



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التربية الوطنية

دورة: 2025

ثانوية عراب عبد القادر



الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات
امتحان بكالوريا تجريبي التعليم الثانوي
الشعبة: علوم تجريبية

المدة: 03 سا و 30 د

اختبار في مادة: الرياضيات

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

يحتوي كيس على 9 كريات منها : ثلاثة حمراء تحمل الأرقام 1 , 0 , -1 وأربعة بيضاء تحمل الأرقام 1 , 1 , 0 , -1 وكريتين خضراء تحمل الأرقام 0 , -1 نسحب عشوائيا وفي آن واحد ثلاث كرات من الكيس .

1) أحسب إحتمال الحوادث التالية :

A : " سحب ثلاث كرات من نفس اللون " .

B : " سحب ثلاث كرات مجموعهم منعدم " .

C : " سحب ثلاث كرات جدائهم عدد سالب " .

2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب العدد الأصغر من بين الأعداد المسحوبة .

أ) أعط قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X .

ب) أحسب الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X .

ج) أحسب $P(e^X - 1 \leq 0)$.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

1) نعتبر العددين المركبين $z_1 = 3 + 2i$ و $z_2 = 1 - 2i$.

أ) تحقق أن : $z_1 + \bar{z}_2 = 4(1 + i)$.

ب) أكتب العدد المركب $z_1 + \bar{z}_2$ على الشكل المثلثي ثم على الشكل الأسّي .

ج) عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون $(z_1 + \bar{z}_2)^n$ حقيقيا .

2) في المستوي المنسوب لمعلم متعامد و متجانس $(O, \vec{u}, \vec{v})$ نعتبر النقط A, B, C, D التي لواحقها على الترتيب

$$z_D = -1 - 6i \text{ و } z_C = 1 - 2i, z_B = -3, z_A = 3 + 2i$$

أ) عين طوليلة و عمدة العدد المركب $\frac{z_A - z_C}{z_B - z_C}$ ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .

ب) G مرجح الجملة $\{(A; 1), (B; -1), (D; 1)\}$.

عين z_G لاحقة النقطة G ثم بين أن $ABDG$ مربع .

3) (Γ) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق : $\|\vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MD}\| = 4\sqrt{5}$



التمرين الثالث: (05 نقاط)

- المتتالية العددية (u_n) معرفة بحددها الأول $u_0 = \frac{3}{2}$ و من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $u_{n+1} = 1 + \sqrt{u_n - 1}$.
- (1) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $1 < u_n < 2$.
 - (2) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $u_{n+1} - u_n = \frac{-u_n^2 + 3u_n - 2}{\sqrt{u_n - 1} + u_n - 1}$.
 - (3) استنتج إتجاه تغير المتتالية (u_n) .
 - (4) لتكن المتتالية (v_n) المعرفة بـ $v_n = \ln(u_n - 1)$.
- أ- بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ ، يطلب تعيين حدها الأول.
- ب- اكتب عبارة (v_n) بدلالة n ثم استنتج عبارة (u_n) بدلالة n .
- ج- احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.
- (5) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $P_n = (u_0 - 1) \times (u_1 - 1) \times (u_2 - 1) \times \dots \times (u_n - 1)$.
- احسب بدلالة n الجداء P_n .

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I الدالة العددية g معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = 1 + (x^2 + x)e^{-2x}$

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$

(2) ادرس تغيرات الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

(3) استنتج أنه اجل كل عدد حقيقي x فإن $g(x) > 0$

II الدالة العددية f على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = x - \frac{1}{2} \left(\frac{x+1}{e^x} \right)^2$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

(2) بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x$ مقارب مائل لـ (C_f) عند $+\infty$ ، محددا وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ) .

(3) أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = g(x)$

ب- استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

(4) بين أن (C_f) يقبل مماسين معامل توجيه كل منهما هو 1، ثم عين معادلة لكل منهما.

(5) بين أن (C_f) يقبل نقطتي انعطاف يطلب تعيين إحداثياتهما.

(6) بين أن (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث $0.43 < \alpha < 0.44$

(7) أنشئ كلا من (Δ) و (C_f) .

III ليكن λ عدد حقيقي موجب تماما.

(1) عين الأعداد الحقيقية a, b, c حتى تكون الدالة $x \mapsto (ax^2 + bx + c)e^{-2x}$

دالة أصلية للدالة $x \mapsto (x+1)^2 e^{-2x}$ على $\mathbb{R}$

(2) أ- احسب بدلالة λ المساحة $A(\lambda)$ للحيز المستوي المحدد بـ (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها:

$y=x$ و $x=\lambda$ ، $x=0$

ب- احسب $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A(\lambda)$

انتهى الموضوع الأول



الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

نعلم أن فصائل الدم للإنسان أربعة هي : O , A , B , AB تتوزع مجموعة من عشرة أشخاص حسب فصيلتهم الدموية كمايلي:

أربعة أشخاص من فصيلة O وثلاثة من فصيلة A وشخصان من فصيلة B و شخص واحد من فصيلة AB نختار عشوائيا شخصين من هذه المجموعة :

(1) أحسب إحتمال كل من الأحداث :

C : "الشخصان المختاران لهما نفس الفصيلة الدموية " .

D : "الشخصان المختاران من فصيلتين دمويتين مختلفتين " .

E : "فصيلة أحد الشخصين المختارين هي A فقط " .

(2) نرفق الفصيلة O بالعدد 4 الذي يمثل عدد الفصائل التي يمكن أن تتلقى من الفصيلة O وهكذا نرفق الفصيلة A بالعدد 2 والفصيلة B بالعدد 2 والفصيلة AB بالعدد 1 .

ليكن X المتغير العشوائي الذي يربط كل اختيار لشخصين بمجموع الرقمين المرفقين بفصيلتهما .

(أ) حدد قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X .

(ب) أحسب الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X .

التمرين الثاني: (04 نقاط)

لكل سؤال جواب واحد صحيح عينه مع التبرير:

(1) مساحة الحيز المحصور بين منحنى الدالة الأسية والمستقيمت $y = -1$, $x = 1$ و $x = 0$ تساوي :

(أ) $S = e$ u.a (ب) $S = \ln 2$ u.a (ج) $S = \frac{e}{2}$ u.a

(2) كيس غير شفاف يحتوي على 3 كريات سوداء وكريتين لونهما أبيض وكرة واحدة لونها أخضر نسحب عشوائيا مع الإرجاع 3 كريات من هذا الكيس ، احتمال سحب 3 كرات من نفس اللون هو :

(أ) $\frac{1}{9}$ (ب) $\frac{1}{8}$ (ج) $\frac{1}{6}$

(3) المتتالية العددية U_n المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n ب $U_n = \int_{e^n}^{e^{n+1}} \frac{2}{x} (1 + \ln x) dx$

نضع : $S = U_0 + U_1 + \dots + U_{36}$ قيمة S هي :

(أ) 2022 (ب) 1443 (ج) 1444

(4) المتتالية العددية (U_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول $U_0 = 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} = \frac{3}{4}U_n + 2$

ونعتبر المتتالية العددية V_n المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n ب $V_n = U_n - \alpha$.

قيمة α حتى تكون V_n هندسية هي :

(أ) $\frac{3}{4}$ (ب) -4 (ج) 8

التمرين الثالث: (05 نقاط)

$(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية هندسية حدودها موجبة تماما حيث : $\ln v_2 - \ln v_3 = \ln 2$ و $\ln \sqrt[3]{v_6} + \ln v_2 = 0$.

(1) عين أساس المتتالية (v_n) وحدها الأول v_0 ثم أكتب v_n بدلالة n و أدرس تقاربها .

(2) نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بحدها الأول $u_0 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \sqrt{6u_n + 16}$.

لتكن الدالة h المعرفة على المجال $\left[-\frac{8}{3}; +\infty\right]$ كما يلي:

$h(x) = \sqrt{6x + 16}$ و (C_h) تمثيلها البياني و (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y = x$ في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس (أنظر الشكل التالي) .

أعد رسم الشكل المقابل على ورقة الإجابة ثم مثل على محور الفواصل الحدود u_0, u_1, u_2, u_3 . ثم ضع x تخمينا حول اتجاه تغير (u_n) وتقاربها .

(3) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq u_n < 8$ ثم أستنتج اتجاه تغير (u_n) وتقاربها .

(4) (أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < 8 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(8 - u_n)$.

(ب) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < 8 - u_n \leq v_n$. ثم إستنتج نهاية المتتالية (u_n) .

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I الدالة العددية g معرفة على $]0; +\infty[$ بـ : $g(x) = -x^3 + 1 - 2\ln x$

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

(2) ادرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها .

(3) أحسب $g(1)$ ثم استنتج إشارة $g(x)$

II الدالة العددية f معرفة على $]0; +\infty[$ بـ : $f(x) = -x + 2 + \frac{\ln x}{x^2}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ حيث $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2\text{cm}$.

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

(2) أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]0; +\infty[$ فإن : $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$

ب- استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

(3) بين أن المستقيم (Δ) ذو معادلته $y = -x + 2$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) ، ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ) .

(4) بين أن المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي المستقيم (Δ) ، يطلب تعيين معادلة له .

(5) ارسم كلا من المستقيمين (Δ) ، (T) ثم ارسم المنحنى (C_f) . (نأخذ $f(0.6) \approx 0$ و $f(2.2) \approx 0$)

(6) ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة : $f(x) = m$.

(7) ليكن α عدد حقيقي حيث : $\alpha > 1$

أ- باستعمال التكامل بالتجزئة احسب مايلي : $\int_1^\alpha \frac{\ln x}{x^2} dx$

ب- استنتج $A(\alpha)$ مساحة الحيز المحصور بالمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) والمستقيمين اللذين معادلتهما:

$x = \alpha$ و $x = 1$

ج- احسب $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} A(\alpha)$

الموضوع الأول :

التمرين الأول: (04 نقاط)

التمرين الثاني: (04 نقاط)

1. التحقق: $Z_1 + \bar{Z}_2 = 4 + 4i = 4(1 + i)$ 0,25

2. لدينا: $\theta = \frac{\pi}{4} + 2K\pi$ و $r = 4\sqrt{2}$ ومنه

الشكل المثلثي:

$Z_1 + \bar{Z}_2 = 4\sqrt{2}(\cos(\frac{\pi}{4}) + i \sin(\frac{\pi}{4}))$ 0,5

الشكل الأسّي:

$Z_1 + \bar{Z}_2 = 4\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ 0,25

3. لدينا $(Z_1 + \bar{Z}_2)^n = (4\sqrt{2})^n e^{in\frac{\pi}{4}}$

ومنه حتى يكون هذا العدد حقيقيا يجب أن يكون

$n\frac{\pi}{4} = K\pi \quad / K \in \mathbb{Z}$ أي $n = 4K$ 0,5

4. لدينا $\frac{Z_A - Z_C}{Z_B - Z_C} = \frac{2+4i}{-4+2i} = -i$ ومنه $\arg\left(\frac{Z_A - Z_C}{Z_B - Z_C}\right) = -\frac{\pi}{2} + 2K\pi$ 0,5

نستنتج أن المثلث ABC قائم. 01

5. لاحقة G: $Z_G = 5 - 4i$ 0,25

التبيين:

• لدينا $\frac{Z_B - Z_A}{Z_B - Z_G} = \frac{-6-2i}{-8+4i} = \frac{1}{2}(1+i)$ ومنه $\arg\left(\frac{Z_B - Z_A}{Z_B - Z_G}\right) = \frac{\pi}{2} + 2K\pi$

اذن المستقيمان (AB) و (BG) متعامدان.

• ولدينا $\frac{Z_B - Z_A}{Z_D - Z_G} = \frac{-6-2i}{-6-2i} = 1$ ومنه $\arg\left(\frac{Z_B - Z_A}{Z_D - Z_G}\right) = 2K\pi$

اذن المستقيمان (AB) و (DG) متوازيان و $AB = DG$

• مما سبق نجد أن الرباعي ABDG هو متوازي أضلاع به زاوية قائمة و ضلعان

متتاليان متقايسان فهو مربع. 0,75

(3) (Γ) مجموعة النقط M من المستو

0,5 دائرة مركزها G و نصف قطرها $r = 4\sqrt{5}$

1- حساب احتمال الحوادث

0,5 $P(A) = \frac{C_3^3 + C_4^3}{C_9^3}$

0,75 $P(B) = 1 - \frac{C_6^3}{C_9^3}$

0,75 $P(C) = \frac{C_3^3 + C_2^2 C_3^1}{C_9^3}$

2- تعيين قانون الاحتمال

$X = x_i$	-1	0	1
$P(X = x_i)$	$\frac{64}{84}$	$\frac{19}{84}$	$\frac{1}{84}$

0,5

0,5

0,5

3- الأمل الرياضي

0,5 $E(x) = -1 \times \frac{64}{84} + 0 \times \frac{19}{84} + 1 \times \frac{1}{84} = -0.75$

ملاحظة تقبل أي اجابة صحيحة في أي تمرين

التمرين الثالث: (05 نقاط)

المتتالية العددية (u_n) معرفة بحددها الأول $u_0 = \frac{3}{2}$

و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 1 + \sqrt{u_n - 1}$

(1) نثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $1 < u_n < 2$:

من أجل $n = 0$ لدينا $1 < u_0 = \frac{3}{2} < 2$ إذن الخاصية محققة

من فرضية التراجع لدينا $1 < u_n < 2$

$$1 - 1 < u_n - 1 < 2 - 1$$

$$0 < \sqrt{u_n - 1} < 1$$

$$1 < u_{n+1} < 2$$

و عليه ينتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1 < u_n < 2$

(2) إثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن

$$u_{n+1} - u_n = \frac{-u_n^2 + 3u_n - 2}{\sqrt{u_n - 1} + u_n - 1}$$

لدينا

$$u_{n+1} - u_n = 1 + \sqrt{u_n - 1} - u_n =$$

$$\frac{(\sqrt{u_n - 1} - (u_n - 1)) \times (\sqrt{u_n - 1} + (u_n - 1))}{\sqrt{u_n - 1} + u_n - 1}$$

$$= \frac{(\sqrt{u_n - 1})^2 - (u_n - 1)^2}{\sqrt{u_n - 1} + u_n - 1} = \frac{u_n - 1 - (u_n^2 - 2u_n + 1)}{\sqrt{u_n - 1} + u_n - 1}$$

$$(0.75) \quad = \frac{-u_n^2 + 3u_n - 2}{\sqrt{u_n - 1} + u_n - 1}$$

(3) استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) :

لدينا $\sqrt{u_n - 1} > 0$ و $1 < u_n$ ومنه

$$(0.25)$$

$$0 < u_n - 1$$

$$\sqrt{u_n - 1} + u_n - 1 > 0$$

ومنه إشارة الفرق من إشارة البسط ولدينا

$$(0.75)$$

u_n	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$u_{n+1} - u_n$	-	0	+	-

ومنه المتتالية (u_n) متزايدة تماما .

(4) لتكن المتتالية (v_n) المعرفة بـ $v_n = \ln(u_n - 1)$

أ- نبين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$

$$v_{n+1} = \ln(u_{n+1} - 1) = \ln(1 + \sqrt{u_n - 1} - 1)$$

$$(0.5) \quad = \ln(\sqrt{u_n - 1}) = \ln(u_n - 1)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2} \ln(u_n - 1) = \frac{1}{2} v_n$$

نحسب حددها الأول :

$$(0.25)$$

$$v_0 = \ln(u_0 - 1) = \ln\left(\frac{3}{2} - 1\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln 2$$

أ- كتابة عبارة (v_n) بدلالة n : عبارة الحد العام لـ (v_n) تعطى كمايلي

$$v_n = v_0 \times q^n = -\ln 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

و عليه لدينا حسب ما سبق $v_n = \ln(u_n - 1)$

ب- إستنتاج عبارة (u_n) بدلالة n :

$$e^{v_n} = u_n - 1 \text{ إذن } u_n = e^{v_n} + 1 \text{ وبالتالي}$$

$$(0.5)$$

$$u_n = e^{-\ln 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n} + 1$$

ج- حساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

$$\text{لدينا } -1 < \frac{1}{2} < 1$$

$$\text{و بالتالي } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$$

$$(0.5)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-\ln 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n} + 1$$

$$= 1 + 1 = 2 \quad \text{ومنه}$$

(5) حساب الجداء P_n :

$$P_n = (u_0 - 1) \times (u_1 - 1) \times (u_2 - 1) \times \dots \times (u_n - 1)$$

$$= e^{v_0} \times e^{v_1} \times e^{v_2} \times \dots \times e^{v_n}$$

$$(0.75) \quad = e^{v_0 \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} \right)}$$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I /1 حساب النهايات

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty \quad (0.25)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1 \quad (0.25)$$

2/ دراسة تغيرات دالة g

g تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا

$$g'(x) = (2x + 1)e^{-2x} - 2e^{-2x}(x^2 + x)$$

$$g'(x) = e^{-2x}(2x + 1 - 2x^2 - 2x) = e^{-2x}(-2x^2 + 1) \quad (0.25)$$

إشارة المشتقة
لدينا $e^{-2x} > 0$ ومنه إشارة

$$g'(x) \text{ من إشارة } (-2x^2 + 1) \quad (0.25)$$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$+\infty$	
$-2x^2 + 1$	$-$	0	$+$	0	$-$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

g متناقصة على المجال $]-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}[$ و على المجال $[\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty[$

g متزايدة على المجال $[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}]$

جدول تغيرات الدالة g

x	$-\infty$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$+\infty$		
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$	$+\infty$	$g(-\frac{1}{\sqrt{2}})$	$g(\frac{1}{\sqrt{2}})$	1		

3/ استنتاج أن $g(x) > 0$

من جدول التغيرات $g(x) \geq g(-\frac{1}{\sqrt{2}}) > 0$ إذن $g(x) > 0$

$$f(x) = x - \frac{1}{2}\left(\frac{x+1}{e^x}\right)^2 \quad \text{II}$$

1/ النهايات $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad (0.25)$$

2/ نبين أن المستقيم $y = x$: (Δ)

مستقيم مقارب مائل ل (c_f) بجوار $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x+1}{e^x}\right)^2 \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{e^x} + \frac{1}{e^x}\right)^2 \right] = 0 \quad (0.5)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{e^x}\right) = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{e^x}\right) = 0$$

الوضع النسبي ل (c_f) و (Δ)

$$f(x) - x = -\frac{1}{2}\left(\frac{x+1}{e^x}\right)^2 = -\frac{1}{2}\left(\frac{x+1}{e^x}\right)^2$$

$$0.5 \quad x = -1 \text{ و } e^x \neq 0 \quad \frac{x+1}{e^x} = 0 \quad \text{لدينا}$$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x) - x$	-	0	-
الوضع النسبي ل (Δ) و (c_f)	(c_f) تحت (Δ)	(c_f) يقطع (Δ) (-1, 1)	(c_f) تحت (Δ)

2/ نبين أن $f'(x) = g(x)$

f قابلة للاشتقاق ولدينا

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{2} \left[\frac{e^x - e^x(x+1)}{(e^x)^2} \times 2 \left(\frac{x+1}{e^x} \right) \right]$$

$$0.5 \quad f'(x) = 1 - \frac{-xe^x(x+1)}{(e^x)^3} = 1 + (x^2 + x)e^{-2x} = g(x)$$

/ استنتاج تغيرات دالة f

إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$

(0.25)

f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

(0.25)

4/ نبين أن (c_f) يقبل مماسين معامل توجيه كل منهما 1

$$f'(x_0) = 1$$

$$1 + (x_0^2 + x_0)e^{-2x_0} = 1$$

$$(x_0^2 + x_0)e^{-2x_0} = 0$$

$$(x_0^2 + x_0) = x_0(x_0 + 1) = 0 \text{ و } e^{-2x_0} \neq 0$$

$$0.5 \quad x_0 = -1 \text{ او } x_0 = 0 \quad \text{إذن}$$

معادلة المماسين :

$$(T_1) : y = f'(-1)(x - (-1)) + f(-1)$$

$$(T_1) : y = x \quad (0.25)$$

$$(T_2) : y = f'(0)(x - (0)) + f(0)$$

$$(T_2) : y = x - \frac{1}{2} \quad (0.25)$$

III

1/ تعيين الاعداد الحقيقية a و b و c حتى تكون الدالة

$$x \rightarrow (ax^2 + bx + c) e^{-2x}$$

$$x \rightarrow (x+1)^2 e^{-2x} \text{ دالة اصلية للدالة}$$

$$((ax^2 + bx + c) e^{-2x})'$$

$$= (2ax + b) e^{-2x} - 2e^{-2x} (ax^2 + bx + c)$$

$$= e^{-2x} (-2ax^2 + (2a - 2b)x - 2c + b)$$

$$(x+1)^2 e^{-2x} = (x^2 + 2x + 1) e^{-2x} \text{ ولدينا}$$

بالمطابقة نجد

$$(0.25) \begin{cases} a = \frac{-1}{2} \\ b = \frac{-3}{2} \\ c = \frac{-5}{4} \end{cases} \iff \begin{cases} -2a = 1 \\ 2a - 2b = 2 \\ -2c + b = 1 \end{cases}$$

2 / حساب المساحة $A(\lambda)$ بدلالة λ

$$A(\lambda) = \int_0^\lambda x - f(x) dx = \int_0^\lambda \frac{1}{2} \left(\frac{x+1}{e^x} \right)^2 dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^\lambda (x+1)^2 e^{-2x} dx$$

$$A(\lambda) = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{-1}{2} x^2 - \frac{3}{2} x - \frac{5}{4} \right) e^{-2x} \right]_0^\lambda$$

$$(0.25) = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{-1}{2} \lambda^2 - \frac{3}{2} \lambda - \frac{5}{4} \right) e^{-2\lambda} + \frac{5}{4} \right]$$

/ حساب $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A(\lambda)$

$$(0.25) \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A(\lambda) = \frac{5}{8}$$

انتهى الموضوع الأول

5/ نبين أن (c_f) يقبل نقطتي إنعطاف

(0.5)

$$f''(x) = g'(x)$$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	0	-

نقطتي الإنعطاف هما $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right)$ و $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right)$

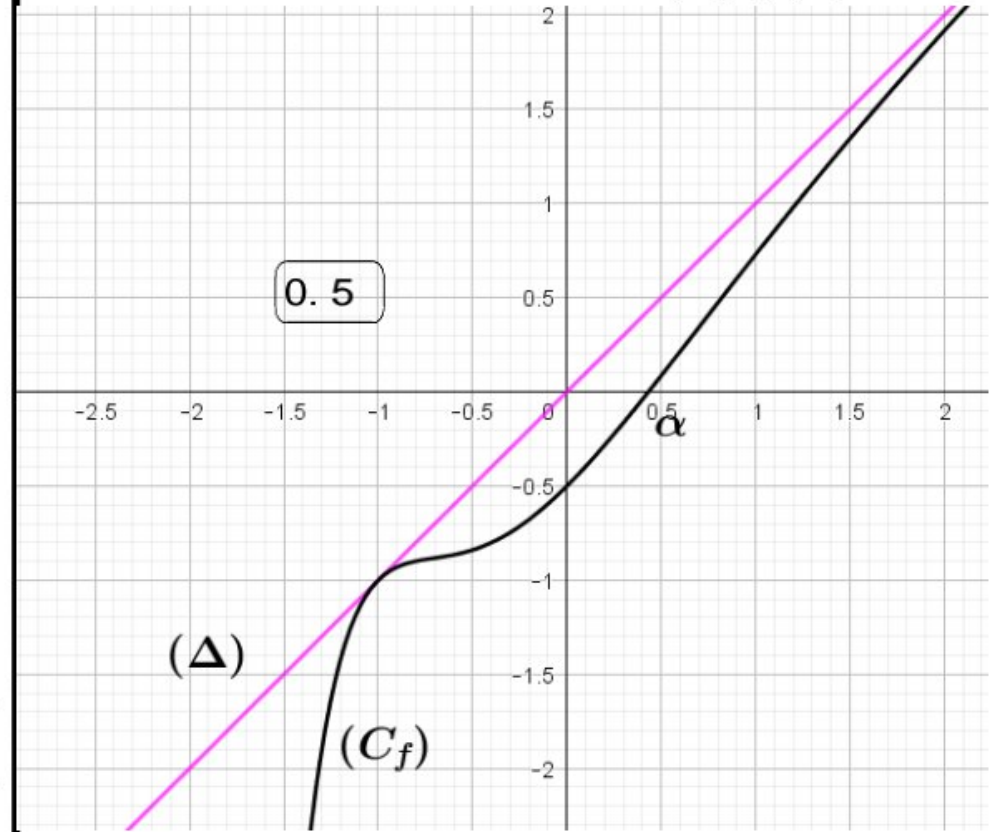
6/ نبين أن (c_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة α

يكفي أن نبين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α

(0.25)

باستعمال مبرهنة القيم المتوسطة

7/ انشاء (Δ) و (c_f)



(0.5)

الموضوع الثاني :

التمرين الأول: (04 نقاط)

التبرير : بما أن منحني الدالة الأسية فوق المستقيم ذو المعادلة $y = -1$ فإن

$$\begin{aligned} 0.5 \quad S &= \int_0^1 e^x - (-1) \, dx = [e^x + x]_0^1 \\ &= e + 1 - e^0 + 0 = e \text{ u.a} \end{aligned}$$

(2) كيس غير شفاف يحتوي على 3

كريات سوداء وكريتين لونهما أبيض و
كرة واحدة لونها أخضر نسحب

عشوائيا مع الإرجاع 3 كريات من هذا الكيس 0.5
احتمال سحب 3 كرات من نفس اللون هو: (ج) $\frac{1}{6}$

$$0.5 \quad p(A) = \frac{3^3 + 2^3 + 1^3}{6^3} = \frac{36}{216} = \frac{1}{6} \text{ :التبرير}$$

(3) المتتالية العددية U_n المعرفة من أجل كل عدد طبيعي

$$0.5 \quad : U_n = \int_{e^n}^{e^{n+1}} \frac{2}{x} (1 + \ln x) \, dx \text{ ب } n$$

نضع $S = U_0 + U_1 + \dots + U_{36}$ قيمة S هي : ب) 1443
التبرير :

$$S = U_0 + U_1 + \dots + U_{36} = 0.5$$

$$\int_{e^0}^{e^1} \frac{2}{x} (1 + \ln x) \, dx + \int_{e^1}^{e^2} \frac{2}{x} (1 + \ln x) \, dx + \dots + \int_{e^{36}}^{e^{37}} \frac{2}{x} (1 + \ln x) \, dx$$

ومنه حسب علاقة شال :

$$\begin{aligned} S &= \int_{e^0}^{e^{37}} \frac{2}{x} (1 + \ln x) \, dx = \left[2 \ln(x) + 2 \frac{(\ln x)^2}{2} \right]_{e^0}^{e^{37}} = \\ &= 2 \ln(e^{37}) + (\ln e^{37})^2 - (2 \ln(e^0) + (\ln e^0)^2) = \end{aligned}$$

$$2(37) + (37)^2 - 0 = 1443$$

(4) المتتالية العددية (U_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول $U_0 = 2$

$$U_{n+1} = \frac{3}{4} U_n + 2 : n \text{ عدد طبيعي}$$

ونعتبر المتتالية العددية V_n

المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n ب $V_n = U_n - \alpha$.

قيمة α حتى تكون V_n هندسية هي: (ج) 8 0.5
التبرير : لدينا

$$V_{n+1} = U_{n+1} - \alpha = \frac{3}{4} U_n + 2 - \alpha$$

ولدينا من جهة أخرى $U_n = V_n + \alpha$

بتعويضها في العبارة السابقة نجد :

$$V_{n+1} = \frac{3}{4} (V_n + \alpha) + 2 - \alpha = \frac{3}{4} V_n + \frac{3}{4} \alpha + 2 - \alpha =$$

$$\frac{3}{4} V_n - \frac{1}{4} \alpha + 2$$

حتى تكون V_n هندسية معناه :

$$\alpha = (-2)(-4) = 8 \text{ : ومنه } -\frac{1}{4} \alpha + 2 = 0$$

1. حساب الاحتمالات:

$$P(C) = \frac{C_4^2 + C_3^2 + C_2^2}{C_{10}^2} = \frac{10}{45}$$

$$P(E) = \frac{C_3^1 C_7^1}{C_{10}^2} = \frac{21}{45}$$

$$P(D) = \frac{C_4^1 C_7^1 + C_3^1 C_3^1 + C_2^1 C_1^1}{C_{10}^2} = \frac{35}{45}$$

2. قيم المتغير العشوائي: $X = \{3, 4, 5, 6, 8\}$

x_i	3	4	5	6	8
$P(X = x_i)$	$\frac{5}{45}$	$\frac{10}{45}$	$\frac{4}{45}$	$\frac{20}{45}$	$\frac{6}{45}$

3. قانون الاحتمال:

$$P(X = 3) = \frac{C_1^1 C_5^1}{C_{10}^2} = \frac{5}{45}$$

$$P(X = 4) = \frac{C_5^2}{C_{10}^2} = \frac{10}{45}$$

$$P(X = 5) = \frac{C_4^1 C_1^1}{C_{10}^2} = \frac{4}{45}$$

$$P(X = 6) = \frac{C_4^1 C_3^1 + C_4^1 C_2^1}{C_{10}^2} = \frac{20}{45}$$

$$P(X = 8) = \frac{C_4^2}{C_{10}^2} = \frac{6}{45}$$

$$4. \text{ حساب الأمل الرياضي : } E(X) = \frac{243}{45}$$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

لكل سؤال جواب واحد صحيح عينه مع التبرير:

(1) مساحة الحيز المحصور

بين منحني الدالة الأسية والمستقيمات

$y = -1$ ، $x = 1$ و $x = 0$ تساوي :

$$0.5 \quad S = e \text{ u.a (أ)}$$

التمرين الثالث: (05 نقاط)

1. ايجاد الاساس والحد الأول:

$$\ln(v^2) - \ln(v^3) = \ln(2) \quad \text{لدينا}$$

$$\ln\left(\frac{v^2}{v^3}\right) = \ln(2) \quad \text{أي}$$

$$\text{ومنه} \quad \frac{v^2}{v^3} = 2 \quad \text{اذن} \quad q = \frac{1}{2}$$

$$\ln(\sqrt[3]{v_6}) + \ln(v_2) = 0 \quad \text{ولدينا}$$

$$\sqrt[3]{v_6} \times v_2 = 1 \quad \text{أي} \quad \ln(\sqrt[3]{v_6} \times v_2) = 0$$

$$\text{ومنه} \quad \sqrt[3]{(v_0 q^6)} \times v_0 q^2 = 1$$

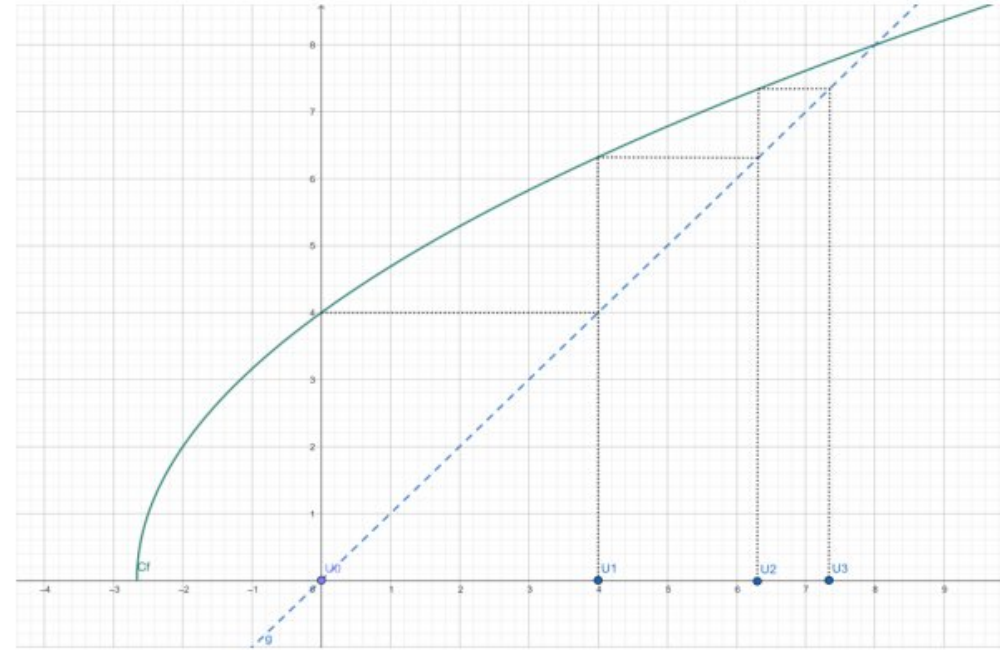
$$\text{أي} \quad (V_0)^{\frac{3}{4}} \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 1 \quad \text{ومنه} \quad (V_0)^{\frac{3}{4}} = 16$$

$$\text{اذن} \quad v_0 = 8$$

$$\text{عبارة الحد العام:} \quad V_n = 8 \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

التقارب: بما أن $-1 < q < 1$ فإن المتتالية (V_n) متقاربة و $\lim_{n \rightarrow \infty} V_n = 0$.

2. نخمن أن المتتالية (U_n) متزايدة ومتقاربة نحو 8.



3- البرهان بالتراجع أن $0 \leq U_n < 8$:

من أجل $n = 0$ نجد $0 \leq U_0 = 0 < 8$ ومنه الخاصية محققة.

نفرض صحة الخاصية من أجل n ونبرهن صحتها من أجل $n+1$ أي نبرهن صحة $0 \leq U_{n+1} < 8$

$$\text{لدينا} \quad 0 \leq U_n < 8$$

$$\text{ومنه} \quad 0 \leq 6U_n < 48$$

$$\text{أي} \quad 0 \leq 16 \leq 6U_n + 16 < 64$$

$$\text{اذن} \quad 0 \leq U_{n+1} = \sqrt{6U_n + 16} < 8$$

ومنه الخاصية محققة من أجل $n+1$ ومنه حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فإن الخاصية $0 \leq U_n < 8$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n .

اتجاه التغير: لدينا

$$U_{n+1} - U_n = \frac{U_{n+1}^2 - U_n^2}{U_{n+1} + U_n} = \frac{6U_n + 16 - U_n^2}{U_{n+1} + U_n}$$

من أجل $0 \leq U_n < 8$ نجد $6U_n + 16 - U_n^2 > 0$ ومنه $U_{n+1} - U_n > 0$ (يمكن الاستعانة بالميز لتعيين الإشارة) اذن المتتالية (U_n) متزايدة تماما وهي محدودة فهي متقاربة.

3. التبيين:

الطرف الأيسر: لدينا مما سبق $0 \leq U_{n+1} < 8$ ومنه $0 < 8 - U_{n+1}$

$$\text{الطرف الأيمن:} \quad \text{نريد اثبات أن:} \quad 8 - \sqrt{6U_n + 16} \leq \frac{1}{2}(8 - U_n) \quad \text{أي:}$$

$$4 + \frac{1}{2}U_n \leq \sqrt{6U_n + 16} \quad \text{بما أن الطرفين موجبين}$$

يمكن مقارنة مربعيهما أي يكفي اثبات أن

$$16 + 4U_n + \frac{1}{4}U_n^2 \leq 6U_n + 16$$

$$\text{أي يكفي اثبات أن} \quad \frac{1}{4}U_n^2 - 2U_n \leq 0$$

$$\text{من أجل} \quad 0 \leq U_n < 8 \quad \text{نجد} \quad \frac{1}{4}U_n(U_n - 8) \leq 0 \quad \text{أي} \quad \frac{1}{4}U_n^2 - 2U_n \leq 0 \quad \text{وهو المطلوب.}$$

(ب) التبيين: لدينا مما سبق

$$n \text{ متراجحة} \quad \begin{cases} 8 - U_n \leq \frac{1}{2}(8 - U_{n-1}) \\ 8 - U_{n-1} \leq \frac{1}{2}(8 - U_{n-2}) \\ \vdots \\ 8 - U_2 \leq \frac{1}{2}(8 - U_{n-1}) \\ 8 - U_1 \leq \frac{1}{2}(8 - U_0) \end{cases}$$

بالضرب طرفا لطرف نجد $8 - U_n \leq$

$$V_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n (8) \quad \text{وهو المطلوب.}$$

$$\bullet \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (8 - U_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} V_n = 0 \quad \text{لدينا}$$

$$\text{ومنه} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} U_n = 8$$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I / حساب النهايات

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty \quad \text{ومنه} \quad \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} -x^3 = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} -2\ln x = -\infty \end{cases} \quad (0.25)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = +\infty \quad \text{ومنه} \quad \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} -x^3 + 1 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} -2\ln x = +\infty \end{cases} \quad (0.25)$$

المشتقة: الدالة g قابلة للاشتقاق على المجال $]0; +\infty[$

$$g'(x) = -3x^2 - \frac{2}{x} < 0 \quad (0.25)$$

ومنه g متناقصة تماما على $]0; +\infty[$

جدول التغيرات:

x	0	$+\infty$
$g'(x)$		-
$g(x)$		$+\infty$ $-\infty$

$$g(1) = -1^3 + 1 - 2\ln 1 = 0 \quad (0.25)$$

والدالة g متناقصة تماما ومنه إشارة $g(x)$

x	0	1	$+\infty$
$g(x)$		+	-

الجزء الثاني:

f الدالة العددية المعرفة على $]0; +\infty[$

$$f(x) = -x + 2 + \frac{\ln x}{x^2} \quad \text{ب:}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \quad \text{ومنه} \quad \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} -x + 2 = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0 \end{cases} \quad (1) \quad (0.25)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty \quad \text{ومنه} \quad \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} -x + 2 = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x^2} = -\infty \end{cases} ; \quad (0.25)$$

$x = 0$ معادلة مستقيم المقارب ل (C_f) عمودي.

(2) أ) من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$ لدينا:

$$f'(x) = -1 + \frac{\frac{1}{x^2} - 2x(\ln x)}{x^4} = -1 + \frac{x - 2x(\ln x)}{x^4}$$

$$= -1 + \frac{1 - 2(\ln x)}{x^3} = \frac{-x^3 + 1 - 2\ln x}{x^3} = \frac{g(x)}{x^3} \quad (0.5)$$

صفحة 3

ب) إشارة المشتقة من إشارة $g(x)$ لأن $x^3 > 0$ على المجال $]0; +\infty[$ ومنه:

الدالة f متزايدة تماما على المجال $]0; 1[$ (0.25)

الدالة f متناقصة تماما على المجال $]1; +\infty[$ (0.25)

جدول التغيرات. (0.25)

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
$f(x)$		1	$-\infty$

(3) أ) تبين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = -x + 2$

مقارب للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - y = \lim_{x \rightarrow +\infty} x + 2 + \frac{\ln x}{x^2} + (-x + 2)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0 \quad (0.25)$$

ومنه المستقيم ذو المعادلة $y = -x + 2$

مقارب للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$

ب) دراسة الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) .

$$f(x) - y = \frac{\ln x}{x^2} \quad \text{إشارة الفرق من إشارة } \ln x \text{ ومنه}$$

x	0	1	$+\infty$
$f(x) - y$		0	+
الوضع النسبي بين (C_f) و (Δ)		تحت (C_f) (Δ)	فوق (C_f) (Δ)

(4) تبين أن المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي (Δ)

أي لهما نفس معامل التوجيه: لتكن x_0 فاصلة نقطة

$$\frac{-x_0^3 + 1 - 2\ln x_0}{x_0^3} = -1 \quad \text{ومنه} \quad f'(x_0) = -1 \quad \text{التماس ومنه}$$

$$\text{ومنه} \quad -x_0^3 + 1 - 2\ln x_0 = -x_0^3 \quad \text{ومنه} \quad 2\ln x_0 = 1 \quad \text{ومنه} \quad x_0 = e^{\frac{1}{2}}$$

معادلة المماس عند $x_0 = e^{\frac{1}{2}}$ هي: (0.25)

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

$$y = -1(x - e^{\frac{1}{2}}) + f(e^{\frac{1}{2}})$$

$$y = -x + \frac{4e + 1}{2e} \quad (0.5)$$

(8 أ) مساحة الحيز المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات :

$$x = \alpha \text{ و } x = 1, y = -x + 2$$

لدينا من أجل x من المجال $[1; \alpha]$ (C_f) فوق Δ ومنه :

$$A(\alpha) = \int_1^\alpha f(x) + x - 2 dx \|\vec{i}\| \|\vec{j}\| \text{cm}^2$$

$$A(\alpha) = \int_1^\alpha \frac{\ln x}{x^2} dx \cdot 2 \times 2 \text{cm}^2 \quad (0.25)$$

$$A(\alpha) = 4 \left(\frac{-\ln \alpha}{\alpha} - \frac{1}{\alpha} + 1 \right) \text{cm}^2$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} A(\alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} 4 \left(\frac{-\ln \alpha}{\alpha} - \frac{1}{\alpha} + 1 \right) = 4 \text{ (ج)}$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \frac{1}{\alpha} = 0 \text{ و } \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \frac{-\ln \alpha}{\alpha} = 0 \text{ لأن } (0.25)$$

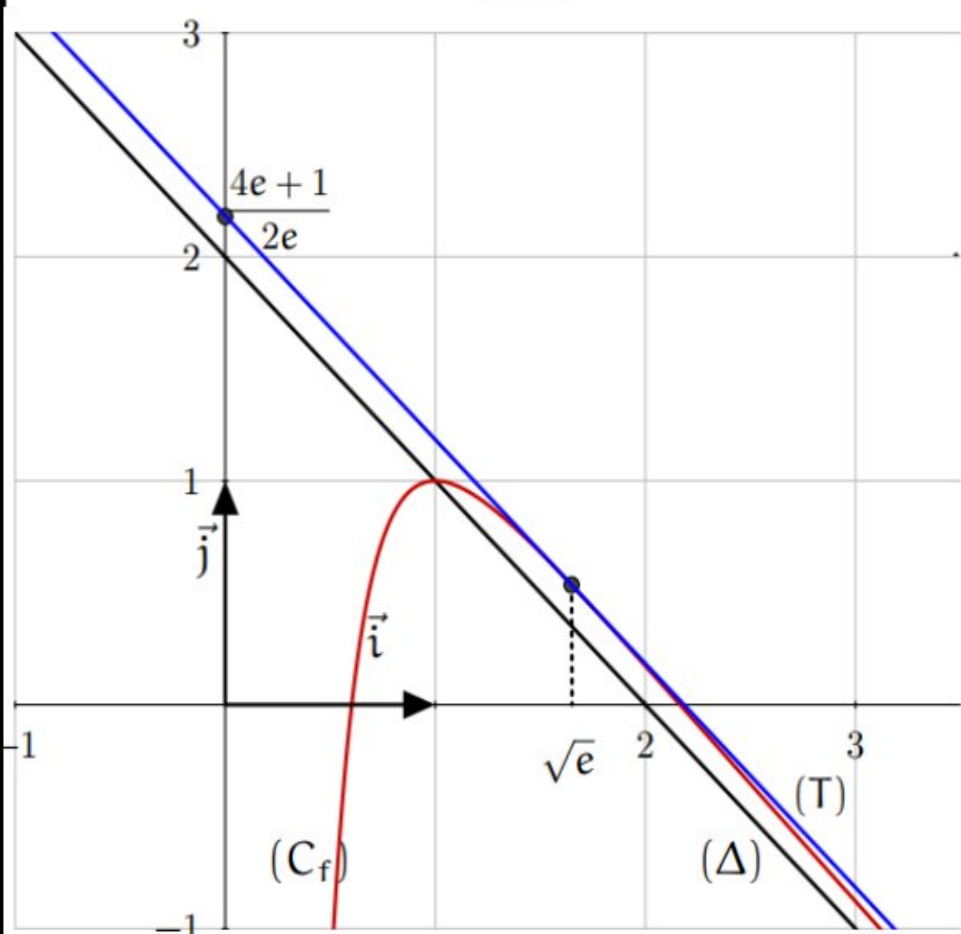
انتهى الموضوع الثاني

الموضوع والحل

نهاية المشوار

بالتوفيق في امتحان بكالوريا 2025

وفي الحياة بصفة عامة



(6) المناقشة البيانية : حلول المعادلة $f(x) = m$

بيانها هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم ذو المعادلة

$y = m$ (مناقشة أفقية)

من أجل $m < 1$ المعادلة تقبل حلين مختلفين

من أجل $m = 1$ المعادلة تقبل حل واحد

من أجل $m > 1$ المعادلة لا تقبل حلولاً

$$\int_1^\alpha \frac{\ln x}{x^2} dx \quad (7)$$

باستعمال التكامل بالتجزئة و بفرض

$$\begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x^2} & u(x) = \frac{-1}{x} \\ v(x) = \ln x & v'(x) = \frac{1}{x} \end{cases} \quad (0.25)$$

$$\int_1^\alpha \frac{\ln x}{x^2} dx = \left[(\ln x) \left(\frac{-1}{x} \right) \right]_1^\alpha - \int_1^\alpha \frac{-1}{x^2} dx$$

$$= \frac{-\ln \alpha}{\alpha} - \left[\frac{1}{x} \right]_1^\alpha = \frac{-\ln \alpha}{\alpha} - \frac{1}{\alpha} + 1 \quad (0.25)$$