{3k}\equiv1[7]\\4^{3k}\equiv1[9]\end{cases}$ وبالتالي: $\begin{cases}4^{6k}\equiv1[7]\\4^{6k}\equiv1[9]\end{cases}$ وبالتالي: $\begin{cases}4^{6k}-1\equiv0[7]\\4^{6k}-1\equiv0[9]\end{cases}$

وبما أن: 7 و9 أوليين فيما بينهما فإن: $\boxed{4^{6k}-1\equiv0[63]}$

4) أ. تبيان أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $4^{3n}+4^{3n+1}+4^{3n+2}\equiv3[9]$

لدينا: $\begin{cases} 4^{3n} \equiv 1[9] \\ 4^{3n+1} \equiv 4[9] \\ 4^{3n+2} \equiv 7[9] \end{cases}$ وبالتالي: $4^{3n}+4^{3n+1}+4^{3n+2} \equiv 12[9]$ بما أن: $12 \equiv 3[9]$

إذن: من أجل كل عدد طبيعي n: $4^{3n}+4^{3n+1}+4^{3n+2} \equiv 3[9]$

ب.استنتاج قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها المجموع: $1+4+4^2+...+4^n \equiv 0[9]$

لدينا: $1+4+4^2+...+4^n$ مجموع حدود متتابعة لمتتالية هندسية أساسها $q=4$ وحدّها الأول 1

وبالتالي: $1+4+4^2+...+4^n = \left(\frac{4^{n+1}-1}{4-1}\right) = \frac{1}{3}\left(4^{n+1}-1\right)$

$1+4+4^2+...+4^n \equiv 0[9]$ هذا يكافئ: $4^{n+1}-1 \equiv 0[9]$ أي أن: $4^{n+1} \equiv 1[9]$ هذا يعني أن: $k \in \mathbb{N}^* / n=3k-1$

إذن: قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها المجموع: $1+4+4^2+...+4^n \equiv 0[9]$ هي: $k \in \mathbb{N}^* / n=3k-1$

التمرين الثالث:(04 نقاط) : لدينا: $z_A=2-2i$; $z_B=1+3i$ و $z_C=-3-3i$.

1) كتابة $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ على الشكل الجبري العدد المركب.

لدينا: $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\frac{-3-3i-2+2i}{1+3i-2+2i}$ ومنه: $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\frac{-5-i}{-1+5i}$ ومنه: $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\frac{(-5-i)(-1-5i)}{(-1+5i)(-1-5i)}$

ومنه: $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\frac{5-5+25i+i}{1^2+5^2}$

ومنه: $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\frac{26i}{26}$ إذن: $\boxed{\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=i}$

حساب طويلته وعمدته: $\left|\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right|=|i|=1$ و $arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)=arg(i)=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

استنتاج طبيعة المثلث ABC: بما أن: $\begin{cases} \left|\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right|=1 \\ arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)=\frac{\pi}{2} \end{cases}$ فإن: $\begin{cases} \frac{AC}{AB}=1 \\ \left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=\frac{\pi}{2} \end{cases}$

إذن: المثلث ABC قائم في A ومتساوي الساقين.

2) تبيان أنّ: $\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i=\left(\frac{z_A+z_B+z_C+2}{2\sqrt{2}}\right)^{2025}$.

لدينا: $\frac{z_A+z_B+z_C+2}{2\sqrt{2}}=\frac{2-2i+1+3i-3-3i+2}{2\sqrt{2}}$ ومنه: $\frac{z_A+z_B+z_C+2}{2\sqrt{2}}=\frac{2-2i}{2\sqrt{2}}$

ومنه: $\frac{z_A+z_B+z_C+2}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i$

وبالتالي: $\boxed{\dfrac{z_A+z_B+z_C+2}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}i}$

لدينا: $\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}i=e^{-i\frac{\pi}{4}}$ وبالتالي: $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right)^{2025}=\left(e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^{2025}$

وبالتالي: $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right)^{2025}=e^{-i\frac{2025\pi}{4}}$ بما أن: $\dfrac{2025\pi}{4}=-506\pi-\dfrac{\pi}{4}$

فإن: $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right)^{2025}=e^{-i\frac{\pi}{4}}$ إذن: $\boxed{\left(\dfrac{z_A+z_B+z_C+2}{2\sqrt{2}}\right)^{2025}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}i}$

3) أ.تعيين z_D لاحقة النقطة D بحيث: $\dfrac{z_D-z_B}{z_A-z_B}=2$

$\dfrac{z_D-z_B}{z_A-z_B}=2$ يكافئ: $z_D-z_B=2(z_A-z_B)$ يكافئ: $z_D=2z_A-z_B$ أي أن: $\boxed{z_D=3-7i}$

الإستنتاج بالنسبة النقط $A;B$ و D : بما أن: $\dfrac{z_D-z_B}{z_A-z_B}=2$ فإن: النقط $A;B$ و D في إستقامية.

ب. النقطة E نظيرة النقطة C بالنسبة للنقطة A معناه: $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{CA}$ وهذا يعني أن: $z_E-z_A=z_A-z_C$

✍ بيّن أنّ لاحقة النقطة E هي: $z_E=7-i$.

$z_E-z_A=z_A-z_C$ يكافئ: $z_E=2z_A-z_C$ وبالتالي: $z_E=2(2-2i)-(-3-3i)$ إذن: $\boxed{z_E=7-i}$

4) أ. بما أن: $\begin{cases}z_E-z_A=z_A-z_C\\ z_D=2z_A-z_B\end{cases}$ فإن: $\begin{cases}z_E-z_A=z_A-z_C\\ z_D-z_A=z_A-z_B\end{cases}$ هذا يعني أن القطعتين $[CE]$ و $[BD]$ متناصفتين

✍ إستنتاج طبيعة الرباعي $BCDE$.

بما أن: القطعتين $[CE]$ و $[BD]$ متناصفتين و المثلث ABC قائم في A ومتساوي الساقين

فإن: الرباعي $BCDE$ مربع.

ب. تعيين المجموعة (Γ) للنقط M من المستوي التي تحقق: $\left\|\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{ME}\right\|=2\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right\|$.

بما أن: E نظيرة النقطة C بالنسبة للنقطة A فإن منتصف القطعة $[CE]$ فإن: $\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{ME}=2\overrightarrow{MA}$

لدينا: $\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{BM}$ هذا يعني أن: لدينا: $\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{BA}$

$\left\|\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{ME}\right\|=2\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right\|$ يكافئ: $2MA=2BA$ يكافئ: $\boxed{MA=BA}$

إذن: مجموعة (Γ) للنقط M من المستوي التي تحقق: $\left\|\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{ME}\right\|=2\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right\|$ هي الدائرة التي نصف قطرها BA

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I) لدينا: $D=]0;+\infty[$ $\quad g(x)=1-x^2(1-ln(x))$

1) تبيان أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين أحدهما α حيث: $2,2<\alpha<2,3$ والأخر يطلب تعيينه.

« إنطلاقا من $(\mathcal{C}_g)$ ، $(\mathcal{C}_g)$ يقطع محور الفواصل في النقطة التي فاصلتها 1، هذا يعني أن $g(1)=0$.

◄ g مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]2{,}2;2{,}3[$ و $g(2{,}2)\times g(2{,}3)<0$ لآن: $\begin{cases} g(2{,}2)\simeq -0{,}02 \\ g(2{,}3)\simeq 0{,}12 \end{cases}$

فإنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $2{,}2<\alpha<2{,}3$.

2) تعيين حسب قيم x إشارة $g(x)$ على $]0;+\infty[$.

x	0		1		α		$+\infty$
$g(x)$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	

II) لدينا: $D=]0;e[\cup]e;+\infty[$ $\qquad f(x)=\dfrac{1}{x(1-ln(x))}$

1) حساب نهايات الدالة عند الأطراف المفتوحة لمجموعة تعريفها، ثم تفسير النتيجة المحصل عليها بيانيا.

◄ $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\dfrac{1}{x(1-ln(x))}=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\dfrac{1}{x-xln(x)}=+\infty$

لآن: $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}(x-xln(x))=0^+$ و $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}=+\infty$

◄ $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}e} f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{<}e}\dfrac{1}{x(1-ln(x))}=+\infty$ لآن: $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}e}(1-ln(x))=0^+$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}e} x=e$

◄ $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}e} f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}e}\dfrac{1}{x(1-ln(x))}=-\infty$ لآن: $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}e}(1-ln(x))=0^-$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}e} x=e$

◄ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x(1-ln(x))}=0$ لآن: $\lim\limits_{x\to+\infty} x(1-ln(x))=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}=0$

بما أن: $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}e} f(x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}e} f(x)=+\infty$

فإن $(\mathcal{C}_f)$ يقبل مستقيمين مقاربين موازيين لحامل محور التراتيب معادلة كل منهما $x=0$ و $x=e$.

بما أن: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ فإن $(\mathcal{C}_f)$ يقبل مستقيم مقارب موازي لحامل محور الفواصل معادلة $y=0$ عند $+\infty$.

2) أ. تبيان أنه من أجل كل x من $]0;e[\cup]e;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{ln(x)}{x^2(1-ln(x))^2}$

f قابلة للإشتقاق على $]0;e[\cup]e;+\infty[$ ودالتها المشتقة: $f'(x)=\dfrac{-\left(1-ln(x)+x\left(-\dfrac{1}{x}\right)\right)}{(x(1-ln(x)))^2}$

وبالتالي: $f'(x)=\dfrac{-(1-ln(x)-1)}{(x(1-ln(x)))^2}$ $\qquad$ إذن: $\boxed{f'(x)=\dfrac{ln(x)}{x^2(1-ln(x))^2}}$ (وهو المطلوب)

ب. تعيين إتجاه تغير الدالة f : إشارة $f'(x)$ من إشارة $ln(x)$

x	0		1		e		$+\infty$
$ln(x)$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$	

إذن: f متناقصة تماما على $]0;1]$ ومتزايدة تماما على كل من $[1;e[$ و $]e;+\infty[$.

شكل جدول تغيراتها.

x	0		1		e		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$	
$f(x)$	‖	$+\infty \searrow$	1	$\nearrow +\infty$	‖	$-\infty \nearrow$	0

3) أ.التحقق أنه من أجل كل x من $]0;e[\cup]e;+\infty[$: $f(x)-x=\dfrac{g(x)}{x(1-\ln(x))}$

لدينا: $f(x)-x=\dfrac{1}{x(1-\ln(x))}-x$ ومنه $f(x)-x=\dfrac{1-x^2(1-\ln(x))}{x(1-\ln(x))}$ أي: $\boxed{f(x)-x=\dfrac{g(x)}{x(1-\ln(x))}}$

ب. دراسة الوضعية النسبية للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ والمستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x$.

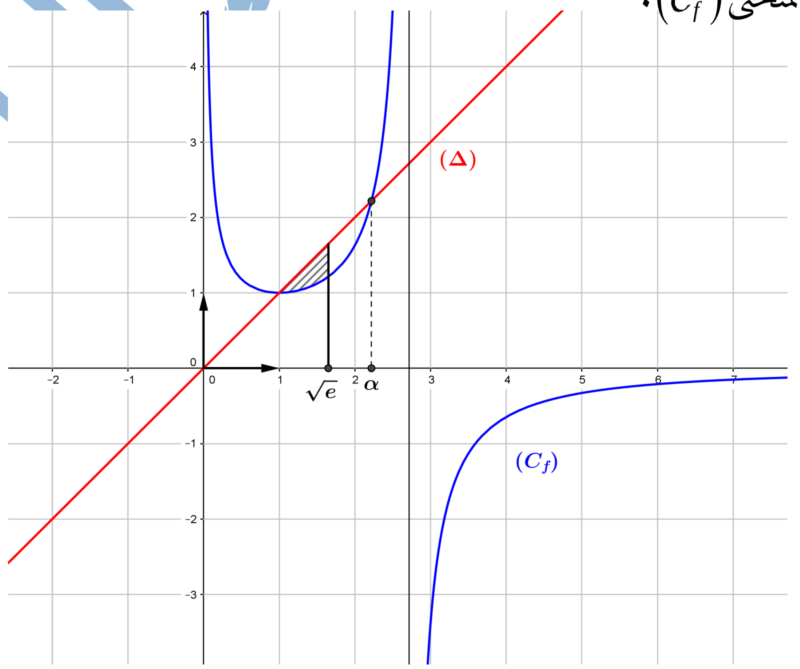
إشارة $f(x)-x$ من إشارة: $\dfrac{g(x)}{1-\ln(x)}$ لأن: $x>0$

x	0		1		α		e		$+\infty$
$g(x)$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$1-\ln(x)$	‖	$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$f(x)-x$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	‖	$-$	

إذن:

- $(\mathcal{C}_f)$ أعلى (Δ) على كل من المجالين: $]0;1[$ و $]\alpha;e[$.
- $(\mathcal{C}_f)$ أسفل (Δ) على كل من المجالين: $]1;\alpha[$ و $]e;+\infty[$.
- $(\mathcal{C}_f)$ يقطع (Δ) في كل من النقطتين: $A(1;1)$ و $B(\alpha;\alpha)$

4) إنشاء المستقيم (Δ) والمنحنى $(\mathcal{C}_f)$.



5) إثبات أنّ: $\int_1^{\sqrt{e}} \frac{1}{x(1-ln(x))}dx = ln(2)$

لدينا: $\int_1^{\sqrt{e}} \frac{1}{x(1-ln(x))}dx = -\int_1^{\sqrt{e}} \frac{-\frac{1}{x}}{1-ln(x)}dx$ (هي من الشكل $\frac{u'}{u}$)

ومنه: $\int_1^{\sqrt{e}} \frac{1}{x(1-ln(x))}dx = -ln(1-ln(x))\Big|_1^{\sqrt{e}}$

ومنه: $\int_1^{\sqrt{e}} \frac{1}{x(1-ln(x))}dx = -ln(1-ln(\sqrt{e})) + \cancel{ln(1-ln(1))}$ ومنه: $\int_1^{\sqrt{e}} \frac{1}{x(1-ln(x))}dx = -ln\left(\frac{1}{2}\right)$

إذن: $\boxed{\int_1^{\sqrt{e}} \frac{1}{x(1-ln(x))}dx = ln(2)}$

حساب بـ cm^2، A مساحة حيز المستوي المحدد بالمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ والمستقيم (Δ) والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x=1$ و $x=\sqrt{e}$.

بما أنّ: $f(x)-x<0$ من أجل $x\in[1;\sqrt{e}]$

فإن: $A = -\int_1^{\sqrt{e}} \frac{1}{x(1-ln(x))} - x\,dx$ وبالتالي: $A = -\int_1^{\sqrt{e}} \frac{1}{x(1-ln(x))}dx + \int_1^{\sqrt{e}} xdx$

وبالتالي: $A = \left(-ln(2) + \left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^{\sqrt{e}}\right) 2^2 cm^2$

وبالتالي: $A = \left(-ln(2) + \frac{1}{2}e - \frac{1}{2}\right) 4cm^2$

إذن: $\boxed{A = (-4ln(2) + 2e - 2)cm^2}$

III) المتتالية العددية (u_n) المعرفة بـ $u_0 = 2$ ومن أجل كل n من $\mathbb{N}$: $u_{n+1} = f(u_n)$

1) البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $1 \le u_n \le \alpha$

- من أجل $n=0$: $1 \le u_0 = 2 \le \alpha$ (محققة)
- من أجل $n\in\mathbb{N}$: نفرض أنّ: $1\le u_n \le \alpha$ صحيحة من أجل n ونبرهن أنّ: $1 \le u_{n+1} \le \alpha$ صحيحة من أجل $n+1$.

لدينا من فرضية التراجع: $1 \le u_n \le \alpha$

بما أن: f متزايدة تماما على كل من $[1;\alpha]$ فإن: $f(1) \le f(u_n) \le f(\alpha)$

ومنه: $1 \le f(u_n) \le \alpha$ هذا يعني أنّ: $1 \le u_{n+1} \le \alpha$ صحيحة

إذن: من أجل كل عدد طبيعي n: $1 \le u_n \le \alpha$

2) تبيان أن المتتالية (u_n) متناقصة.

لدينا مما سبق: $f(x)-x<0$ من أجل كل $x\in[1;\alpha]$

وبالتالي: $f(u_n)-u_n<0$ لآنّ: $1\le u_n\le\alpha$

هذا يعني أنّ: $u_{n+1}-u_n<0$ إذن: المتتالية (u_n) متناقصة

3) الاستنتاج : بما أن (u_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل بالعدد 1 فإن (u_n) متقاربة.

4) تحديد نهاية (u_n).

بما أن: (u_n) متقاربة فإن نهايتها موجودة ووحيدة $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=l$

نضع: $u_{n+1}=u_n=l$ أي أن: $\frac{1}{l(1-ln(l))}-l=0$ مما سبق (من الوضع النسبي) لدينا: $l=1$ أو $l=\alpha$ (مرفوضة)

إذن: $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=1}$

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (05 نقاط)

لدينا: $420x-945y=525......(E)$

1) إيجاد القاسم المشترك الأكبر للأعداد: 945 ؛ 420 و525 .

لدينا: $\begin{cases} 420=2^2\times3\times5\times7 \\ 945=3^3\times5\times7 \\ 525=3\times5^2\times7 \end{cases}$ ومنه: $PGCD(420;945;525)=3\times5\times7$ إذن: $\boxed{PGCD(420;945;525)=105}$

2) أ.إثبات أنه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حلا للمعادلة (E) فإن $x\equiv8[9]$.

بما أن: $PGCD(420;945;525)=105$ فإن: (E) تكافئ $(*)$ $4x-9y=5....(*)$

⇐ الثنائية $(x;y)$ حلا للمعادلة (E) هذا يعني أنّ: $4x=9y+5$ وبما أنّ: 4 و9 أوليان فيما بينهما

فإن: $4x\equiv5[9]$ هذا يعني أن: $4x\equiv-4[9]$ هذا يعني أن: $x\equiv-1[9]$ إذن: $\boxed{x\equiv8[9]}$

ب. استنتاج حلول المعادلة (E).

مما سبق: $x\equiv8[9]$ هذا يعني أنّ: $\boxed{x=9k+8}$ حيث $k\in\mathbb{Z}$.

بتعويض قيمة x في $(*)$ نجد: $4(9k+8)-9y=5$ ومنه: $4(9k)+32-9y=5$ ومنه: $\boxed{y=4k+3}$ حيث $k\in\mathbb{Z}$

إذن: حلول المعادلة (E): $(x;y)=(9k+8;4k+3)$ حيث $k\in\mathbb{Z}$

3) أ. دراسة حسب قيم العدد الطبيعي n، بواقي القسمة الاقليدية للعدد 9^n على 11 .

$9^0\equiv1[11]$ | $9^1\equiv9[11]$ | $9^2\equiv4[11]$ | $9^3\equiv3[11]$ | $9^4\equiv5[11]$ | $9^5\equiv1[11]$

بواقي القسمة الاقليدية للعدد 9^n على 11 تشكل متتالية دورية ودورها 5.

تعميم: من أجل $\alpha\in\mathbb{N}$

$n=$	5α	$5\alpha+1$	$5\alpha+2$	$5\alpha+3$	$5\alpha+4$
$9^n\equiv$	1	9	4	3	5	$[11]$

ب. تعيين الثنائيات الطبيعية $(x;y)$ التي هي حلول المعادلة (E) والتي تحقق: $2033^{x-y}+y+2\equiv0[11]$.

لدينا: $2033\equiv9[11]$

بما أنّ: $x-y=9k+8-(4k+3)=5k+5=5(k+1)$ فإن: $2033^{x-y}\equiv9^{5(k+1)}[11]$ أي: $\boxed{2033^{x-y}\equiv1[11]}$

لدينا: $y+2\equiv4k+3+2[11]$ وبالتالي: $\boxed{y+2\equiv4k+5[11]}$

وبالتالي: $2033^{x-y}+y+2\equiv1+4k+5[11]$ أي أنّ: $2033^{x-y}+y+2\equiv4k+6[11]$

حتى يكون: $2033^{x-y}+y+2\equiv0[11]$ فإن: $4k+6\equiv0[11]$ أي أن: $4k\equiv-6[11]$ أي أن: $12k\equiv-18[11]$

وبالتالي: $k\equiv-18[11]$ بما أنّ: $-18\equiv4[11]$ فإن: $k\equiv4[11]$ هذا يعني أنّ: $k=11\alpha+4$ حيث $\alpha\in\mathbb{N}$

إذن: الثنائيات الطبيعية $(x;y)$ التي هي حلول المعادلة (E) والتي تحقق: $2033^{x-y}+y+2\equiv0[11]$ هي:

$(x;y)=(9(11\alpha+4)+8;4(11\alpha+4)+3)$ حيث $\alpha\in\mathbb{N}$

أي أن: $(x;y)=(99\alpha+44;44\alpha+19)$ حيث $\alpha\in\mathbb{N}$

4) لدينا: $a=9n+8$ و $b=4n+3$ وليكن $d=PGCD(a;b)$.

أ. تعيين القيم الممكنة للعدد d.

بما أن: $d=PGCD(a;b)$ فإن: d يقسم a و b.

وبالتالي: d يقسم $4a-9b$ ، ولدينا: $4a-9b=4(9n+8)-9(4n+3)=5$

وبالتالي: d يقسم 5

هذا يعني أن: $d\in D_5$ إذن القيم الممكنة للعدد d هي: $d\in\{1;5\}$

ب. تعيين الأعداد الطبيعية n التي من أجلها يكون $d=5$.

5 يقسم a و b وبالتالي: 5 يقسم $3a-7b$ ، ولدينا: $3a-7b=3(9n+8)-7(4n+3)=-n+3$

وبالتالي: 5 يقسم $-n+3$ وبالتالي: 5 يقسم $n-3$

هذا يعني أن: $n-3$ مضاعف لـ 5

وبالتالي: $n-3=5\lambda$ أي أن: $n=5\lambda+3$ حيث $\lambda\in\mathbb{N}$

إذن: الأعداد الطبيعية n التي من أجلها يكون $d=5$ هي: $n=5\lambda+3$ حيث $\lambda\in\mathbb{N}$

5) لدينا: $A=9n^2+17n+8$ و $B=4n^2+7n+3$

أ. تبيان أن العددين A و B يقبلان القسمة على $n+1$: لدينا: $\begin{cases}A=(n+1)(9n+8)\\B=(n+1)(4n+3)\end{cases}$

هذا يعني أنّ: العددين A و B يقبلان القسمة على $n+1$

ب. إيجاد بدلالة n وحسب قيم n ، القاسم المشترك الأكبر للعددين A و B.

لدينا: $\begin{cases}A=(n+1)a\\B=(n+1)b\end{cases}$ ومنه $PGCD(A;B)=(n+1)PGCD(a;b)$

- إذا كان $PGCD(a;b)=1$ فإن: $\boxed{PGCD(A;B)=n+1}$
- إذا كان $PGCD(a;b)=5$ فإن: $\boxed{PGCD(A;B)=5(n+1)}$

إجابة إضافية ، إنطلاقا مما سبق،

- إذا كان $n=5\lambda+3$ حيث $\lambda\in\mathbb{N}$ فإن: $\boxed{PGCD(A;B)=5(n+1)}$
- إذا كان $n=5\lambda+r$ حيث $\lambda\in\mathbb{N}$ مع $r\in\{0;1;2;4\}$ فإن: $\boxed{PGCD(A;B)=n+1}$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-\sqrt{3}z+1=0$

نعلم أنّ: $\Delta=b^2-4ac$ وبالتالي: $\Delta=(-\sqrt{3})^2-4(1)(1)=-1=i^2$

المعادلة تقبل حلين مركبين مرافقين: $z_1=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}$ و $z_2=\overline{z_1}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}$ إذن: $\boxed{S=\left\{\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right\}}$

2) لدينا: $z_A=e^{i\frac{\pi}{6}}$ و $z_B=\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

أ. كتابة العدد z_A على الشكل الجبري .

لدينا: $z_A = e^{i\frac{\pi}{6}} = cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\,sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$ إذن: $\boxed{z_A = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i}$

ب. تحقق أن: $\overline{z_A} \times z_B = \sqrt{3}$

لدينا: $\overline{z_A} \times z_B = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)\left(\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ومنه $\overline{z_A} \times z_B = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \cancel{\frac{1}{2} \times \frac{3}{2}i} + \cancel{\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}i}$

ومنه $\overline{z_A} \times z_B = \frac{3\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}$ إذن: $\boxed{\overline{z_A} \times z_B = \sqrt{3}}$

3) تبيان أنّ النقطة B هي صورة النقطة A بتحاك h مركزه O يطلب تحديد نسبته.

لدينا: $\begin{cases} h(O) = O \\ h(A) = B \end{cases}$ أي أن: $\overrightarrow{OB} = k\overrightarrow{OA}$

وبالتالي: $z_B = kz_A$ أي أن: $\frac{z_B}{z_A} = k$ هذا يعني أنّ: $\frac{\overline{z_A} \times z_B}{\overline{z_A} \times z_A} = k$ نعلم أنّ: $\overline{z_A} \times z_A = |z_A|^2$ أي أنّ: $\overline{z_A} \times z_A = 1$

وبالتالي: $\overline{z_A} \times z_B = k$ ومما سبق: $\overline{z_A} \times z_B = \sqrt{3}$ إذن: $\boxed{k = \sqrt{3}}$

التحاكي h مركزه O ونسبته $k = \sqrt{3}$.

4) لدينا: M' صورة النقطة M بالدوران الذي مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$

أ. كتابة z' بدلالة: z و z_A .

نعلم أن العبارة المركبة للدوران الذي مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$ هي: $z' - z_A = e^{i\frac{\pi}{2}}(z - z_A)$

وبالتالي: $z' - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = i\left(z - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)\right)$

وبالتالي: $z' - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i = iz + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

وبالتالي: $\boxed{z' = iz + \frac{1+\sqrt{3}}{2} + \frac{1-\sqrt{3}}{2}i}$

ب. تبيان أنّ: $z_D = z_A + 1$.

بما أن: z_D لاحقة النقطة D صورة النقطة C بالدوران R فإن: $z_D = iz_C + \frac{1+\sqrt{3}}{2} + \frac{1-\sqrt{3}}{2}i$ ، حيث: $z_C = \overline{z_A}$

وبالتالي: $z_D = i\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) + \frac{1+\sqrt{3}}{2} + \frac{1-\sqrt{3}}{2}i$ وبالتالي: $z_D = \frac{2+\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ أي: $z_D = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

إذن: $\boxed{z_D = z_A + 1}$

ج. لدينا: $z_I = 1$ ، تبيان أنّ $ADIO$ معين.

لدينا مما سبق: $z_D=z_A+1$ وبالتالي: $z_D-z_A=1$ أي أن: $z_D-z_A=z_I-z_O$ أي: $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{OI}$

هذا يعني أنّ: $ADIO$ متوازي أضلاع ……… (1) (ضلاعان متقابلان متوازيان ومتقايسان)

من جهة أخرى لدينا: $\frac{z_A-z_O}{z_I-z_O}=\frac{z_A}{z_I}$ وبالتالي: $\frac{z_A-z_O}{z_I-z_O}=\frac{e^{i\frac{\pi}{6}}}{e^{i0}}=e^{i\frac{\pi}{6}}$ وبالتالي: $\begin{cases}\left|\frac{z_A-z_O}{z_I-z_O}\right|=1\\ arg\left(\frac{z_A-z_O}{z_I-z_O}\right)=\frac{\pi}{6}\end{cases}$

يكافئ: $\begin{cases}OA=OI\\ \left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OI}\right)=\frac{\pi}{6}+2k\pi\end{cases}$ حيث $k\in\mathbb{Z}$ ……… (2) (ضلاعان متجاوران متقايسان والزاوية بينهما ليست قائمة)

من (1) و(2) نستنتج أنّ: $ADIO$ معين.

5) التحقق من أنّ: $z_D-z_B=\frac{\sqrt{3}-1}{2}(1-i)$.

لدينا: $z_D-z_B=1+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i-\left(\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ومنه: $z_D-z_B=1+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i-\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$

ومنه: $z_D-z_B=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}+\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)i$

ومنه: $z_D-z_B=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}-\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)i$

ومنه: $z_D-z_B=\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(1-i)$

إذن: $\boxed{z_D-z_B=\frac{\sqrt{3}-1}{2}(1-i)}$

استنتاج عمدة للعدد z_D-z_B:

مما سبق: $z_D-z_B=\frac{\sqrt{3}-1}{2}(1-i)$ وبالتالي: $arg(z_D-z_B)=arg\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}(1-i)\right)$

وبالتالي: $arg(z_D-z_B)=arg\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)+arg(1-i)$

وبالتالي: $arg(z_D-z_B)=arg(1-i)$

وبالتالي: $arg(1-i)=-\frac{\pi}{4}+2k\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$

إذن: $\boxed{arg(z_D-z_B)=-\frac{\pi}{4}+2k\pi}$ حيث $k\in\mathbb{Z}$

التمرين الثالث: (04 نقاط)

1) تعيين قيمة n علما أن : $P_A(B)=\dfrac{8}{15}$:

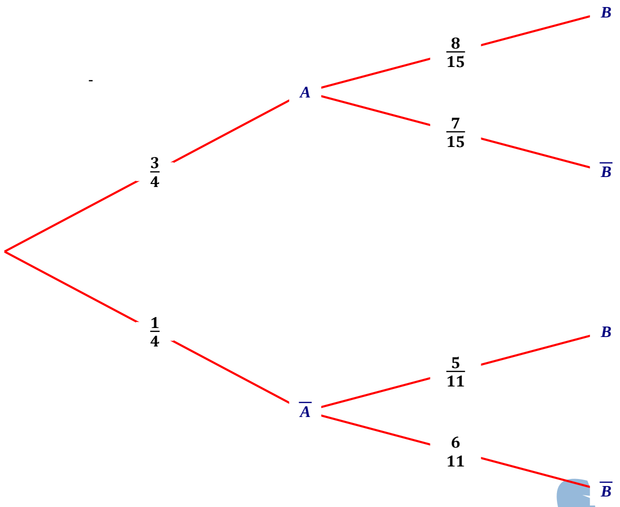
لدينا: $P_A(B)=\dfrac{A_n^2+A_{10-n}^2}{A_{10}^2}$ ومنه: $P_A(B)=\dfrac{n(n-1)+(10-n)(9-n)}{10\times 9}$ أي: $P_A(B)=\dfrac{n^2-10n+45}{45}$

$P_A(B)=\dfrac{8}{15}$ يكافئ: $\dfrac{n^2-10n+45}{45}=\dfrac{8}{15}$ هذا يعني أن: $n=3$ (مقبولة) أو $n=7$ (مرفوض) لآن $2<n<6$

حساب $P_{\overline{A}}(B)$ ، مما سبق $n=3$

لدينا: $P_{\overline{A}}(B)=\dfrac{C_5^2+C_6^2}{C_{11}^2}=\dfrac{5}{11}$ إذن: $\boxed{P_{\overline{A}}(B)=\dfrac{5}{11}}$

2) نضع $n=3$ ، تشكيل شجرة الاحتمالات.



حساب $P(A\cap B)$ احتمال الحادثة $A\cap B$

لدينا: $P(A\cap B)=\dfrac{3}{4}\times\dfrac{8}{15}$ إذن: $\boxed{P(A\cap B)=\dfrac{2}{5}}$

تبيان أن احتمال الحادثة B يساوي $\dfrac{113}{220}$.

لدينا: $P(B)=P(A\cap B)+P(\overline{A}\cap B)$

وبالتالي: $P(B)=\dfrac{2}{5}+\dfrac{1}{4}\times\dfrac{5}{11}$ إذن: $\boxed{P(B)=\dfrac{113}{220}}$

ب. حساب احتمال ظهور الرقم 1 علما أن الكريتين المسحوبتين من لونين مختلفين أي حساب $P_B(A)$

نعلم أنّ: $P_B(A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$ وبالتالي: $P_B(A)=\dfrac{\frac{2}{5}}{\frac{113}{220}}$ إذن: $\boxed{P_B(A)=\dfrac{88}{113}}$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I) لدينا: $D=\mathbb{R}$ $\qquad f(x)=4x\left(e^{-x}+\dfrac{1}{2}x-1\right)$

1) تبيان أن: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$:

لدينا: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} 4x\left(e^{-x}+\dfrac{1}{2}x-1\right)$

نضع: $X=-x$ ، وبالتالي: $x=-X$ بما أن: $x\longrightarrow-\infty$ فإن: $X\longrightarrow+\infty$

ومنه $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{X\to-\infty} 4(-X)\left(e^{X}+\dfrac{1}{2}(-X)-1\right)$ ومنه: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{X\to+\infty} -4X\left(e^{X}-\dfrac{1}{2}X-1\right)$

ومنه: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{X\to+\infty} -\cancel{4X^2}^{-\infty}\left(\cancel{\frac{e^X}{X}}^{+\infty}-\frac{1}{2}-\cancel{\frac{1}{X}}^{0}\right)$ إذن: $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty}$

◂◂ حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} 4\cancel{x}^{+\infty}\left(\cancel{e^{-x}}^{0}+\frac{1}{2}\cancel{x}^{+\infty}-1\right)=+\infty$

2) أ. تبيان أن الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ وأن: $f'(x)=4(1-e^{-x})(x-1)$

بما أن f هي مجموع دالتان قابلتان للإشتقاق على $\mathbb{R}$ فإن الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$.

لدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)=4\left(e^{-x}+\frac{1}{2}x-1\right)+4x\left(-e^{-x}+\frac{1}{2}\right)$

وبالتالي: $f'(x)=4e^{-x}-4xe^{-x}+4x-4$ وبالتالي: $f'(x)=-(-4+4x)e^{-x}+4x-4$

وبالتالي: $f'(x)=(-e^{-x}+1)(-4+4x)$

وبالتالي: $f'(x)=4(-e^{-x}+1)(-1+x)$

إذن: من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $\boxed{f'(x)=4(1-e^{-x})(x-1)}$

ب. دراسة اتجاه تغير الدالة f على $\mathbb{R}$:

نضع: $f'(x)=0$ يكافئ: $(-e^{-x}+1)(-1+x)=0$ يكافئ: $\begin{cases}-1+x=0\\ -e^{-x}+1=0\end{cases}$ يكافئ: $\begin{cases}x=1\\ x=0\end{cases}$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$-e^{-x}+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

إذن: f متزايدة تماما على كل من $]-\infty;0]$ و $[1;+\infty[$ و f متناقصة تماما على كل من $[0;1]$

◂◂ شكل جدول تغيراتها.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$4e^{-1}-2$	$\nearrow$	$+\infty$

ج. تبيان أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين أحدهما معدوم والآخر α حيث أن: $1{,}5<\alpha<2$.

✎ إنطلاقا من جدول التغيرات $f(0)=0$ هذا يعني أن 0 هو حل للمعادلة $f(x)=0$.

✎ f معرفة ومستمرة ومتزايدة تماما على $]1{,}5;2[$ و $f(1{,}5)\times f(2)<0$ لآن $\begin{cases}f(1{,}5)\simeq-0{,}161\\ f(2)\simeq1{,}083\end{cases}$

فإنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $1{,}5<\alpha<2$

إذن: المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين أحدهما معدوم والآخر α حيث أن: $1,5<\alpha<2$

◂◂ إستنتاج أنّ: $e^{-\alpha}=1-\dfrac{\alpha}{2}$

لدينا مما سبق: $f(\alpha)=0$ حيث أن: $1,5<\alpha<2$

وبالتالي: $4\alpha\left(e^{-\alpha}+\dfrac{1}{2}\alpha-1\right)=0$ وبالتالي: $e^{-\alpha}+\dfrac{1}{2}\alpha-1=0$ لآن: $\alpha\neq 0$ $(1,5<\alpha<2)$

وبالتالي: $\boxed{e^{-\alpha}=1-\dfrac{1}{2}\alpha}$ **وهو المطلوب**

د. تبيان أن معادلة المماس (T) للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ عند نقطته ذات الفاصلة α هي: $y=2\alpha(\alpha-1)(x-\alpha)$

لدينا: $(T): y=f'(\alpha)(x-\alpha)+f(\alpha)$

لدينا: $f'(\alpha)=4\left(1-e^{-\alpha}\right)(\alpha-1)$ ومنه: $f'(\alpha)=4\left(1-1+\dfrac{\alpha}{2}\right)(\alpha-1)$ ومنه: $f'(\alpha)=2\alpha(\alpha-1)$

وبالتالي: $\boxed{(T): y=2\alpha(\alpha-1)(x-\alpha)}$ **وهو المطلوب.**

3) أ. ارسم المماس (T) المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ (نأخذ: $f(-1)=-5$; $f(e)=4,5$ و $\alpha=1,6$)

ب. المناقشة وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة: $\left(-2x^2+4x+m\right)e^{x}=4x....(*)$

$\left(-2x^2+4x+m\right)e^{x}=4x$ تكافئ: $-2x^2+4x+m=4xe^{-x}$ تكافئ: $m=4xe^{-x}+2x^2-4x$

تكافئ: $m=4x\left(e^{-x}+\dfrac{1}{2}x-1\right)$

تكافئ: $f(x)=m$

حلول المعادلة $\left(-2x^2+4x+m\right)e^{x}=4x$ هي فواصل نقط تقاطع $(\mathcal{C}_f)$ مع المستقيم ذي المعادلة $y=m$.

◂◂ من أجل $m\in\left]-\infty;4e^{-1}-2\right[$ فإن المعادلة $(*)$ تقبل حلا وحيدا.

◂◂ من أجل $m=4e^{-1}-2$ فإن المعادلة $(*)$ تقبل حلين مختلفين.

◂◂ من أجل $m\in\left]4e^{-1}-2;0\right[$ فإن المعادلة $(*)$ تقبل ثلاث حلول.

◂◂ من أجل $m=0$ فإن المعادلة $(*)$ تقبل حلين مختلفين.

◂◂ من أجل $m\in\left]0;+\infty\right[$ فإن المعادلة $(*)$ تقبل حلا وحيدا.

4) باستعمال المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ بين أنه من أجل كل x من المجال $\left]-\infty;\alpha\right]$ فإن: $f(x)\leq 0$

بما أن: $(\mathcal{C}_f)$ تحت حامل الفواصل في المجال $\left]-\infty;\alpha\right]$ فإن: $f(x)\leq 0$.

ب) باستعمال المكاملة بالتجزئة إيجاد العدد الحقيقي: $\displaystyle\int_0^{\alpha} xe^{-x}dx$

نضع: $\begin{cases}u(x)=x\\ v'(x)=e^{-x}\end{cases}$ ومنه: $\begin{cases}u'(x)=1\\ v(x)=-e^{-x}\end{cases}$

لدينا: $\int_0^{\alpha} xe^{-x}dx=\left[-xe^{-x}\right]_0^{\alpha}-\int_0^{\alpha}\left(-e^{-x}\right)dx$ وبالتالي: $\int_0^{\alpha} xe^{-x}dx=\left[-xe^{-x}-e^{-x}\right]_0^{\alpha}$

وبالتالي: $\int_0^{\alpha} xe^{-x}dx=\left[(-1-x)e^{-x}\right]_0^{\alpha}$

وبالتالي: $\boxed{\int_0^{\alpha} xe^{-x}dx=(-1-\alpha)e^{-\alpha}+1}$

ج) حساب $A(\alpha)$ مساحة للحيز المستوي والمحدد بالمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ وحامل محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتيهما $x=0$ و $x=\alpha$ و التحقق أن: $A(\alpha)=\frac{2\alpha(3-\alpha^2)}{3}cm^2$

بما أن: من أجل كل x من المجال $[0;\alpha]$: $f(x)\leq 0$ فإن: $\boxed{A(\alpha)=-\int_0^{\alpha} f(x)dx}$

وبالتالي: $A(\alpha)=-\int_0^{\alpha} 4x\left(e^{-x}+\frac{1}{2}x-1\right)dx$ أي أن: $A(\alpha)=-\int_0^{\alpha} 4xe^{-x}dx-\int_0^{\alpha}\left(2x^2-4x\right)dx$

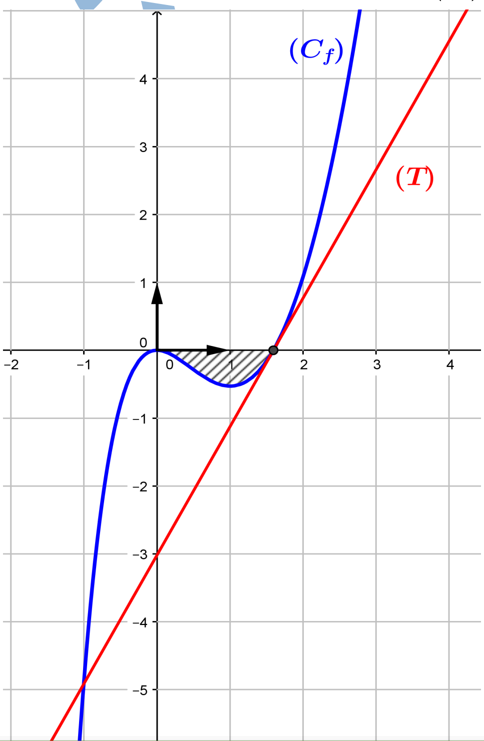
وبالتالي: $A(\alpha)=-4\left((-1-\alpha)e^{-\alpha}+1\right)-\left[\frac{2}{3}x^3-2x^2\right]_0^{\alpha}cm^2$

وبالتالي: $A(\alpha)=-4\left((-1-\alpha)e^{-\alpha}+1\right)-\frac{2}{3}\alpha^3+2\alpha^2cm^2$

وبالتالي: $A(\alpha)=-4\left((-1-\alpha)\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)+1\right)-\frac{2}{3}\alpha^3+2\alpha^2cm^2$

وبالتالي: $A(\alpha)=-2\alpha^2+2\alpha-\frac{2}{3}\alpha^3+2\alpha^2cm^2$ وبالتالي: $A(\alpha)=2\alpha-\frac{2}{3}\alpha^3cm^2$

وبالتالي: $A(\alpha)=\frac{2(3)\alpha-2\alpha^3}{3}cm^2$ إذن: $\boxed{A(\alpha)=\frac{2\alpha(3-\alpha^2)}{3}cm^2}$



II) لدينا: $u_{n+1}=f(u_n)+u_n$ و $u_0=1$

1) أ.البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n<\alpha$.

◄ من أجل $n=0$: $u_0=1<\alpha$ (محققة) لأن: $1,5<\alpha<2$

◄ من أجل $n\in\mathbb{N}$: نفرض أنّ: $u_n<\alpha$ صحيحة من أجل n ونبرهن أنّ: $u_{n+1}<\alpha$ صحيحة من أجل $n+1$.

لدينا من فرضية التراجع: $u_n<\alpha$

وبالتالي: $f(u_n)\le 0$ (إنطلاقا مما سبق من أجل كل $x\in]-\infty;\alpha]$ فإن: $f(x)\le 0$)

ومنه: $f(u_n)+u_n<\alpha$ هذا يعني أن: $u_{n+1}<\alpha$ صحيحة

إذن: من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n<\alpha$

ب.استنتاج اتجاه تغير المتتالية (u_n).

لدينا: $u_{n+1}-u_n=f(u_n)$ وبما أن: من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n<\alpha$ ومن أجل $x\in]-\infty;\alpha]$ فإن: $f(x)\le 0$

فإن: $u_{n+1}-u_n<0$ إذن: (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$.

2) أ.تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب x فإن: $f(x)+x\ge 0$.

من أجل كل عدد حقيقي موجب x فإن: $f(x)+x=f(x)-(-x)$.

إنطلاقا التمثيل البياني، $(\mathcal{C}_f)$ من أعلى المستقيم ذي المعادلة $y=-x$ (المنصف الثاني) ويتقاطعان في النقطة $\mathcal{O}(0;0)$.

إذن: من أجل كل عدد حقيقي موجب x فإن: $f(x)+x\ge 0$.

ب.البرهان أنه من أجل كل عدد طبيعي: $u_n\ge 0$.

◄ من أجل $n=0$: $u_0=1\ge 0$ (محققة)

◄ من أجل $n\in\mathbb{N}$: نفرض أنّ: $u_n\ge 0$ صحيحة من أجل n ونبرهن أنّ: $u_{n+1}\ge 0$ صحيحة من أجل $n+1$.

لدينا من فرضية التراجع: $u_n\ge 0$

وبالتالي: $f(u_n)+u_n\ge 0$ (إنطلاقا مما سبق من أجل كل $x\in[0;+\infty[$ فإن: $f(x)+x\ge 0$)

هذا يعني أن: $u_{n+1}\ge 0$ صحيحة

إذن: من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n\ge 0$

☙ المتتالية (u_n) متقاربة، لأن (u_n) متناقصة تماما ومحدودة من الأسفل بالعدد 0

انتهى الموضوع الثاني