بكالوريا تجريبية
في: مادة الرياضيات

الشعبة: علوم تجريبية
الأستـــــاذ: قويسم الخليل
يوم: 12 ماي 2025
المدة: 03 ساعات و30 دقيقة

ممنوع استعمال القلم الأحمر، ولا تقبل إلا الإجابات المنظمة والممنهجة

على المترشح أن يختار أحد الموضوعيـــــــــن

الموضوع الأول

يحتوي الموضوع الأول على صفحتين (الصفحة 1 من 4 والصفحة 2 من 4)

التمرين الأول [04.00 نقطة]

يُراد تشكيل فرقة استكشاف للبرية تضم 3 أعضاء منهم قائد ومُسعف ومقتفي أثر، من بين أربع رجال H_1، H_2، H_3 وH_4 وثلاث نساء F_1، F_2 وF_3

[01.50] ❶ احسب احتمال كل من الحوادث التالية:

A: "كل أعضاء الفرقة رجال"

B: "الفرقة تضم على الأكثر امرأة"

C: "H_1 هو المُسعف في هذه الفرقة "

[00.50] ❷ بيّن أنّ $P(B\cap C)=\frac{4}{35}$

❸ نعتبر المتغير العشوائي الذي يرفق بكل فرقة بحث عدد الرجال فيها

[01.50] أ- عيّن قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X، ثمّ احسب $E(X)$ أمله الرياضياتي

[00.50] ب- احسب احتمال الحدث: "$|X|<X^2$"

التمرين الثاني [04.50 نقطة]

لتكن المتتالية (U_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ $U_0=3$ ومن أجل كل $n\in\mathbb{N}$: $U_{n+1}=8\left(1-\frac{3}{U_n+2}\right)$

[00.75] ❶ أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ لدينا: $2<U_n<4$

[00.75] ب- عيّن اتجاه تغير (U_n)، ماذا تستنتج؟

[00.50] ❷ أ- بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإنّ $4-U_{n+1}\leq\frac{4}{5}(4-U_n)$

[00.75] ب- استنتج أنّ $0<4-U_n\leq\left(\frac{4}{5}\right)^n$، ثمّ احسب $\lim\limits_{n\to+\infty}(U_n)$

❸ نضع من أجل كل عدد طبيعي n: $V_n=\frac{U_n-4}{U_n-2}$

[00.50] أ- بيّن أنّ (V_n) هندسية محددا أساسها وحدها الأول

[00.75] ب- اكتب عبارة V_n بدلالة n، ثمّ استنتج عبارة U_n بدلالة n

[00.50] ❹ اكتب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n=\frac{1}{2-U_0}+\frac{1}{2-U_1}+\ldots+\frac{1}{2-U_n}$

التمرين الثالث [04.00 نقطة]

I) α و β عددين مركبين، حل في المجموعة $\mathbb{C}$ الجملة $\begin{cases} \alpha+\beta=-1 \\ \overline{\alpha}-\overline{\beta}=3-2i \end{cases}$ [00.50]

II) نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ النقط A ، B و C التي لواحقها على الترتيب:

$z_A=2(1+i)$ ، $z_B=\sqrt{2}+i\sqrt{6}$ و $z_C=-z_B$

❶ أ- اكتب كل من z_A و z_B على الشكل الأسي [00.50]

ب- ما طبيعة المثلث ABC؟ برر اجابتك [00.50]

❷ بيّن أنّ B، C و O في استقامية [00.50]

❸ أ- اكتب العدد المركب $\frac{z_B}{z_A}$ على الشكل الجبري ثمّ الأسي [01.00]

ب- استنتج القيمة المضبوطة لـ $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$ [00.50]

❹ عيّن (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث: $|i(\overline{z}-2)-2|=0$ [00.50]

التمرين الرابع [07.50 نقطة]

I) نعتبر الدالتين g وh المعرفتين على $\mathbb{R}$ بـ:

$g(x)=(2-x^2)e^x$ و $h(x)=x^2$

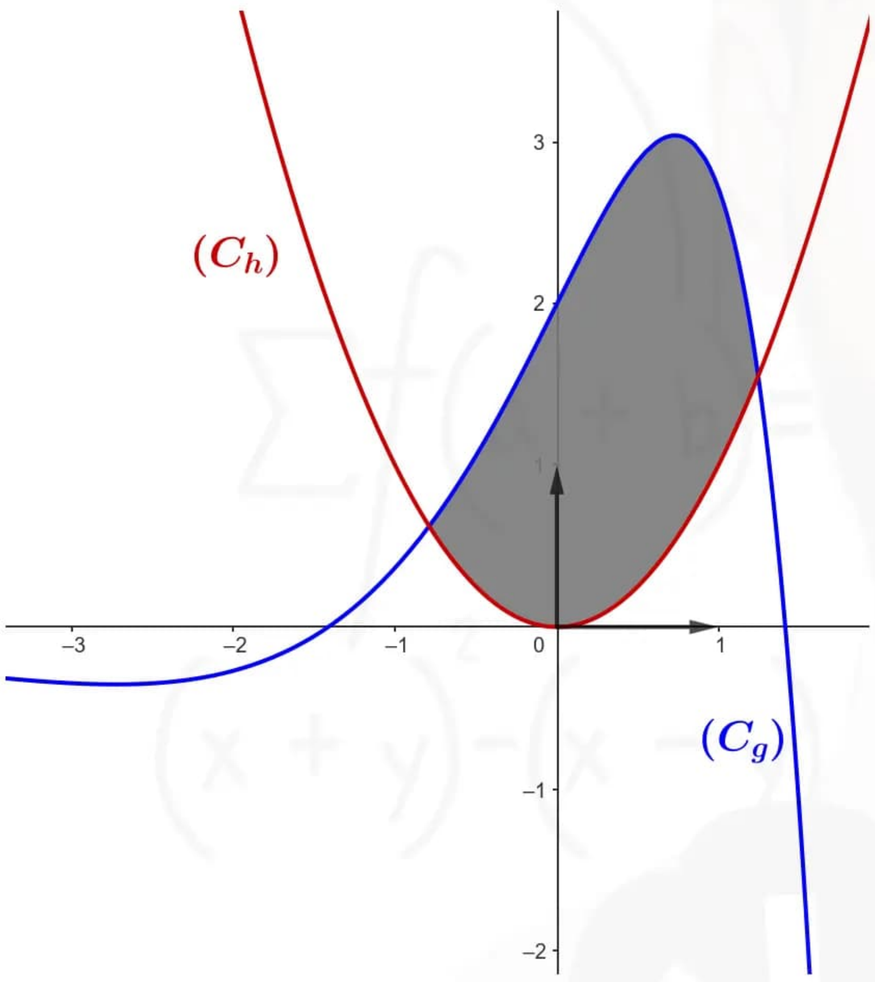
(C_g) و (C_h) تمثيليهما البيانيين في المستوي المنسوب

إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

كما هو موضح في الشكل المقابل

نقبل أن المعادلة $g(x)=h(x)$ تقبل حلين متمايزين α و β

حيث: $-0.8<\alpha<-0.7$ و $1.2<\beta<1.3$



❶ أ- حل المعادلة $g(x)=0$ [00.50]

ب- بقراءة بيانية: عيّن إشارة كل من الدالة g و h على $\mathbb{R}$ [00.50]

❷ أ- عيّن الوضع النسبي بين (C_g) و (C_h) [00.50]

ب- استنتج إشارة $g(x)-h(x)$ [00.50]

❸ أ- باستعمال المكاملة بالتجزئة أوجد عبارة $G(x)$ الدالة الأصلية لـ g [00.75]

ب- بدلالة α وβ، احسب $\mathcal{A}$ المساحة المظللة في الشكل المرفق [00.50]

II) نعتبر الدالة f المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\frac{e^x+x^2+x}{e^x-x}$ و(C_f) تمثيلها البياني في المعلم السابق

❶ احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ وفسّر النتيجة هندسيا، ثمّ أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ [00.75]

❷ أ- بيّن أنّ $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)+x]=-1$ ، ثمّ فسر النتيجة هندسيا [00.75]

ب- بيّن أنّه من أجل كل x حقيقي: $e^x-x>0$ [00.50]

ج- ادرس الوضع النسبي بين (C_f) والمستقيم $(\Delta): y=-x-1$ [00.50]

❸ أ- بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x: $f'(x)=\frac{g(x)-h(x)}{(e^x-x)^2}$ [00.50]

ب- ادرس اتجاه تغير الدالة f، ثمّ شكل جدول تغيراتها [00.50]

❹ ارسم كلاّ من (Δ) و (C_f) ، يُعطى: $f(\alpha)\approx 0.23$ و $f(\beta)\approx 2.81$ [00.75]

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول [04.00 نقطة]

نعتبر الصناديق غير الشفافة U ، V و W. حيث يحتوي الصندق U على 3 كرات سوداء و 4 كرات حمراء. والصندوق V يحتوي على كرتين سوداوين و 6 كرات حمراء. والصندوق W يحتوي على خمس كرات مرقمة من 1 إلى 5.

كل الكرات لا نميز بينها باللمس

نضع: ◄ $P(N)$ احتمال الحصول على كرة سوداء ◄ $P(R)$ احتمال الحصول على كرة حمراء

◄ $P(U)$ السحب من الصندوق U ◄ $P(V)$ السحب من الصندوق من V

[01.50] I) نسحب عشوائيا من الصندوق U ثلاث كرات في آن واحد، احسب احتمال كل من الحوادث التالية:

A: "الحصول على ثلاث كرات مختلفة اللون"

B: "الحصول على كرة حمراء واحدة بالضبط"

C: "الحصول على كرة سوداء على الأكثر"

II) نختار كرة عشوائيا من الصندوق W، إذا ظهرت الكرة المسحوبة تحمل رقم مضاعف لـ3 نسحب عشوائيا كرة من الصندوق U وإلا فإننا نسحب كرة عشوائيا من الصندوق V

[01.50] ❶ انجز شجرة الاحتمالات الموافقة لهذه التجربة

[00.50] ❷ بيّن أنّ احتمال الحصول على كرة حمراء هو: $P(R)=\frac{5}{7}$

[00.50] ❸ إذا كانت الكرة المسحوبة سوداء، فما احتمال أن تكون من الصندوق V؟

التمرين الثاني [04.50 نقطة]

I) لتكن الدالة f المعرفة على $]1;+\infty[$ بـ: $f(x)=\frac{x^2}{2x-1}$

[00.50] ❶ ادرس اتجاه تغير الدالة f ثمّ شكل جدول تغيراتها

[00.50] ❷ بيّن أنه من أجل كل $x \geq 1$ فإنّ: $f(x) \geq 1$

II) لتكن (U_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ $U_0 = 2$ ومن أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $U_{n+1} = f(U_n)$

[00.75] ❶ أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل n طبيعي فإنّ: $U_n \geq 1$

[00.75] ❷ ادرس اتجاه تغير (U_n)، ثمّ استنتج أنها متقاربة

❸ نضع من أجل كل n طبيعي: $V_n=\frac{U_n-1}{U_n}$ و $W_n=\ln(V_n)$

[00.50] أ- بيّن أنّ (W_n) هندسية أساسها 2 واحسب w_0

[00.50] ب- اكتب بدلالة n عبارة W_n، ثمّ استنتج بدلالة n عبارة V_n

[00.50] ❹ استنتج عبارة U_n بدلالة n، ثمّ احسب نهاية (U_n)

[00.25] ❺ أ- اكتب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = W_0 + W_1 + \cdots + W_n$

[00.25] ب- اكتب بدلالة n الجداء P_n حيث: $P_n = V_0 \times V_1 \times \ldots \times V_n$

التمرين الثالث [04.50 نقطة]

[00.50] I) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية: $z^2 + 16 - 30i = 0$

II) نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ النقط A ، B ، C و D التي لواحقها على الترتيب:

$z_A = 3 + 5i$ ، $z_B = -5 + 3i$ ، $z_C = -z_A$ و $z_D = -z_B$

[00.50] ❶ أ- تأكد أنّ $z_B + z_D = z_A + z_C$ وأنّ $z_B - z_D = i(z_A - z_C)$

[00.50] ب- استنتج طبيعة الرباعي $ABCD$، ثمّ أنشئه

ج- عيّن مركز ونصف قطر الدائرة $(\mathcal{C})$ المحيطة بالرباعي $ABCD$، ثمّ أنشئها [00.50]

❷ M نقطة من المستوي لاحقتها z تختلف عن A و C، و M' لاحقتها z' حيث: $z' = \dfrac{z^2 - z_A^2}{(z - z_C)^2}$

أ- بيّن أنّ $z' = \dfrac{z - z_A}{z - z_C}$، ثم عيّن وأنشئ المجموعة (Γ_1) للنقط M من المستوي حيث: $\arg(z') = \pi$ [00.50]

ب- بيّن أنّ المجموعة (Γ_2) للنقط M حيث M' تنتمي إلى محور التراتيب هي $(\mathcal{C})$ باستثناء A و C [00.25]

❸ E نقطة من المستوي لاحقتها z_E حيث: $\dfrac{z_E}{\sqrt{3} - i} = \dfrac{3}{\sqrt{2}} e^{i\frac{5\pi}{12}}$

أ- اكتب على الشكل الأسي ثم الشكل الجبري العدد المركب z_E [01.00]

ب- اكتب على الشكل الشكل الجبري العدد المركب $\dfrac{z_E}{\sqrt{3} - i}$ [00.25]

ج- استنتج القيمة المضبوطة لـ $\tan\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$ [00.50]

التمرين الرابع [07.00 نقطة]

I) الدالة العددية المعرّفة والمتزايدة تماما على $\mathbb{R}_+^*$ بـ: $g(x) = (x+1)(x+e) - e(x\ln x)$ [00.75]

- احسب $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ >}} g(x)$، ثمّ استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}_+^*$

II) f الدالة المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f(x) = \ln(x+1) + \dfrac{e\ln x}{x+1}$، و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

❶ احسب $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ >}} f(x)$، ثمّ بيّن أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ [00.50]

❷ أ- بيّن أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}_+^*$: $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x(x+1)^2}$ [00.50]

ب- استنتج اتجاه تغير الدالة f، ثمّ شكل جدول تغيراتها [00.50]

❸ اكتب معادلة للمماس (T) منحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1 [00.50]

❹ أ- بيّن أنّ (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة A فاصلتها α [00.25]

ب- تحقق أنّ $0.7 < \alpha < 0.8$ [00.25]

❺ (Γ) المنحنى البياني الممثل للدالة $x \longmapsto \ln(x+1)$ على $\mathbb{R}_+$

أ- احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x) - \ln(x+1)]$، ثمّ فسّر النتيجة بيانيا [00.75]

ب- ادرس الوضع النسبي بين (C_f) و (Γ) [00.50]

❻ ارسم (T)، (Γ) و (C_f) [01.00]

❼ m وسيط حقيقي، عين قيم m بحيث تقبل المعادلة $f(x) = \dfrac{1}{2}(1+e)x - m$ حلين متمايزين [00.75]

❽ باستعمال المكاملة بالتجزئة، عيّن الدالة الأصلية للدالة $h: x \longmapsto \ln(x+1)$ على $\mathbb{R}_+$ [00.75]

انتهى الموضوع الثاني

الإجابة النموذجية

تصحيح مقترح للموضوعين

الموضوع الأول

التمرين الأول [00.00 نقطة]

1 حساب احتمالات الأحداث:

- $P(A)=\frac{A_4^3}{A_7^3}=\frac{24}{210}=\frac{4}{35}$
- $P(B)=\frac{A_4^3+3A_3^1A_4^2}{A_7^3}=\frac{132}{210}=\frac{22}{35}$
- $P(C)=\frac{A_1^1A_6^2}{A_7^3}=\frac{30}{210}=\frac{1}{7}$

2 تبيين أنّ $P(B\cap C)=\frac{4}{35}$:

- $P(B\cap C)=\frac{A_1^1A_3^2+2A_1^1A_3^1A_3^1}{A_7^3}=\frac{24}{210}=\frac{4}{35}$

3 أ- تعيين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X:

لدينا: $X(\Omega)=\{0;1;2;3\}$

حيث:

- $P(X=0)=\frac{A_3^3}{A_7^3}=\frac{6}{210}=\frac{1}{35}$
- $P(X=1)=\frac{3A_4^1A_3^2}{A_7^3}=\frac{72}{210}=\frac{12}{35}$
- $P(X=2)=\frac{3A_4^2A_3^1}{A_7^3}=\frac{108}{210}=\frac{18}{35}$
- $P(X=3)=P(A)=\frac{24}{210}=\frac{4}{35}$

x_i	0	1	2	3
$P(X=X_i)$	$\frac{1}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{4}{35}$

$$E(X)=\sum_{i=1}^{4}x_iP(x_i)$$

$$=0\left(\frac{1}{35}\right)+1\left(\frac{12}{35}\right)+2\left(\frac{18}{35}\right)+3\left(\frac{4}{35}\right)=\frac{12}{7}$$

ب- حساب احتمال الحدث: "$|X|<X^2$":

$$P(|X|<X^2)=P(X=2)+P(X=3)=\frac{22}{35}$$

التمرين الثاني [00.00 نقطة]

1 برهان أنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$: $2<u_n<4$

نضع $P(n)$ ... $2<u_n<4$

- لدينا: $2<3<4$ ومنه: $2<u_0<4$

إذن $P(0)$ صحيحة

- ليكن $n\in\mathbb{N}$

نفرض أن: $2<u_n<4$ ونثبت أنّ: $2<u_{n+1}<4$

- لدينا: $2<u_n<4$

ومنه: $4<u_n+2<6$

ومنه: $\frac{1}{6}\le\frac{1}{u_n+2}<\frac{1}{4}$

ومنه: $-\frac{3}{4}<-\frac{3}{u_n+2}<-\frac{1}{2}$

ومنه: $\frac{1}{4}<1-\frac{3}{u_n+2}<\frac{1}{2}$

ومنه: $2<8\left(1-\frac{3}{u_n+2}\right)<4$

ومنه: $2<u_{n+1}<4$

حسب مبدأ البرهان بالتراجع $P(n)$ محققة من أجل كل n طبيعي

ب- تعيين اتجاه تغير (U_n):

من أجل كل $n\in\mathbb{N}$:

$$u_{n+1}-u_n=8\left(1-\frac{3}{u_n+2}\right)-u_n$$

$$=\frac{-(u_n)^2+6u_n-8}{u_n+2}=\frac{-(u_n-2)(u_n-4)}{u_n+2}$$

لدينا: $2<u_n<4$ ومنه: $0<u_n-2<2$

لدينا: $2<u_n<4$ ومنه: $-2<u_n-4<0$

لدينا: $2<u_n<4$ ومنه: $4<u_n+2<6$

إذن: $\frac{-(u_n-2)(u_n-4)}{u_n+2}>0$ وعليه: (u_n) متزايدة تماما

- الاستنتاج:

بما أنّ (u_n) متزايدة تماما ومحدودة من الأعلى بـ 4 فهي متقاربة

2 أ- تبيين أنّ $4-u_{n+1}\le\frac{4}{5}(4-u_n)$:

لدينا:

$$4-U_{n+1}=4-8\left(1-\frac{3}{U_n+2}\right)=\frac{4(4-U_n)}{U_n+2}$$

ولدينا: (U_n) متزايدة ولدينا $U_0=3$

ومنه: $u_n\ge3$

ومنه: $U_n+2\ge5$

ومنه: $\frac{1}{U_n+2}\le\frac{1}{5}$

ومنه: $\frac{1}{U_n+2}\le\frac{1}{5}$

ومنه: $\frac{4(4-U_n)}{U_n+2}\le\frac{4(4-U_n)}{5}$

ومنه: $\boxed{4-U_{n+1}\le\frac{4}{5}(4-U_n)}$

ب- استنتاج أنّ $0<4-u_n\le\left(\frac{4}{5}\right)^n$:

لدينا: $4-u_{n+1}\le\frac{4}{5}(4-u_n)$

ومنه:

$$\begin{cases}4-u_1\le\frac{4}{5}(4-u_0)\\4-u_2\le\frac{4}{5}(4-u_1)\\\vdots\\4-u_n\le\frac{4}{5}(4-u_{n-1})\end{cases}$$

بالضرب طرفا لطرف:

نجد : $4-u_n \le \left(\frac{4}{5}\right)^n (4-u_0)$

ومنه : $4-u_n \le \left(\frac{4}{5}\right)^n \dots (*)$

ولدينا: $u_n < 4$

ومنه: $-4 < -u_n$

ومنه: $0 < 4-u_n \dots (**)$

من $(*)$ و $(**)$ نجد أنّ:

$$\boxed{0 < 4-u_n \le \left(\frac{4}{5}\right)^n}$$

❸ حساب $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n)$:

لدينا : $0 < 4-u_n \le \left(\frac{4}{5}\right)^n$

ومنه : $0 < \lim\limits_{n\to+\infty}(4-u_n) \le \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^n$

ومنه : $0 < \lim\limits_{n\to+\infty}(4-u_n) \le 0$

حسب مبدأ النهايات بالحصر نجد أنّ: $\lim\limits_{n\to+\infty}(4-u_n)=0$

ومنه: $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n)=4}$

❹ أ- تبيين أنّ (v_n) هندسية محددا أساسها وحدها الأول:

$$v_{n+1}=\frac{u_{n+1}-4}{u_{n+1}-2}=\frac{8\left(1-\frac{3}{u_n+2}\right)-4}{8\left(1-\frac{3}{u_n+2}\right)-2}$$

$$=\frac{4u_n-16}{6u_n-12}=\frac{4(u_n-4)}{6(u_n-2)}=\frac{2}{3}v_n$$

ومنه: (v_n) هندسية محددا أساسها $\frac{2}{3}$ وحدها الأول:

$$v_0=\frac{u_0-4}{u_0-2}=-1$$

ب- كتابة عبارة v_n بدلالة n:

$$v_n=-\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

❺ استنتاج عبارة u_n بدلالة n:

لدينا : $v_n=\frac{u_n-4}{u_n-2}$

ومنه : $v_nu_n-2v_n-u_n=-4$

ومنه : $u_n(v_n-1)=-4+2v_n$

ومنه : $u_n=2\frac{v_n-2}{v_n-1}$

ومنه : $\boxed{u_n=2\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n+2}{\left(\frac{2}{3}\right)^n+1}}$

ج- اكتب بدلالة n المجموع S_n

لدينا : $v_n=\frac{u_n-4}{u_n-2}$

ومنه : $v_n=1-\frac{2}{u_n-2}$

ومنه : $\frac{1}{2}(v_n-1)=\frac{1}{2-u_n}$

وعليه:

$$S_n=\frac{1}{2-u_0}+\frac{1}{2-u_1}+\cdots+\frac{1}{2-u_n}$$

$$=\frac{1}{2}(v_0-1)+\frac{1}{2}(v_1-1)+\cdots+\frac{1}{2}(v_n-1)$$

$$=\frac{1}{2}\left[v_0\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{3}}-1(n+1)\right]$$

$$=\boxed{\frac{1}{2}\left[3\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}-n-4\right]}$$

التمرين الثالث [00.00 نقطة]

I/ حل في المجموعة $\mathbb{C}$ الجملة $\begin{cases}\alpha+\beta=-1\\ \overline{\alpha}-\overline{\beta}=3-2i\end{cases}$:

لدينا: $\begin{cases}\alpha+\beta=-1\\ \overline{\alpha}-\overline{\beta}=3-2i\end{cases}$

ومنه: $\begin{cases}\alpha+\beta=-1\\ \overline{\overline{\alpha}-\overline{\beta}}=\overline{3-2i}\end{cases}$

ومنه: $\begin{cases}\alpha+\beta=-1\dots(*)\\ \alpha-\beta=3+2i\dots(**)\end{cases}$

بجمع المعادلتين $(*)$ و $(**)$ نجد: $2\alpha=2+2i$

ومنه: $\alpha=1+i$

نعوض قيمة α في $(*)$ نجد: $\beta=-2-i$

II/

❶ أ- كتابة كل من z_A و z_B على الشكل الأسي:

نضع: θ_A و θ_B عُمد لـ z_A و z_B على الترتيب

لدينا: $\begin{cases}|z_A|=2\sqrt{2}\\ \cos\theta_A=\frac{2}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin\theta_A=\frac{2}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$

ومنه: $\theta_A=\frac{\pi}{4}+2k\pi$ حيث: $k\in\mathbb{Z}$

ومنه: $\boxed{z_A=2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}$

لدينا: $\begin{cases}|z_B|=2\sqrt{2}\\ \cos\theta_B=\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{2}\\ \sin\theta_B=\frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$

ومنه: $\theta_B=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ حيث: $k\in\mathbb{Z}$

ومنه: $\boxed{z_B=2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{3}}}$

ب- تعيين طبيعة المثلث ABC:

لدينا:

$$\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\frac{-\sqrt{2}-i\sqrt{6}-2-2i}{\sqrt{2}+i\sqrt{6}-2-2i}$$

$$= -\frac{\sqrt{2}+2+i(\sqrt{6}+2)}{\sqrt{2}-2+i(\sqrt{6}-2)} \times \frac{\sqrt{2}-2-i(\sqrt{6}-2)}{\sqrt{2}-2-i(\sqrt{6}-2)}$$

$$= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{(4-\sqrt{2}-\sqrt{6})}i = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-2+i(\sqrt{6}-2)}i \in \mathbb{C}-\mathbb{R}$$

ومنه : $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad ; \quad k \in \mathbb{Z}$

إذن ABC **قائم في** A

❷ تبيان أنّ B، C و O في استقامية:

لدينا: $z_C = -z_B$

ومنه: $z_C - z_O = -(z_B - z_O)$

ومنه: $z_{\overrightarrow{OC}} = -z_{\overrightarrow{OB}}$ **ومنه:** $\boxed{\overrightarrow{OC} = -\overrightarrow{OB}}$

إذن النقط B، C **و** O **في استقامية**

❸ كتابة العدد المركب $\frac{z_B}{z_A}$ على الشكلين الجبري ثم الأسي:

- $\frac{z_B}{z_A} = \frac{\sqrt{2}+i\sqrt{6}}{2+2i} = \frac{\sqrt{2}+i\sqrt{6}}{2+2i} \times \frac{2-2i}{2-2i}$

$$= \frac{2\sqrt{2}-2i\sqrt{2}+i2\sqrt{6}+2\sqrt{6}}{4+4}$$

$$= \boxed{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$$

- $\frac{z_B}{z_A} = \frac{2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{3}}}{2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}} = e^{i\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)} = \boxed{e^{i\frac{\pi}{12}}}$

❹ استنتاج القيمة المضبوطة لكل من $tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$:

لدينا : $\frac{z_B}{z_A} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} = \cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}$

ومنه :
$$\begin{cases} \cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \\ \sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \end{cases}$$

ومنه:

$$\tan\frac{\pi}{12} = \frac{\sin\frac{\pi}{12}}{\cos\frac{\pi}{12}} = \frac{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$$

$$= \boxed{2-\sqrt{3}}$$

❺ تعيين (Γ) :

لدينا: $|i(\overline{z}-2)-2| = 0$

ومنه: $\left|i\left((\overline{z}-2)-\frac{2}{i}\right)\right| = 0$

ومنه: $|i||\overline{z}-2+2i| = 0$

ومنه: $|\overline{z}-2+2i| = 0$

ومنه: $\overline{|\overline{z}-2+2i|} = 0$

ومنه: $|z-2-2i| = 0$

ومنه: $|z-(2+2i)| = 0$

ومنه: $|z-z_A| = 0$

ومنه: $AM = 0$

إذن المجموعة (Γ) **هي النقطة** A

التمرين الرابع [00.00 نقطة]

I/

❶ أ- حل المعادلة $g(x) = 0$

لدينا: $g(x) = 0$

معناه: $(2-x^2)e^x$

ومنه: $2-x^2 = 0$

ومنه: $x^2 = 2$

ومنه: $x = \sqrt{2}$ **أو** $x = -\sqrt{2}$

إذن: $S_{g(x)=0} = \{-\sqrt{2};\sqrt{2}\}$

ب- تعيين بيانيا إشارة الدالة g على $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

- تعيين بيانيا إشارة الدالة h على $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h(x)$		$+$	0	$+$	

❷ أ- تعيين الوضع النسبي بين (C_g) و (C_h)

x	$-\infty$		α		β		$+\infty$
الوضع النسبي	(C_g) تحت (C_h)		(C_g) يقطع (C_h)	(C_g) فوق (C_h)	(C_g) يقطع (C_h)		(C_g) تحت (C_h)

ب- استنتاج إشارة $g(x) - h(x)$

x	$-\infty$		α		β		$+\infty$
$g(x)-h(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

❸ أ- ايجاد عبارة $G(x)$

$$G(x) = \int (2-x^2)e^x dx$$

نضع:

$$\left|\begin{array}{l|l} u'(x) = -2x & u(x) = 2-x^2 \\ v(x) = e^x & v'(x) = e^x \end{array}\right.$$

وعليه:

$$G(x) = (2-x^2)e^x - \int -2xe^x dx$$

$$= (2-x^2)e^x + 2\int xe^x dx$$

- إيجاد دالة اصلية لـ $x \longmapsto xe^x$:

نضع:

$$\left|\begin{array}{l|l} k'(x) = 1 & k(x) = x \\ w(x) = e^x & w'(x) = e^x \end{array}\right.$$

وعليه:

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx$$

$$= xe^x - e^x + c \quad ; \quad c \in \mathbb{R}$$

$$= (x-1)e^x + c$$

إذن:

$$G(x) = (2-x^2)e^x + 2\int xe^x dx$$

$$= (2-x^2)e^x + 2(x-1)e^x + 2c$$

$$= \boxed{x(2-x)e^x + c'} \quad ; \quad c' \in \mathbb{R}$$

ب- حساب $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{A} = \int_\alpha^\beta [g(x) - h(x)]dx$$

$$= [G(x)]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta x^2 dx = \left[x(2-x)e^x - \frac{1}{3}x^3\right]_\alpha^\beta$$

$$= \beta(2-\beta)e^\beta - \frac{1}{3}\beta^3 - \alpha(2-\alpha)e^\alpha + \frac{1}{3}\alpha^3$$

$$= \left(\beta(2-\beta)e^\beta - \alpha(2-\alpha)e^\alpha + \frac{1}{3}(\alpha^3 - \beta^3)\right) u.a$$

/II

❶ حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ وتفسير النتيجة هندسيا:

- $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{e^x\left(1 + \frac{x^2}{e^x} + \frac{x}{e^x}\right)}{e^x\left(1 - \frac{x}{e^x}\right)} \right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1 + \frac{x^2}{e^x} + \frac{x}{e^x}}{1 - \frac{x}{e^x}} \right) = 1$$

لأنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{x^n}{e^x}\right) = 0 \ (n \in \mathbb{N})$

ومنه: (C_f) يقبل مستقيم مقارب معادلته: $y = 1$

- $$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^2\left(\frac{e^x}{x^2} + 1 + \frac{1}{x}\right)}{x^2\left(\frac{e^x}{x^2} - \frac{1}{x}\right)} \right)$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{\frac{e^x}{x^2} + 1 + \frac{1}{x}}{\frac{e^x}{x^2} - \frac{1}{x}} \right) = +\infty$$

لأنّ $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{e^x}{x^n}\right) = 0 \ (n \in \mathbb{N})$

❷ أ- تبيان أنّ $\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x) + x] = -1$:

$$\lim_{x\to-\infty} [f(x) + x] = \lim_{x\to-\infty} \left[\frac{e^x + x^2 + x + xe^x - x^2}{e^x - x}\right]$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \left[\frac{e^x + xe^x + x}{e^x - x}\right]$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \left[\frac{x\left(\frac{e^x}{x} + e^x + 1\right)}{x\left(\frac{e^x}{x} - 1\right)}\right]$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \left[\frac{\frac{e^x}{x} + e^x + 1}{\frac{e^x}{x} - 1}\right] = \frac{1}{-1} = -1$$

- تفسير النتيجة هندسيا:

لدينا: $\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x) + x] = -1$

ومنه: $\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x) + x] + 1 = 0$

ومنه: $\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x) - (-x-1)] = 0$

إذن (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل معادلته $y = -x - 1$

ب- تبيين أنّ $e^x - x > 0$

نضع: $k(x) = e^x - x$

لدينا الدالة k قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$، ودالتها المشتقة هي:

$$k'(x) = e^x - 1$$

لدينا: $e^x - 1 = 0$ معناه: $e^x = 1$ معناه: $x = 0$

وعليه:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h'(x)$	$-$	0	$+$

الدالة k تبلغ قيمة حدية دنيا $k(0) = 1 > 0$

إذن: $k(x) > 0$ وعليه: $e^x - x > 0$

ج- دراسة الوضع النسبي بين (C_f) و (Δ):

$$f(x) - (-x-1) = \frac{e^x + x^2 + x}{e^x - x} + x + 1$$

$$= \frac{e^x + x^2 + x + xe^x - x^2 + e^x - x}{e^x - x}$$

$$= \frac{2e^x + xe^x}{e^x - x} = \frac{e^x(x+2)}{e^x - x}$$

لدينا: $e^x > 0$ ولدينا: $e^x - x > 0$

ولدينا: $x + 2 = 0$ معناه $x = -2$ وعليه:

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f(x) - (-x-1)$	$+$	0	$-$
الوضع النسبي	(C_f) تحت (Δ)	(C_f) يقطع (Δ) في $A(-2;1)$	(C_f) فوق (Δ)

❸ أ- تبيين أنّه من أجل كل عدد حقيقي x: $f'(x) = \frac{g(x)-h(x)}{(e^x-x)^2}$:

لدينا: $g(x) - h(x) = (2 - x^2)e^x - x^2$

ولدينا الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$، ودالتها المشتقة هي:

$$f'(x) = \frac{(e^x + 2x + 1)(e^x - x) - (e^x - 1)(e^x + x^2 + x)}{(e^x - x)^2}$$

$$= \frac{(2 - x^2)e^x - x^2}{(e^x - x)^2} = \frac{g(x) - h(x)}{(e^x - x)^2}$$

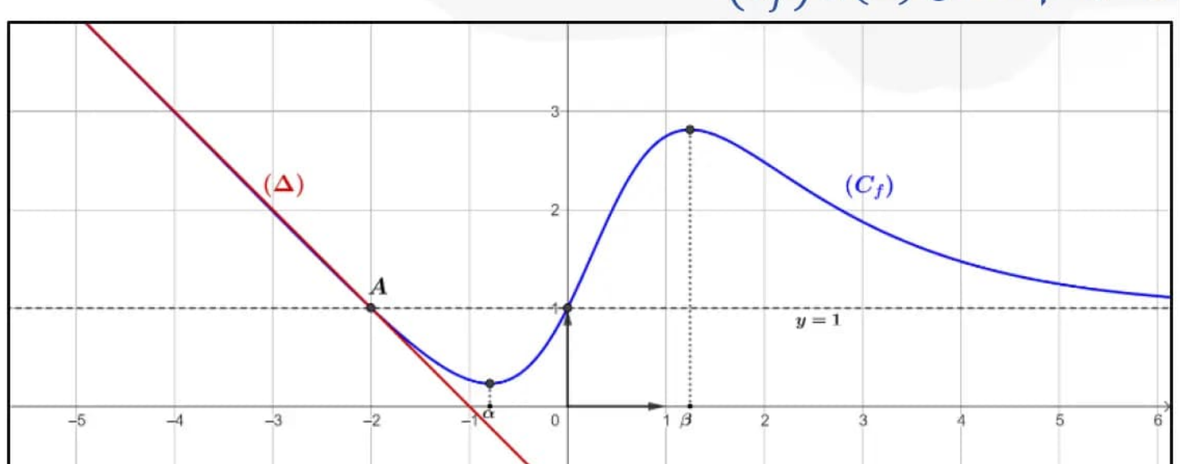
ب- دراسة اتجاه تغير الدالة f، وتشكيل جدول تغيراتها:

لدينا: $(e^x - x)^2 > 0$

ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x) - h(x)$

x	$-\infty$	α		β	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$f(\alpha)$ ↗		$f(\beta)$ ↘	1

❹ رسم كلا من (Δ) و (C_f):



الموضوع الثاني

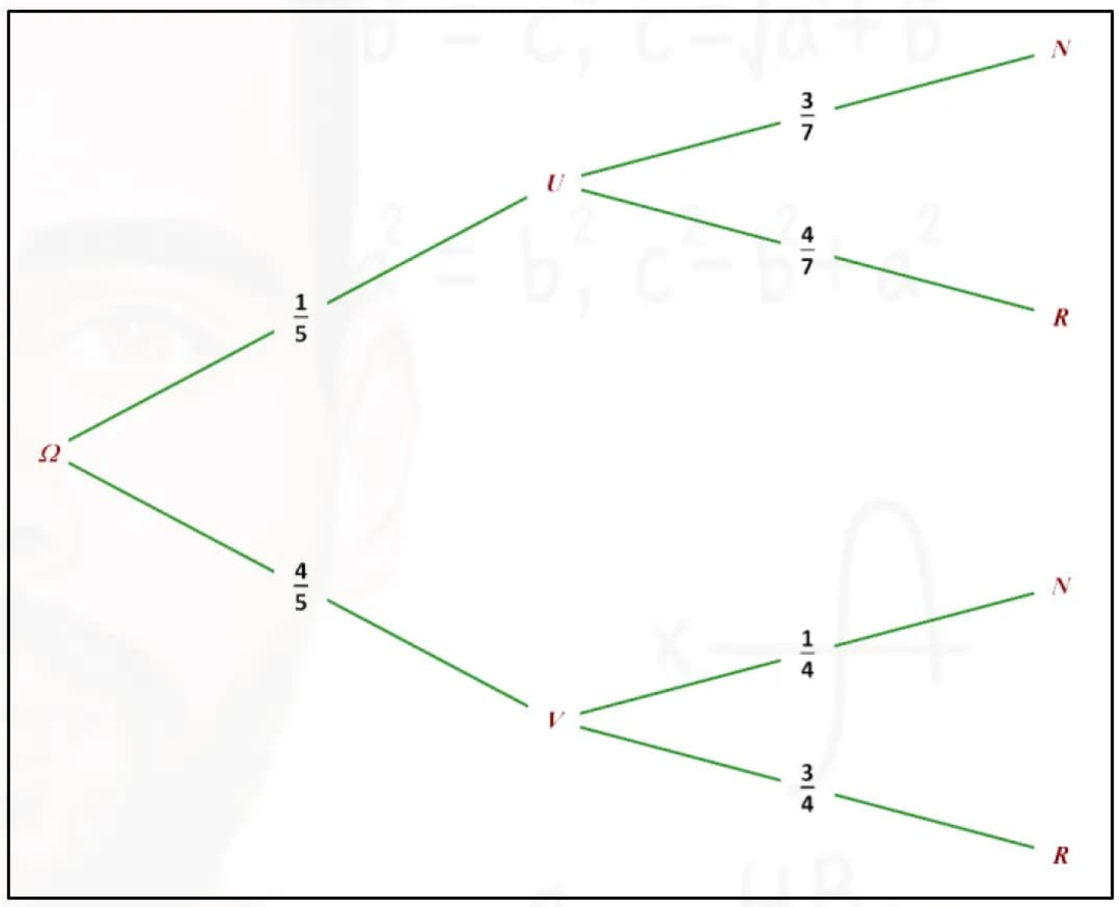
التمرين الأول [00.00 نقطة]

I/ حساب احتمال كل من الأحداث A، B و C

- $P(A) = \dfrac{C_3^2 C_4^1 + C_4^2 C_3^1}{C_7^3} = \dfrac{30}{35} = \dfrac{6}{7}$
- $P(B) = \dfrac{C_4^1 C_3^2}{C_7^3} = \dfrac{12}{35}$
- $P(C) = \dfrac{C_4^3 + C_3^1 C_4^2}{C_7^3} = \dfrac{22}{35}$

II/

❶ انجاز شجرة الاحتمالات الموافقة لهذه التجربة:



❷ تبيين أنّ $P(R) = \frac{5}{7}$:

$$P(R) = P(U \cap R) + P(V \cap R) = \frac{5}{7}$$

❸ حساب $P_N(V)$:

$$P_N(V) = \frac{P(V \cap N)}{P(N)} = \frac{P(V \cap N)}{1 - P(R)} = \frac{\frac{4}{5} \times \frac{1}{4}}{1 - \frac{5}{7}} = \frac{7}{10}$$

التمرين الثاني [00.00 نقطة]

I/

❶ دراسة اتجاه تغير الدالة f وتشكيل جدول تغيراتها:

$$f'(x) = \frac{2x(2x-1) - 2x^2}{(2x-1)^2} = \frac{2x(x-1)}{(2x-1)^2} > 0$$

إذن الدالة f متزايدة تماما على $[1; +\infty[$

x	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	1 ↗	$+\infty$

❷ تبيين أنه من أجل كل $x \geq 1$ فإنّ: $f(x) \geq 1$:

لدينا: $x \geq 1$

ومنه: $f(x) \geq 1$ (لأنّ f متزايدة تماما على $[1; +\infty[$)

ومنه: $f(x) \geq 1$

II/

❶ أ- برهان بالتراجع أنه من أجل كل n طبيعي فإنّ: $u_n \geq 1$:

نضع $P(n) \dots u_n \geq 1$

- لدينا: $2 \geq 1$ ومنه: $u_0 \geq 1$ إذن $P(0)$ صحيحة
- ليكن $n \in \mathbb{N}$: نفرض أن $u_n \geq 1$ ونثبت أنّ $u_{n+1} \geq 1$
- لدينا: $u_n \geq 1$

وبما أنّ الدالة f متزايدة تماما على $[1; +\infty[$:

فإنّ: $f(u_n) \geq f(1)$

ومنه: $u_{n+1} \geq 1$

حسب البرهان بالتراجع $P(n)$ صحيحة من أجل كل $n \in \mathbb{N}$

ب- دراسة اتجاه تغير (u_n) واستنتاج أنها متقاربة:

من أجل كل n من $\mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(u_n)^2}{2u_n - 1} - u_n = \frac{-(u_n)^2 + u_n}{2u_n - 1} = \frac{u_n(1 - u_n)}{2u_n - 1}$$

لدينا: $u_n \geq 1$ ومنه: $1 - u_n \leq 0$

ولدينا: $u_n \geq 1$ ومنه: $2u_n - 1 \geq 1$

إذن: $\dfrac{u_n(1 - u_n)}{2u_n - 1} < 0$

وعليه (u_n) متناقصة تماما

- وبما أن (u_n) متناقصة تماما ومحدودة من الأسفل بـ 1 فهي متقاربة

❷ أ- تبيين أن (w_n) هندسية أساسها 2 وحساب w_0:

$$w_{n+1} = \ln(v_{n+1}) = \ln\left(\frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1}}\right) = \ln\left(\frac{\frac{(u_n)^2}{2u_n - 1} - 1}{\frac{(u_n)^2}{2u_n - 1}}\right) = \ln\left(\frac{(u_n)^2 - 2u_n + 1}{(u_n)^2}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{(u_n - 1)^2}{(u_n)^2}\right) = 2\ln\left(\frac{u_n - 1}{u_n}\right) = 2\ln(v_n) = 2w_n$$

ولدينا: $w_0 = ln(v_0) = ln\left(\frac{1}{2}\right)$

إذن (v_n) هندسية أساسها 2 وحدها الأول $-\ln 2$

ب- كتابة بدلالة n عبارة w_n:

من أجل كل n من $\mathbb{N}$:

$$w_n = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \times (2)^n = \boxed{\ln\left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}}$$

- استنتاج بدلالة n عبارة v_n:

لدينا: $w_n = \ln(v_n)$ ومنه: $e^{w_n} = v_n$

ومنه: $v_n = e^{\ln\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}\right)}$ ومنه:

$$\boxed{v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}}$$

ج- استنتاج عبارة u_n بدلالة n:

لدينا: $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n}$

ومنه: $v_n u_n = u_n - 1$

ومنه: $u_n = \frac{1}{1 - v_n}$ وعليه:

$$\boxed{u_n = \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}}}$$

- حساب نهاية (u_n):

$$\lim_{n \to +\infty} (u_n) = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}}\right) = \boxed{1}$$

لأن: $\left(-1 < \frac{1}{2} < 1\right)$

❸ أ- كتابة بدلالة n المجموع S_n :

$$\begin{aligned} S_n &= w_0 + w_1 + \cdots + w_n \\ &= \ln\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2}\right) \\ &= \boxed{\ln(2)\,(1 - 2^{n+1})} \end{aligned}$$

ب- كتابة بدلالة n الجداء P_n :

$$\begin{aligned} P_n &= v_0 \times v_1 \times \ldots \times v_n \\ &= e^{w_0} \times e^{w_1} \times \ldots \times e^{w_n} \\ &= e^{w_0 + w_1 + \cdots + w_n} \\ &= e^{S_n} = e^{\ln(2)\left(1 - 2^{n+1}\right)} \\ &= \boxed{2^{\left(1 - 2^{n+1}\right)}} \end{aligned}$$

التمرين الثالث [00.00 نقطة]

I/ حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2 + 16 - 30i = 0$:

لدينا: $z^2 + 16 - 30i = 0$

تكافئ: $z^2 = -16 + 30i$

نضع: $-16 + 30i = (x + iy)^2$

لدينا: أي:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 34 \\ x^2 - y^2 = -16 \\ 2xy = 30 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 34 \ldots (*) \\ x^2 - y^2 = -16 \ldots (**) \\ xy = 15 \end{cases}$$

بجمع $(*)$ مع $(**)$ نجد: $2x^2 = 18$ أي: $x^2 = 9$

أي: $x = 3$ أو $x = -3$

نعوض $x^2 = 9$ في $(*)$ نجد: $9 + y^2 = 34$

أي: $y^2 = 25$ أي: $y = 5$ أو $y = -5$

إذن: $(x; y) = \{(3; 5); (-3; -5)\}$

وعليه: $\boxed{z = 3 + 5i}$ أو $\boxed{z = -3 - 5i}$

II/

❶ أ- التأكد أنّ $z_B + z_D = z_A + z_C$ وأنّ $z_B - z_D = i(z_A - z_C)$:

لدينا:

- $z_B + z_D = z_B - z_B = 0$
- $z_A + z_C = z_A - z_A = 0$

إذن: $z_B + z_D = z_A + z_C$

ولدينا:

- $z_B - z_D = -5 + 3i - 5 + 3i = -10 + 9i$
- $i(z_A - z_C) = i(3 + 5i + 3 + 5i) = i(9 + 10i)$
$= -10 + 9i$

إذن: $z_B - z_D = i(z_A - z_C)$

ب- استنتاج طبيعة الرباعي $ABCD$:

لدينا: $z_B + z_D = z_A + z_C$

ومنه : $\frac{z_B + z_D}{2} = \frac{z_A + z_C}{2}$

إذن: القطران متناصفان

لدينا: $z_B - z_D = i(z_A - z_C)$

ومنه : $\frac{z_B - z_D}{z_A - z_C} = i = e^{i\frac{\pi}{2}}$

إذن : $\left(\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{BD}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \ ; \ k \in \mathbb{Z}$

وعليه: $ABCD$ مربع (الإنشاء في آخر الحل)

ج- تعيين مركز ونصف قطر الدائرة $(\mathcal{C})$ المحيطة بالرباعي $ABCD$:

بما أنّ $ABCD$ مربع

فإنّ: ABC مثلث ثائم في B

إذن: $[AC]$ هو قطر الدائرة $(\mathcal{C})$

أي: $r = \frac{AC}{2} = \frac{|z_A - z_C|}{2} = \frac{|2z_A|}{2} = |z_A| = \sqrt{34}$

و $z_{\Omega} = \frac{z_A + z_C}{2} = 0 = z_O$

❷ أ- تبيين أنّ $z' = \frac{z - z_A}{z - z_C}$:

$$\begin{aligned} z' &= \frac{z^2 - z_A^2}{(z - z_C)^2} = \frac{(z - z_A)(z + z_A)}{(z - z_C)^2} \\ &= \frac{(z - z_A)(z - z_C)}{(z - z_C)^2} = \frac{z - z_A}{z - z_C} \end{aligned}$$

- تعيين وانشاء المجموعة (Γ_1) :

لدينا: $\arg(z') = \pi$

ومنه : $\arg\left(\frac{z - z_A}{z - z_C}\right) = \pi$

ومنه: $\left(\overrightarrow{MC}; \overrightarrow{MA}\right) = \pi$

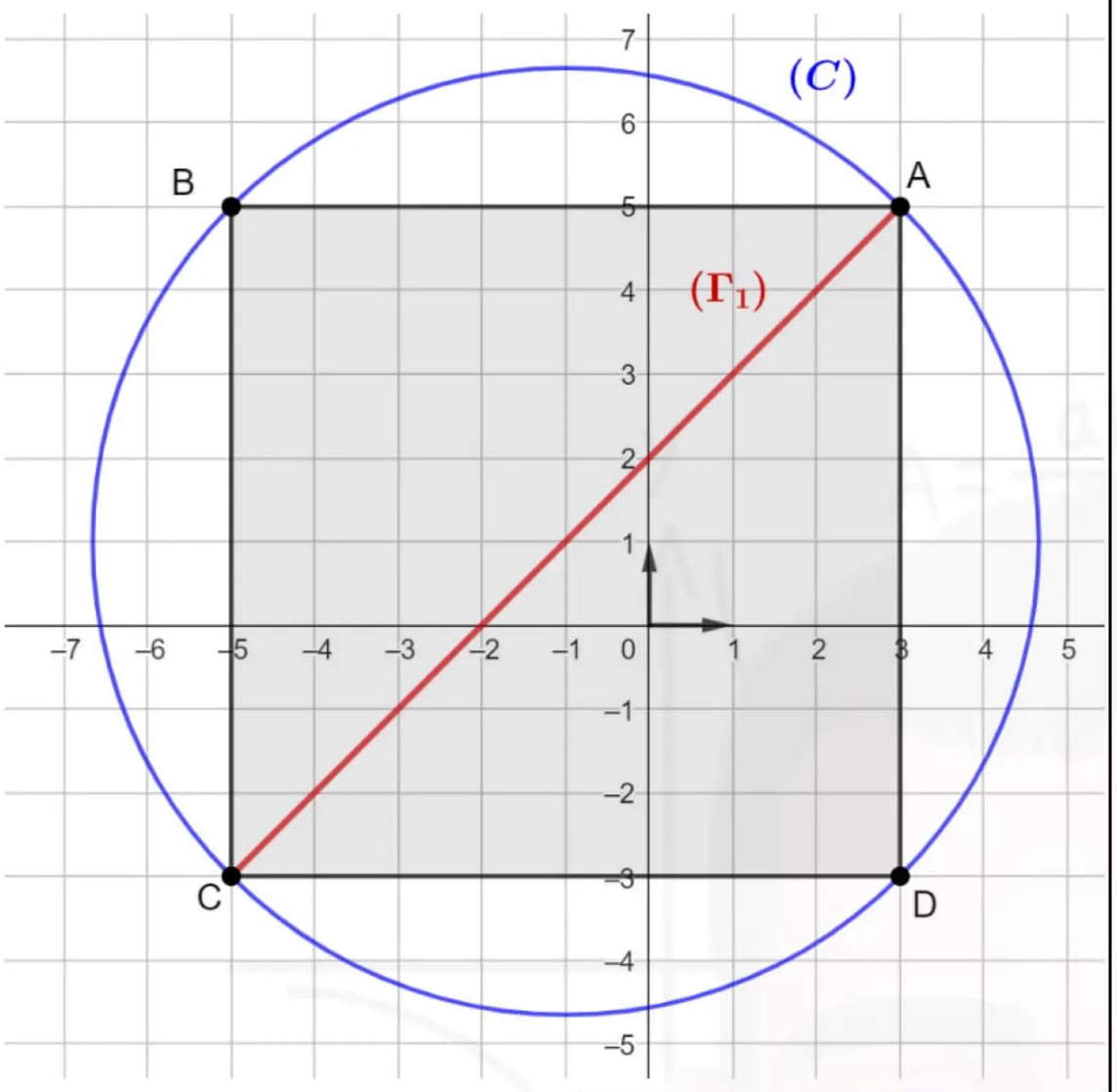
إذن: (Γ_1) هي القطعة المستقيمة باستثناء A و C

ب- تبيين أنّ (Γ_2) هي $(\mathcal{C})$ باستثناء A و C:

لدينا: النقط M حيث M' تنتمي إلى محور التراتيب؛

معناه : $\arg(z') = \frac{\pi}{2} + k\pi \ ; \ k \in \mathbb{Z}$

ومنه : $\arg\left(\frac{z - z_A}{z - z_C}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi$



التمرين الرابع [00.00 نقطة]

/I

❶ حساب $\lim\limits_{\substack{>\\ x\to 0}} g(x)$:

$$\lim_{\substack{>\\ x\to 0}} g(x) = e$$

لأن: $\lim\limits_{\substack{>\\ x\to 0}} (x \ln x) = 0$

- استنتاج إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$:

لدينا الدالة g مستمرة ومتزايدة تماما على $]0;+\infty[$

و $\lim\limits_{\substack{>\\ x\to 0}} g(x) = e > 0$ إذن الدالة g موجبة تماما على $]0;+\infty[$

/II

❶ حساب $\lim\limits_{\substack{>\\ x\to 0}} f(x)$ و تبيين أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

- $\lim\limits_{\substack{>\\ x\to 0}} f(x) = -\infty$

- $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\ln(x+1) + \frac{e\dfrac{\ln x}{x}}{1+\dfrac{1}{x}}\right) = +\infty$$

لأنّ: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\ln x}{x}\right) = 0$

❷ أ- تبيين أنّ: $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x(x+1)^2}$:

لدينا: f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}_+^*$

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{\frac{e}{x}(x+1) - e\ln x}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{x+1+\frac{e}{x}(x+1) - \frac{e(x\ln x)}{x}}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{\frac{x(x+1)}{x} + \frac{e}{x}(x+1) - \frac{e(x\ln x)}{x}}{(x+1)^2}$$

ومنه : $(\overrightarrow{MC};\overrightarrow{MA}) = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$

إذن: (Γ_2) هي الدائرة هي (C) باستثناء A و C

❸ أ- كتابة على الشكل الأسي ثم الشكل الجبري العدد المركب z_E:

لدينا : $\dfrac{z_E}{\sqrt{3}-i} = \dfrac{3}{\sqrt{2}} e^{i\frac{5\pi}{12}}$

ومنه : $z_E = \left(\sqrt{3}-i\right)\dfrac{3}{\sqrt{2}} e^{i\frac{5\pi}{12}}$

ومنه : $z_E = 2e^{-i\frac{\pi}{6}}\dfrac{3}{\sqrt{2}} e^{i\frac{5\pi}{12}}$

ومنه : $z_E = \dfrac{6}{\sqrt{2}} e^{i\left(\frac{5\pi}{12}-\frac{\pi}{6}\right)}$

ومنه : $z_E = \dfrac{6}{\sqrt{2}} e^{i\frac{\pi}{4}}$

ومنه : $z_E = \dfrac{6}{\sqrt{2}}\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$

ومنه : $z_E = \dfrac{6}{\sqrt{2}}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

ومنه: $z_E = 3 + 3i$

إذن : $z_E = \dfrac{3\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{\pi}{4}} = 3 + 3i$

❹ أ- كتابة على الشكل الشكل الجبري العدد المركب $\frac{z_E}{\sqrt{3}-i}$:

$$\frac{z_E}{\sqrt{3}-i} = \frac{3+3i}{\sqrt{3}-i} = \frac{3+3i}{\sqrt{3}-i}\times\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}+i}$$

$$= \frac{3\sqrt{3}-3}{4} + i\frac{3\sqrt{3}-3}{4}$$

ب- استنتاج القيمة المضبوطة لـ $\tan\left(\frac{5\pi}{12}\right)$:

لدينا : $\dfrac{z_E}{\sqrt{3}-i} = \dfrac{3}{\sqrt{2}} e^{i\frac{5\pi}{12}}$

ومنه : $\dfrac{3\sqrt{3}-3}{4} + i\dfrac{3\sqrt{3}-3}{4} = \dfrac{3}{\sqrt{2}} e^{i\frac{5\pi}{12}}$

$$\frac{3\sqrt{3}-3}{4} + i\frac{3\sqrt{3}-3}{4} = \frac{3}{\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)\right)$$

ومنه :

$$\frac{3\sqrt{3}-3}{4} + i\frac{3\sqrt{3}-3}{4} = \frac{3}{\sqrt{2}}\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) + i\frac{3}{\sqrt{2}}\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$$

ومنه :

$$\begin{cases} \dfrac{3}{\sqrt{2}}\cos\left(\dfrac{5\pi}{12}\right) = \dfrac{3\sqrt{3}-3}{4} \\ \dfrac{3}{\sqrt{2}}\sin\left(\dfrac{5\pi}{12}\right) = \dfrac{3\sqrt{3}+3}{4} \end{cases}$$

ومنه :

$$\begin{cases} \cos\left(\dfrac{5\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \\ \sin\left(\dfrac{5\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \end{cases}$$

ومنه : $\tan\dfrac{5\pi}{12} = \dfrac{\sin\frac{5\pi}{12}}{\cos\frac{5\pi}{12}} = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$

$$= \frac{x(x+1)+e(x+1)-e(x\ln x)}{x(x+1)^2}$$
$$= \frac{(x+1)(x+e)-e(x\ln x)}{x(x+1)^2} = \frac{g(x)}{x(x+1)^2}$$

ب- استنتاج اتجاه تغير الدالة f:

لدينا: $x(x+1)^2 > 0$ لما $x \in]0;+\infty[$

إذن إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	$+$		
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$

❸ كتابة معادلة (T)

$$y_{(T)} = f'(1)(x-1)+f(1)$$
$$= \frac{1+e}{2}(x-1)+\ln 2$$
$$= \frac{1+e}{2}x - \frac{1+e-2\ln 2}{2}$$

❹ أ- تبيين أنّ (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة:

لدينا الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على $\mathbb{R}_+^*$

ولدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x) = +\infty$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]0;+\infty[$

ب- التحقق أنّ $0.7 < \alpha < 0.8$:

لدينا: $f(0.8)\times f(0.7) < 0$

لأنّ: $f(0.8) \approx 0.25$ و $f(0.7) \approx -0.04$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]0;+\infty[$

❺ أ- حساب $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-ln(x+1)]$:

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-\ln(x+1)] = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{e\ln x}{x+1}\right]$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{e\frac{\ln x}{x}}{1+\frac{1}{x}}\right] = 0$$

- التفسير الهندسي:

(C_f) و (Γ) متقاربان بجوار $+\infty$

ب- دراسة الوضع النسبي للمنحنيين (C_f) و (Γ):

لدينا: $f(x)-ln(x+1)=0$

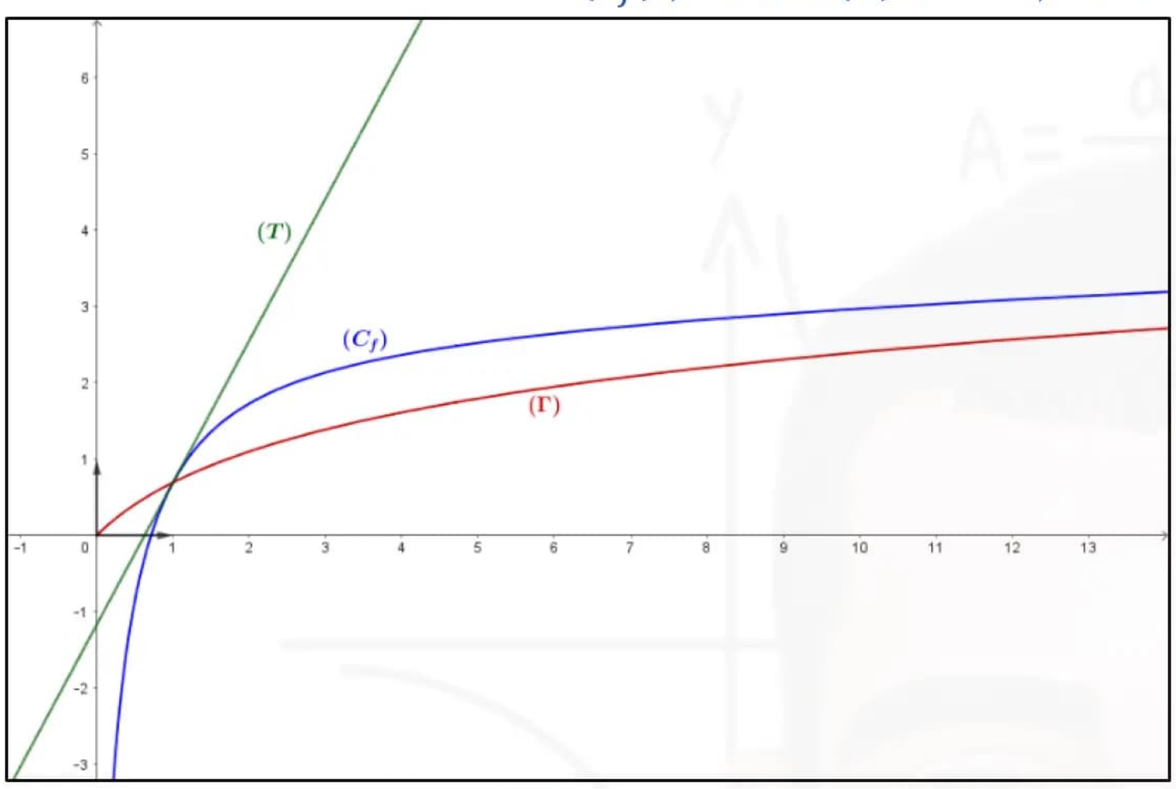
ومنه: $\frac{e\ln x}{x+1}=0$ ومنه: $e\ln x = 0$

ومنه: $\ln x = 0$ ومنه: $x=1$

x	0	1	$+\infty$
$f(x)-\ln x$	$-$	0	$+$

- (C_f) فوق (Γ) لما $x \in]0;1[$
- (C_f) يقطع (Γ) لما $x=1$
- (C_f) تحت (Γ) لما $x \in]1;+\infty[$

❻ رسم المماس (T) و (Γ) ثم (C_f) :



❼ تعيين قيم m حتى تقبل $f(x)=\frac{1+e}{2}x-m$ حلين متمايزين:

حلول المعادلة $f(x)=\frac{1+e}{2}x-m$ هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيمات ذات المعادلة $y=\frac{1+e}{2}x-m$ ، ومنه:

لما: $-m < -\frac{1+e-2\ln 2}{2}$

أي لما: $m > \frac{1+e-2\ln 2}{2}$

المعادلة تقبل حلين متمازين

❽ تعيين الدالة الأصلية للدالة $h: x \longmapsto \ln(x+1)$ على $\mathbb{R}_+$

نضع:

$$\begin{vmatrix} u'(t) = \frac{1}{t+1} \\ v(t) = t \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} u(t) = \ln(t+1) \\ v'(t) = 1 \end{vmatrix}$$

ومنه:

$$H(x) = \int_{e-1}^{x} \ln(t+1)\,dt$$
$$= t\ln(t+1) - \int \frac{t}{t+1}dt$$
$$= t\ln(t+1) - \int \frac{t+1-1}{t+1}dt$$
$$= t\ln(t+1) - \int \left(1-\frac{1}{t+1}\right)dt$$
$$= t\ln(t+1) - t + \ln(t+1) + c \quad ; \quad c \in \mathbb{R}$$
$$= (t+1)\ln(t+1) - t + c$$

بالتوفيق في شهادة البكالوريا