



الثانوية: الحرية
المستوى: ثالثة ثانوي
المعامل: 5
قسم: 3+1+2



مديرية التربية لولاية قسنطينة
المادة: الرياضيات
الشعبة: علوم تجريبية
الإثنين 12 ماي 2025

المدة: 3 ساعات ونصف ساعة

البكالوريا البيضاء

دوره ماي 2025

على المترشحة أن تختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأولالتمرين الأول (4ن): من أجل k عدد طبيعي أكبر من أو يساوي 2.يحتوي صندوق على k كرية حمراء و 3 كريات بيضاء، نسحب عشوائياً ودون التمييز كريتان من هذا الصندوق على التوالي وبارجاع.

(كل الكريات متماثلة و لا تفرق بينها عند اللمس).

وتكون شروط اللعبة كالتالي:

-إذا كانت الكريتان المسحبتين بيضاوين فإن اللاعب يخسر 9DA.

-إذا كانت الكريتان المسحبتين حمراوين فإن اللاعب يخسر 1DA.

-إذا كانت الكريتان المسحبتين من لونين مختلفين فإن اللاعب يربح 5DA.

-إذا كان المتغير العشوائي الذي يرفق بربحية اللاعب (أي أن اللاعب سيربح).

(1) أ- أثبتني أن: $P(X_k = 5) = \frac{6k}{(k+3)^2}$.

ب- عرّفي قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X_k .2) نعتبر الأمل الرياضي $E(X_k)$ للمتغير العشوائي X_k ، عيني قيمة k التي من أجلها يتمكن اللاعب من الربح.التمرين الثاني (5ن):(1) أحسب $(\sqrt{2} + \sqrt{6})^2$ ، ثم حلّي في مجموعة الأعداد المركبة \mathbb{C} المعادلة (E) ذات المجهول z الآتية:

$$z^2 - 2(\sqrt{2} + \sqrt{6})z + 16 = 0 \dots \dots \dots (E)$$

2) في المستوى المركب المنسوب إلى معلم متعدد متجانس $(\vec{v}; \vec{u}; O)$ ، نعتبر النقط A ، B و C التي لاحقاتها على الترتيب: z_A ، z_B و z_C حيث: $z_A = (\sqrt{6} + \sqrt{2}) + i(\sqrt{6} - \sqrt{2})$ ، $z_B = 1 + i\sqrt{3}$ و $z_C = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$.أ- أثبتني أن: $z_A \times z_B \times z_C = z_A \times \bar{z}_C = 4z_B$ ، ثم إستنتجي أن: $z_A \times z_B \times z_C = 4z_B$.ب- أكتب كل من z_B و z_C على الشكل المثلثي.ج- إستنتجي الشكل الأسوي لـ z_A .3) لتكن D النقطة التي لاحتقتها $z_D = z_A^4$ ، حيث: M نقطة لاحتقتها z و M' نقطة لاحتقتها z' حيث:

$$z' = \frac{1}{4}z_A z$$

أ- ما طبيعة التحويل؟ ذكري عناصره المميزة.

ب- عيني صورة النقطة C بالتحويل النقطي.

ج - ما طبيعة المثلث BOC ? على الإجابة.

د - أثبت أن $z_A^4 = 128z_B^4$ ، ثم إستنتج أن النقط O ، B و D في إستقامية.

التمرين الثالث (4ن): لتكن المتالية (u_n) المعرفة بحدّها الأول $u_0 = 2$ ، ومن أجل كل عدد طبيعي n بـ:

$$u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n^2 + 3u_n - \frac{3}{2}$$

(1) أ- أحسب u_1 و u_2 (أكتب الحدين على شكل كسرين غير قابلين للإختزال) ، و u_3 و u_4 (بقيم تقريرية إلى 10^{-5}).

ب- ضعي تخميناً حول إتجاه تغير وتقرب المتالية (u_n) .

(2) نعتبر المتالية العددية (v_n) المعرفة على \mathbb{N} بـ $v_n = u_n - 3$.

أ- أثبت أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، فإن $v_{n+1} = -\frac{1}{2}v_n^2 - 1$.

ب- برهني بالترابع من أجل كل عدد طبيعي n أن $v_n \leq 0$.

ج - أدرسي إتجاه تغير المتالية (v_n) ، ثم إستنتاج أن المتالية (v_n) متقاربة.

(3) لتكن ℓ نهاية المتالية (v_n) ، ببّي أن $\ell^2 - \frac{1}{2} = \ell$ ، ثم عيّني قيمة ℓ .

(4) هل التخمين في السؤال الأول محقق؟

التمرين الرابع (7ن):

(1) بما أن $+\infty = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x}$ ، برهني أن $0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}$ (I)

(2) إستنتاج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n غير معروف ، فإن $0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n}$.

(3) نعتبر الدالة g المعرفة على $[0; +\infty)$ بـ $g(x) = x^3 - 1 + 2 \ln x$.

أ- أدرسي تغيرات الدالة g .

ب- أحسب $g'(0)$ ثم إستنتاج إشارة $g(x)$ على المجال $[0; +\infty)$.

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على $[0; +\infty)$ بـ $f(x) = x - \frac{\ln x}{x^2}$ ، و (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(\vec{i}; \vec{j}; O)$ ، (وحدة الطول: $2cm$).

(1) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

(2) أ- ببّي أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيماً مقارباً مائلاً (Δ) ، يطلب تعبيين معادلة له.

ب- أدرسي الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) .

(3) أكتب $f'(x)$ بدالة $g(x)$ ، حيث f' هي الدالة المشتقة للدالة f .

(4) إستنتاج إتجاه تغير الدالة f ، ثم شكّلي جدول تغيرات الدالة f .

(5) أرسمي كلا من (Δ) و (C_f) .

(III) لتكن $\mathcal{A}(\alpha)$ مساحة الحيز للمستوي المحدّد بالمنحنى (C_f) وبالمستقيمات: $x = 1$ ، $y = x$ و $x = \alpha$.

(1) أحسب $\mathcal{A}(\alpha)$ بدالة α ، حيث α عدد حقيقي أكبر تماماً من 1 ، ثم أحسب النهاية $\mathcal{A}(\alpha)$.

(2) لتكن: $\ell = \mathcal{A}\left(\frac{1}{e}\right)$ ، ببّي أن $\ell = \mathcal{A}\left(\frac{1}{e}\right)$

الموضوع الثاني

التمرين الأول (4ن):

يحتوي كيس على 8 كريات بيضاء و n كريمة سوداء (حيث: n عدد طبيعي أكبر أو يساوي 2). (الكريات لا تفرق بينها عند اللمس).

1) يقوم اللاعب بسحب كريتين على التوالي مع إرجاع الكريمة المسحوبة إلى الكيس، حيث:

- يربح اللاعب $1DA$ من أجل كل كريمة بيضاء مسحوبة.

- يخسر اللاعب $2DA$ من أجل كل كريمة سوداء مسحوبة.

ليكن X المتغير العشوائي الذي يرافق بكل عملية سحب ربح اللاعب.

أ- عيني القيم الممكنة للمتغير العشوائي X .

ب- عرفني قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X .

ج- أحسبني أمله الرياضياتي بدلالة n .

د- هل توجد قيمة للعدد n حتى يكون الأمل الرياضياتي معدوماً؟ (إن كانت الإجابة نعم، جدي n).

2) نفرض أننا سحبنا كريتين على التوالي دون إرجاع، ولتكن الحادتين:

"الحصول على كريتين من نفس اللون". A_n

"الحصول على كريتين من لونين مختلفين". B_n

أ- أحسبني $P(A_n)$ بدلالة n ، ثم أحسبني $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n)$. فسرني النتيجة.

ب- أحسبني $P(B_n)$ بدلالة n ، ثم أحسبني $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(B_n)$. فسرني النتيجة.

التمرين الثاني (5ن):

1) أحسبني $(1 + \sqrt{3})^2$ ، ثم حلّي في مجموعة الأعداد المركبة \mathbb{C} المعادلة (E) ذات المجهول z الآتية:

$$z^2 - \left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)z + \frac{1}{2} = 0 \dots \dots \dots (E)$$

2) في المستوى المركب المنسوب إلى معلم متعدد متجلّس $(\vec{v}; \vec{u}; \vec{v})$ ، نعتبر النقط A ، B ، C التي لاحقاتها على الترتيب: z_A, z_B, z_C حيث: $z_B = 1 - i\sqrt{3}$ ، $z_A = 1 + i$ و $z_C = \frac{1-\sqrt{3}}{4} + i\frac{1+\sqrt{3}}{4}$.

أ- أثبتني أن: $z_C = \frac{z_A}{z_B}$.

ب- أكتبني كل من z_A و z_B على الشكل المثلثي.

ج- إستنتجني الشكل الأسي لـ z_C .

د- إستنتاجي أن: $\tan \frac{7\pi}{12} = -2 - \sqrt{3}$.

3) لتكن D صورة النقطة B بالإنسحاب الذي شعاعه ذو اللاحقة: $2i\sqrt{3}$.

أ- ببّني أن: $z_D = \bar{z}_B$.

ب- أثبتني أن: $(\widehat{OD}; \widehat{OB}) = \arg \left(\frac{z_B}{z_D} \right) = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$; ($k \in \mathbb{Z}$).

ج- ببّني أن: $OD = OB$ ، ثم إستنتاجي طبيعة المثلث OBD .

د- إستنتاجي صورة النقطة D بالدوران الذي مركزه O وزاويته $\frac{2\pi}{3}$.

التمرين الثالث (4ن): لتكن (u_n) متتالية معرفة بحدّها الأول $u_0 = \frac{3}{2}$ ، ومن أجل كل عدد طبيعي n بالعلاقة

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{\sqrt{1+u_n}}$$

أ- أثبت أن $\sum u_n$ من أجل كل عدد طبيعي $n > 0$.

بـ- بيّنى أنَّ المتاليَة (u_n) متناقصة.

جــ إــســتــنــتــجــيــ أــنــ الــمــتــالــيــةــ (u_n) مــتــقــارــبــةــ، أــحــســبــيــ نــهــاــيــتــهــاــ.

2) لتكن المتالية (v_n) المعرفة بحدّها الأول: v_0 , وبالعلاقة التراجعية: $v_{n+1} = \frac{v_n}{u_n}$

أ-أثبتني أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معروف n ، $v_{n+1} \geq \frac{\sqrt{10}}{3} v_n$

ب-برهني بالترابع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معروف n ،

ج - أحسبi النهاية

نضع: (3) $n \geq 1$ ، حيث: $S_n = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{v_1^2} + \frac{1}{v_2^2} + \frac{1}{v_3^2} + \dots + \frac{1}{v_n^2} \right)$

أ- أثبتت أنّه من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$:

$$\frac{1}{v_1^2} + \frac{1}{v_2^2} + \frac{1}{v_3^2} + \cdots + \frac{1}{v_n^2} \leq \frac{45}{2} \left[1 - \left(\frac{9}{10} \right)^n \right]$$

ب-إسنتجي $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$

التمرين الرابع (7ن): نعتبر الدالة f المعرفة على \mathbb{R} بـ:

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(j; i; o)$ ،

وحدة الطول: (2cm)

أ-حسبى (1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

بـ- بيّني أنَّ المنحنى (C_f) يقبل مستقيماً مقارباً مائلاً (Δ) عند $(-\infty)$ ، يُطلب تعين معادلة له.

ج- أدرسي الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) .

(2) أ- أحسب $(x^f)'$ ، حيث: f هي الدالة المشتقة للدالة f .

ب-إِسْتَنْجِي إِتْجَاهَ تَغْيِيرِ الدَّالَّةِ f ، ثُمَّ شَكَّلَيْ جُدُولَ تَغْيِيرِ اتَّهَا.

ج - أثبتت أن (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعين إحداثياتها.

أثبت أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلًا وحيدًا حيث α حيث $2 + \ln 3 < \alpha < 2 + \ln 4$.

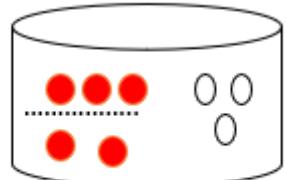
(4) بيّني أن المنحنى (C_f) يقبل مماساً (T) يُوازي المقارب المائل (Δ) ، يُطلب تعين معادلة له.

.(5) أرسمي كلام من (Δ) ، (T) و (C_f) . (نأخذ: -7.5)

6) ناقشی حسب قیم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة: $f(x) = -x + m$

7) لتكن $A(\alpha)$ مساحة الحيز للمستوى المحدد بالمنحنى (C_f) وبالمستقيمات: $x + \frac{5}{\gamma} = 0$ ،

أحسب $x \equiv \alpha$ و $x \equiv 1$

العلامة	الموضوع الأول – التصحيح المفصل								
(4)	<p>ال詢ين الأول: يحتوي صندوق على k كرية حمراء و 3 كريات بيضاء، (حيث: $k \geq 2$).</p>  <p>$\boxed{\text{كرية حمراء } 3 + \text{ كريات بيضاء } 3 = \text{ كرية } k + 3}$</p> <p>آلية السحب: سحب كريتين ($p = 2$) من ($n = k + 3$) كرية عشوائياً على التوالي وبإرجاع (نستخدم قاعدة، أي: $\text{card } \Omega = (k + 3)^2$).</p> <p>أ- اثبات أن: $P(X_k = 5) = \frac{6k}{(k+3)^2}$: أي أن اللاعب يربح $5DA$، مما يعني أنه سحب 1 كرية حمراء من k المتغير العشوائي الذي يرفق بربحية اللاعب (أي أن اللاعب سيربح).</p> <p>من k (أي: k^1) و 1 كرية بيضاء من 3 (أي: 3^1)، والترتيب في هذه الحالة مهم $\frac{2!}{1! \times 1!}$، بيضاء و حمراء أولاً حمراء و بيضاء، فيكون: $P(X_k = 5) = \frac{2!}{1! \times 1!} \times \frac{k^1 \times 3^1}{(k+3)^2}$.</p>								
0.25	<p>ب- تعریف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X_k: حسب اللعبة فإن:</p> <p>- إذا تم سحب كريتين بيضاوين (أي: 2 بيضاء من 3، معناه: 3) فإن اللاعب يخسر $9DA$ مما يعني أن $(X_k = -9)$.</p> <p>- إذا تم سحب كريتين حمراوين (أي: 2 حمراء من k، معناه: k^2) فإن اللاعب يخسر $1DA$ مما يعني أن $(X_k = -1)$.</p> <p>- إذا تم سحب كرية حمراء من k (أي: k^1) و كرية بيضاء من 3 (أي: 3^1)، (أي: بيضاء و حمراء أولاً حمراء و بيضاء والترتيب مهم) فإن اللاعب يربح $5DA$ مما يعني أن $(X_k = +5)$.</p> <p>ومنه: $\{X_k(\Omega) \in \{-9; -1; 5\}\}$. ويكون قانون الاحتمال:</p> $\begin{cases} P(X_k = -9) = \frac{3^2}{(k+3)^2} = \frac{9}{(k+3)^2} \\ P(X_k = -1) = \frac{k^2}{(k+3)^2} \\ P(X_k = 5) = \frac{6k}{(k+3)^2} \end{cases} \quad (\text{حسب أ-})$ <table border="1" data-bbox="865 1459 1437 1605"> <tr> <td>X_i</td> <td>-9</td> <td>-1</td> <td>5</td> </tr> <tr> <td>P_i</td> <td>$\frac{9}{(k+3)^2}$</td> <td>$\frac{k^2}{(k+3)^2}$</td> <td>$\frac{6k}{(k+3)^2}$</td> </tr> </table>	X_i	-9	-1	5	P_i	$\frac{9}{(k+3)^2}$	$\frac{k^2}{(k+3)^2}$	$\frac{6k}{(k+3)^2}$
X_i	-9	-1	5						
P_i	$\frac{9}{(k+3)^2}$	$\frac{k^2}{(k+3)^2}$	$\frac{6k}{(k+3)^2}$						
0.25	<p>2) نعتبر الأمل الرياضي $(X_k) E(X_k)$ للمتغير العشوائي X_k، تعين قيمة k التي من أجلها يتمكن اللاعب من الربح:</p> <p>نعلم أن: $E(X_k) = \sum X_i P_i = -9 \times \frac{9}{(k+3)^2} + (-1) \times \frac{k^2}{(k+3)^2} + 5 \times \frac{6k}{(k+3)^2}$</p> <p>ومنه: $E(X_k) > 0$ ، ويتمكن اللاعب من الربح إذا كان: $0 < -k^2 + 30k - 81$</p> <p>أي: $-k^2 + 30k - 81 = 0 \rightarrow \Delta = 576$ ، وباعتبارها معادلة: $-k^2 + 30k - 81 > 0$</p> <p>ومنه: $k' = \frac{-30-24}{-2} = 27$; $k'' = \frac{-30+24}{-2} = 3$</p> <p>وبما أن: k عدد طبيعي، فإن: $k \in \{4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14; 15; 16; 17; 18; 19; 20; 21; 22; 23; 24; 25; 26\}$</p>								

(ن) 0.25	<p>التمرين الثاني:</p> <p>1) حساب $(\sqrt{6} - \sqrt{2})^2 = 6 + 2\sqrt{12} + 2 = 8 + 4\sqrt{3}$: لدينا: $(\sqrt{2} + \sqrt{6})^2$</p> <p>- حل في مجموعة الأعداد المركبة \mathbb{C} المعادلة (E) ذات المجهول z الآتية:</p> $z^2 - 2(\sqrt{2} + \sqrt{6})z + 16 = 0 \dots \dots \dots (E)$ <p>نحسب المميز Δ حيث: $\Delta = b^2 - 4ac = [-2(\sqrt{2} + \sqrt{6})]^2 - 4 \times 1 \times 16 = 4[2 + 2\sqrt{12} + 6 - 16] = 4[-8 + 4\sqrt{3}]$</p> <p>ومنه: $\Delta = 4(2 + 2\sqrt{12} + 6) - 64 = 4[2 + 2\sqrt{12} + 6 - 16] = 4[-8 + 4\sqrt{3}]$</p> <p>$\Delta = -4(6 - 2 \times \sqrt{6} \times \sqrt{2} + 2) = -4(\sqrt{6} - \sqrt{2})^2 = [2(\sqrt{6} - \sqrt{2})i]^2$</p> <p>بما أن: $\Delta \neq 0$, فإن: (E) تقبل حلين مترافقين:</p> <p>(بوضع: $\delta^2 = \Delta$, $\delta = -2(\sqrt{6} - \sqrt{2})i$, حيث: $\delta = 2(\sqrt{6} - \sqrt{2})i$)</p> <p>$\begin{cases} z' = \frac{-b-\delta}{2a} = \frac{2(\sqrt{2}+\sqrt{6})-2(\sqrt{6}-\sqrt{2})i}{2} = (\sqrt{2}+\sqrt{6}) - (\sqrt{6}-\sqrt{2})i \\ z'' = \frac{-b+\delta}{2a} = \frac{2(\sqrt{2}+\sqrt{6})+2(\sqrt{6}-\sqrt{2})i}{2} = (\sqrt{2}+\sqrt{6}) + (\sqrt{6}-\sqrt{2})i \end{cases}$</p> <p>إذن: $S = \{(\sqrt{2} + \sqrt{6}) - (\sqrt{6} - \sqrt{2})i, (\sqrt{2} + \sqrt{6}) + (\sqrt{6} - \sqrt{2})i\}$</p>
2) في المستوى المركب المنسوب إلى معلم متعامد متجلانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$, نعتبر النقط A , B و C التي لاحقاتها على الترتيب:	$z_B = 1 + i\sqrt{3}$, $z_A = (\sqrt{6} + \sqrt{2}) + i(\sqrt{6} - \sqrt{2})$, $z_C = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ و $z_C = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ <p>أ- اثبات أن: $z_B \times \bar{z}_C = z_A$</p> <p>لدينا: $z_B \times \bar{z}_C = (1 + i\sqrt{3})(\sqrt{2} + i\sqrt{2}) = (1 + i\sqrt{3})(\sqrt{2} - i\sqrt{2})$, و منه: $\cdot z_B \times \bar{z}_C = \sqrt{2} - i\sqrt{2} + i\sqrt{6} + \sqrt{6} = (\sqrt{6} + \sqrt{2}) + i(\sqrt{6} - \sqrt{2}) = z_A$ إذن: $z_B \times \bar{z}_C = z_A$, وهو المطلوب.</p> <p>ب- استنتاج أن: $z_A \times z_C = 4z_B$</p> <p>لدينا: $z_A \times z_C = [(\sqrt{6} + \sqrt{2}) + i(\sqrt{6} - \sqrt{2})](\sqrt{2} + i\sqrt{2})$, أي: $\cdot z_A \times z_C = \sqrt{12} + 2 + i\sqrt{12} + 2i + i\sqrt{12} - 2i - \sqrt{12} + 2 = 4 + 2i\sqrt{12}$ إذن: $z_A \times z_C = 4z_B$, إذن: $z_A \times z_C = 4 + 2i2\sqrt{3} = 4(1 + i\sqrt{3})$</p>
ب- كتابة كل من z_B و z_C على الشكل المثلثي:	<p>لدينا: $z_B = 1 + i\sqrt{3}$, و منه:</p> $z_B = \left[2; \frac{\pi}{3}\right]$, أي $\begin{cases} r_B = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = 2 \\ \arg(z_B) = \theta_B \rightarrow \begin{cases} \cos \theta_B = \frac{1}{2} \\ \sin \theta_B = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \rightarrow \theta_B = \frac{\pi}{3} + 2\pi k; k \in \mathbb{Z} \end{cases}$ <p>إذن: $z_B = 2(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3})$</p> <p>لدينا: $z_C = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$, و منه:</p>
0.25	$z_C = \left[2; \frac{\pi}{4}\right]$, أي $\begin{cases} r_C = \sqrt{\sqrt{2}^2 + \sqrt{2}^2} = 2 \\ \arg(z_C) = \theta_C \rightarrow \begin{cases} \cos \theta_C = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \theta_C = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \rightarrow \theta_C = \frac{\pi}{4} + 2\pi k; k \in \mathbb{Z} \end{cases}$
0.25	<p>إذن: $z_C = 2(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})$</p>

	ج- استنتاج الشكل الأسّي لـ z_A : حسب -أ- فإن: $z_B \times \bar{z}_C = z_A$ ، وحسب ما سبق فإن:
0.25	$z_A = 2e^{i\frac{\pi}{3}} \times 2e^{-i\frac{\pi}{4}} = 4e^{i(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4})}$ ، فيكون: $\begin{cases} z_B = 2e^{i\frac{\pi}{3}} \\ z_C = 2e^{i\frac{\pi}{4}} \end{cases} \xrightarrow{\text{خواص المرافق}} \bar{z}_C = 2e^{-i\frac{\pi}{4}}$
0.25	$z_A = 4e^{i\frac{\pi}{12}}$ ، إذن: $z_A = 4e^{i\frac{(4\pi-3\pi)}{3 \times 4}} = 4e^{i\frac{\pi}{12}}$ أي:
	لتكن D النقطة التي لاحتها $z_D = z_A^4$ ، حيث: (3) نقطة لاحتها M و M' نقطة لاحتها z' حيث: $z' = \frac{1}{4}z_A z$
0.25	$z' = e^{i\frac{\pi}{12}} z$ ، أي: $z' = \frac{1}{4}z_A z = z' = \frac{1}{4} \times 4e^{i\frac{\pi}{12}} \times z = e^{i\frac{\pi}{12}}$ لدينا: <u>أ- ما طبيعة التحويل؟</u> لدينا: <u>العنصـر المميـز للتحـويل النقـطـي:</u>
0.25	من الشكل: $b: a = e^{i\frac{\pi}{12}}$ ، حيث: $a = e^{i\frac{\pi}{12}}$ ، وبما أن: $ a = 1$ ، إذن: التحويل عبارة عن دوران.
0.25	$\arg(a) = \frac{\pi}{12} + 2\pi k$; $k \in \mathbb{Z}$ ، ومنه: $a = e^{i\frac{\pi}{12}}$. مما يعني أن زاوية الدوران هي $\frac{\pi}{12}$ ، ومركزه النقطة الصامدة ذات الاحقة: 0 . إذن: التحويل عبارة عن دوران، زاويته $\frac{\pi}{12}$ ومركزه النقطة الصامدة $(0, 0)$.
	ب- تعـين صـورـةـ النـقطـةـ C ـ بـالـتحـويلـ النـقطـيـ:
0.25	$z' = z_C = e^{i\frac{\pi}{12}} z_C = e^{i\frac{\pi}{12}} \times 2e^{i\frac{\pi}{4}} = 2e^{i(\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{4})} = 2e^{i\frac{4\pi}{12}} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ لدينا: $z_{C'} = 2e^{i\frac{\pi}{3}} = z_B$ إذن:
0.25	ج- ما طبيعة المثلث OCB ؟ مع التعـلـيلـ: لدينا حـسبـ ماـ سـبـقـ فإنـ: $R(z_C) = z_B$ ، مما يعني أنـ: $\begin{cases} OC = OB = 2 \\ (\overrightarrow{OC}; \overrightarrow{OB}) = \frac{\pi}{12} + 2\pi k ; k \in \mathbb{Z} \end{cases}$ مـثلـثـ مـتسـاوـيـ السـاقـيـنـ.
	د- اثـبـاتـ أنـ: $z_A^4 = 128z_B$ ـ:
0.25	$z_A^4 = (4e^{i\frac{\pi}{12}})^4 = 4^4 \times e^{i\frac{4\pi}{12}} = 256e^{i\frac{\pi}{3}} = 256(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3})$ ـ: لدينا وـمنـهـ: $z_A^4 = 128z_B$ ـ.ـ إذـنـ: $z_A^4 = 256 \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 128 \times 2 \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$ ـ:ـ
0.25	ـ استـنـتـاجـ أنـ:ـ O ـ،ـ B ـ،ـ D ــ فـيـ إـسـقـامـيـةـ:ـ حـسـبـ مـاـ سـبـقـ:ـ $\begin{cases} z_D = z_A^4 (3) \\ z_A^4 = 128z_B \end{cases}$ ـ،ـ فإنـ:ـ (حسبـ سـ)ـ،ـ (حسبـ دـ)
0.25	$\frac{z_D - z_O}{z_B - z_O} = \frac{z_A^4}{z_B} = \frac{128z_B}{z_B} = 128 \in \mathbb{R}$ ـ،ـ إذـنـ:ـ النـقطـ O ـ،ـ B ـ،ـ D ــ فـيـ إـسـقـامـيـةـ.
(4ن)	الـتـعـرـينـ الثـالـثـ:ـ لـتـكـنـ الـمـتـالـلـيـةـ (u_n) ـ الـمـعـرـفـةـ بـحـدـدـهاـ الـأـوـلـ:ـ u_0 ـ،ـ وـمـنـ أـجـلـ كـلـ عـدـدـ طـبـيـعـيـ n ـ بـ:
	$u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n^2 + 3u_n - \frac{3}{2}$
	أـ حـسـبـ u_1 ـ وـ u_2 ـ (أـكـتـبـ الـحـدـيـنـ عـلـىـ شـكـلـ كـسـرـيـنـ غـيرـ قـابـلـيـنـ لـلـاخـتـزالـ)،ـ وـ u_3 ـ وـ u_4 ـ (بـقـيـمـ تـقـرـيـبـةـ 10^{-5} ـ):ـ
0.25	$u_{0+1} = -\frac{1}{2}u_0^2 + 3u_0 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2} \times 4 + 3 \times 2 - \frac{3}{2}$ ـ:ـ لدينا:ـ منـ أـجـلـ:ـ $n=0$ ـ،ـ فإنـ:ـ $u_1 = 4 - \frac{3}{2} = \frac{8-3}{2} = 2.5$ ـ،ـ إذـنـ:ـ $u_1 = \frac{5}{2}$ ـ
0.25	$u_{1+1} = -\frac{1}{2}u_1^2 + 3u_1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2} \times \frac{25}{4} + 3 \times \frac{5}{2} - \frac{3}{2}$ ـ:ـ منـ أـجـلـ:ـ $n=1$ ـ،ـ فإنـ:ـ $u_2 = \frac{-25}{8} + \frac{15-3}{2} = \frac{-25+48}{8} = 2.875$ ـ،ـ إذـنـ:ـ $u_2 = \frac{23}{8}$ ـ
0.25	$u_{2+1} = -\frac{1}{2}u_2^2 + 3u_2 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2} \times \frac{529}{64} + 3 \times \frac{23}{8} - \frac{3}{2}$ ـ:ـ منـ أـجـلـ:ـ $n=2$ ـ،ـ فإنـ:ـ $u_3 = \frac{-529}{128} + \frac{69-24}{8} = \frac{-529+912}{128} = \frac{383}{128}$ ـ،ـ إذـنـ:ـ $u_3 = 2.9921875 \approx 2.992188$ ـ

0.25	$\cdot u_{3+1} = -\frac{1}{2}u_3^2 + 3u_3 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2} \times \left(\frac{383}{128}\right)^2 + 3 \times \frac{383}{128} - \frac{3}{2}$ $\therefore u_4 = 2.999969482 \simeq 2.99997$	من أجل $n = 3$ ، فإن: $u_4 = 2.999969482 \simeq 2.99997$
0.25	بـ وضع تخمينا حول اتجاه تغير وتقريب المتالية (u_n) : حسب حساب الحدود فإن:	
0.25	$u_0 < u_1 < u_2 < u_3 < u_4$ ، مما يعني أن المتالية متزايدة، كما أن الحدود تقترب شيئاً فشيئاً نحو 3 ، فهي متقاربة نحو 3	
0.25	$(2) \text{ نعتبر المتالية العددية } (v_n) \text{ المعرفة على } \mathbb{N} \text{ بـ: } v_n = u_n - 3$ $\text{أـ ثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي } n, \text{ فإن: } v_n = u_n - 3 \text{ لدينا: } v_{n+1} = -\frac{1}{2}v_n^2$ $\text{أـ أي: } v_{n+1} = u_{n+1} - 3 = -\frac{1}{2}u_n^2 + 3u_n - \frac{3}{2} - 3 = -\frac{1}{2}u_n^2 + 3u_n - \frac{9}{2}$ $v_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n^2 + 3 \times \frac{-2}{-2} \times u_n - \frac{9}{2} = \frac{-1}{2}(u_n^2 - 6u_n + 9) = \frac{-1}{2}(u_n - 3)^2$ $\therefore v_{n+1} = -\frac{1}{2}v_n^2$	إذن: $v_{n+1} = -\frac{1}{2}v_n^2$
0.25	بـ البرهان بالترابع من أجل كل عدد طبيعي n أن: $-1 \leq v_n \leq 0$	
0.25	$\text{ـ نضع الخاصية: } P(n) : -1 \leq v_n \leq 0 ; n \in \mathbb{N}$ $\text{ـ من أجل } n = 0, \text{ فإن: } -1 \leq v_0 = u_0 - 3 = 2 - 3 = -1 \leq 0 \text{ وـ } v_0 = u_0 - 3 = 2 - 3 = -1 \in [-1 ; 0] \text{ محققة.}$ $\text{ـ نفرض صحة الخاصية حتى الدرجة } n, \text{ أي: } -1 \leq v_n \leq 0$ $\text{ـ نحاول إثبات صحة الخاصية من أجل } (n+1), \text{ أي: } -1 \leq v_{n+1} \leq 0$ $\text{ـ لدينا فرضاً: } -1 \leq v_n \leq 0, \text{ أي: } 0 \leq v_n \leq 1, \text{ وبـ } -1 \leq u_n - 3 \leq v_n \leq 0, \text{ وبـ } -1 \leq u_n \leq 3, \text{ وبـ } 0 \leq u_n \leq 3$ $\text{ـ نجد أن: } 0 \leq v_n^2 \leq 1, \text{ وبـ } 0 \leq (u_n - 3)^2 \leq 9, \text{ وبـ } 0 \leq v_{n+1}^2 \leq (u_n - 3)^2 \leq 9$ $\text{ـ إذن: وـ حسب مبدأ الإستدلال بالترابع فإـ أنه من أجل كل عدد طبيعي } n \text{ أن: } -1 \leq v_n \leq 0$	
0.25	جـ دراسة اتجاه تغير المتالية (v_n) :	
0.25	$\text{ـ لدرس إشارة } v_{n+1} - v_n = -\frac{1}{2}v_n^2 - v_n = -v_n\left(\frac{1}{2}v_n + 1\right), \text{ حيث: } v_n > 0, \text{ وـ حسب ما سبق، فإن: } 0 \leq v_n \leq 1, \text{ وـ منه: } 0 \leq -v_n \leq 1, \text{ أي: } -v_n > 0. \text{ـ (1) ...}$ $\text{ـ ومن جهة أخرى، وبـ } 0 \leq v_n \leq 1, \text{ وبـ } 0 \leq \frac{1}{2}v_n + 1 \leq 1, \text{ نجد أن: } 0 < \frac{1}{2}v_n + 1 \leq 1$ $\text{ـ (2) ... } (\frac{1}{2}v_n + 1) > 0, \text{ أي: } 0 < \frac{1}{2}v_n + 1 \leq 1, \text{ وبـ } 0 < -v_n\left(\frac{1}{2}v_n + 1\right) \leq 0$ $\text{ـ من (1) وـ (2)، نجد أن: } v_{n+1} - v_n > 0 ; \forall n \in \mathbb{N} \text{ـ (3) وـ (4) ...}$ $\text{ـ وـ منه: } (v_n) \text{ متزايدة تماماً على } \mathbb{N}.$	
0.25	ـ استنتاج أن المتالية (v_n) متقاربة: لدينا (حسب بـ) $v_n \leq 0$ ، مما يعني أن المتالية (v_n) محدودة من الأعلى بالصفر، كما أنها متزايدة تماماً على \mathbb{N} ، إذن: (v_n) متقاربة (حسب مبرهنة ما).	
0.25	ـ (3) لـ تـكـن ℓ نـهاـية المتـالـية (v_n) ، إثـبات أـنـ: $\ell = -\frac{1}{2}\ell^2$: تعـين قـيمـة ℓ	
0.25	$\text{ـ بما أن المتالية } (v_n) \text{ متقاربة وـ نهايتها } \ell, \text{ فإن: } \ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell$ $\text{ـ وـ بما أن: } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{2}v_n^2\right) = -\frac{1}{2}\ell^2, \text{ (حسب سـ 2ـ أـ)، فإن: } \ell = -\frac{1}{2}\ell^2$ $\text{ـ وبالـ تعـويـض نـجد أـنـ: } \ell = -\frac{1}{2}\ell^2, \text{ وـ هو المـطلـوب.}$ $\text{ـ تعـين قـيمـة } \ell: \text{ـ لـ نـحلـ المعـادـلة: } \ell + \frac{1}{2}\ell^2 = 0 \rightarrow \ell \left(1 + \frac{1}{2}\ell\right) = 0 \text{ـ حيث: } \ell = -\frac{1}{2}\ell^2$ $\text{ـ إما } (-1 \leq v_n \leq 0), \text{ (مرفـوضـة لأن: } 0 \leq v_n \leq 1, \text{ وبـ } 0 \leq -v_n \leq 1, \text{ أي: } 0 \leq \ell \leq 1 \notin [-1 ; 0])$ $\text{ـ أوـ } (\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell = 0 \in [-1 ; 0]), \text{ (مـقـولـة لأن: } 0 \leq v_n \leq 1, \text{ وبـ } 0 \leq -v_n \leq 1, \text{ أي: } 0 \leq \ell \leq 1 \in [-1 ; 0])$	

4) هل التخمين في السؤال الأول محقق؟

0.25 الممتالية (u_n) متزايدة تماماً لأن: $u_n = v_n + 3$ والممتالية (v_n) متزايدة حسب السؤال 2-جـ-. ولدينا: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ ، ومنه: $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - 3) = 0$. (نعم، الممتالية (u_n) متقربة نحو 3). إذن: **ال تخمين متحقق**.

التمرير الرابع:

$$\text{I) بما أن: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = +\infty , \text{ البرهان أن: } 0$$

0.25 من أجل كل عدد حقيقي $0 < x$ ، فإن: $X = \ln x$ ، وبوضع x ، حيث:

$$\text{II) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^{\ln x}} = 0 , \text{ أي: } \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty . \text{ وعلماً أن: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \text{ إذن: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\text{2) استنتاج أنه من أجل كل عدد طبيعي } n \text{ غير معادل، فإن: } 0$$

0.25 لتكن n عدد طبيعي أكبر أو يساوي 2، ومن أجل كل عدد حقيقي $0 < x$ ، لدينا:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0 , \text{ فإن: } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^{n-1}} = 0 \end{cases} , \text{ وبما أن: } \frac{\ln x}{x^n} = \frac{\ln x}{x} \times \frac{1}{x^{n-1}}$$

3) نعتبر الدالة g المعرفة على $[0; +\infty]$ بـ:

A- دراسة تغيرات الدالة: g :

مجموعة التعريف: $[0; +\infty]$. (من المعطيات).

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^3 - 1 + 2 \ln x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 - 1 + 2 \ln x = +\infty$$

-**اتجاه التغير:** g قابلة للإشتقاق على $[0; +\infty]$ كمجموع دوال قابلة للإشتقاق، حيث:

$$g'(x) = 3x^2 + \frac{2}{x}$$

ومن أجل كل x من $[0; +\infty]$ ، فإن: $g'(x) > 0$ ، لأن: $\frac{3x^2}{x} > 0$

إذن: g متزايدة تماماً على $[0; +\infty]$.

جدول التغيرات:

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	+	
$g(x)$	$-\infty$	$+\infty$

B- حساب (1):

لدينا: $g(1) = 1^3 - 1 + 2 \ln 1 = 1 - 1 + 0 = 0$ ، إذن: $g(1) = 0$

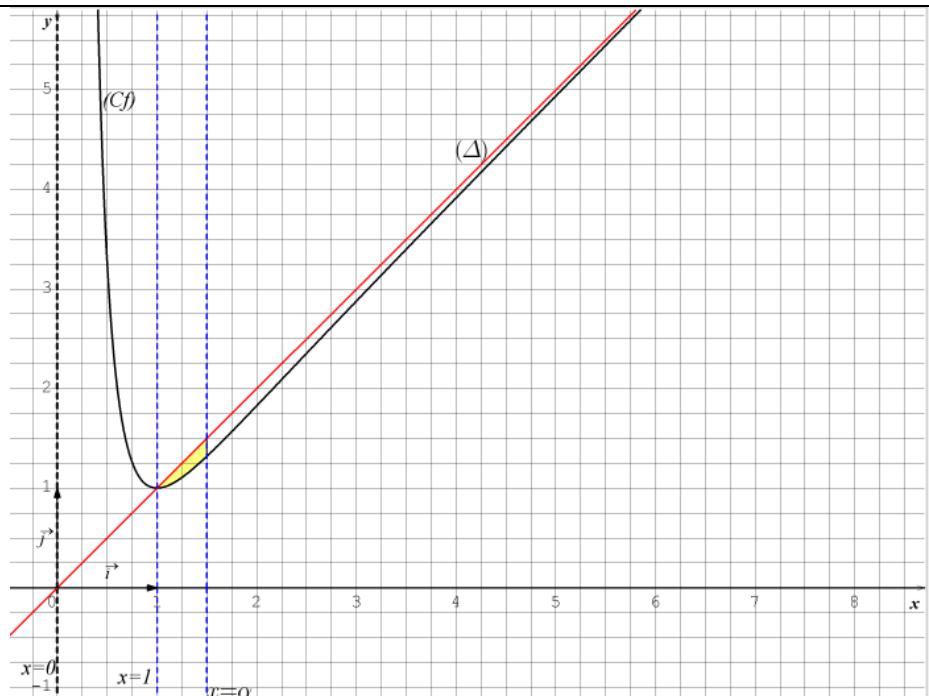
-**استنتاج إشارة $g(x)$ على المجال $[0; +\infty]$:** بما أن: $g(1) = 0$ ، فإن:

x	0	1	$+\infty$
$g(x)$	+	0	+

II) نعتبر الدالة f المعرفة على $[0; +\infty]$ بـ:

لدينا: **حساب (1)** $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

0.25	$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 = 0^+$ $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$	$\lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$ $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[x - \frac{\ln x}{x^2} \right] = +\infty$												
0.25		$\text{ومنه: } x = 0 \text{ مستقيم مقارب عمودي يوازي حامل محور التراتيب } (yy') \text{ عند } +\infty.$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$												
0.25		$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x - \frac{\ln x}{x^2} \right] = +\infty$ $\text{إذن: } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$												
0.25		<p>(2) أ- إثبات أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيماً مقارباً مائلاً (Δ)، يطلب تعين معادلة له:</p> <p>نلاحظ أن: $0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[-\frac{\ln x}{x^2} \right] = 0$ ، مما يعني أنّ البيان (C_f) مستقيم مقارب مائل $y = x$.</p>												
0.25		<p>ب- دراسة الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ): أي ندرس إشارة $f(x) - x$ ، حيث:</p> $f(x) - x = -\frac{\ln x}{x^2} = 0 \rightarrow \begin{cases} \ln x = 0 \rightarrow x = e^0 = 1 \\ x^2 > 0; \forall x \in]0; +\infty[\end{cases}$ <table border="1" style="margin-left: 200px;"> <tr> <td>x</td> <td>0</td> <td>1</td> <td>$+\infty$</td> </tr> <tr> <td>$\ln x$</td> <td>-</td> <td>0</td> <td>+</td> </tr> <tr> <td>$f(x) - x$</td> <td>+</td> <td>0</td> <td>-</td> </tr> </table> <p>ما يعني أن: - $x \in]0; 1[$ يقع أسفل المقارب (Δ) من أجل (C_f) . - $x = 1$ يقطع المقارب (Δ) من أجل (C_f) ، حيث: $\{ (1; 1) \}$. - $x \in]1; +\infty[$ يقع أعلى المقارب (Δ) من أجل (C_f) .</p>	x	0	1	$+\infty$	$\ln x$	-	0	+	$f(x) - x$	+	0	-
x	0	1	$+\infty$											
$\ln x$	-	0	+											
$f(x) - x$	+	0	-											
0.25		<p>(3) كتابة $(x)'$ بدلالة $g(x)$ ، حيث: f' هي الدالة المشتقة للدالة f: f قابلة للإشتقاق على $]0; +\infty[$ كمجموع وحاصل قسمة دوال قابلة للإشتقاق، حيث:</p> $f'(x) = 1 - \frac{\frac{1}{x} \times x^2 - 2x \times \ln x}{x^4} = 1 - \frac{x(1 - 2 \ln x)}{x^3} = 1 - \frac{1 - 2 \ln x}{x^3}$ $\text{ومنه: } f'(x) = \frac{x^3 - 1 + 2 \ln x}{x^3} = \frac{g(x)}{x^3}$												
0.25		<p>(4) استنتاج اتجاه تغير الدالة f:</p> <p>إشارة $(x)'$ من إشارة $g(x)$ ، وحسب الجزء الأول، فإن:</p> <p>.]0; 1[لما $f'(x) < 0$ ، ومنه: f متناقصة تماماً على $]0; 1[$. .]1; +\infty[لما $f'(x) > 0$ ، ومنه: f متزايدة تماماً على $]1; +\infty[$.</p> <p>تشكيل حدول تغيرات الدالة f:</p> <table border="1" style="margin-left: 200px;"> <tr> <td>x</td> <td>0</td> <td>1</td> <td>$+\infty$</td> </tr> <tr> <td>$f'(x)$</td> <td>-</td> <td>0</td> <td>+</td> </tr> <tr> <td>$f(x)$</td> <td>$+\infty$</td> <td>$\rightarrow f(1)$</td> <td>$\rightarrow +\infty$</td> </tr> </table> <p>حيث: $f(1) = 1$.</p>	x	0	1	$+\infty$	$f'(x)$	-	0	+	$f(x)$	$+\infty$	$\rightarrow f(1)$	$\rightarrow +\infty$
x	0	1	$+\infty$											
$f'(x)$	-	0	+											
$f(x)$	$+\infty$	$\rightarrow f(1)$	$\rightarrow +\infty$											
		<p>(5) رسم كلام من (Δ) و (C_f):</p>												



III) لتكن $\mathcal{A}(\alpha)$ مساحة الحيز للمستوي المحدد بالمنحنى (C_f) وبال المستقيمات: $x = 1$, $y = x$ وبالمسقيمات: $x = \alpha$

(1) حساب $\mathcal{A}(\alpha)$ بدلالة α , حيث α : عدد حقيقي أكبر تماماً من 1 :

بما أنَّ البيان (C_f) يقع تحت المقارب المائل (Δ) على $[1; \alpha]$, فإنَّ:

$$\mathcal{A}(\alpha) = \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\| \times \int_1^\alpha [y - f(x)] dx = 4 \int_1^\alpha \frac{\ln x}{x^2} dx$$

$$\text{، } \int_1^\alpha \frac{\ln x}{x^2} dx = \left[-\frac{\ln x}{x} \right]_1^\alpha + \int_1^\alpha \frac{1}{x^2} dx \text{، ومنه: } \begin{cases} u(x) = \ln x \rightarrow u'(x) = \frac{1}{x} \\ v'(x) = \frac{1}{x^2} \rightarrow v(x) = -\frac{1}{x} \end{cases}$$

$$\text{أي: } \int_1^\alpha \frac{\ln x}{x^2} dx = \left[-\frac{1+\ln x}{x} \right]_1^\alpha = -\frac{1+\ln \alpha}{\alpha} + \frac{1+\ln 1}{1} = \frac{\alpha-1-\ln \alpha}{\alpha}$$

$$\text{إذن: } \mathcal{A}(\alpha) = 4 \left(\frac{\alpha-1-\ln \alpha}{\alpha} \right) \text{ cm}^2$$

$$\text{حساب النهاية (2): لدینا: } \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \mathcal{A}(\alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} 4 \left(1 - \frac{1}{\alpha} - \frac{\ln \alpha}{\alpha} \right) = 1$$

$$\text{إذن: } \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \mathcal{A}(\alpha) = 4$$

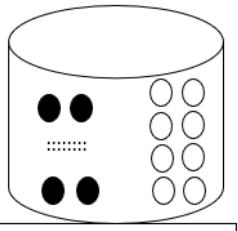
لتكن $\ell = \mathcal{A}\left(\frac{1}{e}\right)$ ، اثبات أنَّ: $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \mathcal{A}(\alpha) = \ell$

بما أنَّ البيان (C_f) يقع فوق المقارب المائل (Δ) على $\left[\frac{1}{e}; 1\right]$, فإنَّ:

$$\mathcal{A}\left(\frac{1}{e}\right) = \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\| \times \int_{\frac{1}{e}}^1 [f(x) - y] dx = 4 \int_{\frac{1}{e}}^1 \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{\ln \frac{1}{e}}{x^2} \right) dx = 4 \left(1 - \frac{1}{\frac{1}{e}} - \frac{\ln \frac{1}{e}}{\frac{1}{e}} \right)$$

$$\text{أي: } \mathcal{A}\left(\frac{1}{e}\right) = 4(1 - e + e) = 4 = \ell$$

$$\text{إذن: } \mathcal{A}\left(\frac{1}{e}\right) = \ell = 4$$

العلامة	الموضوع الثاني - التصحيح المفصل								
(4ن)	<p>التمرين الأول: 8 كريات بيضاء و n كرية سوداء، (حيث: $n \geq 2$).</p>  <p style="text-align: center;">n كرية سوداء + 8 كريات بيضاء</p>								
0.25	<p>آلية السحب: سحب كريتين ($2 = p$) من ($n = n + 8$) كرية عشوائياً على التوالي وبإرجاع (نستخدم قاعدة، أي: $(n + 8)^2$).</p> <p>1) يقوم اللاعب بسحب كريتين على التوالي مع إرجاع الكرية المسحوبة إلى الكيس، حيث:</p> <ul style="list-style-type: none"> - يربح اللاعب $1DA$ من أجل كل كرية بيضاء مسحوبة. - يخسر اللاعب $2DA$ من أجل كل كرية سوداء مسحوبة. <p>ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب ربح اللاعب.</p> <p>أ- تعين القيم الممكنة للمتغير العشوائي X: حسب اللعبة فإن:</p> <ul style="list-style-type: none"> - إذا تم سحب كريتين بيضاوين (أي: 2 بيضاء من 8، معناه: 2^2) فإن اللاعب يربح $2DA$ مما يعني أن $(X = 1 + 1 = +2)$. - إذا تم سحب كريتين سوداويين (أي: 2 سوداء من n، معناه: n^2) فإن اللاعب يخسر $4DA$ مما يعني أن $(X = -2 - 2 = -4)$. - إذا تم سحب كرية سوداء من n (أي: n^1) وكرية بيضاء من 8 (أي: 8^1)، (أي: BN أو NB والترتيب مهم) فإن اللاعب يخسر $1DA$ مما يعني أن $(X = 1 - 2 = -1)$. <p>ومنه: $X(\Omega) \in \{-4; -1; 2\}$.</p>								
0.25	<p>ب-تعريف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X: حسب اللعبة فيكون قانون الإحتمال:</p>								
0.25	$P(X = -4) = \frac{n^2}{(n+8)^2}$								
0.25	$P(X = -1) = \frac{2!}{1! \times 1!} \frac{n^1 \times 8^1}{(n+8)^2} = \frac{16n}{(n+8)^2}$								
0.25	$P(X = 2) = \frac{8^2}{(n+8)^2} = \frac{64}{(n+8)^2}$								
	<table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td>X_i</td> <td>-4</td> <td>-1</td> <td>2</td> </tr> <tr> <td>P_i</td> <td>$\frac{n^2}{(n+8)^2}$</td> <td>$\frac{16n}{(n+8)^2}$</td> <td>$\frac{64}{(n+8)^2}$</td> </tr> </table>	X_i	-4	-1	2	P_i	$\frac{n^2}{(n+8)^2}$	$\frac{16n}{(n+8)^2}$	$\frac{64}{(n+8)^2}$
X_i	-4	-1	2						
P_i	$\frac{n^2}{(n+8)^2}$	$\frac{16n}{(n+8)^2}$	$\frac{64}{(n+8)^2}$						
0.25	<p>ج-حساب الأمل الرياضي بدلالة n:</p> <p>نعلم أن: $E(X) = \sum X_i P_i = -4 \times \frac{n^2}{(n+8)^2} + (-1) \times \frac{16n}{(n+8)^2} + 2 \times \frac{64}{(n+8)^2}$</p> <p>ومنه: $E(X) = \frac{4(-n^2 - 4n + 32)}{(n+8)^2}$ ، إذن: $E(X) = \frac{-4n^2 - 16n + 128}{(n+8)^2} = \frac{4(-n^2 - 4n + 32)}{(n+8)^2}$</p> <p>د- هل توجد قيمة للعدد n حتى يكون الأمل الرياضي معدوماً؟</p> <p>نكتفى: $4(-n^2 - 4n + 32) = 0$ ، $\begin{cases} 4 \neq 0 \\ (n+8)^2 \neq 0 \end{cases}$ ، لأن: $-n^2 - 4n + 32 = 0 \Rightarrow n \geq 2$</p>								

0.25	<p>، $\Delta = (-4)^2 - 4(-1) \times 32 = 144 = 12^2 > 0$ ، معناه أن: $-n^2 - 4n + 32 = 0$</p> <p>يوجد حلان متمايزان هما: $\cdot \begin{cases} n_1 = \frac{4-12}{-2} = \frac{-8}{-2} = 4 \in \mathbb{N}. \\ n_1 = \frac{4+12}{-2} = \frac{16}{-2} = -8 \notin \mathbb{N}. \end{cases}$ (مقبول) إذن: يكون الأمل الرياضي معادلاً من أجل $n = 4$.</p>
0.25	<p>(2) نفرض أننا سحبنا كريتين على التوالي دون إرجاع، ولتكن الحادتين: A_n: "الحصول على كريتين من نفس اللون". B_n: "الحصول على كريتين من لونين مختلفين".</p> <p>أ- حساب $P(A_n)$ بدلالة n:</p> <p>آلية السحب: سحب كريتين ($n = 2$) من ($n = n + 8$) كرية عشوائياً على التوالي دون إرجاع (نستخدم ترتيبة).</p>
0.25	<p>ومنه: $card\Omega = A_{n+8}^2 = \frac{(n+8)!}{(n+8-2)!} = \frac{(n+8)(n+7)(n+6)!}{(n+6)!} = (n+8)(n+7)$</p> <p>من جهة أخرى: الحصول على كريتين من نفس اللون يعني كريتين بيضاوين من 8، (أي: A_8^2) أو الحصول على كريتين سوداويين من n، (أي: A_n^2).</p>
0.25	<p>$P(A_n) = \frac{cardA_n}{card\Omega} = \frac{A_8^2 + A_n^2}{A_{n+8}^2} = \frac{\frac{8!}{(8-2)!} + \frac{n!}{(n-2)!}}{(n+8)(n+7)} = \frac{\frac{8 \times 7 \times 6!}{4!} + \frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!}}{(n+8)(n+7)} = \frac{56 + n^2 - n}{n^2 + 8n + 7n + 56}$</p> <p>ومنه: $P(A_n) = \frac{n^2 - n + 56}{n^2 + 15n + 56}$</p> <p>إذن: $P(A_n) = \frac{n^2 - n + 56}{n^2 + 15n + 56}$</p>
0.25	<p>ب- حساب $P(A_n)$ بدلالة n:</p> <p>لدينا: $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 - n + 56}{n^2 + 15n + 56} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{n^2} = 1$</p>
0.25	<p>إذن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n) = 1$</p>
0.25	<p>تفسير النتيجة: عندما يكون n كبير بالقدر الكافي، يعني يكون عدد الكريات السوداء كبير بالقدر الكافي، فيكون حادثة الحصول على كريتين سوداويين حادثة أكيدة وإنحصاراً مساوياً لـ 1.</p>
0.25	<p>الحصول على كريتين من لونين مختلفين يعني كرية بيضاء من 8، (أي: A_8^1) وكرية سوداء من n، (أي: A_n^1)، كما أن الترتيب مهم قد تكون بيضاء وسوداء أو سوداء وبيضاء، حيث: $\frac{2!}{1! \times 1!}$.</p> <p>$P(B_n) = \frac{cardB_n}{card\Omega} = \frac{2!}{1! \times 1!} \times \frac{A_8^1 \times A_n^1}{A_{n+8}^2} = 2 \times \frac{\frac{8!}{(8-1)!} \times \frac{n!}{(n-1)!}}{(n+8)(n+7)} = 2 \times \frac{\frac{8 \times 7 \times 6!}{7!} \times \frac{n(n-1)}{(n-1)!}}{(n+8)(n+7)}$</p> <p>ومنه: $P(B_n) = \frac{16n}{n^2 + 15n + 56}$</p> <p>إذن: $P(B_n) = \frac{16n}{n^2 + 15n + 56}$</p>
0.25	<p>ب- حساب $P(B_n)$ بدلالة n:</p> <p>لدينا: $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(B_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{16n}{n^2 + 15n + 56} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{16n}{n^2} = 0$</p>
0.25	<p>إذن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(B_n) = 0$</p>
(5)	<p>التمرин الثالث:</p>
0.25	<p>أ- حساب $(1 + \sqrt{3})^2$: لدينا: $(1 + \sqrt{3})^2 = 1 + 2\sqrt{3} + 3 = 4 + 2\sqrt{3}$</p> <p>حل في مجموعة الأعداد المركبة \mathbb{C} المعادلة (E) ذات المجهول z الآتية:</p> $z^2 - \left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)z + \frac{1}{2} = 0 \dots \dots \dots (E)$ <p>نحسب المميز Δ حيث: $\Delta = b^2 - 4ac = \left[-\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)\right]^2 - 4 \times 1 \times \frac{1}{2}$</p>

	$\Delta = \frac{1 - 2\sqrt{3} + 3}{4} - 2 = \frac{4 - 2\sqrt{3} - 8}{4} = \frac{-4 - 2\sqrt{3}}{4} = -\frac{4 + 2\sqrt{3}}{4}$ $= i^2 \times \frac{(1 + \sqrt{3})^2}{2^2} = \left[\left(\frac{1 + \sqrt{3}}{2} \right) i \right]^2$ <p>بما أن $\Delta \neq 0$، فإن (E) تقبل حللين مترافقين:</p>
0.25	$\therefore (\delta^2 = \Delta, \delta = -\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)i \text{ أو } \delta = \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)i)$
0.25	$\begin{cases} z' = \frac{-b-\delta}{2a} = \frac{\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right) - \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)i}{2} = \left(\frac{1-\sqrt{3}}{4}\right) - \left(\frac{1+\sqrt{3}}{4}\right)i \\ z'' = \frac{-b+\delta}{2a} = \frac{\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)i}{2} = \left(\frac{1-\sqrt{3}}{4}\right) + \left(\frac{1+\sqrt{3}}{4}\right)i \end{cases}$ <p>ومنه:</p>
	$\therefore S = \left\{ \left(\frac{1-\sqrt{3}}{4}\right) - \left(\frac{1+\sqrt{3}}{4}\right)i; \left(\frac{1-\sqrt{3}}{4}\right) + \left(\frac{1+\sqrt{3}}{4}\right)i \right\}$
0.25	<p>2) نعتبر النقط A و C التي لاحقاتها على الترتيب: z_A, z_B, z_C و z_A حيث:</p> $z_C = \frac{1-\sqrt{3}}{4} + i \frac{1+\sqrt{3}}{4} \text{ و } z_B = 1 - i\sqrt{3}$ <p>أ-إثبات أن $z_C = \frac{z_A}{z_B}$ لدينا:</p>
0.25	$\therefore z_C = \frac{z_A}{z_B} \text{ ، إذن: } \frac{z_A}{z_B} = \frac{1+i}{1-i\sqrt{3}} \times \frac{1+i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}} = \frac{1+i+i\sqrt{3}-\sqrt{3}}{1+3} = \frac{1-\sqrt{3}}{4} + i \frac{1+\sqrt{3}}{4} = z_C$
0.25	<p>ب-كتابة كل من z_A و z_B على الشكل المثلثي: لدينا $z_A = 1 + i$، ومنه:</p> $r_A = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$
0.25	$\therefore z_A = \left[\sqrt{2}; \frac{\pi}{4} \right] \text{ ، أي: } \arg(z_A) = \theta_A \rightarrow \begin{cases} \cos \theta_A = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \theta_A = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \rightarrow \theta_A = \frac{\pi}{4} + 2\pi k; k \in \mathbb{Z}$
0.25	$\therefore z_A = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$ <p>إذن: $z_B = 1 - i\sqrt{3}$ ، ومنه:</p>
0.25	$r_B = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = 2$
0.25	$\therefore \arg(z_B) = \theta_B \rightarrow \begin{cases} \cos \theta_B = \frac{1}{2} \\ \sin \theta_B = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \rightarrow \theta_B = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k; k \in \mathbb{Z}$
0.25	$\therefore z_B = \left[2; -\frac{\pi}{3} \right] \text{ ، أي: } z_B = 2 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{3} \right) \right)$
0.25	<p>ج-استنتاج الشكل الأسني لـ z_C: بما أن $z_A = \left[\sqrt{2}; \frac{\pi}{4} \right]$ و $z_B = \left[2; -\frac{\pi}{3} \right]$ حسب خواص (exp)</p> $\therefore z_C = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{7\pi i}{12}}$ $\therefore z_C = \frac{z_A}{z_B} = \frac{z_A}{\frac{z_B}{2e^{-\frac{\pi}{3}i}}} = \frac{\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}}{2} e^{\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right)i}$
	<p>د-استنتاج أن $\tan \frac{7\pi}{12} = -2 - \sqrt{3}$: نعلم أن $\tan \frac{7\pi}{12} = -2 - \sqrt{3}$</p> $\therefore z_C = \frac{1-\sqrt{3}}{4} + i \frac{1+\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{7\pi i}{12}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12} \right)$ <p>فإن: وبالنسبة إلى المطابقة نجد أن:</p>

0.25		
0.25		
0.25		إذن: $\tan \frac{7\pi}{12} = -2 - \sqrt{3}$. وهو المطلوب.
0.25	<p>لتكن D صورة النقطة B بالإنسحاب الذي شعاعه ذو اللاحقة: $2i\sqrt{3}$. عبارة الانسحاب من الشكل: $z' = az + b$, وَبِمَا أَنَّ التحويل عبارة عن إنسحاب فإن: $a = 1$, وَبِمَا أَنَّ $z' = z + 2i\sqrt{3}$, فإن: $b = 2i\sqrt{3}$, إذن عبارة الانسحاب: $z' = z + 2i\sqrt{3}$, مما يعني أن: $z_D = z_B + 2i\sqrt{3}$.</p> <p>أ. اثبات أن: لدينا: $z_D = \bar{z}_B$, إذن: $z_D = 1 - i\sqrt{3} + 2i\sqrt{3} = 1 + i\sqrt{3} = \bar{z}_B$: وَمِنْهُ .</p>	
0.25	<p>ب. اثبات أن: لدينا: $\frac{z_B}{z_D} = \frac{z_B}{\bar{z}_B}$, وَحَسْبَ خواص العمدة، فإن:</p> $\arg\left(\frac{z_B}{z_D}\right) = \arg\left(\frac{z_B}{\bar{z}_B}\right) = \arg(z_B) - \arg(\bar{z}_B) = -\frac{\pi}{3} - \left[-\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right] = -\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3}$ <p>إذن: $\arg\left(\frac{z_B}{z_D}\right) = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$; ($k \in \mathbb{Z}$)</p> <p>- إستنتاج قيس الزاوية الموجهة ($\widehat{OD; OB}$): لدينا: $\widehat{OD; OB} = \arg\left(\frac{z_B - z_O}{z_D - z_O}\right) = \arg\left(\frac{z_B}{z_D}\right) = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$; ($k \in \mathbb{Z}$) وَحَسْبَ مَا سُبِقَ فإن:</p>	
0.25	<p>ج. اثبات أن: $OD = OB$:</p> <p>لدينا: $z_D = \bar{z}_B$, لأن: $OD = z_D - z_O = \bar{z}_B - z_O$, (حسب - أ-), وَحَسْبَ خواص الطولية، فإن: $OD = OB$, $OD = z_D = \bar{z}_B = z_B = OB = 2$.</p> <p>- إستنتاج طبيعة المثلث OBD: بما أن: $OD = OB$, فإن: OBD متساوي الساقين.</p>	
0.25	<p>د. اسنتاج صورة النقطة D بالدوران الذي مركزه O وزاويته $-\frac{2\pi}{3}$:</p> <p>بما أن: $OD = OB$ وَهَذَا يَعْنِي أَنَّ صورة النقطة D بالدوران الذي مركزه O وزاويته $-\frac{2\pi}{3}$ هي النقطة B.</p>	
(4n)	<p>التمرين الثالث: لتكن (u_n) متتالية معرفة بحدها الأول $u_0 = \frac{3}{2}$, وَمِنْ أَجْلِ كُلِّ عَدْدٍ طَبِيعِي n بِالعَلَاقَةِ</p> $u_{n+1} = \frac{u_n}{\sqrt{1+u_n}}$ <p>أ. اثبات أنَّه من أَجْلِ كُلِّ عَدْدٍ طَبِيعِي n:</p> <p>- نضع الخاصية: $P(n)$: $u_n > 0$; $n \in \mathbb{N}$</p> <p>- من أَجْلِ $0 = n$, فإن: $u_0 = \frac{3}{2} > 0$, وَمِنْهُ $P(0)$ مُحَقَّقة.</p> <p>- نفرض صحة الخاصية حتى الدرجة n, أي: $u_n > 0$.</p> <p>- تُحَاوِلُ إثبات صحة الخاصية من أَجْلِ $(n+1)$, أي: $u_{n+1} > 0$.</p> <p>لدينا فرضاً: $u_n > 0$, وَ$0 > \frac{u_n}{\sqrt{1+u_n}}$, وَمِنْهُ فإن: $u_{n+1} > 0$, أي: $u_{n+1} > 0$.</p> <p>إذن: وَحَسْبَ مِبْدَأِ الإِسْتِدَالَابِالِتَّرَاجُعِ فَإِنَّهُ مِنْ أَجْلِ كُلِّ عَدْدٍ طَبِيعِي n أَنَّ: $u_n > 0$.</p>	
0.25	<p>ب. اثبات أنَّ المتتالية (u_n) متناقصة: أي ثبتت أنَّه: $? \forall n \in \mathbb{N}: u_{n+1} - u_n < 0$؟</p> <p>لدينا: $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n}{\sqrt{1+u_n}} - u_n = \frac{u_n - u_n\sqrt{1+u_n}}{\sqrt{1+u_n}} = u_n \left(\frac{1 - \sqrt{1+u_n}}{\sqrt{1+u_n}} \right)$: حيث:</p> $u_{n+1} - u_n = u_n \left(\frac{1 - \sqrt{1+u_n}}{\sqrt{1+u_n}} \right) \times \frac{1 + \sqrt{1+u_n}}{1 + \sqrt{1+u_n}} = u_n \times \frac{1 - 1 - u_n}{1 + \sqrt{1+u_n}} = \frac{-u_n^2}{1 + \sqrt{1+u_n}}$	

0.25	$u_{n+1} - u_n < 0, \text{ فإن: } \begin{cases} -u_n^2 < 0 \\ 1 + \sqrt{1 + u_n} > 0 \end{cases} ; \forall n \in \mathbb{N}$ <p>وَبِمَا أَنَّ: $\boxed{\text{إذن: } (u_n) \text{ مُتَاقِصَةٌ تَامَّاً عَلَى } \mathbb{N}}$</p>
0.25	<p>حسب -أ-. فإن: $u_n > 0; \forall n \in \mathbb{N}$, مما يعني أنَّ المتتالية (u_n) محدودة من الأسفل بالصفر.</p> <p>وَحَسْبَ -ب-. فإن: (u_n) مُتَاقِصَةٌ تَامَّاً عَلَى \mathbb{N}, إذن: (u_n) مُتَقَارِبَةٌ حَسْبَ مِبْرَهْنَةِ ما.</p> <p>حساب نهايتها: بما أَنَّ المتتالية (u_n) مُتَقَارِبَةٌ، فَهَذَا يَعْنِي أَنَّ: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$, مع ℓ عَدْدٌ مُنْتَهٌ</p>
0.25	<p>وَوَحِيدٌ. أي: $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1}$, وَمِنْهُ بِالتعويض فِي عَبَارَةِ u_n نَجُدُ أَنَّ:</p> $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{\sqrt{1+u_n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{\sqrt{1+u_{n+1}}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ell^2}{\sqrt{1+\ell^2}}$ <p>$\therefore \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$, $\ell^2 \left(1 - \frac{1}{1+\ell} \right) = \ell^2 \left(\frac{1-1-\ell}{1+\ell} \right) = \frac{-\ell^3}{1+\ell} = 0 \rightarrow \ell = 0$</p>
0.25	<p>(2) لَتَكُنِ الْمُتَتَالِيَّةُ (v_n) الْمُعْرَفَةُ بِحَدِّهَا الْأَوَّلُ: $v_0 = 1$, وَبِالعَلَاقَةِ التَّرَاجِعِيَّةِ:</p> $\boxed{v_{n+1} \geq \frac{\sqrt{10}}{3} v_n, n}$ <p>نَلَاحِظُ أَنَّ: $v_{n+1} = \frac{v_n}{u_n} = v_n \times \frac{1}{u_n}$, حَيْثُ:</p> $u_{0+1} = \frac{u_0}{\sqrt{1+u_0}} = \frac{\frac{3}{2}}{\sqrt{1+\frac{3}{2}}} = \frac{\frac{3}{2}}{\sqrt{\frac{5}{2}}} = \frac{3}{2} \times \sqrt{\frac{2}{5}} = \frac{3}{\sqrt{10}} \xrightarrow{\text{نَقْلُ الْطَّرْفَيْنِ}} \frac{1}{u_1} = \frac{\sqrt{10}}{3}$ <p>مِنْ جَهَةِ أُخْرَى: $\frac{1}{u_1} \leq \frac{1}{u_n}$, (لَأَنَّ: (u_n) مُتَاقِصَةٌ حَسْبَ السُّؤَالِ الثَّانِي -أ-), وَمِنْهُ:</p> $\frac{v_n}{u_n} \geq \frac{\sqrt{10}}{3} v_n, \text{ نَجُدُ أَنَّ: } v_n > 0, \text{ وَبِضَرْبِ الْطَّرْفَيْنِ فِي } 0 > v_n > \frac{1}{u_1} = \frac{\sqrt{10}}{3}$ <p>إذن: $v_{n+1} \geq \frac{\sqrt{10}}{3} v_n$.</p>
0.25	<p>بـ البرهان بالترابع أَنَّهُ مِنْ أَجْلِ كُلِّ عَدْدٍ طَبِيعِيٍّ غَيْرِ مَعْدُومٍ n,</p> $\boxed{v_n \geq \frac{2}{3} \left(\frac{\sqrt{10}}{3} \right)^{n-1}}$ <p>- نَصْعُبُ الْخَاصِيَّةَ: $P(n): v_n \geq \frac{2}{3} \left(\frac{\sqrt{10}}{3} \right)^{n-1}; n \in \mathbb{N}^*$</p> <p>- مِنْ أَجْلِ $n = 1$, فإن: $v_1 = \frac{v_0}{u_0} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \left(\frac{\sqrt{10}}{3} \right)^0$, وَمِنْهُ:</p> <p>مُحَقَّقَةٌ.</p> <p>- نَفْرُضُ صَحَّةَ الْخَاصِيَّةَ حَتَّىَ الْدَّرْجَةِ n, أي: $v_n \geq \frac{2}{3} \left(\frac{\sqrt{10}}{3} \right)^{n-1}$</p> <p>- تُحَاولُ إثباتُ صَحَّةَ الْخَاصِيَّةِ مِنْ أَجْلِ $(n+1)$, أي: $v_{n+1} \geq \frac{2}{3} \left(\frac{\sqrt{10}}{3} \right)^n$</p> <p>- لَدِينَا فَرَضًا: $\left(\frac{\sqrt{10}}{3} \right) > v_n$, وَبِضَرْبِ الْطَّرْفَيْنِ فِي $0 > v_n \geq \frac{2}{3} \left(\frac{\sqrt{10}}{3} \right)^{n-1}$</p> <p>نَجُدُ أَنَّ: $v_n \left(\frac{\sqrt{10}}{3} \right) \geq \frac{2}{3} \left(\frac{\sqrt{10}}{3} \right)^{n-1} \times \left(\frac{\sqrt{10}}{3} \right) = \frac{2}{3} \left(\frac{\sqrt{10}}{3} \right)^n$</p> <p>- . $v_{n+1} \geq \frac{2}{3} \left(\frac{\sqrt{10}}{3} \right)^n$, $v_{n+1} \geq \frac{\sqrt{10}}{3} v_n \geq \frac{2}{3} \left(\frac{\sqrt{10}}{3} \right)^n$</p> <p>- إذن: وَحَسْبَ مَبْدَأِ الإِسْتَدَلَالِ بِالْتَّرَاجِعِ فإن: $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*}$</p>
	<p>جـ حساب النهاية: حَسْبَ -بـ فإن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$</p>

0.25	<p>• $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$ (حسب قاعدة المقارنة)، فإن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n \geq \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{3} \left(\frac{\sqrt{10}}{3} \right)^{n-1} = +\infty$</p> <p>$n \geq 1$, $S_n = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{v_1^2} + \frac{1}{v_2^2} + \frac{1}{v_3^2} + \dots + \frac{1}{v_n^2} \right)$ (نضع:)</p> <p>$\frac{1}{v_1^2} + \frac{1}{v_2^2} + \frac{1}{v_3^2} + \dots + \frac{1}{v_n^2} < \frac{45}{2} \left[1 - \left(\frac{9}{10} \right)^n \right], n > 1$ (أثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي $n > 1$)</p> <p>لدينا حسب السؤال الثاني - بـ: $\frac{1}{v_n} \leq \frac{3}{2} \left(\frac{3}{\sqrt{10}} \right)^{n-1}$, وـ $v_n \geq \frac{2}{3} \left(\frac{\sqrt{10}}{3} \right)^{n-1}$: $\left(\frac{1}{v_n} \right)^2 \leq \left[\frac{3}{2} \left(\frac{3}{\sqrt{10}} \right)^{n-1} \right]^2 = \frac{9}{4} \left[\left(\frac{3}{\sqrt{10}} \right)^2 \right]^{n-1} = \frac{9}{4} \left(\frac{9}{10} \right)^{n-1} = \frac{9}{4} \left(\frac{9}{10} \right)^n \times \frac{10}{9}$ نحصل على: $\left(\frac{1}{v_n} \right)^2 \leq \frac{5}{2} \left(\frac{9}{10} \right)^n$ أي: ، حيث: $\left(\frac{1}{v_1} \right)^2 \leq \frac{5}{2} \left(\frac{9}{10} \right)^1$ من أجل $n = 1$, فإن: $\left(\frac{1}{v_2} \right)^2 \leq \frac{5}{2} \left(\frac{9}{10} \right)^2$ من أجل $n = 2$, فإن: $\left(\frac{1}{v_3} \right)^2 \leq \frac{5}{2} \left(\frac{9}{10} \right)^3$ من أجل $n = 3$, فإن: \dots \dots $\left(\frac{1}{v_{n-1}} \right)^2 \leq \frac{5}{2} \left(\frac{9}{10} \right)^{n-1}$ من أجل $n - 1$, فإن: $\left(\frac{1}{v_n} \right)^2 \leq \frac{5}{2} \left(\frac{9}{10} \right)^n$ من أجل n, فإن: وـ $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{v_n} \right)^2$ (مجموع الأطراف، طرفاً لطرف)، نحصل على:</p>
0.25	$\frac{1}{v_1^2} + \frac{1}{v_2^2} + \frac{1}{v_3^2} + \dots + \frac{1}{v_n^2} \leq \frac{5}{2} \left[\left(\frac{9}{10} \right)^1 + \left(\frac{9}{10} \right)^2 + \left(\frac{9}{10} \right)^3 + \dots + \left(\frac{9}{10} \right)^{n-1} + \left(\frac{9}{10} \right)^n \right]$
0.25	$t_n = \left(\frac{9}{10} \right)^n, S'_n = \left(\frac{9}{10} \right)^1 + \left(\frac{9}{10} \right)^2 + \dots + \left(\frac{9}{10} \right)^n = t_1 + t_2 + \dots + t_n$ (نضع: $t_n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{9}{10} \right)^k$)
0.25	$t_{n+1} = \left(\frac{9}{10} \right)^{n+1} = \left(\frac{9}{10} \right)^n \left(\frac{9}{10} \right) = \left(\frac{9}{10} \right)^n t_n$ (فيكون: $t_{n+1} = t_n + \left(\frac{9}{10} \right)^{n+1}$ ، مما يعني أن: t_n) متالية هندسية $q = \frac{9}{10}$ (أساسها)، $t_1 = \frac{9}{10}$ (وحدها الأولى)، وـ $t_n = t_1 \cdot q^{n-1} = \frac{9}{10} \cdot \left(\frac{9}{10} \right)^{n-1} = \frac{9}{10} \cdot \frac{9^{n-1}}{10^{n-1}} = \frac{9^n}{10^n}$ (وـ $t_n = \frac{9^n}{10^n}$)
0.25	$S'_n = t_1 \times \frac{1-q^{n-1+1}}{1-q} = \frac{9}{10} \times \frac{1-\left(\frac{9}{10}\right)^n}{1-\frac{9}{10}} = \frac{9}{10} \times 10 \times \left[1 - \left(\frac{9}{10} \right)^n \right] = 9 \left[1 - \left(\frac{9}{10} \right)^n \right]$
0.25	$\frac{1}{v_1^2} + \frac{1}{v_2^2} + \frac{1}{v_3^2} + \dots + \frac{1}{v_n^2} \leq \frac{5}{2} \times 9 \left[1 - \left(\frac{9}{10} \right)^n \right]$ (وبالتعويض نحصل على)
	$\frac{1}{v_1^2} + \frac{1}{v_2^2} + \frac{1}{v_3^2} + \dots + \frac{1}{v_n^2} \leq \frac{45}{2} \left[1 - \left(\frac{9}{10} \right)^n \right]$ (إذن: $\frac{1}{v_1^2} + \frac{1}{v_2^2} + \frac{1}{v_3^2} + \dots + \frac{1}{v_n^2} < \frac{45}{2} \left[1 - \left(\frac{9}{10} \right)^n \right]$)
	<p>بـ استنتاج: $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{v_1^2} + \frac{1}{v_2^2} + \frac{1}{v_3^2} + \dots + \frac{1}{v_n^2} \right)$ (لدينا):</p> $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{45}{2n} \left[1 - \left(\frac{9}{10} \right)^n \right] = 0$ (وـ $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 0$)
0.25	$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 0$ لأن: $\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{45}{2n} = 0 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{9}{10} \right)^n = 0 ; q = \frac{9}{10} \in]-1 ; 1[\end{cases}$
(7)	<p>التمرين الرابع: نعتبر الدالة f المعرفة على \mathbb{R} بـ: $f(x) = -x + \frac{5}{2} - \frac{1}{2}e^{x-2}(e^{x-2} - 4)$</p>

أ-حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ (1)

0.25 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$: أي ، $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[-x + \frac{5}{2} - \frac{1}{2}e^{x-2}(e^{x-2} - 4) \right] = +\infty$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-x + \frac{5}{2} \right) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} (x - 2) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \end{cases}$$
 لأن: $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x - 2) = -\infty$ ، $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$

0.25 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$: أي ، $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[-x + \frac{5}{2} - \frac{1}{2}e^{x-2}(e^{x-2} - 4) \right] = -\infty$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-x + \frac{5}{2} \right) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 2) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \end{cases}$$
 لأن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 2) = +\infty$ ، $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$

ب-اثبات أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيماً مقارباً مائلاً (Δ) عند $(-\infty)$ ، يطلب تعين معادلة له:

0.25 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[f(x) + x - \frac{5}{2} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[-\frac{1}{2}e^{x-2}(e^{x-2} - 4) \right] = 0$:
 نلاحظ أن: $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x - 2) = -\infty$ ، $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$
 لأن: $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x - 2) = -\infty$ ، $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$

0.25 إذن: المنحنى (C_f) يقبل مستقيماً مقارباً مائلاً (Δ) عند $(-\infty)$.

ج- دراسة الوضع النسيي للمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) : أي ندرس إشارة $y - f(x)$ ، حيث:

0.25 ، $f(x) - y = -\frac{1}{2}e^{x-2}(e^{x-2} - 4) = 0 \rightarrow e^{x-2} = 4 \rightarrow x - 2 = \ln 4$
 أي: $e^{x-2} \neq 0$ ، $\forall x \in \mathbb{R}$ ، لأن: $x = 2 + \ln 4$ أدنى

x	$-\infty$	$2 + \ln 4$	$+\infty$
$-\frac{1}{2}e^{x-2}$	+	0	+
$e^{x-2} - 4$	+	0	+
$f(x) - y$	+	0	-

وعليه فإن: - (C_f) يقع أعلى (Δ) لما $x \in]-\infty; 2 + \ln 4]$ ،
 $(C_f) \cap (\Delta) = \left\{ (2 + \ln 4; \frac{1}{2} + \ln 2) \right\}$ -
 $.x \in]2 + \ln 4; +\infty]$ لما (C_f) -

أ-حساب $f'(x)$ ، حيث: f' هي الدالة المشتقة للدالة f : قابلة للإشتقاق على \mathbb{R} كمجموع وجاء دوال قابلة للإشتقاق على \mathbb{R} ،

0.25 حيث: $f'(x) = -1 - \frac{1}{2}e^{x-2}(e^{x-2} - 4) - e^{x-2} \times \frac{1}{2} \times e^{x-2}$ ، أي:
 $f'(x) = -1 - \frac{1}{2}e^{x-2} \times e^{x-2} + 2e^{x-2} - \frac{1}{2}e^{x-2} \times e^{x-2}$ ، ومنه:
 $f'(x) = -(e^{x-2} - 1)^2$ ، إذن: $f'(x) = -1 + 2e^{x-2} - (e^{x-2})^2$

ب-استنتاج اتجاه تغير الدالة f :

0.25 حسب عبارة $f'(x) \leq 0$ ، لأن: $f'(x) \leq 0$ ، $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} -1 < 0 \\ (e^{x-2} - 1)^2 \geq 0 ; \forall x \in \mathbb{R} \\ e^{x-2} - 1 = 0 \rightarrow e^{x-2} = 1 \rightarrow x - 2 = \ln 1 \rightarrow x = 2 \end{cases}$$

 إذن: f متناقصة تماماً على \mathbb{R}

x	$-\infty$	2	$+\infty$
f'	-	0	-
f	$+\infty$	$f(2)$	$\rightarrow \infty$

$$. f(2) = -2 + \frac{5}{2} - \frac{1}{2}e^{2-2}(e^{2-2} - 4) = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2: \text{حيث:}$$

ج- إثبات أن (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعين احداثياتها: حسب السؤال الثاني -أ- فإن:

حيث: $f'(x) = -(e^{x-2} - 1)^2$ قابلة للإشتقاق على \mathbb{R} كتركيب دوال قابلة للإشتقاق على \mathbb{R} ، $f''(x) = -2e^{x-2}(e^{x-2} - 1)^{2-1} = -2e^{x-2}(e^{x-2} - 1)$:

ومنه: $x - 2 = \ln 1 \rightarrow x = 2$ ، أي: $e^{x-2} - 1 = 0$ ، فليكون: $f''(x) = 0$. و تكون إشارة $f''(x)$ كما هي موضحة في الجدول أدناه: (لأن $-2e^{x-2} < 0$; $\forall x \in \mathbb{R}$)

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$-2e^{x-2}$	-	-	-
$e^{x-2} - 1$	-	0	+
$f''(x)$	+	0	-

مما يعني أن $f''(x)$ إنعدمت من أجل $2 = x_0$ وغيّرت إشارتها،

إذن: (C_f) يقبل نقطة انعطاف هي $(2; 2)$.

ج- إثبات أن المعادلة: $2 + \ln 3 < \alpha < 2 + \ln 4$ حيث: $f(x) = 0$ تقبل حلًا وحيدًا α حيث:

f معرفة ومستمرة ومتناقصة على $[2 + \ln 3; 2 + \ln 4]$ ، حيث:

$$\left\{ f(2 + \ln 3) = -2 - \ln 3 + \frac{5}{2} - \frac{1}{2}e^{2+\ln 3-2}(e^{2+\ln 3-2} - 4) = 2 - \ln 3 = 0.901 \right.$$

$$\left\{ f(2 + \ln 4) = -2 - \ln 4 + \frac{5}{2} - \frac{1}{2}e^{2+\ln 4-2}(e^{2+\ln 4-2} - 4) = \frac{1}{2} - \ln 4 = -0.886 \right.$$

أي: $f(2 + \ln 3) \times f(2 + \ln 4) < 0$ ، و منه وحسب مبرهنة القيمة المتوسطة فإنه يوجد حل وحيد α حيث: $f(\alpha) = 0$.

ج- إثبات أن المنحني (C_f) يقبل مماساً (T) يوازي المقارب المائل (Δ) ، يطلب تعين معادلة له:

أي ثبت أن $f'(x_0) = -1$ ، حيث: $f'(x_0) = -(e^{x_0-2} - 1)^2 = -1$ ، و منه: $|e^{x_0-2} - 1| = 1$ ، أي: $(e^{x_0-2} - 1)^2 = 1$

$$\left\{ e^{x_0-2} - 1 = -1 \rightarrow e^{x_0-2} = 0, e^{x_0-2} > 0; \forall x_0 \in \mathbb{R} \right.$$

$$\left\{ e^{x_0-2} - 1 = 1 \rightarrow e^{x_0-2} = 2 \rightarrow x_0 - 2 = \ln 2 \rightarrow x_0 = 2 + \ln 2 \right.$$

إذن: المنحني (C_f) يقبل مماساً (T) يوازي المقارب المائل (Δ) عند $x_0 = 2 + \ln 2$ حيث:

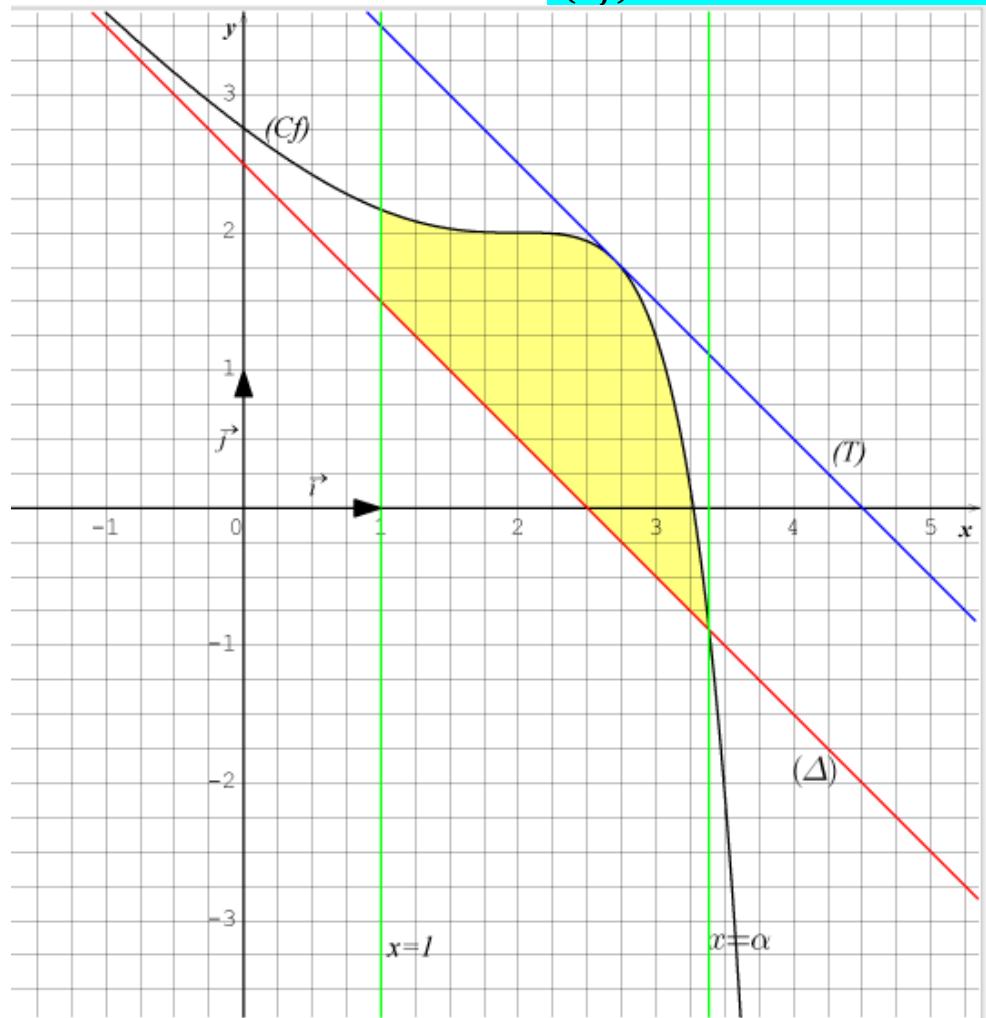
$$y = f'(2 + \ln 2)(x - 2 - \ln 2) + f(2 + \ln 2)$$

$$\left\{ f'(2 + \ln 2) = -1 \right.$$

$$\left\{ f(2 + \ln 2) = -2 - \ln 2 + \frac{5}{2} - \frac{1}{2}e^{2+\ln 2-2}(e^{2+\ln 2-2} - 4) = \frac{5}{2} - \ln 2 \right.$$

$$(T): y = -(x - 2 - \ln 2) + \frac{5}{2} - \ln 2 = -x + 2 + \ln 2 + \frac{5}{2} - \ln 2: \text{و منه:}$$

$$(T): y = -x + \frac{9}{2} \text{ إذن:}$$



6) المناقشة حسب قيمة الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة: $f(x) = -x + m$: هي فوائل نقطة تقاطع البيان (C_f) مع المستقيمات المائلة: $y = -x + m$: (Δ_m)، حيث:

- لما $m \in \left[-\infty; \frac{5}{2} \right]$: يوجد حل وحيد موجب.
- لما $m \in \left[\frac{5}{2}; \frac{11}{4} \right]$: حلان مختلفان في الإشارة.
- لما $m = \frac{11}{4}$: حل معدوم وآخر موجب.
- لما $m \in \left[\frac{11}{4}; \frac{9}{2} \right]$: حلان موجبان مختلفان.
- لما $m = \frac{9}{2}$: حل وحيد موجب هو $x = 2$.
- لما $m \in \left[\frac{9}{2}; +\infty \right]$: لا توجد حلول.

7) لتكن $A(\alpha)$ مساحة الحيز للمستوى المحدد بالمنحنى (C_f) وبالمستقيمات: $y = -x + \frac{5}{2}$ بما أن المنحنى (C_f) يقع فوق (Δ) على $[1; \alpha]$. حساب $A(\alpha)$ بدلالة α . $x = \alpha$ و $x = 1$ فإن:

$$A(\alpha) = \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\| \times \int_1^\alpha [f(x) - y] dx = 4 \int_1^\alpha \left[-\frac{1}{2} e^{x-2} (e^{x-2} - 4) \right] dx$$

$$, A(\alpha) = 4 \int_1^\alpha \left[-\frac{1}{2} e^{2x-4} + 2e^{x-2} \right] dx = 4 [-e^{2x-4} + 2e^{x-2}]_1^\alpha$$

$$. A(\alpha) = 4(-e^{2\alpha-4} + 2e^{\alpha-2} + e^{-2} - 2e^{-1}) . cm^2$$

إذن: