Alostoramath
Alostoramath
PROF:BENCHERIF ABDELKARIM
ALOSTORAMATH
33 01
FB:ALOSTORAMATH

امتحان بكالوريا تجريبي للتعليم الثانوي
الشعبة : علوم تجريبية

اختبار في مادة الرياضيات

الموسم الدراسي: 2025
دورة ماي 2025

01.05.2025

المدة: 3 ساعات و 30 دقيقة

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأول

التمرين الأول (4 نقاط)

(u_n) متتالية عددية معرفة بـ $u_0 = 0$ و من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $u_{n+1} = 1 - \frac{4}{u_n + 3}$

1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $-1 < u_n \leq 0$

2) ادرس إتجاه تغير المتتالية (u_n) ، ثم استنتج أنها متقاربة.

3) (v_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n = \frac{1}{u_n + 1}$

أ) بيّن أن (v_n) متتالية حسابية أساسها $\frac{1}{2}$ يطلب تعيين حدّها الأول.

ب) اكتب v_n بدلالة n ، ثم استنتج u_n بدلالة n و أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

4) نضع من أجل كل عدد طبيعي n ، $S_n = e^{u_0 v_0} \times e^{u_1 v_1} \times e^{u_2 v_2} \times \cdots\cdots \times e^{u_n v_n}$

– بيّن أن $S_n = e^{\frac{-n^2-n}{4}}$ ، هل (S_n) متتالية متقاربة؟

Alostoramath
Prof:Bencherif Abdelkarim
alostoramath

التمرين الثاني (4 نقاط)

يحتوي صندوق U على 3 كريات حمراء و كريتين سوداوين ، و يحتوي صندوق V على 4 كريات حمراء و 3 كريات سوداء (كل الكريات متماثلة و لانميّز بينها باللمس).

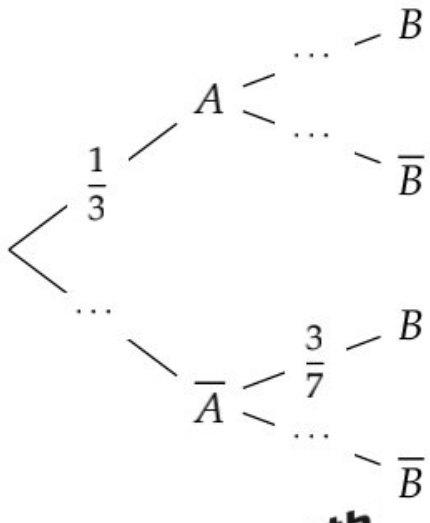
نرمي زهرة نرد غير مزيفة مرقمة من 1 إلى 6 مرة واحدة ، إذا تحصلنا على رقم مضاعف لـ 3 نسحب كرتين في آن واحد من الصندوق U ، وفي باقي الحالات نسحب كرتين على التوالي و بدون إرجاع من الصندوق V.

نعتبر الحادثتين: A: الحصول على رقم مضاعف لـ 3 و B: الحصول على كرتين من نفس اللون

1) بين أن إحتمال سحب كرتين من نفس اللون من الصندوق V هو $\frac{3}{7}$

2) أ) اكمل شجرة الإحتمالات المقابلة ، ثم أحسب $P(B)$.

ب) علماً أن الكرتين المسحوبتين من نفس اللون ما إحتمال أن تكونا من الصندوق V؟



3) نعتبر اللعبة التالية: للمشاركة يدفع اللاعب $\alpha\, DA$ (حيث α عدد حقيقي موجب تماماً) فإذا سحب اللاعب كرتين من نفس اللون يربح $100\, DA$ و إذا سحب كرتين مختلفتين في اللون يخسر ما دفعه.

و ليكن X المتغيّر العشوائي الذي يمثل قيمة ربح أو خسارة اللاعب.

– عيّن قيم المتغيّر العشوائي X ، ثم بيّن أن أمله الرياضياتي $E(X) = \frac{880}{21} - \alpha$

alostoramath

التمرين الثالث (4 نقاط)

نعتبر في المستوي المركب $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ النقطتين A و B لاحقتاهما على الترتيب: $z_A = 1+i$ و $z_B = \sqrt{3}+i$

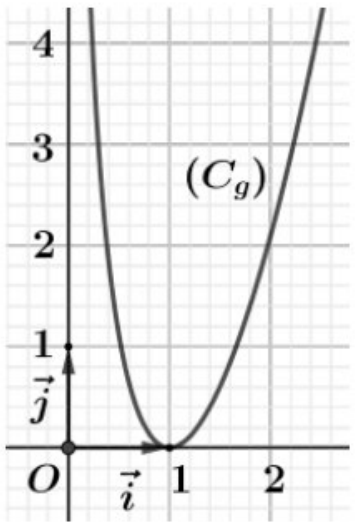
1) اكتب z_A و z_B على الشكل الأسي. ثم استنتج الشكل الأسي للعدد $\frac{z_A}{z_B}$.

2) اكتب $\frac{z_A}{z_B}$ على الشكل الجبري ثم استنتج القيمة المضبوطة لكل من $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

3) اكتب على الشكل الجبري العدد $\left(\frac{\sqrt{2}\,z_A}{z_B}\right)^{2024}$ ، ثم عيّن قيم العدد الطبيعي n حتى يكون $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n$ عدداً حقيقياً موجباً.

4) عين مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z بحيث $z = \sqrt{3}+i+e^{i\theta}$ و θ تمسح $\mathbb{R}$.

التمرين الرابع (8 نقاط)



I) g الدالة العددية المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $g(x) = x^2 - 1 + (\ln x)^2 - 2\ln x$

(C_g) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ كما هو موضح في الشكل المقابل.

- احسب $g(1)$ ، ثم بقراءة بيانية حدد حسب قيم x إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.

II) f الدالة العددية المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $f(x) = x + \frac{1-(\ln x)^2}{x}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ حيث $\left\|\vec{i}\right\| = \left\|\vec{j}\right\| = 2cm$.

alostoramath

1) بيّن أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ ثم أحسب $\lim\limits_{\substack{x\longrightarrow 0\\ >}} f(x)$ و فسّر النتيجة بيانياً.

2) أ) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ ، $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

ب) استنتج إتجاه تغير الدالة f ثم شكّل جدول تغيراتها.

ج) استنتج أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة إنعطاف يطلب تعيين إحداثييها.

د) اكتب معادلة المماس (T) عند نقطة الإنعطاف.

3) أ) بيّن أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x$ مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$.

ب) ادرس وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ).

4) بيّن أنه توجد نقطتيين من (C_f) يكون عندهما المماس يوازي المستقيم (Δ) يطلب تعيين فاصلتيهما(معدلتا المماسين غير مطلوبتين).

5) بيّن أن (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث $0,34 < \alpha < 0,35$

6) ارسم كلاً من (Δ) ، (T) و المنحنى (C_f).

7) أ) بيّن أن الدالة $x \mapsto \ln x - \frac{1}{3}(\ln x)^3$ هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto \frac{1-(\ln x)^2}{x}$ على المجال $]0;+\infty[$.

ب) احسب بالـ cm^2 مساحة الحيّز المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيمات (Δ) ، $x = e^{-1}$ و $x = e$.

انتهى الموضوع الأول

Alostoramath
Prof:Bencherif Abdelkarim

Alostoramath
Prof:Bencherif Abdelkarim

الموضوع الثاني

التمرين الأول (4 نقاط)

يحتوي صندوق على 10 كريات متماثلة و لا نميّز بينها باللمس منها ثلاث كريات بيضاء تحمل الأرقام 1 ، 2 ، 2 و ثلاث كريات حمراء تحمل الأرقام 0 ، 1 ، 2 و أربع كريات سوداء تحمل الأرقام 0 ، 1 ، 1 ، 2.

نسحب عشوائيا و في آن واحد ثلاث كريات من الصندوق و نعتبر الحوادث التالية:

A: سحب ثلاث كريات من نفس اللون.

B: سحب ثلاث كريات مختلفة الأرقام مثنى مثنى.

C: سحب كرية حمراء على الأكثر.

alostoramath

1) احسب $P(A)$ ، $P(B)$ و $P(C)$.

2) بيّن أن $P(A \cap B) = \frac{1}{40}$ ثم استنتج $P(A \cup B)$ و $P_A(B)$. هل A و B حادثتان مستقلتان؟

3) ليكن X المتغيّر العشوائي الذي يُرفق بكل عملية سحب عدد الكريات الحمراء المتبقية في الصندوق.

أ) برّر أن قيم المتغير العشوائي X هي $\{0;1;2;3\}$.

ب) عرّف قانون الإحتمال للمتغيّر العشوائي X و أحسب أمله الرياضياتي.

التمرين الثاني (4 نقاط)

I) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول المركب z التالية: $(z-1)(z^2+4z+7)=0$

II) نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ النقط A ، B و C لواحقها على الترتيب:

$z_A = 1$ ، $z_B = -2 + i\sqrt{3}$ ، $z_C = \overline{z_B}$ و نضع: $L = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

1) اكتب العدد L على الشكل المثلثي.

2) أ) اكتب العدد المركب $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ على الشكل الأسي ، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC.

ب) استنتج أن C هي صورة B بدوران R يطلب تعيين عناصره المميزة.

3) عيّن z_D لاحقة النقطة D حتى يكون الرباعي $ABDC$ متوازي أضلاع ، ثم حّدد بدقة طبيعته.

4) لتكن (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث: $|iz - i| = |\bar{z} + 2 + i\sqrt{3}|$

– عيّن مجموعة النقط (Γ) ، ثم استنتج صورتها بالدوران R.

التمرين الثالث (4 نقاط)

(u_n) متتالية عددية معرفة بـ $u_0 = e^3$ و من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $u_{n+1} = e\sqrt{u_n}$

1) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n > e^2$

2) ادرس إتجاه تغير المتتالية (u_n). هل (u_n) متقاربة ؟

Alostoramath
Prof:Bencherif Abdelkarim

3) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n = \ln(u_n) - 2$

أ) بيّن أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ يطلب تعيين حدّها الأول.

ب) عبّر عن v_n بدلالة n ، ثم استنتج u_n بدلالة n و أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

4) احسب P_n بدلالة n حيث : $P_n = u_0 \times u_1 \times u_2 \times \cdots\cdots \times u_n$

alostoramath

التمرين الرابع (8 نقاط)

f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R} - \{0\}$ بـ : $f(x) = 2x + \frac{1}{e^x - 1}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$ (حيث $\left\|\vec{i}\right\| = \left\|\vec{j}\right\| = 1cm$).

1) أ) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

ب) أحسب $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0} f(x)$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)$ ثم فسّر النتيجة بيانياً.

2) أ) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - 2x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x) - 2x)$ ، ثم فسّر النتيجتين بيانياً.

ب) ادرس وضعية (C_f) بالنسبة لكل من المستقيمين $(\Delta_1) : y = 2x$ و $(\Delta_2) : y = 2x - 1$.

3) أ) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R} - \{0\}$ ، $f'(x) = \frac{(2e^x - 1)(e^x - 2)}{(e^x - 1)^2}$

ب) استنتج أن الدالة f متزايدة تماماً على كل من المجالين $]-\infty; -\ln 2]$ و $[\ln 2; +\infty[$ و متناقصة تماماً على كل من المجالين $[-\ln 2; 0[$ و $]0; \ln 2]$ ثم شكّل جدول تغيراتها.

4) من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$ أحسب $f(-x) + f(x)$ ، ثم فسّر النتيجة بيانياً.

5) ارسم كلاً من (Δ_1) ، (Δ_2) و المنحنى (C_f). (يعطى $f(\ln 2) = \ln 4 + 1$ و $f(-\ln 2) = -\ln 4 - 2$)

6) ناقش بيانياً حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة $f(x) = 2x + m$.

7) أ) بيّن أن الدالة $x \mapsto -x + \ln(e^x - 1)$ هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto \frac{1}{e^x - 1}$ على المجال $]0; +\infty[$.

ب) احسب $\int_{\ln 2}^{1} \frac{dx}{e^x - 1}$ و فسّر النتيجة بيانياً.

8) h دالة عددية معرّفة على $\mathbb{R}^*$ بـ : $h(x) = |f(x)|$

– اشرح كيفية رسم منحنى الدالة h إنطلاقا من (C_f) ثم أرسمه في نفس المعلم السابق.

Alostoramath
Prof:Bencherif Abdelkarim

انتهى الموضوع الثاني

التصحيح المفصل للبكالوريا التجريبية في مادة الرياضيات

الموضوع الأول

التمرين الأول

$u_0 = 0$ ، $u_{n+1} = 1 - \frac{4}{u_n + 3}$

1) البرهان بالتراجع أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ ، $P(n): -1 < u_n \leq 0$

نتحقق من صحة $P(0)$

لدينا: $-1 < u_0 = 0$ (محققة)

ليكن $n \in \mathbb{N}$ ، نفرض صحة $P(n)$ ونبرهن على صحة $P(n+1)$ أي نبين أن $-1 < u_{n+1} \leq 0$

لدينا: $-1 < u_n \leq 0$

$2 < u_n + 3 \leq 3$

$\frac{1}{2} > \frac{1}{u_n+3} \geq \frac{1}{3}$

$-2 < -\frac{4}{u_n+3} \leq -\frac{4}{3}$

$-1 < 1 - \frac{4}{u_n+3} \leq -\frac{1}{3} \leq 0$

ومنه $-1 < u_{n+1} \leq 0$

إذن $-1 < u_n \leq 0$ من أجل كل عدد طبيعي n،

ج) دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) من أجل كل عدد طبيعي n، لدينا:

$u_{n+1} - u_n = 1 - \frac{4}{u_n+3} - u_n$

$= \frac{u_n + 3 - 4 - u_n^2 - 3u_n}{u_n + 3}$

$= \frac{-u_n^2 - 2u_n - 1}{u_n + 3}$

$u_{n+1} - u_n = \frac{-(u_n+1)^2}{u_n+3} < 0$

ومنه (u_n) متتالية متناقصة تماما.

- بما أن (u_n) متناقصة تماما ومحدودة من الأسفل بالعدد -1 فهي متقاربة.

3) $v_n = \frac{1}{u_n + 1}$

أ) إثبات أن (v_n) متتالية حسابية من أجل كل $n \in \mathbb{N}$، لدينا:

$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{u_{n+1}+1} - \frac{1}{u_n+1}$

$= \frac{1}{1 - \frac{4}{u_n+3} + 1} - \frac{1}{u_n+1}$

$= \frac{1}{\frac{u_n+3-4+u_n+3}{u_n+3}} - \frac{1}{u_n+1}$

$= \frac{1}{\frac{2u_n+2}{u_n+3}} - \frac{1}{u_n+1}$

$= \frac{u_n+3}{2u_n+2} - \frac{1 \times 2}{(u_n+1) \times 2}$

$= \frac{u_n+3-2}{2u_n+2}$

$= \frac{u_n+1}{2(u_n+1)}$

$= \boxed{\frac{1}{2}}$

ومنه (v_n) متتالية حسابية أساسها $r = \frac{1}{2}$ وحدها الأول v_0 حيث

$v_0 = \frac{1}{u_0+1} = \frac{1}{0+1} = \boxed{1}$

ب) كتابة v_n بدلالة n

$v_n = v_0 + nr$

$v_n = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)n$

0,25

$$\boxed{v_n = \frac{2+n}{2}}$$

استنتاج u_n بدلالة n

لدينا: $u_n v_n + v_n = 1$ ومنه $v_n = \frac{1}{u_n + 1}$

$u_n v_n = 1 - v_n$

$u_n = \frac{1 - v_n}{v_n}$

$u_n = \frac{1 - \frac{2+n}{2}}{\frac{2+n}{2}}$

$u_n = \frac{\frac{2-2-n}{2}}{\frac{2+n}{2}}$

0,25

$$\boxed{u_n = \frac{-n}{2+n}}$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{-n}{2+n}$

$= \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{-n}{n} = \boxed{-1}$

0,25

ج) $S_n = e^{u_0 v_0} \times e^{u_1 v_1} \times \cdots \times e^{u_n v_n}$

إثبات أن: $S_n = e^{\frac{-n^2-n}{4}}$

لدينا: $S_n = e^{u_0 v_0 + u_1 v_1 + \cdots + u_n v_n}$

لدينا سابقا $u_n v_n = 1 - v_n$ ومنه

$S_n = e^{(1-v_0)+(1-v_1)+\cdots+(1-v_n)}$

$S_n = e^{(1+1+\cdots+1) - (v_0 + v_1 + \cdots + v_n)}$

$S_n = e^{(n+1) - \left(\frac{n+1}{2}\right)(v_0 + v_n)}$

$= e^{(n+1) - \left(\frac{n+1}{2}\right)\left(1 + \frac{2+n}{2}\right)}$

$= e^{(n+1)\left[1 - \frac{2+2+n}{4}\right]}$

0,75

$= e^{(n+1)\left(\frac{-n}{4}\right)}$

$S_n = e^{\frac{-n^2-n}{4}}$ ومنه

$$\boxed{S_n = e^{\frac{-n^2-n}{4}}}$$ إذن:

لدينا: $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty} e^{\frac{-n^2-n}{4}}$

0,25

$= 0$

لأن: $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{-n^2-n}{4} = -\infty$

ومنه (S_n) متتالية متقاربة نحو 0.

التمرين الثاني

1) إثبات أن إحتمال سحب كرتين من نفس اللون من الصندوق V هو $\frac{3}{7}$

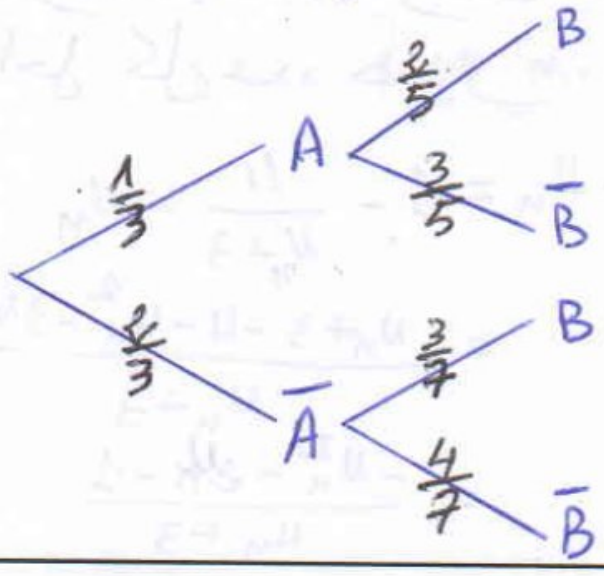
$P(B) = \frac{A_4^2 + A_3^2}{A_7^2} = \frac{12+6}{42}$

0,5

$= \frac{18}{42} = \frac{3}{7}$

ب) إكمال شجرة الإحتمالات

$P_A(B) = \frac{C_3^2 + C_2^2}{C_5^2} = \frac{3+1}{10} = \frac{4}{10} = \boxed{\frac{2}{5}}$ ومنه



0,5

حساب $P(B)$

$P(B) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{5} + \frac{2}{3} \times \frac{3}{7}$

$= \frac{2}{15} + \frac{2}{7}$ 0,5

$= \frac{2\times7 + 15\times2}{105} = \boxed{\frac{44}{105}}$

ب) $P_B(\overline{A}) = \frac{P(\overline{A} \cap B)}{P(B)}$

لدينا: $P(\overline{A} \cap B) = \frac{2}{3} \times \frac{3}{7} = \boxed{\frac{2}{7}}$

ومنه $P_B(\overline{A}) = \frac{\frac{2}{7}}{\frac{44}{105}}$ 1

$= \frac{2}{7} \times \frac{105}{44}$

$= \frac{210}{308} = \boxed{\frac{15}{22}}$

3) X: المتغير العشوائي الذي يمثل قيمة ربح أو خسارة اللاعب

- عند سحب كرتين من نفس اللون (أي الحدث B) يربح اللاعب 100DA ومنه $\boxed{X = 100 - K}$

- عند سحب كرتين مختلفتين في اللون (أي الحدث $\overline{B}$) فإن اللاعب تخسر ما دفعه ومنه $\boxed{X = -K}$ 0,5

إذن: $X = \{100-K ; -K\}$

قانون إحتمال المتغير العشوائي X

$P(X = 100-K) = P(B) = \frac{44}{105}$

$P(X = -K) = P(\overline{B}) = 1 - P(B)$

$= 1 - \frac{44}{105}$

$= \frac{61}{105}$

x_i	$100-K$	$-K$
$P(X=x_i)$	$\frac{44}{105}$	$\frac{61}{105}$

0,5

إذن:

$E(X) = \frac{680}{21} - K$ إثبات أن

$E(X) = \frac{44}{105}(100-K) + \frac{61}{105}(-K)$ 0,5

$= \frac{4400 - 44K - 61K}{105}$

$= \frac{4400 - 105K}{105}$ 0,5

$= \frac{4400:5}{105:5} - \frac{105K}{105}$

$\boxed{E(X) = \frac{880}{21} - K}$

إذن

التمرين الثالث

$Z_A = 1 + i$ / $Z_B = \sqrt{3} + i$

1) كتابة Z_A و Z_B على الشكل الأسي

$|Z_A| = |1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$

لدينا، Z_A لاحقة M_A لتكن θ_A عمدة لـ Z_A، ومنه

$\begin{cases} \cos\theta_A = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta_A = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ ومنه $\theta_A = \frac{\pi}{4} + 2K\pi / K \in \mathbb{Z}$

$\boxed{Z_A = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}}$ 0,5 ومنه

$|Z_B| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$

لدينا، Z_B لاحقة M_B لتكن θ_B عمدة لـ Z_B، ومنه

$\begin{cases} \cos\theta_B = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta_B = \frac{1}{2} \end{cases}$ ومنه $\theta_B = \frac{\pi}{6} + 2K\pi / K \in \mathbb{Z}$

$\boxed{Z_B = 2e^{i\frac{\pi}{6}}}$ 0,5 إذن:

استنتاج الشكل الأسي لـ $\frac{z_A}{z_B}$

$$\frac{z_A}{z_B} = \frac{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}{2e^{i\frac{\pi}{6}}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)}$$

$$\boxed{\frac{z_A}{z_B} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{\pi}{12}}} \quad 0,5$$

ج) كتابة $\frac{z_A}{z_B}$ على الشكل الجبري

$$\frac{z_A}{z_B} = \frac{(1+i)\times(\sqrt{3}-i)}{(\sqrt{3}+i)\times(\sqrt{3}-i)}$$

$$= \frac{\sqrt{3}-i+i\sqrt{3}+1}{(\sqrt{3})^2+1^2}$$

$$= \frac{(\sqrt{3}+1)+i(\sqrt{3}-1)}{4}$$

$$\boxed{\frac{z_A}{z_B} = \frac{\sqrt{3}+1}{4} + i\frac{\sqrt{3}-1}{4}} \quad 0,5$$

استنتاج القيمة المضبوطة لكل من $\cos\frac{\pi}{12}$ و $\sin\frac{\pi}{12}$

لدينا:

$$\frac{z_A}{z_B} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{\pi}{12}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{\pi}{12} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{\pi}{12}$$

$$= \frac{\sqrt{3}+1}{4} + i\frac{\sqrt{3}-1}{4}$$

بالمطابقة نجد:

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}+1}{4} \\ \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{4} \end{cases}$$ و

ومنه

$$\begin{cases} \cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}+1}{4}\times\frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \\ \sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{4}\times\frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \end{cases}$$ 0,5

ج) كتابة $\left(\frac{\sqrt{2}z_A}{z_B}\right)^{2024}$ على الشكل الجبري

$$\left(\frac{\sqrt{2}z_A}{z_B}\right)^{2024} = \left(\frac{\sqrt{2}\times\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}{2e^{i\frac{\pi}{6}}}\right)^{2024}$$

$$= \left(e^{i\frac{\pi}{12}}\right)^{2024}$$

$$= e^{i\frac{2024\pi}{12}}$$

$$= \cos\left(\frac{2024\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{2024\pi}{12}\right)$$

$$= \boxed{-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i}$$ 0,5

تعيين قيم n حتى يكون $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n$ عددا حقيقيا موجبا

$$\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{12}}\right)^n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n e^{i\frac{n\pi}{12}}$$

$\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n$ عدد حقيقي موجب معناه: θ هي عمدة لـ $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n$

$$\frac{n\pi}{12} = 2k\pi \quad / k\in\mathbb{N}$$

$$\boxed{n = 24k \,/\, k\in\mathbb{N}}$$ 0,5

4) $z = \sqrt{3}+i+e^{i\theta}$

$z = z_B + e^{i\theta}$

$z - z_B = e^{i\theta}$

$|z - z_B| = 1$ / $\mathbb{R}$ من θ

$$\boxed{BM = 1}$$

ومنه مجموعة النقط M هي دائرة مركزها B ونصف قطرها 1. 0,5

التمرين الرابع

I) $g(x) = x^2 - 1 + (\ln x)^2 - 2\ln x$

$D_g =]0;+\infty[$

1) حساب $g(1)$

$g(1) = 1^2 - 1 + (\ln 1)^2 - 2\ln 1$

$= 1 - 1 + 0 - 2(0) = \boxed{0}$ 0,25

تحديد بيانيا إشارة $g(x)$ على $]0;+\infty[$

x	0		1		$+\infty$
$g(x)$	‖	$+$	0	$+$	

0,5

II) $f(x) = x + \dfrac{1-(\ln x)^2}{x}$

1) إثبات أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x + \dfrac{1-(\ln x)^2}{x}\right)$

$= \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x + \dfrac{1}{x} - \dfrac{(\ln x)^2}{x}\right)$

$= +\infty$ 0,25

لأن: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\ln x)^2}{x} = 0$ لأن

إثبات أن $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\ln x)^2}{x} = 0$ لأن

بوضع $x = y^2$ ، لما $x\to+\infty$ فإن $y\to+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\ln x)^2}{x} = \lim\limits_{y\to+\infty} \dfrac{(\ln y^2)^2}{y^2}$ 0,25

$= \lim\limits_{y\to+\infty} \dfrac{(2\ln y)^2}{y^2}$

$= \lim\limits_{y\to+\infty} 4\left(\dfrac{\ln y}{y}\right)$

$= 0$

حساب $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}\left(x + \dfrac{1-(\ln x)^2}{x}\right)$ 0,25

$= -\infty$

لأن: $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-(\ln x)^2\right) = -\infty$

التفسير البياني: $x=0$ مستقيم مقارب عمودي لـ $(\mathcal{C}_f)$. 0,25

2) إثبات أنه من أجل كل $x \in]0;+\infty[$

$f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$

لدينا من أجل كل $x \in]0;+\infty[$

$f'(x) = 1 + \dfrac{\left[-2\left(\frac{1}{x}\right)\ln x\right]x - (1)\left(1-(\ln x)^2\right)}{x^2}$

$= 1 + \dfrac{-2\ln x - 1 + (\ln x)^2}{x^2}$

$= \dfrac{x^2 - 2\ln x - 1 + (\ln x)^2}{x^2}$ 0,5

$= \dfrac{x^2 - 1 - 2\ln x + (\ln x)^2}{x^2}$

$f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$

ب) استنتاج اتجاه تغير الدالة f

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	2	↗	$+\infty$

0,25

الدالة f متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$ 0,25

ج) استنتاج أن (Φ) يقبل نقطة إنعطاف:

بما أن $f'(x)$ إنعدمت عند 1 وغيرت إشارتها فإن النقطة $(1;f(1))$ أي $(1;2)$ نقطة إنعطاف لـ (Φ)

د) كتابة معادلة المماس (T) عند نقطة الإنعطاف أي عند النقطة $(1;2)$:

$(T): y = f'(1)(x-1)+f(2)$

لدينا: $f'(1)=0$ و $f(1)=2$

ومنه $(T): y = 0(x-1)+2$

$\boxed{(T): y = 2}$

3) أ) إثبات أن $(\Delta): y=x$ مستقيم مقارب مائل لـ (Φ) بجوار $+\infty$

لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+\frac{1-(\ln x)^2}{x}-x\right)$

$= \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1-(\ln x)^2}{x}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}-\frac{(\ln x)^2}{x}\right)$

$= 0$

ومنه (Δ) مستقيم مقارب مائل لـ (Φ) بجوار $+\infty$.

ب) دراسة الوضع النسبي لـ (Φ) مع (Δ)

من أجل كل x من $]0;+\infty[$

لدينا: $f(x)-x = \frac{1-(\ln x)^2}{x}$

$f(x)-x = \frac{(1-\ln x)(1+\ln x)}{x}$

إشارة $f(x)-x$ من إشارة $(1-\ln x)(1+\ln x)$

$1-\ln x = 0$	$1+\ln x \geq 0$
$-\ln x = -1$	$\ln x \geq -1$
$\ln x = 1$	$x \geq e^{-1}$
$\boxed{x = e^1}$	$\boxed{x = e^{-1}}$

ومنه،

x	0		e^{-1}		e		$+\infty$
x	‖	+		+		+	
$1-\ln x$	‖	+		+	0	−	
$1+\ln x$	‖	−	0	+		+	
$f(x)-x$	‖	−	0	+	0	−	
الوضع النسبي	‖	(Φ) يقع تحت (Δ)	(Φ) يقطع (Δ) في $(e^{-1};e^{-1})$	(Φ) يقع فوق (Δ)	(Φ) يقطع (Δ) في $(e;e)$	(Φ) يقع تحت (Δ)	

4) إثبات أنه توجد نقطتين من (Φ) حيث يكون المماس عندها يوازي المستقيم (Δ)

$f'(a)=1$ حل المعادلة

$\frac{g(a)}{a^2}=1$

$a^2-1+(\ln a)^2-2\ln a = a^2$

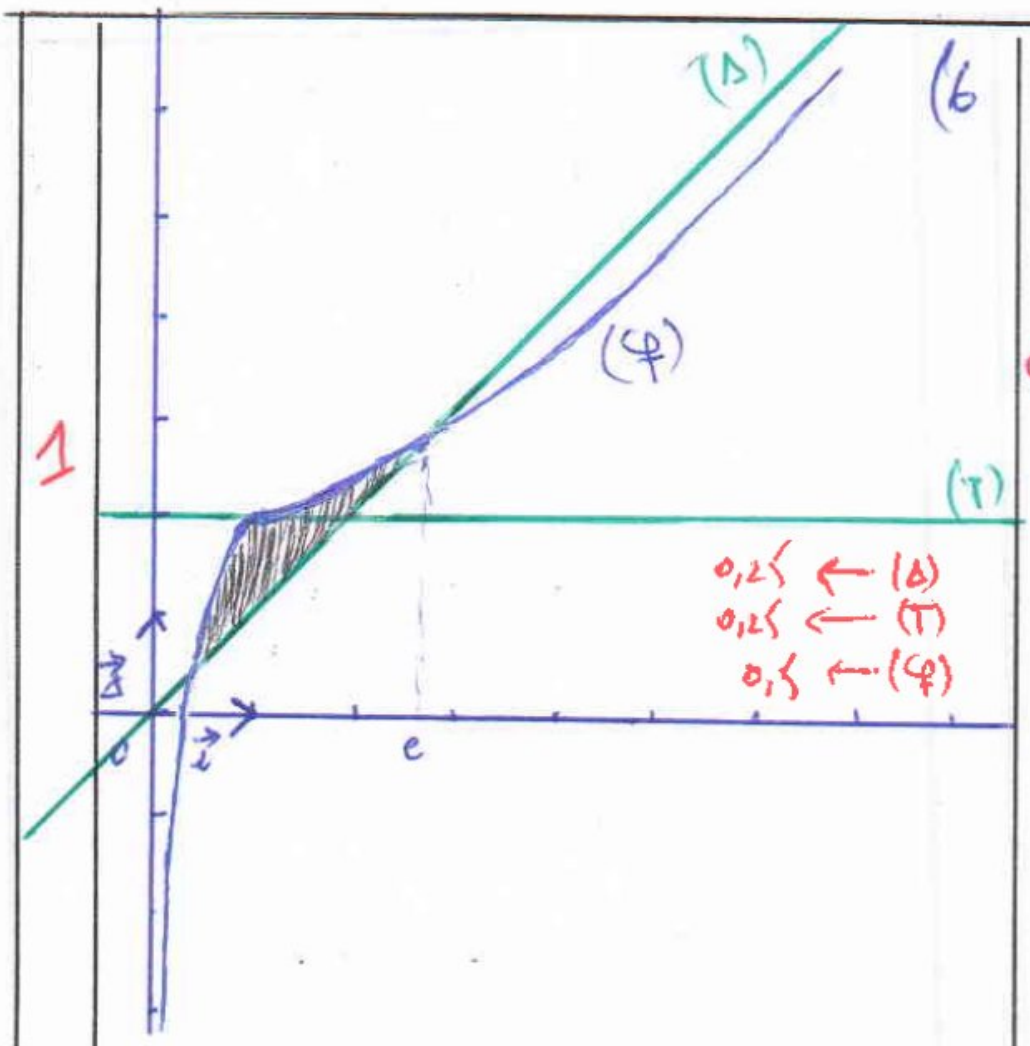
$(\ln a)^2-2\ln a-1=0$

نضع $X=\ln a$ ومنه،

$X^2-2X-1=0$

$\Delta=(-2)^2-4(1)(-1)$

$=4+4=8>0$



6) $x' = \frac{e-\sqrt{8}}{e} = \frac{e-2\sqrt{e}}{e} = \boxed{1-\sqrt{2}}$ ومنه

$x'' = \frac{e+\sqrt{8}}{2} = \frac{e+2\sqrt{e}}{2} = \boxed{1+\sqrt{2}}$

0,75

إذا $\ln a = 1-\sqrt{2}$

أي $\boxed{a = e^{1-\sqrt{2}}}$

أو $\ln a = 1+\sqrt{2}$

أي $\boxed{a = e^{1+\sqrt{2}}}$

ومنه يما أن المعادلة $f'(a) = 1$

تقبل حلين متمايزين فإن (φ)

يوجد مماسين لـ (φ) كل منهما

يوازي (Δ).

5) إثبات أن (φ) يقطع

حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة

فاصلتها α حيث $0,34 < \alpha < 0,35$

- f دالة معرفة ومستمرة ومتزايدة

تماما على المجال $]0,34 ; 0,35[$ ولدينا:

$f(0,34) = 0,34 + \frac{1-(\ln(0,34))^2}{0,34} \simeq -0,14 < 0$

$f(0,35) = 0,35 + \frac{1-(\ln(0,35))^2}{0,35} \simeq 0,06 > 0$

0,5

ومنه حسب مبرهنة القيم

المتوسطة فإن المعادلة $f(x) = 0$

تقبل حلاً وحيداً α حيث

$0,34 < \alpha < 0,35$

أي (φ) يقطع $(x'x)$ في نقطة

وحيدة فاصلتها α حيث

$0,34 < \alpha < 0,35$

7) أ) إثبات أن $x \mapsto \ln x - \frac{1}{3}(\ln x)^3$

هي دالة أصلية لـ $x \mapsto \frac{1-(\ln x)^2}{x}$

من أجل كل $x \in]0;+\infty[$ لدينا:

$\left(\ln x - \frac{1}{3}(\ln x)^3\right)' = \frac{1}{x} - \frac{1}{3}(3)\left(\frac{1}{x}\right)(\ln x)^2$

$= \frac{1}{x} - \frac{(\ln x)^2}{x}$

0,5

$= \frac{1-(\ln x)^2}{x}$

إذن $x \mapsto \ln x - \frac{1}{3}(\ln x)^3$ دالة أصلية لـ $x \mapsto \frac{1-\ln x)^2}{x}$

ب) حساب مساحة الحيز المحدد بـ (φ)

والمستقيمات (D) و $x = e^{-1}$ و $x = e$

$A = \int_{e^{-1}}^{e} \left(f(x) - x\right) dx \, \|\vec{i}\| \, \|\vec{j}\|$

$= \int_{e^{-1}}^{e} \frac{1-(\ln x)^2}{x} dx \; (2cm)(2cm)$

$= 4\left[\ln x - \frac{1}{3}(\ln x)^3\right]_{e^{-1}}^{e} cm^2$

0,5

$= 4\left[\left(\ln e - \frac{1}{3}(\ln e)^3\right) - \left(\ln e^{-1} - \frac{1}{3}(\ln e^{-1})^3\right)\right]$

$= 4\left[1 - \frac{1}{3} - \left(-1 - \frac{1}{3}(-1)\right)\right]$

$= 4\left[1 - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3}\right] = 4\left(2 - \frac{2}{3}\right) = \boxed{\frac{16}{3} cm^2}$

0,5

7pts

الموضوع الثاني

B_2	B_2	B_1
R_0	R_1	R_2
N_0	N_1	N_2

1) عدد الحالات الممكنة للسحب

$card(\Omega) = C_{10}^3 = \boxed{120}$

حساب $P(A)$

$$P(A) = \frac{C_3^3 + C_3^3 + C_4^3}{120}$$

$$= \frac{1+1+4}{120} = \boxed{\frac{6}{120}}$$ 0,25

$$P(B) = \frac{C_2^1 \times C_4^1 \times C_4^1}{120} = \frac{2\times4\times4}{120} = \boxed{\frac{32}{120}}$$ 0,25

$$P(C) = \frac{C_3^1 \times C_7^2 + C_7^3}{120} = \boxed{\frac{96}{120}}$$ 0,25

2) إثبات أن $P(A\cap B)$

$A\cap B$: هو سحب ثلاث كريات من نفس اللون ومختلفة الأرقام مثنى مثنى أي $(N_0 N_1 N_2$ و $R_0 R_1 R_2)$

$$P(A\cap B) = \frac{C_1^1 \times C_1^1 \times C_1^1 + C_1^1 \times C_2^1 \times C_1^1}{120}$$

$$= \frac{1+2}{120} = \frac{3}{120} = \boxed{\frac{1}{40}}$$ 0,5

$$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$$

$$= \frac{6}{120} + \frac{32}{120} - \frac{3}{120}$$

$$= \boxed{\frac{35}{120}}$$

$$P_A(B) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{3}{120}}{\frac{6}{120}} = \frac{3}{6} = \boxed{\frac{1}{2}}$$ 0,25

بما أن: $P_A(B) = \frac{1}{2} \neq \frac{3}{120} = P(B)$ 0,25

فإن A و B حادثتان غير مستقلتان

3) X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب عدد الكريات الحمراء المتبقية في الصندوق

- عند سحب ثلاث كريات حمراء فإنه لا تبقى أي كرية حمراء في الصندوق ومنه $\boxed{X=0}$

- عند سحب كريتين حمراوين بالضبط فإنه تبقى كرية واحدة حمراء في الصندوق ومنه $\boxed{X=1}$ 0,5

- عند سحب كرية واحدة حمراء بالضبط فإنه تبقى كريتين حمراوين في الصندوق ومنه $\boxed{X=2}$

- عند سحب ثلاث كريات ليست حمراء فإنه يبقى في الصندوق ثلاث كريات حمراء ومنه $\boxed{X=3}$

إذن: $X = \{0; 1; 2; 3\}$ 0,5

قانون احتمال المتغير العشوائي X

$$P(X=0) = \frac{C_3^3}{120} = \frac{1}{120}$$

$$P(X=1) = \frac{C_3^2 \times C_7^1}{120} = \frac{3\times7}{120} = \frac{21}{120}$$

$$P(X=2) = \frac{C_3^1 \times C_7^2}{120} = \frac{3\times21}{120} = \frac{63}{120}$$ 0,25

$$P(X=3) = \frac{C_7^3}{120} = \frac{35}{120}$$ 0,25

1

1 ن

X_i	0	1	2	3
$P(X=X_i)$	$\frac{1}{20}$	$\frac{21}{120}$	$\frac{63}{120}$	$\frac{35}{120}$

الأمل الرياضياتي للمتغير العشوائي X

$E(X) = 0\left(\frac{1}{20}\right) + 1\left(\frac{21}{120}\right) + 2\left(\frac{63}{120}\right) + 3\left(\frac{35}{120}\right)$ 0,5

$= \frac{21 + 126 + 105}{120} = \frac{252}{120}$

التمرين الثاني

I) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة

$(Z-1)(Z^2+4Z+7) = 0 \quad \cdots (*)$

$Z-1=0$ أي $\boxed{Z=1}$ أو

$Z^2+4Z+7=0$

$\Delta = (4)^2 - 4(1)(7)$ 0,75

$= 16 - 28 = -12 = 12i^2$

$= (i\sqrt{12})^2$

$= (2i\sqrt{3})^2$

ومنه $Z' = \frac{-4 - 2i\sqrt{3}}{2} = \boxed{-2 - i\sqrt{3}}$

$Z'' = \frac{-4 + 2i\sqrt{3}}{2} = \boxed{-2 + i\sqrt{3}}$

إذن حلول المعادلة (*) هي:

$S = \{1 ; -2 - i\sqrt{3} ; -2 + i\sqrt{3}\}$

II) كتابة L على الشكل المثلثي

$L = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$|L| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = \boxed{1}$

لتكن θ عمدة لـ L، لدينا:

ومنه $\begin{cases} \cos\theta = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2} \\ \sin\theta = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

$\theta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}$ 0,5

إذن: $\boxed{L = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}$

ص 2

2) كتابة العدد $\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}$ على الشكل الأسي

$\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} = \frac{-2 - i\sqrt{3} - 1}{-2 + i\sqrt{3} - 1}$

$= \frac{-3 - i\sqrt{3}}{-3 + i\sqrt{3}} \times \frac{-3 - i\sqrt{3}}{-3 - i\sqrt{3}}$

$= \frac{9 + 3i\sqrt{3} + 3i\sqrt{3} - 3}{(-3)^2 + (\sqrt{3})^2}$

$= \frac{6 + 6i\sqrt{3}}{12}$

$= \frac{6}{12} + \frac{6i\sqrt{3}}{12}$ 0,5

$= \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$= L$

ولدينا حسب السؤال 1: $|L| = 1$ و

$\arg(L) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}$

ومنه $\boxed{\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} = e^{i\frac{\pi}{3}}}$

استنتاج طبيعة المثلث ABC

لدينا: $\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} = e^{i\frac{\pi}{3}}$

إذن $\left|\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}\right| = 1$ ومنه $\boxed{AC = AB}$

$\arg\left(\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}\right) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}$ 0,5

$(\vec{AB}, \vec{AC}) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}$

إذن المثلث ABC متقايس الأضلاع.

ب) استنتاج أن c هي صورة B بدوران R.

لدينا سابقا $\frac{z_c - z_A}{z_B - z_A} = e^{i\frac{\pi}{3}}$

ومنه $\boxed{z_c - z_A = e^{i\frac{\pi}{3}}(z_B - z_A)}$ 0,25

إذا c هي صورة B بدوران R مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{3}$

3) تعيين z_D حتى يكون ABDC متوازي أضلاع

ABDC متوازي أضلاع معناه $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

أي أن $z_B - z_A = z_D - z_C$

$z_D = z_B - z_A + z_C$

$= -2 + i\sqrt{3} - 1 - 2 - i\sqrt{3}$

$\boxed{z_D = -5}$

تحديد طبيعة الرباعي ABDC

لدينا: ABDC متوازي أضلاع

ولدينا سابقا $AB = AC$

و $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3} \neq \frac{\pi}{2}$

إذا ABDC معين.

4) $(\Gamma): |iz - i| = |\bar{z} + 2 + i\sqrt{3}|$

تعيين مجموعة النقط (Γ)

$|iz - i| = |\bar{z} + 2 + i\sqrt{3}|$

$|i(z-1)| = |\overline{z + 2 + i\sqrt{3}}|$

$|i| \times |z - 1| = |z + 2 - i\sqrt{3}|$

$1 \times |z - 1| = |z - (-2 + i\sqrt{3})|$

$|z - z_A| = |z - z_B|$ 0,5

$\boxed{AM = BM}$

إذا (Γ) هي محور القطعة [AB]

استنتاج صورة (Γ) بالدوران R:

صورة (Γ) بالدوران R هي (Γ') محور القطعة [AC] لأن: 0,25

$R(A) = A$ و $R(B) = C$

التمرين الثالث

$\begin{cases} u_0 = e^3 \\ u_{n+1} = e\sqrt{u_n} \end{cases}$

1) البرهان أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ 0,5

$P(n) : u_n > e^2$

التحقق من صحة $P(0)$

لدينا: $u_0 = e^3 > e^2$ (محققة)

نفرض $n \in \mathbb{N}$ يمكن صحة $P(n)$ ونبرهن على صحة $P(n+1)$ أي نبين أن

$u_{n+1} > e^2$ 0,25

لدينا:

$u_n > e^2$

$\sqrt{u_n} > e$ 0,75

$e\sqrt{u_n} > e \times e$

$u_{n+1} > e^2$

إذا: $u_n > e^2$ محيحة من أجل كل $n \in \mathbb{N}$

ج) دراسة إتجاه تغير المتتالية (u_n)

من أجل كل $n \in \mathbb{N}$، لدينا:

$$u_{n+1} - u_n = e\sqrt{u_n} - u_n$$

$$= \frac{(e\sqrt{u_n} - u_n)(e\sqrt{u_n} + u_n)}{e\sqrt{u_n} + u_n}$$

$$= \frac{e^2 u_n - u_n^2}{e\sqrt{u_n} + u_n}$$

$$= \frac{u_n(e^2 - u_n)}{e\sqrt{u_n} + u_n} < 0$$

لأن: $u_n > e^2$ ومنه $e^2 - u_n < 0$

إذن (u_n) متتالية متناقصة تماما.

- بما أن (u_n) متتالية متناقصة تماما ومحدودة من الأسفل بـ e^2 فهي متقاربة.

3) $v_n = \ln(u_n) - 2$

أ) إثبات أن (v_n) متتالية هندسية من أجل كل عدد طبيعي n، لدينا:

$$v_{n+1} = \ln(u_{n+1}) - 2$$

$$= \ln(e\sqrt{u_n}) - 2$$

$$= \ln(e) + \ln(\sqrt{u_n}) - 2$$

$$= 1 + \ln(u_n)^{\frac{1}{2}} - 2$$

$$= \frac{1}{2}\ln(u_n) - 1$$

$$= \frac{1}{2}(\ln(u_n) - 2)$$

$$= \frac{1}{2} v_n$$

ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$ وحدها الأول v_0 حيث

$v_0 = \ln(u_0) - 2 = \ln(e^3) - 2$

$= 3 - 2 = 1$

ب) كتابة v_n بدلالة n

$v_n = v_0 \times q^n$

$= 1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

كتابة u_n بدلالة n

لدينا: $v_n = \ln(u_n) - 2$

$\ln(u_n) = v_n + 2$

$u_n = e^{v_n + 2}$

$u_n = e^{\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2}$

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(e^{\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2}\right) = e^2$

لأن: $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

4) حساب P_n.

$P_n = u_0 \times u_1 \times \cdots \times u_n$

لدينا سابقا $u_n = e^{v_n + 2}$

$P_n = e^{v_0+2} \times e^{v_1+2} \times e^{v_2+2} \times \cdots \times e^{v_n+2}$

$= e^{(v_0 + v_1 + \cdots + v_n) + (2+2+\cdots+2)}$

$= e^{v_0\left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right) + 2(n+1)}$

$= e^{1 \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} + 2n + 2}$

$= e^{\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\frac{1}{2}} + 2n + 2}$

$P_n = e^{2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) + 2n + 2}$

التمرين الرابع

$D_f = \mathbb{R}^*$; $f(x) = 2x + \dfrac{1}{e^x - 1}$

1) أ)

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

ب)

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$e^x - 1$	$-$	0	$+$

$\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 0} f(x) = \lim\limits_{x \xrightarrow{<} 0} \left(2x + \dfrac{1}{e^x - 1}\right)$

$= -\infty$

$\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) = \lim \left(2x + \dfrac{1}{e^x - 1}\right) = +\infty$

التفسير البياني: $x = 0$ مستقيم مقارب عمودي لـ $(\mathcal{C})$.

ج) حساب $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - 2x)$

$\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - 2x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{1}{e^x - 1}\right)$

$= 0$

ومنه المستقيم $y = 2x$ مقارب مائل لـ $(\mathcal{C})$ بجوار $+\infty$

حساب $\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) - 2x)$

$\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) - 2x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{1}{e^x - 1}\right)$

$= \dfrac{1}{0 - 1} = -1$

ومنه المستقيم الذي معادلته $y = 2x - 1$ مقارب مائل لـ $(\mathcal{C})$ بجوار $-\infty$.

ب) دراسة الوضع النسبي لـ $(\mathcal{C})$ مع المستقيم $(\Delta_1): y = 2x$

من أجل كل $x \in \mathbb{R}^*$ لدينا:

$f(x) - 2x = \dfrac{1}{e^x - 1}$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
1	$+$		$+$
$e^x - 1$	$-$	0	$+$
$f(x) - 2x$	$-$		$+$
الوضع النسبي	$(\mathcal{C})$ يقع تحت (Δ_1)		$(\mathcal{C})$ يقع فوق (Δ_1)

دراسة الوضع النسبي لـ $(\mathcal{C})$ مع المستقيم $(\Delta_2): y = 2x - 1$

من أجل كل $x \in \mathbb{R}^*$، لدينا:

$f(x) - (2x - 1) = 2x + \dfrac{1}{e^x - 1} - 2x + 1$

$= \dfrac{1}{e^x - 1} + 1$

$= \dfrac{1 + e^x - 1}{e^x - 1}$

$= \dfrac{e^x}{e^x - 1}$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
e^x	$+$		$+$
$e^x - 1$	$-$	0	$+$
$f(x) - (2x-1)$	$-$		$+$
الوضع النسبي	$(\mathcal{C})$ يقع تحت (Δ_2)		$(\mathcal{C})$ يقع فوق (Δ_2)

3) أ) إثبات أنه من أجل كل $x \in \mathbb{R}^*$

$f'(x) = \dfrac{(2e^x - 1)(e^x - e)}{(e^x - 1)e}$

من أجل كل $x \in \mathbb{R}^*$، لدينا:

$f'(x) = 2 + \dfrac{-e^x}{(e^x - 1)e}$

$= \dfrac{2(e^x - 1)e - e^x}{(e^x - 1)e}$

$$f'(x)=\frac{2(e^{2x}-2e^x+1)-e^x}{(e^x-1)^2}$$

$$=\frac{2e^{2x}-4e^x+2-e^x}{(e^x-1)^2}$$

$$=\frac{2e^{2x}-5e^x+2}{(e^x-1)^2}$$

$$=\frac{(2e^x-1)(e^x-2)}{(e^x-1)^2}$$

نبيّن أنّ $(2e^x-1)(e^x-2)=2e^{2x}-4e^x-e^x+2$

$$=2e^{2x}-5e^x+2$$

ب) استنتاج إتجاه التغيّر

إشارة $f'(x)$ من إشارة $(2e^x-1)(e^x-2)$

$$(2e^x-1)(e^x-2)=0$$

معناه

$2e^x-1=0$ أو $e^x-2=0$

$e^x=\frac{1}{2}$ $e^x=2$

$\boxed{x=\ln\left(\frac{1}{2}\right)=-\ln 2}$ $\boxed{x=\ln 2}$

ومنه

x	$-\infty$		$-\ln 2$		0		$\ln 2$		$+\infty$
e^x-2		−		−		−	0	+	
$2e^x-1$		−	0	+		+		+	
$(e^x-1)^2$		+		+	0	+		+	
$f'(x)$		+	0	−		−	0	+	
$f(x)$	$-\infty$ ↗		$f(-\ln 2)$	↘	$-\infty$ | $+\infty$	↗	$f(\ln 2)$	↗	$+\infty$

دالة f متزايدة تماما على كل من المجالين $]-\infty;-\ln 2]$ و $[\ln 2;+\infty[$

ومتناقصة تماما على كل المجالين $[-\ln 2;0[$ و $]0;\ln 2]$

4) حساب $f(-x)+f(x)$ من أجل كل $x\in\mathbb{R}^*$ لدينا:

$$f(-x)+f(x)=-2x+\frac{1}{e^{-x}-1}+2x+\frac{1}{e^x-1}$$

$$=\frac{1\times e^x}{(e^{-x}-1)\times e^x}+\frac{1}{e^x-1}$$

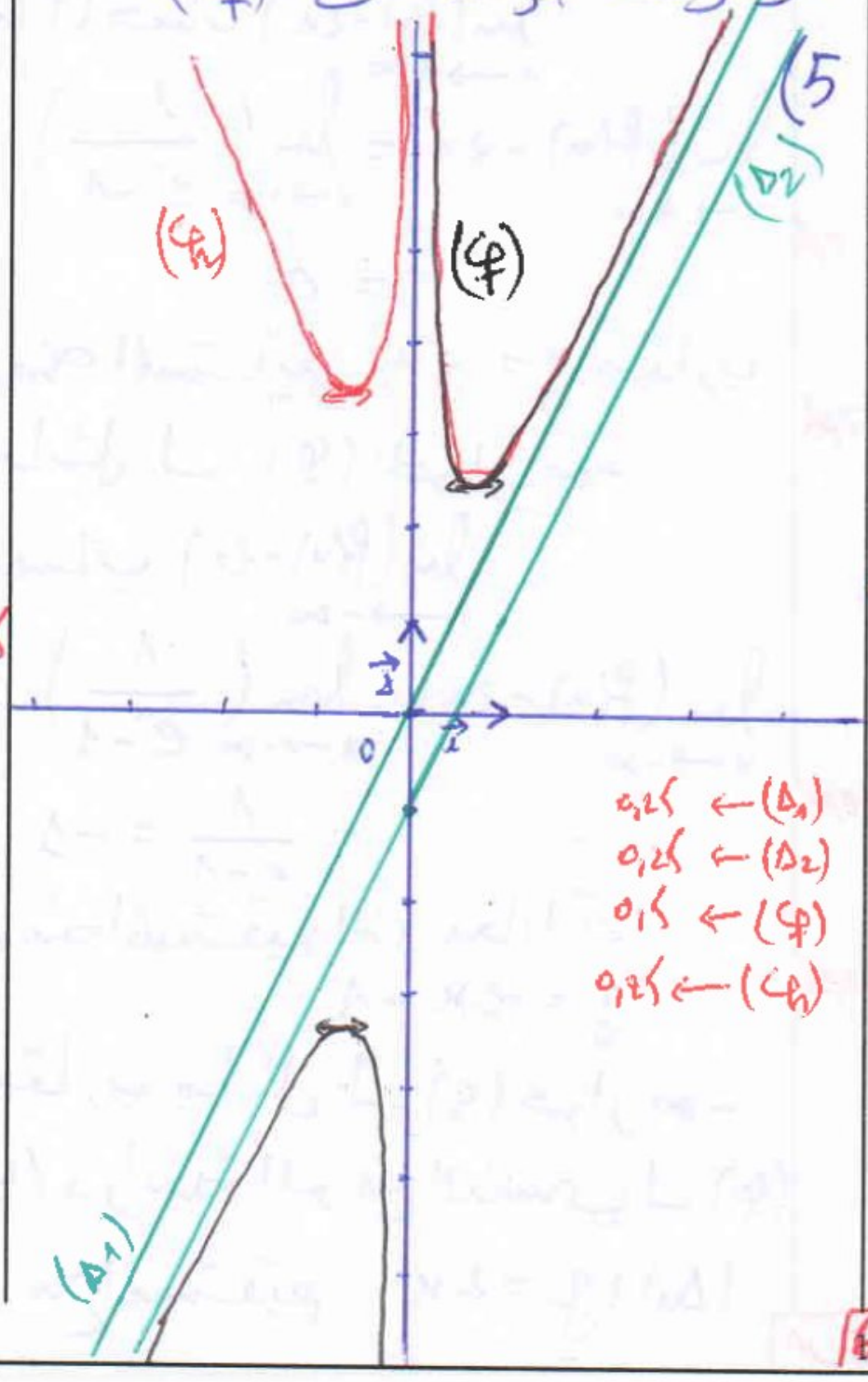
$$=\frac{e^x}{1-e^x}+\frac{1}{e^x-1}$$

$$=\frac{-e^x}{e^x-1}+\frac{1}{e^x-1}$$

$$=\frac{-e^x+1}{e^x-1}$$

$$=\frac{-(e^x-1)}{e^x-1}=\boxed{-1}$$

التفسير البياني: النقطة $\left(0;-\frac{1}{2}\right)$ مركز تناظر للمنحنى (φ).



1,25

0,25

0,25

0,75

6) المناقشة:

حلول المعادلة $(*)\dots f(x) = 2x + m$

هي فواصل نقط تقاطع (φ) مع المستقيم $y = 2x + m$ وسط

- إذا كان $m \in]-\infty; -1[$ المعادلة $(*)$ تقبل حلاً وحيداً سالباً

- إذا كان $m \in [-1; 1]$ المعادلة $(*)$ لا تقبل حلولاً

- إذا كان $m \in]1; +\infty[$ المعادلة $(*)$ تقبل حلاً وحيداً موجباً.

7) إثبات أن الدالة $x \longmapsto -x + \ln(e^x - 1)$ هي دالة أصلية للدالة $x \longmapsto \frac{1}{e^x - 1}$ على المجال $]0; +\infty[$

من أجل كل x من المجال $]0; +\infty[$:

$$\left(-x + \ln(e^x - 1)\right)' = -1 + \frac{e^x}{e^x - 1}$$

$$= \frac{-e^x + 1 + e^x}{e^x - 1}$$

$$= \frac{1}{e^x - 1}$$

إذن $x \longmapsto -x + \ln(e^x - 1)$ هي دالة أصلية للدالة $x \longmapsto \frac{1}{e^x - 1}$ على المجال $]0; +\infty[$

ب) حساب $\int_{\ln 2}^{1} \frac{dx}{e^x - 1}$

$$\int_{\ln 2}^{1} \frac{dx}{e^x - 1} = \left[-x + \ln(e^x - 1)\right]_{\ln 2}^{1}$$

$$= \left(-1 + \ln(e - 1)\right) - \left(-\ln 2 + \ln(e^{\ln 2} - 1)\right)$$

$$= -1 + \ln(e-1) - \left(-\ln 2 + \ln(2-1)\right)$$

$$= -1 + \ln(e-1) + \ln 2$$

$$= \boxed{-1 + \ln(2e - 2)}$$

التفسير البياني

$\int_{\ln 2}^{1} \frac{dx}{e^x - 1} = [-1 + \ln(2e-2)]$ cm² تمثل مساحة الحيز المحدد بـ (φ) وحامل محور الفواصل والمستقيمين $x = \ln 2$ و $x = 1$

8) $h(x) = |f(x)|$; $D_h = \mathbb{R}^*$

$$h(x) = |f(x)| = \begin{cases} f(x) ; & f(x) > 0 \\ -f(x) ; & f(x) < 0 \end{cases}$$

- لما $f(x) > 0$ (أي (φ) فوق حامل محور الفواصل) فإن $h(x) = f(x)$ أي (φ_h) ينطبق على (φ)

- لما $f(x) < 0$ (أي (φ) تحت حامل محور الفواصل) فإن: $h(x) = -f(x)$ أي (φ_h) هو نظير (φ) بالنسبة لحامل محور الفواصل.

(φ_h) هو التمثيل البياني للدالة h.