الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

المدرسة العليا للأساتذة بورقلة
مصلحة النشاطات الثقافية والرياضية
دورة أفريل 2025
الشعبة: علوم تجريبية
المادّة: رياضيات
المدّة: 3 ساعات و 30 د

امتحان البكالوريا التجريبي

على المترشّح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأوّل

التمرين الأوّل (4 ن)

المتتالية العددية (U_n) معرّفة بـ : $U_0 = 1$ ، ومن أجل كلّ عدد طبيعي n : $U_{n+1} = \dfrac{U_n}{e^n U_n + e}$

1. أُحسب كُلّاً من U_1 و U_2

2. أ. برهن بالتّراجع أنّه: من أجل كلّ عدد طبيعي n ، $U_n > 0$

ب. بيّن أنّ (U_n) متناقصة تماما ثمّ استنتج أنّها متقاربة.

3. المتتالية العددية (V_n) معرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $V_n = \dfrac{e^{-n}}{U_n}$

أ. بيّن أنّ المتتالية (V_n) حسابية أساسها e^{-1} ثمّ استنتج عبارة V_n بدلالة n

ب. أُكتب عبارة U_n بدلالة n ثمّ استنتج $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$

4. من أجل كلّ عدد طبيعي n نضع : $S_n = U_0V_0 + U_1V_1 + \cdots + U_nV_n$

- أُحسب S_n بدلالة n ثمّ استنتج أنّ $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \dfrac{e}{e-1}$

التمرين الثاني (4 ن)

صندوق غير شفّاف به 5 كريّات متماثلة لا نفرّق بينها عند اللّمس، منها كريّتين خضراوين تحملان الرّقمين: 0 و 1 ، كريّتين حمراوين تحملان الرّقمين: 1 و 2 ، وكريّة بيضاء تحمل الرقم: 2.

نسحب عشوائيا من الصندوق كريّتين في آن واحد.

1. أُحسب احتمال كلّا من الحدثين الآتيين.

أ. A: " الحصول على كريّتين مختلفتين في اللّون ".

ب. B: " الحصول على كريّة بيضاء على الأقل ".

2. نعتبر X المتغيّر العشوائي الذي يُرفق بكل سحب مجموع الرقمين المحصّل عليهما.

أ. برّر أنّ مجموعة قيم المتغيّر العشوائي X هي $\{1;2;3;4\}$، ثمّ عرّف قانون احتماله.

ب. استنتج احتمال الحدث $(C_X^2 = 1)$

3. نُضيف إلى الصّندوق k كريّة تحمل الرقم 1 حيث $k \in \mathbb{N}^*$ ، ونسحب عشوائيا كريّتين على التّوالي بدون إرجاع.

- عيّن قيمة k التي يكون من أجلها احتمال الحصول على عددين جداؤهما معدوم هو $\dfrac{1}{15}$

التمرين الثالث (5 ن)

المستوي المركّب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$

أجب بصحيح أو خاطئ مع التّبرير في كلّ حالة من الحالات الآتية.

1. المعادلة $\overline{z+i}-i=0$ تقبل حلّا وحيدا في مجموعة الأعداد المركّبة $\mathbb{C}$

2. مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث $z+\overline{z}=0$ هي حامل محور الفواصل.

3. العدد المركّب $\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{1962}$ يساوي i

4. إذا كان $z=1+i$ فإنّ المتتالية العددية (U_n) المعرّفة على $\mathbb{N}^*$ بـ $U_n=\log|z|^n$ هي متتالية حسابية.

5. إذا كان z عددا مركّبا حيث $|z|=1$ فإنّ $|4\overline{z}-1|=|z-4|$

التمرين الرّابع (7 ن)

I) الجدول المقابل هو جدول تغيّرات الدّالة g المعرّفة على $]0;+\infty[$ كما يلي $g(x)=x+\dfrac{2\ln x-1}{x}$

x	0	$+\infty$
$g(x)$	$\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$ $+\infty$

- أُحسب $g(1)$ ثمّ استنتج إشارة $g(x)$ على $]0;+\infty[$

II) الدّالة العددية f معرّفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي : $f(x)=\ln x-\dfrac{\ln x}{x^2}$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$ حيث $\left\|\overrightarrow{i}\right\|=1\,cm$.

1. أ. بيّن أنّ $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}f(x)=+\infty$ وفسّر النتيجة هندسيا ثمّ أُحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

ب. بيّن أنّه: من أجل كلّ x من $]0;+\infty[$ ، $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$ ثمّ شكّل جدول تغيّرات الدّالة f

2. أ. أُحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-\ln x]$ ثمّ فسّر النتيجة هندسياً.

ب. أُدرس الوضع النسبي لـ (C_f) و (γ) المنحنى الممثّل للدّالة $\ln$

3. أنشئ كُلّا من (γ) و (C_f)

4. نعتبر λ عددا حقيقياً حيث $\lambda>1$ ، نرمز بـ $\mathcal{S}(\lambda)$ إلى مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحنيين (C_f) و (γ) والمستقيمين ذوا المعادلتين $x=1$ و $x=\lambda$

أ. باستعمال المكاملة بالتجزئة بيّن أنّ $\displaystyle\int_1^{\lambda}\frac{\ln x}{x^2}dx=1-\frac{1}{\lambda}-\frac{\ln\lambda}{\lambda}$

ب. استنتج أنّ $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\mathcal{S}(\lambda)=\mathcal{S}(e^{-1})$

5. الدّالة العددية h معرّفة على $]0;+\infty[$ كما يلي : $h(x)=\dfrac{|\ln x|}{x^2}-|\ln x|$

- اشرح كيفية إنشاء المنحنى الممثّل للدّالة h انطلاقا من (C_f). (لا يُطلب الإنشاء)

انتهى الموضوع الأوّل

الموضوع الثاني

التمرين الأوّل (4 ن)

في المدرسة العليا للأساتذة بورقلة يُراد تشكيل لجنة لتمثيل الطلبة تضمّ رئيسا، نائباً وكاتباً، من بين خمسة طلبة ذكور، وأربع طالبات إناث إحداهن اسمها يُسرى.

1. أُحسب احتمال كُلّا من الحدثين الآتيين.

أ. الحدث A: " أعضاء اللّجنة من جنسين مختلفين ".

ب. الحدث B: " يُسرى رئيسا للجنة ".

2. بيّن أنّ $P\left(\overline{A}\cap B\right)=\dfrac{1}{84}$ ثمّ استنتج $P_{\overline{A}}\left(B\right)$ احتمال الحدث B علما أنّ $\overline{A}$ محقّق.

3. نعتبر X المتغيّر العشوائي الذي يُرفق كلّ لجنة بعدد الذكور فيها.

أ. بيّن أنّ $P\left(X=1\right)=\dfrac{5}{14}$ و $P\left(X=2\right)=\dfrac{10}{21}$

ب. عرّف قانون احتمال المتغيّر العشوائي X

ج. أُحسب $E\left(X\right)$ الأمل الرياضياتي للمتغيّر العشوائي X ثمّ استنتج $E\left(1962X-1245\right)$

التمرين الثاني (4 ن)

عيّن الاقتراح الصّحيح الوحيد من بين الاقتراحات الثلاثة في كلّ حالة من الحالات الآتية مع التّبرير.

1. الدّالة العددية h المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $h(x)=2x+\ln\left(1+e^{-4x}\right)$ هي دالة

أ) زوجية. ب) فردية. ج) لا زوجية ولا فردية.

2. مجموعة حلول المعادلة $\log\left(x-\sqrt{3}\right)+\log\left(x+\sqrt{3}\right)=0$ ذات المجهول الحقيقي x هي

أ) $\{-2;2\}$ ب) $\{2\}$ ج) $\{-10;10\}$

3. قيمة العدد الحقيقي β الذي يحقّق $\displaystyle\int_0^{\beta} xe^x dx=1$ هي

أ) 1 ب) e ج) -1

4. حلّ المعادلة التفاضلية $y'-1962y=2025$ الذي يحقّق $y\left(0\right)=0$ هو دالة

أ) متناقصة تماما على $\mathbb{R}$ ب) ثابتة على $\mathbb{R}$ ج) متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

التمرين الثالث (5 ن)

الدّالة العددية f معرّفة على المجال $[0;+\infty[$ كما يلي : $f(x)=\dfrac{x}{2x+1}$

ونعتبر المتتالية العددية (U_n) المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ : $U_0=1$ ومن أجل كلّ عدد طبيعي n بـ : $U_{n+1}=f\left(U_n\right)$

1. شكّل جدول تغيّرات الدّالة f.

2. أ. برهن بالتّراجع أنّه: من أجل كلّ عدد طبيعي n ، $U_n>0$

ب. أُدرس اتجاه تغيّر (U_n) ثمّ استنتج أنّها متقاربة.

3. أ. بيّن أنّه: من أجل كلّ n من $\mathbb{N}^*$ ، $f\left(\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n+1}$

ب. بيّن أنّه: من أجل كلّ n من $\mathbb{N}^*$ ، $U_n \leq \frac{1}{n}$

ج. أُحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

4. من أجل كلّ n من $\mathbb{N}^*$ نضع : $S_n = \frac{2}{U_1} + \frac{2}{U_2} + \cdots + \frac{2}{U_n}$

- بيّن أنّه: من أجل كلّ n من $\mathbb{N}^*$ ، $S_n \geq n(n+1)$ ثمّ استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

التمرين الرّابع (7 ن)

I) الدّالة العددية g معرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = e^x + x$

1. أُدرس اتجاه تغيّر الدّالة g على $\mathbb{R}$

2. أ. بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 2$ تقبل حلّا وحيدا α حيث $0,4 < \alpha < 0,5$

ب. استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x) - 2$

II) الدّالة العددية f معرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = (x-1)(e^{-x} - 1)$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$ حيث $\left\|\vec{j}\right\| = 1\,cm$.

1. أ. أُحسب كُلّا من $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

ب. بيّن أنه من أجل كلّ x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = \frac{2-g(x)}{e^x}$

ج. استنتج أنّ f متزايدة تماما على $]-\infty; \alpha]$ ومتناقصة تماما على $[\alpha; +\infty[$ ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

2. أ. بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = -x + 1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$

ب. أُدرس الوضع النسبي لـ (C_f) و (Δ)

3. أُكتب معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة O

4. أ. أنشئ كُلّا من (Δ) ، (T) و (C_f)

ب. عيّن بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m التي من أجلها تقبل المعادلة $f(x) = x \ln m$ حلّين بالضّبط.

5. نعتبر λ عددا حقيقيا حيث $\lambda > 1$ ، نرمز بـ $\mathcal{A}(\lambda)$ إلى مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات ذات المعادلات: $y = -x + 1$ ، $x = 0$ و $x = \lambda$

- باستعمال المكاملة بالتجزئة أُحسب $\int_1^\lambda xe^{-x}dx$ ثمّ استنتج أنّ $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} \mathcal{A}(\lambda) = e^{-1}\,cm^2$

انتهى الموضوع الثاني

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

المدرسة العليا للأساتذة بورقلة
مصلحة النشاطات الثقافية والرياضية
دورة أفريل 2025
الشعبة: علوم تجريبية
المادة: رياضيات
المدّة: 3 ساعات ونصف

امتحان البكالوريا التجريبي

الإجابة النموذجية + سلّم التنقيط

شكر وعرفان

باقة من الشّكر والعرفان للطلبة الآتية أسماؤهم على مجهوداتهم المبذولة خلال عملية التصحيح وكذلك على ملاحظاتهم القيّمة التي ساهمت في إنجاز هذا العمل لفائدة التلاميذ المُقبلين على امتحان شهادة البكالوريا.

- إيمان بلحوت
- عمرة طويل
- أنفال الشين
- منال حجاج
- منال شبرة مصطفى
- يمينة حامدي
- وئام باوية
- جمانة بوعرقية
- رضوان أحمودة
- رميصاء بن ساسية
- كوثر بن عطاء الله
- مريم بلعيفة
- لؤي دغوم
- دعاء عرعار
- آمنة العايب
- إيناس بروج
- عيسى بالعيد
- فضيلة دودو
- ماريا زايدي
- معتز لصفر
- منال باشي

رئيس لجنة التصحيح

إجابة نموذجية مقترحة للموضوع الأوّل

التمرين الأوّل (٤ ن)

1. حساب كُلّاً من U_1 و U_2

$$U_1 = \frac{U_0}{e^0 U_0 + e} = \frac{1}{1 \times 1 + e} = \frac{1}{e+1}$$

$$U_2 = \frac{U_1}{e^1 U_1 + e} = \frac{\frac{1}{e+1}}{e \times \frac{1}{e+1} + e} = \frac{\frac{1}{e+1}}{\frac{e + e^2 + e}{e+1}} = \frac{1}{e^2 + 2e}$$

2. أ. البرهان بالتّراجع أنّه: من أجل كلّ عدد طبيعي n ، $U_n > 0$

- نرمز للخاصية " $U_n > 0$ " بالرمز $P(n)$.
- نتحقّق من صحّة $P(0)$

لدينا

$$U_0 = 1$$

ومنه

$$U_0 > 0$$

وعليه $P(0)$ صحيحة.

- من أجل عدد طبيعي كيفي k نفترض صحّة $P(k)$ ونبرهن صحّة $P(k+1)$.

لدينا

$$U_k > 0$$

وبما أنّ

$$\begin{cases} e > 0 \\ e^k > 0 \end{cases}$$

فإنّ

$$\frac{U_k}{e^k U_k + e} > 0$$

أي

$$U_{k+1} > 0$$

وعليه $P(k+1)$ صحيحة.

- وحسب مبدأ الاستدلال بالتراجع نستنتج أنّ $P(n)$ صحيحة من أجل كلّ عدد طبيعي n.

ب. تبيين أنّ (U_n) متناقصة تماما ثمّ استنتاج أنّها متقاربة.

من أجل كلّ n من $\mathbb{N}$ لدينا

$$\begin{aligned} U_{n+1}-U_n &= \frac{U_n}{e^nU_n+e}-U_n \\ &= U_n\left(\frac{1}{e^nU_n+e}-1\right) \end{aligned}$$

وبما أنّ

$$\begin{cases} U_n>0 \\ \dfrac{1}{e^nU_n+e}<1 \end{cases}$$

فإنّ

$$U_{n+1}-U_n<0$$

ومنه (U_n) متناقصة تماما.

استنتاج التقارب

لدينا

- (U_n) متناقصة على $\mathbb{N}$
- من أجل كلّ n من $\mathbb{N}$ ، $U_n>0$ ، وعليه (U_n) محدودة من الأسفل بالعدد 0

وبالتالي (U_n) متقاربة.

3. أ. تبيين أنّ المتتالية (V_n) حسابية أساسها e^{-1} ثمّ استنتج عبارة V_n بدلالة n

من أجل كلّ n من $\mathbb{N}$ لدينا

$$\begin{aligned} V_{n+1} &= \frac{e^{-(n+1)}}{U_{n+1}} \\ &= \frac{e^{-(n+1)}}{\dfrac{U_n}{e^nU_n+e}} \\ &= e^{-n-1}\times\frac{e^nU_n+e}{U_n} \\ &= e^{-n-1}\left(\frac{e^nU_n}{U_n}+\frac{e}{U_n}\right) \\ &= e^{-n-1}\left(e^n+\frac{e}{U_n}\right) \\ &= e^{-n-1+n}+\frac{e^{-n-1+1}}{U_n} \\ &= e^{-1}+\frac{e^{-n}}{U_n} \\ &= V_n+e^{-1} \end{aligned}$$

وبالتالي (V_n) متتالية حسابية أساسها e^{-1} ، وعندئذ من أجل كلّ n من $\mathbb{N}$ لدينا

$$\begin{aligned} V_n &= V_0+(n-0)\,e^{-1} \\ &= 1+ne^{-1} \end{aligned}$$

ب. كتابة عبارة U_n بدلالة n ثمّ استنتاج $\lim_{n\to+\infty} U_n$

من أجل كلّ n من $\mathbb{N}$ لدينا

$$V_n = \frac{e^{-n}}{U_n}$$

ومنه

$$\begin{aligned} U_n &= \frac{e^{-n}}{V_n} \\ &= \frac{e^{-n}}{1+ne^{-1}} \end{aligned}$$

وبما أنّ $\lim e^{-n} = 0$ فإنّ $\lim U_n = 0$

4. • حساب S_n بدلالة n ثمّ استنتاج أنّ $\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{e}{e-1}$

من أجل كلّ n من $\mathbb{N}$ لدينا

$$\begin{aligned} S_n &= U_0V_0 + U_1V_1 + \cdots + U_nV_n \\ &= 1 + e^{-1} + e^{-2} + \cdots + e^{-n} \\ &= 1 \times \frac{1-\left(e^{-1}\right)^{n-0+1}}{1-e^{-1}} \\ &= \frac{1-e^{-n-1}}{1-e^{-1}} \end{aligned}$$

ولدينا

$$\begin{aligned} \lim S_n &= \lim \frac{1-e^{-n-1}}{1-e^{-1}} \\ &= \lim \frac{1-e^{-n}e^{-1}}{1-e^{-1}} \end{aligned}$$

وبما أنّ

$$\lim e^{-n} = 0$$

فإنّ

$$\begin{aligned} \lim S_n &= \frac{1}{1-e^{-1}} \\ &= \frac{e}{e-1} \end{aligned}$$

■

التمرين الثاني (٤ ن)

1. حساب احتمال كلّا من الحدثين A و B

أ. A: " الحصول على كريّتين مختلفتين في اللّون ".

$$\begin{aligned} P(A) &= 1 - P\left(\overline{A}\right) \\ &= 1 - \frac{C_2^2 + C_2^2}{C_5^2} \\ &= \frac{8}{10} \\ &= \frac{4}{5} \end{aligned}$$

ب. B: " الحصول على كريّة بيضاء على الأقل ".

$$\begin{aligned} P(B) &= \frac{C_1^1 \times C_4^1}{C_5^2} \\ &= \frac{4}{10} \\ &= \frac{2}{5} \end{aligned}$$

2. أ. برّر أنّ مجموعة قيم المتغيّر العشوائي X هي $\{1;2;3;4\}$، ثمّ تعريف قانون احتماله.

لدينا

$$\begin{cases} 0+1=1 \\ 0+2=2 \\ 1+1=2 \\ 1+2=3 \\ 2+2=4 \end{cases}$$

ومنه مجموعة قيم المتغيّر العشوائي X هي $\{1;2;3;4\}$ وعندئذ لدينا

$$\begin{aligned} P(X=1) &= \frac{C_1^1 \times C_2^1}{C_5^2} \\ &= \frac{2}{10} \\ &= \frac{1}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X=2) &= \frac{C_1^1 \times C_2^1 + C_2^2}{C_5^2} \\ &= \frac{3}{10} \end{aligned}$$

وأيضاً

$$\begin{aligned} P(X=3) &= \frac{C_2^1 \times C_2^1}{C_5^2} \\ &= \frac{4}{10} \\ &= \frac{2}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X=4) &= \frac{C_2^2}{C_5^2} \\ &= \frac{1}{10} \end{aligned}$$

وبالتالي

x_i	1	2	3	4	المجموع
$P(X=x_i)$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{1}{10}$	1

ب. استنتاج احتمال الحدث $(C_X^2 = 1)$

المعادلة

$$C_X^2 = 1$$

تكافئ
$$\frac{X!}{2!\,(X-2)!}=1$$
وتكافئ
$$X\,(X-1)=2$$
وتكافئ
$$X^2-X-2=0$$
وبما أنّ $X>0$ فإن
$$X=2$$
وبالتالي
$$P\left(C_X^2=1\right)=P\,(X=2)$$
$$=\frac{3}{10}$$

3. تعيين قيمة k التي يكون من أجلها احتمال الحصول على عددين جداؤهما معدوم هو $\frac{1}{15}$

احتمال الحصول على عددين جداؤهما معدوم هو $\frac{1}{15}$ معناه
$$\frac{2A_1^1\times A_{k+4}^1}{A_{k+5}^2}=\frac{1}{15}$$
وذلك يكافئ
$$\frac{2\times 1\times (k+4)}{(k+5)\,(k+4)}=\frac{1}{15}$$
يكافئ
$$\frac{1}{k+5}=\frac{1}{30}$$
ويكافئ
$$k=25$$

التمرين الثالث (5 ن)

1. صحيح

التبرير

المعادلة
$$\overline{z+i}-i=0$$
تكافئ
$$\overline{z+i}=i$$
وتكافئ
$$z+i=-i$$
وتكافئ
$$z=-2i$$
ومنه المعادلة تقبل حلّا وحيدا في مجموعة الأعداد المركّبة $\mathbb{C}$

2. خاطئ

التبرير

لدينا $z+\overline{z}=0$ وذلك يكافئ
$$2Re\,(z)=0$$

أي

$$Re\left(z\right)=0$$

وبالتالي مجموعة النقط M هي حامل محور التراتيب.

.3 صحيح

التبرير

$$\begin{aligned}\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{1962}&=\left(\frac{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}\right)^{1962}\\&=\left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^{1962}\\&=e^{i\frac{1962\pi}{4}}\\&=e^{i\left(\frac{1960\pi}{4}+\frac{2\pi}{4}\right)}\\&=e^{i\left(490\pi+\frac{\pi}{2}\right)}\\&=e^{i\left(2\pi\times245+\frac{\pi}{2}\right)}\\&=e^{i\frac{\pi}{2}}\\&=i\end{aligned}$$

.4 صحيح

التبرير

من أجل كلّ n من $\mathbb{N}^*$ لدينا

$$\begin{aligned}U_{n+1}&=\log\left|z\right|^{n+1}\\&=\log\left(\left|z\right|^{n}\times\left|z\right|\right)\\&=\log\left|z\right|^{n}+\log\left|z\right|\\&=U_n+\log\left|z\right|\\&=U_n+\log\left|1+i\right|\\&=U_n+\log\sqrt{2}\end{aligned}$$

ومنه المتتالية $\left(U_n\right)_{n\geqslant1}$ حسابية.

.5 صحيح

التبرير

لدينا

$$\left|z\right|=1$$

ومنه

$$\left|z\right|^2=1$$

وعليه

$$z\times\overline{z}=1$$

وبما أنّ

$$z\neq0$$

فإنّ

$$z=\frac{1}{\overline{z}}$$

وبالتعويض نجد

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{\overline{z}}-4\right| &= \left|\frac{1-4\overline{z}}{\overline{z}}\right| \\ &= \frac{|1-4\overline{z}|}{|\overline{z}|} \\ &= \frac{|4\overline{z}-1|}{|z|} \\ &= \frac{|4\overline{z}-1|}{1} \\ &= |4\overline{z}-1|\end{aligned}$$

■

التمرين الرابع (7 ن)

I) حساب $g(1)$ ثمّ استنتاج إشارة $g(x)$ على $]0;+\infty[$

لدينا

$$\begin{aligned}g(1) &= 1+\frac{2\ln 1-1}{1} \\ &= 0\end{aligned}$$

وبما أنّ g متزايدة تماما على $]0;+\infty[$ وعندئذ لدينا

x	0		1		$+\infty$
$g(x)$	||	$-$	0	$+$	

II) **1.** **أ.** تبيين أنّ $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x)=+\infty$ وتفسير النتيجة هندسيا ثمّ حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

$$\begin{aligned}\lim_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) &= \lim_{x \overset{>}{\to} 0}\left(\ln x-\frac{1}{x^2}\right) \\ &= \lim_{x \overset{>}{\to} 0}\left[\ln x\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\right] \\ &= +\infty\end{aligned}$$

لأنّ

$$\begin{cases}\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0}\ln x=-\infty \\ \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0}\dfrac{\ln x}{x^2}=+\infty\end{cases}$$

ومنه المستقيم ذو المعادلة $x=0$ (حامل محور التراتيب) مقارب لـ (C_f)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty}\left(\ln x-\frac{\ln x}{x^2}\right) \\ &= +\infty\end{aligned}$$

لأنّ

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^2}=0\end{cases}$$

ب. تبيين أنّه: من أجل كلّ x من $]0;+\infty[$ ، $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$ ثمّ تشكيل جدول تغيّرات الدّالة f

f قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ ولدينا

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{x}-\frac{\frac{1}{x}\times x^2-2x\times \ln x}{\left(x^2\right)^2} \\ &= \frac{1}{x}-\frac{x-2x\ln x}{x^4} \\ &= \frac{1}{x}+\frac{2\ln x-1}{x^3} \\ &= \frac{1}{x^2}\left(x+\frac{2\ln -1}{x}\right) \\ &= \frac{g(x)}{x^2} \end{aligned}$$

من أجل كلّ x من $]0;+\infty[$ لدينا

$$x^2>0$$

وعليه إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ وعندئذ لدينا

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

2. أ. حساب $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-\ln x]$ ثمّ تفسير النتيجة هندسياً.

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty}[f(x)-\ln x] &= \lim_{x\to+\infty}\left(\ln x-\frac{\ln x}{x^2}-\ln x\right) \\ &= \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{\ln x}{x^2}\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

وعليه المنحنى الممثّل للدّالة $\ln$ مقارب لـ (C_f) عند $+\infty$

ب. دراسة الوضع النسبي لـ (C_f) و (γ) المنحنى الممثّل للدّالة $\ln$

من أجل كلّ x من $]0;+\infty[$ لدينا

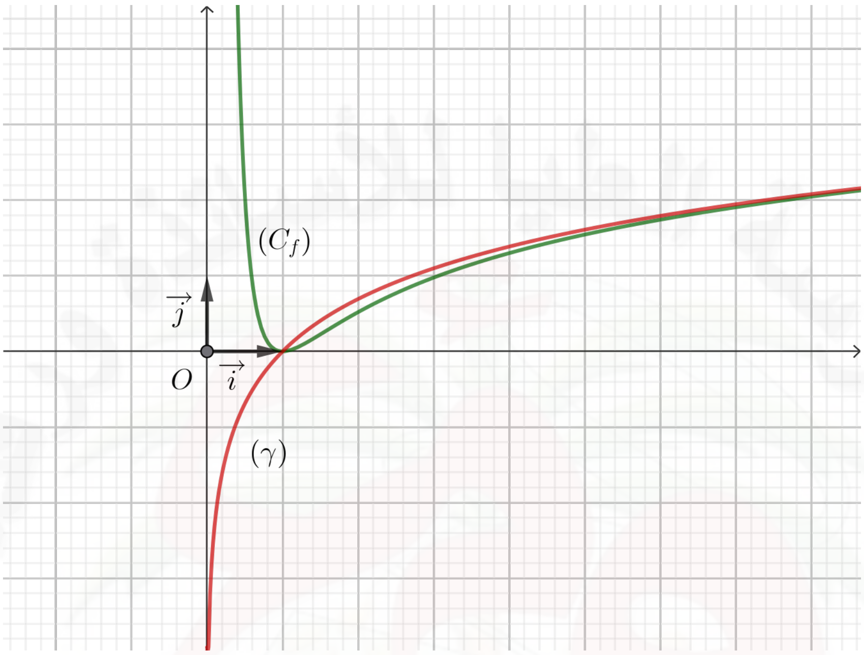
$$f(x)-\ln x=-\frac{\ln x}{x^2}$$

وبما أنّ $x^2>0$ فإنّ إشارة الفرق من إشارة $\ln x$ وعندئذ لدينا

x	0		1		$+\infty$
$f(x)-\ln x$	‖	$+$	0	$-$	

وبالتالي
- (C_f) يقع فوق (γ) على $]0;1[$
- (C_f) يقطع (γ) في النقطة $A(1;0)$
- (C_f) يقع تحت (γ) على $]1;+\infty[$

.3 كُلّاً من (γ) و (C_f)



.4 **أ.** تبيين أنّ $\int_1^{\lambda} \frac{\ln x}{x^2}dx = 1 - \frac{1}{\lambda} - \frac{\ln\lambda}{\lambda}$ باستعمال المكاملة بالتجزئة

$$\begin{aligned}\int_1^{\lambda} \frac{\ln x}{x^2}dx &= \left[-\frac{\ln x}{x}\right]_1^{\lambda} - \int_1^{\lambda}\left(-\frac{1}{x^2}\right)dx\\ &= -\frac{\ln\lambda}{\lambda} + -\frac{\ln 1}{1} - \left[\frac{1}{x}\right]_1^{\lambda}\\ &= -\frac{\ln\lambda}{\lambda} - \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{1}\right)\\ &= 1 - \frac{1}{\lambda} - \frac{\ln\lambda}{\lambda}\end{aligned}$$

ب. استنتاج أنّ $\lim_{\lambda\to+\infty} \mathcal{S}(\lambda) = \mathcal{S}(e^{-1})$

ولدينا $f(x) - \ln x \leq 0$ على $[1;+\infty[$

$$\begin{aligned}\int_1^{\lambda} [\ln x - f(x)]dx &= \int_1^{\lambda} \frac{\ln x}{x^2}dx\\ &= 1 - \frac{1}{\lambda} - \frac{\ln\lambda}{\lambda}\end{aligned}$$

وعليه

$$\mathcal{S}(\lambda) = \left(1 - \frac{1}{\lambda} - \frac{\ln\lambda}{\lambda}\right) cm^2$$

وبما أنّ

$$\begin{cases} \lim\limits_{\lambda \to +\infty} \dfrac{\ln\lambda}{\lambda} = 0 \\ \lim\limits_{\lambda \to +\infty} \dfrac{1}{\lambda} = 0 \end{cases}$$

فإنّ

$$\lim_{\lambda \to +\infty} S(\lambda) = 1\, cm^2$$

ولدينا

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(e^{-1}) &= \left(1 - \frac{1}{e^{-1}} - \frac{\ln e^{-1}}{e^{-1}}\right) cm^2 \\ &= (1 - e + e)\, cm^2 \\ &= 1cm^2 \end{aligned}$$

وبالتالي

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \mathcal{S}(\lambda) = \mathcal{S}(e^{-1})$$

.5 شرح كيفية إنشاء المنحنى الممثّل للدّالة h انطلاقا من (C_f).

من أجل كلّ x من $]0;+\infty[$ لدينا

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{-\ln x}{x^2} + \ln x & ; \quad 0 < x \leqslant 1 \\ \dfrac{\ln x}{x^2} - \ln x & ; \quad x \geqslant 1 \end{cases}$$

أي

$$h(x) = \begin{cases} -f(x) & ; \quad 0 < x \leqslant 1 \\ f(x) & ; \quad x \geqslant 1 \end{cases}$$

وبالتالي

- من أجل $x \in]0;1]$ ، المنحنى الممثّل للدّالة h نظير (C_f) بالنسبة إلى حامل محور الفواصل.
- من أجل $x \in [1;+\infty[$ ، المنحنى الممثّل للدّالة h ينطبق على (C_f)

■

سلّم تنقيط الموضوع الأوّل

التمرين الأوّل (4 ن)

ترقيم السؤال	التنقيط
1	0,5
2.أ	0,5
2.ب	0,5
3.أ	1
3.ب	0,75
4	0,75

التمرين الثاني (4 ن)

ترقيم السؤال	التنقيط
1.أ	1
1.ب	0,75
2.أ	1,5
2.ب	0,5
3	0,25

التمرين الثالث (5 ن)

ترقيم السؤال	التنقيط
1	0,5 + 0,5
2	0,5 + 0,5
3	0,5 + 0,5
4	0,5 + 0,5
5	0,5 + 0,5

التمرين الرابع (7 ن)

ترقيم السؤال	التنقيط
I)	0,75
II) 1.أ	0,5 + 0,75
II) 1.ب	0,5 + 0,5
II) 2.أ	0,75
II) 2.ب	0,75
II) 3	0,5 + 0,5
II) 4.أ	0,5
II) 4.ب	0,5
II) 5	0,5

إجابة نموذجية مقترحة للموضوع الثاني

التمرين الأوّل (٤ ن)

1. حساب احتمال كُلّا من الحدثين A و B

أ. الحدث A: " أعضاء اللّجنة من جنسين مختلفين ".

$$P(A) = \frac{3A_5^2 \times A_4^1 + 3A_5^1 \times A_4^2}{A_9^3} = \frac{420}{504} = \frac{5}{6}$$

ب. الحدث B: " يُسرى رئيسا للجنة ".

$$P(B) = \frac{A_1^1 \times A_8^2}{A_9^3} = \frac{56}{504} = \frac{1}{9}$$

2. تبيين أنّ $P\left(\bar{A} \cap B\right) = \dfrac{1}{84}$ ثمّ استنتاج $P_{\bar{A}}(B)$

$$P\left(\bar{A} \cap B\right) = \frac{A_1^1 \times A_3^2}{A_9^3} = \frac{6}{504} = \frac{1}{84}$$

عندئذ نستنتج أنّ

$$P_{\bar{A}}(B) = \frac{P\left(\bar{A} \cap B\right)}{P\left(\bar{A}\right)} = \frac{P\left(\bar{A} \cap B\right)}{1 - P(A)} = \frac{\frac{1}{84}}{1 - \frac{5}{6}} = \frac{1}{14}$$

3. **أ.** تبيين أنّ $P(X=1)=\dfrac{5}{14}$ و $P(X=2)=\dfrac{10}{21}$

$$P(X=1)=\frac{3\times A_5^1\times A_4^2}{A_9^3}=\frac{180}{504}=\frac{5}{14}$$

$$P(X=2)=\frac{3\times A_5^2\times A_4^1}{A_9^3}=\frac{240}{504}=\frac{10}{21}$$

ب. تعريف قانون احتمال المتغيّر العشوائي X

مجموعة قيم المتغير العشوائي هي $\{0;1;2;3\}$ ، و لدينا

$$P(X=0)=\frac{A_4^3}{A_9^3}=\frac{24}{504}=\frac{1}{21}$$

$$P(X=3)=\frac{A_5^3}{A_9^3}=\frac{60}{504}=\frac{5}{42}$$

وعندئذ لدينا

x_i	0	1	2	3	المجموع
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{21}$	$\frac{5}{14}$	$\frac{10}{21}$	$\frac{5}{42}$	1

ج. حساب $E(X)$ الأمل الرياضياتي للمتغيّر العشوائي X ثمّ استنتاج $E(1962X-1245)$

$$E(X)=0\times\frac{1}{21}+1\times\frac{5}{14}+2\times\frac{10}{21}+3\times\frac{5}{42}=\frac{5}{3}$$

وعندئذ نستنتج أنّ

$$E(1962X-1245)=1962E(X)-1245=1962\times\frac{5}{3}-1245=2025$$

■

التمرين الثاني (4 ن)

.1 الاقتراح الصحيح هو أ

التبرير

لدينا

- $\mathbb{R}$ متناظرة بالنسبة إلى العدد 0
- من أجل كلّ x من $\mathbb{R}$ لدينا

$$\begin{aligned} h(-x) &= -2x + \ln\left(1+e^{4x}\right) \\ &= -2x + \ln\left[e^{4x}\left(e^{-4x}+1\right)\right] \\ &= -2x + \ln\left(e^{4x}\right) + \ln\left(e^{-4x}+1\right) \\ &= -2x + 4x + \ln\left(1+e^{-4x}\right) \\ &= 2x + \ln\left(1+e^{-4x}\right) \\ &= h(x) \end{aligned}$$

وعليه h دالة زوجية.

.2 الاقتراح الصحيح هو ب

التبرير

المعادلة معرّفة إذا وفقط إذا كان

$$x + \sqrt{3} > 0 \quad \text{و} \quad x - \sqrt{3} > 0$$

أي

$$x > -\sqrt{3} \quad \text{و} \quad x > \sqrt{3}$$

وذلك يكافئ

$$x > \sqrt{3}$$

عليه المجموعة المرجعية للمعادلة هي $\left]\sqrt{3}; +\infty\right[$

ولدينا

$$\log\left(x-\sqrt{3}\right) + \log\left(x+\sqrt{3}\right) = 0$$

وذلك يكافئ

$$\log\left[\left(x-\sqrt{3}\right)\left(x+\sqrt{3}\right)\right] = 0$$

ويكافئ

$$\log\left(x^2-3\right) = \log 1$$

ويكافئ

$$x^2 = 4$$

ويكافئ

$$x = 2 \quad \text{أو} \quad x = -2$$

وبالتالي مجموعة حلول المعادلة هي S حيث

$$\begin{aligned} S &= \{-2; 2\} \cap \left]\sqrt{3}; +\infty\right[\\ &= \{2\} \end{aligned}$$

3. الاقتراح الصحيح هو أ

التبرير
لدينا

$$\begin{aligned}\int_0^\beta xe^x dx &= [xe^x]_0^\beta - \int_0^\beta e^x dx \\ &= \beta e^\beta - 0\times e^0 - [e^x]_0^\beta \\ &= \beta e^\beta - e^\beta + 1\end{aligned}$$

وبالتالي المعادلة

$$\int_0^\beta xe^x dx = 1$$

تكافئ

$$\beta e^\beta - e^\beta + 1 = 1$$

وتكافئ

$$\beta e^\beta - e^\beta = 0$$

وتكافئ

$$e^\beta(\beta - 1) = 0$$

وتكافئ

$$\beta - 1 = 0$$

وتكافئ

$$\beta = 1$$

4. الاقتراح الصحيح هو ج

التبرير
لدينا

$$y' - 1962y = 2025$$

وذلك يكافئ

$$y' = 1962y + 2025$$

ومنه حلول المعادلة التفاضلية هي الدوال y حيث

$$y = Ce^{1962x} - \frac{2025}{1962}$$

مع C ثابت حقيقي، وبما أنّ $y(0) = 0$ فإنّ

$$Ce^0 - \frac{2025}{1962} = 0$$

أي

$$C = \frac{2025}{1962}$$

وعليه

$$y = \frac{2025}{1962}e^{1962x} - \frac{2025}{1962}$$

وبالتالي

$$y' = 2025e^{1962x}$$

وينتج عن ذلك أنّ حلّ المعادلة التفاضلية دالة متزايدة تماما. ■

التمرين الثالث (5 ن)

1. تشكيل جدول تغيّرات الدّالة f.
لدينا

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{2x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}$$

$$f(0) = \frac{0}{2\times 0+1} = 0$$

وبما أنّ f قابلة للاشتقاق على $[0;+\infty[$ فإنّه من أجل كلّ x من $[0;+\infty[$ لدينا

$$f'(x) = \frac{1\times(2x+1)-2(x)}{(2x+1)^2} = \frac{1}{(2x+1)^2} > 0$$

وعليه

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f(x)$	$0 \nearrow \frac{1}{2}$

2. أ. البرهان بالتّراجع أنّه: من أجل كلّ عدد طبيعي n ، $U_n > 0$

- نرمز للخاصية " $U_n > 0$ " بالرمز $P(n)$.
- نتحقّق من صحّة $P(0)$
لدينا
$$U_0 = 1$$
ومنه
$$U_0 > 0$$
وعليه $P(0)$ صحيحة.
- من أجل عدد طبيعي كيفي k نفترض صحّة $P(k)$ ونبرهن صحّة $P(k+1)$.
لدينا
$$U_k > 0$$
وبما أنّ f متزايدة تماما على $[0;+\infty[$ فإنّ
$$f(U_k) > f(0)$$
أي
$$U_{k+1} > 0$$
وعليه $P(k+1)$ صحيحة.
- وحسب مبدأ الاستدلال بالتراجع نستنتج أنّ $P(n)$ صحيحة من أجل كلّ عدد طبيعي n.

ب. دراسة اتجاه تغيّر (U_n) ثمّ استنتاج أنّها متقاربة.

من أجل كلّ n من $\mathbb{N}$ لدينا

$$\begin{aligned} U_{n+1} - U_n &= \frac{U_n}{2U_n+1} - U_n \\ &= \frac{U_n - 2U_n^2 - U_n}{2U_n+1} \\ &= \frac{-2U_n^2}{2U_n+1} \end{aligned}$$

وبما أنّ

$$\begin{cases} -2U_n^2 < 0 \\ 2U_n + 1 > 0 \end{cases}$$

فإنّ $U_{n+1} - U_n < 0$ وعليه (U_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$.

استنتاج التقارب

لدينا

- (U_n) متناقصة على $\mathbb{N}$
- من أجل كلّ n من $\mathbb{N}$ ، $U_n > 0$ ، وعليه (U_n) محدودة من الأسفل بالعدد 0

وبالتالي (U_n) متقاربة.

3. **أ.** تبيين أنّه: من أجل كلّ n من $\mathbb{N}^*$ ، $f\left(\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n+1}$

من أجل كلّ n من $\mathbb{N}^*$ لدينا

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{n}\right) &= \frac{\frac{1}{n}}{2 \times \frac{1}{n} + 1} \\ &= \frac{\frac{1}{n}}{\frac{2+n}{n}} \\ &= \frac{1}{n+2} \\ &< \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

ب. تبيين أنّه: من أجل كلّ n من $\mathbb{N}^*$ ، $U_n \leq \frac{1}{n}$

- نرمز للخاصية " $U_n > 0$ " بالرمز $P(n)$.
- نتحقّق من صحّة $P(1)$

لدينا

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{U_0}{2U_0+1} \\ &= \frac{1}{3} \\ &\leqslant \frac{1}{1} \end{aligned}$$

وعليه $P(1)$ صحيحة.

- من أجل عدد طبيعي كيفي k حيث $k \geq 1$ نفترض صحّة $P(k)$ ونبرهن صحّة $P(k+1)$.

لدينا

$$U_k \leq \frac{1}{k}$$

وبما أنّ f متزايدة تماما على $[0;+\infty[$ فإنّ

$$\begin{aligned} f\left(U_k\right) &\leqslant f\left(\frac{1}{k}\right) \\ &\leqslant \frac{1}{k+1} \end{aligned}$$

أي

$$U_{k+1} \leq \frac{1}{k+1}$$

وعليه $P(k+1)$ صحيحة.

- وحسب مبدأ الاستدلال بالتراجع نستنتج أنّ $P(n)$ صحيحة من أجل كلّ n من $\mathbb{N}^*$

ج. حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

من أجل كلّ n من $\mathbb{N}^*$ لدينا

$$0 < U_n \leq \frac{1}{n}$$

وبما أنّ $\lim \frac{1}{n} = 0$ فإنّ $\lim U_n = 0$

4. تبيين أنّه: من أجل كلّ n من $\mathbb{N}^*$ ، $S_n \geq n(n+1)$ ثمّ استنتاج $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

من أجل كلّ n من $\mathbb{N}^*$ لدينا

$$U_n \leq \frac{1}{n}$$

ومنه

$$\frac{2}{U_n} \geq 2n$$

وعليه

$$\begin{aligned} \frac{2}{U_1} + \frac{2}{U_2} + \cdots + \frac{2}{U_n} &\geqslant 2\times 1 + 2\times 2 + \cdots + 2\times n \\ &\geqslant 2\left(1+2+\cdots+n\right) \\ &\geqslant 2\times\frac{n\left(n+1\right)}{2} \end{aligned}$$

أي

$$S_n \geqslant n\left(n+1\right)$$

وبما أنّ

$$\begin{aligned} \lim\left[n\left(n+1\right)\right] &= \lim n^2 \\ &= +\infty \end{aligned}$$

فإنّ

$$\lim S_n = +\infty$$

■

التمرين الرابع (7 ن)

I) 1. دراسة اتجاه تغيّر الدّالة g على $\mathbb{R}$

g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا

$$\begin{aligned} g'(x) &= e^x + 1 \\ &> 0 \end{aligned}$$

ومنه g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

2. أ. تبيين أنّ المعادلة $g(x) = 2$ تقبل حلّا وحيدا α حيث $0,4 < \alpha < 0,5$

- g مستمرة على $\mathbb{R}$
- g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$
- لدينا

$$g(0,5) \approx 2,15 \quad | \quad g(0,4) \approx 1,89$$

ومنه $g(0,4) < g(\alpha) < g(0,5)$

عندئذ نستنتج أنّ المعادلة $g(x) = 2$ تقبل حلّا وحيدا α حيث $0,4 < \alpha < 0,5$.

ب. استنتج إشارة $g(x) - 2$ حسب قيم العدد الحقيقي x

- g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$
- $g(\alpha) = 2$

عندئذ لدينا

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)-2$		$-$	0	$+$	

II) 1. أ. حساب كُلّا من $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty} [(x-1)(e^{-x}-1)] \\ &= -\infty \end{aligned}$$

لأنّ

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = \lim_{t\to-\infty} e^t = 0$$

$$\begin{aligned} \lim_{x\to-\infty} f(x) &= \lim_{x\to-\infty} [(x-1)(e^{-x}-1)] \\ &= -\infty \end{aligned}$$

لأنّ

$$\lim_{x\to-\infty} e^{-x} = \lim_{x\to+\infty} e^t = +\infty$$

ب. تبيين أنّه من أجل كلّ x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = \dfrac{2-g(x)}{e^x}$

f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \times (e^{-x} - 1) + (-e^{-x}) \times (x-1) \\ &= e^{-x} - 1 - xe^{-x} + e^{-x} \\ &= 2e^{-x} - xe^{-x} - 1 \\ &= (2 - x - e^x)\, e^x \\ &= \frac{2-(x+e^x)}{e^{-x}} \\ &= \frac{2-g(x)}{e^x} \end{aligned}$$

ج. استنتاج أنّ f متزايدة تماما على $]-\infty;\alpha]$ ومتناقصة تماما على $[\alpha;+\infty[$ ثمّ تشكيل جدول تغيّراتها.

من أجل كلّ x من $\mathbb{R}$ لدينا $e^x>0$ ، ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة البسط $2-g(x)$ وعندئذ لدينا

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

- $f'(x)>0$ على $]-\infty;\alpha[$ و $f'(\alpha)=0$ ومنه f متزايدة تماما على $]-\infty;\alpha]$
- $f'(x)<0$ على $]\alpha;+\infty[$ و $f'(\alpha)=0$ ومنه f متناقصة تماما على $[\alpha;+\infty[$

وعندئذ نشكّل جدول تغيّراتها كما يلي

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	$-\infty$

2. أ. تبيين أنّ المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=-x+1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$

من أجل كلّ x من $\mathbb{R}$ لدينا

$$\begin{aligned} f(x)-(-x+1) &= (x-1)\left(e^{-x}-1\right)+(x-1) \\ &= (x-1)\left(e^{-x}-1+1\right) \\ &= (x-1)\,e^{-x} \end{aligned}$$

وعليه

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(-x+1)\right] &= \lim_{x\to+\infty}\left[(x-1)\,e^{-x}\right] \\ &= \lim_{x\to+\infty}\left(xe^{-x}-e^{-x}\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

لأنّ

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty}\left(xe^{-x}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-te^{t}\right)=0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{-x}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}e^{t}=0 \end{cases}$$

وبالتالي المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=-x+1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$

ب. دراسة الوضع النسبي لـ (C_f) و (Δ)

من أجل كلّ x من $\mathbb{R}$ لدينا

$$f(x)-(-x+1)=(x-1)\,e^{-x}$$

و وبما أنّ $e^{-x}>0$ فإنّ إشارة الفرق من إشارة $x-1$ وعندئذ لدينا

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$	

وينتج عن ذلك ما يلي

- (C_f) يقع تحت (Δ) على المجال $]-\infty;1[$
- (C_f) يقطع (Δ) في النقطة $A(1;0)$
- (C_f) يقع فوق (Δ) على المجال $]1;+\infty[$

.3 كتابة معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة O

f قابلة للاشتقاق عند 0 ومنه (C_f) يقبل مماسا (T) معامل توجيهه $f'(0)$ حيث

$$(T) : y = f'(0)(x-0) + f(0)$$

ولدينا

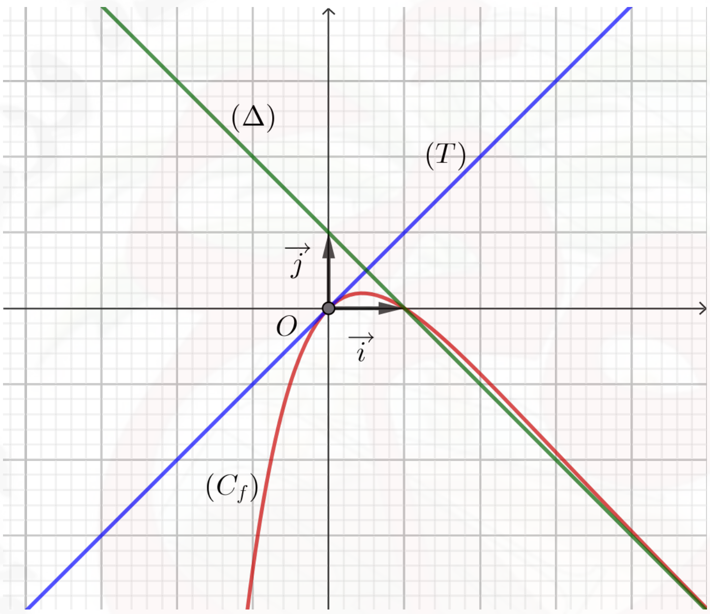
$$f(0) = (1-0)\left(e^{-0}-1\right) = 0$$

$$f'(0) = \frac{2-g(0)}{e^{-0}} = 1$$

وبالتالي

$$(T) : y = x$$

.4 أ. إنشاء كُلّا من (Δ) ، (T) و (C_f)



ب. تعيين بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m التي من أجلها تقبل المعادلة $f(x) = x\ln m$ حلّين بالضّبط.

حلول المعادلة بيانيا هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيم (Δ_m) حيث

$$(\Delta_m) : y = x\ln m$$

مجموعة قيم m هي المجال $]0;+\infty[$ ، وعليه من أجل كلّ m من $]0;+\infty[$ لدينا $O(0;0) \in (\Delta_m)$ ، وبوضع $m' = \ln m$، ينتج

عدد حلول المعادلة	قيم m	في حالة
حلّ واحد	$m \in]-\infty; e^{-1}]$	$m' \leq -1$
حلّان	$m \in]e^{-1}; e[$	$-1 < m' < 1$
حلّ واحد	$m = e$	$m' = 1$
حلّان	$m \in]e;+\infty[$	$m' > 1$

وبالتالي مجموعة قيم m التي تقبل من أجلها المعادلة حلّين بالضّبط هي

$$]e^{-1}; e[\cup]e;+\infty[$$

.5 حساب $\int_1^{\lambda} xe^{-x}dx$ ثمّ استنتاج أنّ $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} \mathcal{A}(\lambda) = e^{-1}\,cm^2$

$$\begin{aligned}\int_1^{\lambda} xe^{-x}dx &= [-xe^{-x}]_1^{\lambda} - \int_1^{\lambda} (-e^{-x})dx \\ &= -\lambda e^{-\lambda} + 1\times e^{-1} - [e^{-x}]_1^{\lambda} \\ &= -\lambda e^{-\lambda} + e^{-1} - e^{-\lambda} + e^{-1} \\ &= -\lambda e^{-\lambda} - e^{-\lambda} + 2e^{-1}\end{aligned}$$

وبما أنّ f مستمرة على $[1;+\infty[$ و $f(x)-(-x+1)\geq 0$ على $[1;+\infty[$ فإنّ

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(\lambda) &= \int_1^{\lambda} (x-1)\,e^{-x}dx \\ &= \int_1^{\lambda} xe^{-x}dx - \int_1^{\lambda} e^{-x}dx \\ &= -\lambda e^{-\lambda} - e^{-\lambda} + 2e^{-1} + [e^{-x}]_1^{\lambda} \\ &= -\lambda e^{-\lambda} - e^{-\lambda} + 2e^{-1} + e^{-\lambda} - e^{-1} \\ &= (-\lambda e^{-\lambda} + e^{-1})\,cm^2\end{aligned}$$

وعندئذ نستنتج أنّ

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \mathcal{A}(\lambda) = e^{-1}\,cm^2$$

لأنّ

$$\begin{aligned}\lim_{\lambda\to+\infty} (-\lambda e^{-\lambda}) &= \lim_{t\to+\infty} (te^{t}) \\ &= 0\end{aligned}$$

■

سلّم تنقيط الموضوع الثاني

التمرين الأوّل (4 ن)

ترقيم السؤال	التنقيط
1	0,5
2.أ	0,5
2.ب	+0,75
3.أ	1
3.ب	0,5
4	0,75

التمرين الثاني (4 ن)

ترقيم السؤال	التنقيط
1	0,5 + 0,5
2	0,5 + 0,5
3	0,5 + 0,5
4	0,5 + 0,5

التمرين الثالث (5 ن)

ترقيم السؤال	التنقيط
1	0,75
2.أ	1
2.ب	1
3.أ	0,5
3.ب	0,5
3.ج	0,5
4	0,75

التمرين الرابع (7 ن)

ترقيم السؤال	التنقيط
I) 1	0,5
I) 2.أ	0,5
I) 2.ب	0,5
II) 1.أ	0,5
II) 1.ب	0,5
II) 1.ج	1
II) 2.أ	0,5
II) 2.ب	0,5
II) 3	0,5
II) 4.أ	1
II) 4.ب	0,25
II) 5	0,75

انتهى ■

يكتمل الملف بملاحظات القرّاء الكرام، لذلك في حالة وجود أي خلل في الحل يُرجى مُراسلتنا به بغية تصويبه لفائدة التلاميذ المقبلين على امتحان البكالوريا وذلك عن طريق البريد الإلكتروني prof.ardjani@gmail.com وجزاكم الله خيرا