Bac blanc 05 2025

وزارة التربية الوطنية
امتحان البكالوريا التجريبية
الشعبة : 3 رياضي

مديرية التربية لولاية المسيلة
ثانويات : عبدالمجيد مزيان
جابر بن حيان 02 - أحمد الغازي
دورة : ماي 2025

اختبار في مادة: الرياضيات — المدة: 04 سا

على المترشح اختيار موضوع واحد

الموضوع الأول:

التمرين الأول:

1) أ/ أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الاقليدية للعدد 3^n على 11.
ب/ استنتج باقي قسمة العدد $A = 2022^{2023} - 2023^{1443} + 1443^{2022}$ على 11.
جـ/ عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون العدد: $B_n = 2022^{5n+3} + 1443^{10n+1} + 3n + 9$ مضاعفا لـ 11.

2) لتكن (v_n) متتالية هندسية متزايدة تماما وحدودها أعداد طبيعية , معرفة على IN بـ: $\begin{cases} v_3 \times v_5 = 26244 \\ PGCD(v_3; v_5) = 54 \end{cases}$.
أ/ عين الثنائية (v_3 , v_5), ثم أحسب أساس المتتالية (v_n) وحدها الأول.
ب/ أكتب v_n بدلالة n , ثم عين قيم n حتى يكون المجموع: $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$ مضاعفا لـ 11.

3) لتكن (u_n) متتالية حسابية متزايدة تماما و حدودها أعداد طبيعية,معرفة على IN بـ: $\begin{cases} u_6 = 21 \\ PGCD(u_4; u_8) = 3 \end{cases}$.
أ/ عين الثنائية $(u_4; u_8)$, ثم أحسب أساس المتتالية (u_n) وحدها الأول.
ب/ أكتب u_n بدلالة n , ثم تحقق أن 1443 حد من حدود المتتالية (u_n) معينا رتبته.
جـ/ أحسب بدلالة n المجموع: $S'(n) = u_0 + u_1 + ... + u_n$ ثم عين قيم n حتى يكون: $S'(n) + 25 = 2023$.

4) لتكن (α_n) و (β_n) متتاليتان معرفتان على IN كما يلي: $\alpha_n = 3n^2 + 9n + 78$ و $\beta_n = 3n + 9$.
أ/ برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $PGCD(\alpha_n; \beta_n) = PGCD(\beta_n; 78)$.
ب/ عين القيم المكنة لـ: $PGCD(\alpha_n; \beta_n)$.
جـ/ عين قيم n حتى يكون: $PGCD(\alpha_n; \beta_n) = 78$.

التمرين الثاني: تأهل إلى أولمبياد الرياضيات من دول المغرب العربي 25 تلميذا, موزعين كالتالي: 4 ذكور و أنثيين من الجزائر.ذكرين و 4 إناث من تونس, ذكرين و 3 إناث من ليبيا, 3 ذكور و 5 إناث من المغرب.

نريد تشكيل فريق بطريقة عشوائية يضم 4 تلاميذ من هذه المجموعة.

1) أحسب احتمال الحدثين: A : (تلاميذ الفريق من نفس الدولة) B : (تلاميذ الفريق من نفس الجنس)
2) أثبت أن: $P(A \cap B) = \frac{7}{12650}$ ثم استنتج احتمال أن يضم الفريق أربع تلاميذ من نفس الدولة أو من نفس الجنس.
3) أحسب احتمال أن يضم الفريق أربع تلاميذ من نفس الجنس علما أنهم من نفس الدولة.
4) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل فريق يمكن تشكيله, عدد الإناث من الجزائر المتواجدات في هذا الفريق.
عين مجموعة قيم المتغير العشوائي X, ثم عرف قانون احتماله و أمله الرياضياتي $E(X)$.

التمرين الثالث:

1. أ/ حل في مجموعة الأعداد المركبة C المعادلة ذات المجهول المركب z التالية: $z^2 - 2z + 4 = 0$.
ب/ أكتب حلي المعادلة على الشكل الأسي.

2. في المستوي المركب المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس المباشر $(O;\vec{u},\vec{v})$, نعتبر النقطة A ذات اللاحقة : $z_A = 2$.

أ/ عين طبيعة (Γ) مجموعة النقط $M(z)$ التي تحقق: $z = 2e^{i\theta}$ بحيث θ عدد حقيقي.

ب/ علم النقطتين $B;C$ ذات اللاحقتين $z_B = 2e^{i\frac{\pi}{3}}; z_C = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$ على الترتيب.

3. ليكن θ عدد حقيقي بحيث: $\theta \in]-\pi;\pi]$ و M النقطة ذات اللاحقة: $z = 2e^{i\theta}$.

نعتبر النقطة N من (Γ) بحيث: $(\overrightarrow{OM};\overrightarrow{ON}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$, بين أن لاحقة النقطة N هي $z_N = 2e^{i(\frac{\pi}{3}+\theta)}$.

4. نعتبر الدوران r الذي مركزه A و زاويته $\frac{\pi}{3}$.

أ/ بين أن العبارة المركبة للدوران r تعطى بالعبارة: $z' = e^{i\frac{\pi}{3}}z + 2 - 2e^{i\frac{\pi}{3}}$.

ب/ لتكن $K;F$ منتصفي القطعتين $[BM];[CN]$ على الترتيب. بين أن: $r(F) = K$. جـ/ استنتج طبيعة المثلث AFK.

5. أ/ بين أن: $AF^2 = 4 - 2\sqrt{3}\cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)$.

ب/ استنتج لاحقة النقطة M بحيث يكون AF أكبر ما يمكن ثم أنشئ المثلث AFK في هذه الحالة.

التمرين الرابع نعتبر الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f(x) = -x + 1 + \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد $(O;\vec{i},\vec{j})$. ($\|\vec{j}\| = 1cm; \|\vec{i}\| = 2cm$)

I. g هي الدالة المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $g(x) = -\left[2\left(x\sqrt{x} - 1\right) + \ln x\right]$.

1) أحسب $g(1)$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ في الحالتين $x > 1$ و $0 < x < 1$.

2) أحسب نهايتي الدالة g عند $+\infty$ و 0, ثم استنتج المستقيمين المقاربين لـ (C_f).

3) ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها . (لاحظ أن إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$)

4) أنشئ (C_f) والمستقيمين المقاربين .

II. 1) باستعمال التكامل بالتجزئة عين دالة أصلية للدالة: $x \mapsto \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

2) أحسب مساحة الحيز $S(\alpha)$ المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها $y = -x + 1$ و $x = 1$ و $x = \alpha$ بحيث $0 < \alpha < 1$.

3) أحسب $\lim\limits_{\alpha \to 0} S(\alpha)$, أعط تفسيرا بيانيا لهذه النهاية .

III. (u_n) متتالية معرفة بحدها الأول u_0 حيث : $u_0 \in [1;2]$, و من أجل كل عدد طبيعي n لدينا: $u_{n+1} = \frac{\ln u_n}{\sqrt{u_n}} + 1$.

1) برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[1;2]$, لدينا: $0 \le \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \le 1$.

2) برهن بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي n لدينا: $u_n \in [1;2]$.

3) عين اتجاه تغير المتتالية (u_n).

4) برهن أن المتتالية (u_n) متقاربة, و لتكن ℓ نهايتها . أحسب بدقة قيمة ℓ.

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني:

التمرين الأول: لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على IN بـ: $\begin{cases} u_{n+1} = u_n \times \dfrac{(n+1)^2}{e \times n^2} \\ u_0 = 0; u_1 = 1 \end{cases}$.

1) **أ/** أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن: $u_n > 0$.

ب/ ابتداءا من أي حد تكون المتتالية (u_n) متناقصة تماما ؟ هل هي متقاربة ؟ علل .

جـ/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $u_n = \dfrac{n^2}{e^{n-1}}$ ثم أحسب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

2) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على IN^* بـ: $v_n = \dfrac{1}{n^2} u_n$.

أ/ بين أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .

ب/ أحسب العدد الحقيقي S بحيث: $S = 8 - \left[\ln(u_1) + \ln\left(\frac{1}{4}u_2\right) + \ln\left(\frac{1}{9}u_3\right) + ... + \ln\left(\frac{1}{64^2}u_{64}\right)\right]$

3) n عدد طبيعي أكبر تماما من 1 . نعتبر الأعداد الطبيعية $c;b;a$ حيث $a = -\ln\left(v_n^2\right)$ و $b = 5n - 2$ و $c = 2n - 1$.

أ/ عين القيم الممكنة لـ $PGCD(a;b)$. ثم جد قيم n حتى يكون: $PGCD(a;b) = 3$.

ب/ بين أن b و c أوليان فيما بينهما , ثم استنتج $PGCD(a;b;c)$.

التمرين الثاني:

1. نعتبر المعادلة (E).....$2022x - 1443y = 9$ ذات المجهولين الصحيحين x و y.

أ/ أحسب $PGCD(2022;1443)$, ثم استنتج أن المعادلة (E) تقبل حلولا في IZ^2 .

ب/ حل في IZ^2 المعادلة (E) علما أن الثنائية $(5;7)$ حل لها.

جـ/ استنتج قيم الأعداد الصحيحة λ التي تحقق الجملة: $\begin{cases} \lambda \equiv 1[674] \\ \lambda \equiv 4[481] \end{cases}$.

2. **أ/** أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الاقليدية للعدد 7^n على 9.

ب/ استنتج باقي قسمة العدد $A = 1441^{2020} + 1442^{2021} + 1443^{2022}$ على 9.

3. α و β عددان طبيعيان يكتبان في نظام التعداد الذي أساسه 5 على الشكل: $\alpha = \overline{31042}^5; \beta = \overline{21233}^5$.

أ/ أكتب العددين α و β في النظام العشري .

ب/ x و y عددان طبيعيان. عين قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون: $\begin{cases} \alpha x - \beta y = 9 \\ 7^{x+y} + 2n^2 \equiv 0[9] \end{cases}$.

التمرين الثالث:

1. حل في مجموعة الأعداد المركبة C المعادلة ذات المجهول المركب z التالية: $(z^2+3)(z^2-6z+21) = 0$.
2. في المستوي المركب المنسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس المباشر $(O;\vec{u},\vec{v})$, نعتبر النقط $A;B;C$ و D لواحقها على الترتيب : $z_A = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}; z_B = \sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{2}}; z_C = 3 + 2i\sqrt{3}; z_D = \overline{z_C}$.
   - بين أن النقط $A;B;C$ و D تنتمي الى نفس الدائرة (C) التي مركزها Ω ذات اللاحقة $z_\Omega = 3$ يطلب تعيين نصف قطرها.
3. لتكن النقطة E نظيرة النقطة D بالنسبة للمبدأ O.

أ/ بين أن: $\frac{z_C - z_B}{z_E - z_B} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$ ثم استنتج طبيعة المثلث BCE .

ب/ بين أنه يوجد دوران R مركزه النقطة B ويحول النقطة E إلى النقطة C يطلب تعيين زاويته.

4. نعتبر التحويل النقطي S الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z النقطة M' ذات اللاحقة z' بحيث:

$z' + i\sqrt{3} = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}\left(z + i\sqrt{3}\right)$.

أ/ عين طبيعة S وعناصره المميزة .

ب/ عين طبيعة (E) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z والتي تحقق: $z = 3 + 2\sqrt{3}e^{i\theta}$ بحيث θ عدد حقيقي.

ج/ عين طبيعة (E') صورة (E) بالتحويل S و عناصرها الهندسية.

التمرين الرابع:

I. لتكن الدالة g المعرفة على IR بالعبارة: $g(x) = (2-x)e^x - 1$.

01) أدرس تغيرات الدالة g ثم أنشئ جدول تغيراتها .

02) أثبت أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين α و β بحيث: $1.8 < \alpha < 1.9$ و $-1.2 < \beta < -1.1$.

03) استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x.

II. لتكن الدالة f المعرفة على IR بـ: $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x}$. وليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

$\left(\left\|\vec{j}\right\| = 4cm; \left\|\vec{i}\right\| = 2cm\right)$

01) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$. ثم فسر النتيجتين هندسيا.

02) أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

03) بين أن $x - f(x) = \frac{(x-1)(e^x - x - 1)}{e^x - x}$ ثم استنتج الوضع النسبي للمنحني (C_f) و المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$.

04) أكتب معادلة المماس (T) للمنحني (C_f) في النقطة ذات الفاصلة $x_0 = 1$.

05) أ/ بين أن $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha - 1}$ و أن $f(\beta) = \frac{1}{\beta - 1}$, ثم استنتج حصرا لكل من $f(\alpha)$ و $f(\beta)$.

ب/ أنشئ كلا من (Δ) و (T) ثم (C_f).

06) أحسب ب cm^2 مساحة الحيز من المستوي المحدد بالمنحني (C_f) و المستقيم (Δ) و المستقيمين ذي المعادلتين $x = 0$ و $x = 1$.

07) ليكن m وسيطا حقيقيا .

أ/ بين أن المستقيمات (D_m) ذات ذات المعادلة $y = mx + 1 - m$ تتقاطع في نقطة وحيدة يطلب تعيينها .

ب/ ناقش حسب قيم m عدد حلول المعادلة: $f(x) = mx + 1 - m$.

انتهى الموضوع الثاني

بكالوريا 2025 موفقة للجميع

الإجابة النموذجية للبكالوريا التجريبي في مادة الرياضيات د- 2023

الموضوع الأول :

التمرين (01)

1) [أ] برهان أن 3^n على 11 : $3^0 \equiv 1\ [11]$

$3^1 \equiv 3\ [11]$ ، $3^2 \equiv 9\ [11]$ ، $3^3 \equiv 5\ [11]$ ، $3^4 \equiv 4\ [11]$

ومنه البواقي دورية دورها 5 كما يلي :

$n =$	$5k$	$5k+1$	$5k+2$	$5k+3$	$5k+4$
$r =$	1	3	9	5	4

[ب] استنتاج باقي قسمة A على 11 :

لدينا : $2022 \equiv 9\ [11]$ ومنه : $2022^{2023} \equiv (3^2)^{2023}\ [11]$

أي أن : $2022^{2023} \equiv 3^{4046}\ [11]$ $(4046 \equiv 1\ [5])$

ومنه : $\boxed{2022^{2023} \equiv 3\ [11]}$

وكذلك : $2023 \equiv 10\ [11]$ أي أن : $2023 \equiv -1\ [11]$ ومنه :

$\boxed{2023^{1443} \equiv -1\ [11]}$ أي أن : $2023^{1443} \equiv (-1)^{1443}\ [11]$

وكذلك : $1443 \equiv 2\ [11]$ ومنه : $1443 \equiv -9\ [11]$

ومنه : $1443^{2022} \equiv (-3^2)^{2022}\ (11)$ ومنه : $1443^{2022} \equiv 3^{4044}\ [11]$

أي أن : $\boxed{1443^{2022} \equiv 4\ [11]}$ أي أن : $4044 \equiv 4\ [5]$

ومنه يستنتج أن : $A \equiv 3+1+4\ [11]$

أي أن : $\boxed{A \equiv 8\ [11]}$

[A] تعيين قيم n حتى يكون B_n مضاعف لـ 11 :

لدينا : $\boxed{B_n \equiv 0\ [11]}$ ومنه : $2022^{5n+3} \equiv (3^2)^{5n+3}\ [11]$

ومنه : $2022^{5n+3} \equiv 3^{5(2n+1)+1}\ [11]$ ، ومنه : $2022^{5n+3} \equiv 3^{10n+6}\ (11)$

وكذلك : $\boxed{2022^{5n+3} \equiv 3\ [11]}$ ومنه :

$1443 \equiv (-3^2)^{10n+1}$ ~~$1443 \equiv (-3)^{10n+1}$~~

ومنه : $1443^{10n+1} \equiv -3^{5\times 4n+2}\ [11]$ ، ومنه : $1443^{10n+1} \equiv -3^{2n+2}\ [11]$

إذن : $\boxed{1443^{10n+1} \equiv -9\ [11]}$ ومنه يستنتج :

$B_n = 3 - 9 + 3n + 9\ [11]$ أي أن : $B_n \equiv 3n+3\ [11]$ ومنه يكون :

$3(n+1) \equiv 0\ [11]$ ومنه : $n+1 \equiv 0\ [11]$ أي أن : $n \equiv 10\ [11]$

وبما أن : $PGCD(3;11)=1$

$\boxed{n = 11k+10}$ مع $k \in \mathbb{N}$

2) [أ] تعيين $(V_3;V_5)$ و q و V_0 :

$$\begin{cases} V_3 \times V_5 = 2624 \\ PGCD(V_3;V_5) = 64 \end{cases}$$

لدينا : $V_3 = 64a'$ و $V_5 = 64b'$ حيث $(a';b')$ من $\mathbb{N}^2$ و $0 < a' < b'$

ومنه : $54^2 a'b' = 2624$ أي : $a'b' = 9 = 1\times 9 = 3\times 3$ ومنه نستنتج أن :

$PGCD(a';b') = 1$ مع $(a';b') = (1;9)$ أي $(V_3;V_5) = (64;576)$

لدينا : $V_5 = V_3 \times q^2$ ومنه : $q^2 = 9$

ومنه : $q = 3$ (لأن (V_n) حدودها موجبة تماما)

ومنه : $V_3 = V_0 \times q^3$ ولدينا : $\boxed{V_0 = 2}$

[ب] حساب V_n بدلالة n :

$\boxed{V_n = V_0 \times q^n = 2\times 3^n}$

⊗ تعيين قيم n حتى يكون S_n مضاعف لـ 11 :

$S'_n = V_0 + V_1 + \dots + V_n = 2\times \frac{3^{n+1}-1}{3-1} = 3^{n+1} - 1$

$3^{n+1} \equiv 1\ [11]$ أي $3^{n+1} - 1 \equiv 0\ [11]$ ومنه : $S_n \equiv 0\ [11]$

ومنه يستنتج أن : $n+1 \equiv 0\ [5]$ أي : $n = 4\ [5]$

ومنه : $\boxed{n = 5p+4}$ مع $p \in \mathbb{N}$

3) $\begin{cases} U_6 = 21 \\ PGCD(U_4;U_8) = 3 \end{cases}$

[أ] تعيين : r و U_0 و $(U_4;U_8)$:

(U_n) حسابية ومنه :

$2U_6 = U_5 + U_7 = (U_4 + r) + (U_8 - r) = U_4 + U_8$

ومنه : $U_4 + U_8 - 42$: (U_n) متباينة r

$PGCD(a';b')=1$ و $\begin{cases} u_4 = 3a' \\ u_8 = 3b' \end{cases}$

(b_n) متزايدة (u_n) $2 \leq a' < b'$

ومنه: $3(a'+b')=42$ وعليه $a'+b'=14$

ومنه: $(a';b') \in \{(3;11);(5;9)\}$ (بما أننا نبحث عن أعداد طبيعية أولية فيما بينها $PGCD(a;b)=1$ أي)

ومنه: $(u_4;u_8) \in \{(9;33);(15;27)\}$

ومنه: $(9;33)$ مرفوضة لأن

أي: $u_8 = u_4 + (8-4)r$ $r=6$

وبالتالي $u_0 = u_4 - 4 \times 6 = -15$ وهذا مرفوض لأن (u_n) حدودها طبيعية.

إذن: $(u_4;u_8) = (15;27)$

تعيين الأساس r: $u_8 = u_4 + (8-4)r$

ومنه: $r=3$

ومنه: $u_4 = u_0 + 4r$ $u_0 = 3$

ب) كتابة u_n بدلالة n:

ومنه: $u_n = u_0 + nr$ $u_n = 3+3n$

* التحقق أن 1443 حد من حدود (u_n)

أي: $1443 = 3n+3$ ومنه: $n=480$

إذن: $u_{480} = 1443$ حد رتبته 481

أ) حساب $S'(n)$:

$S'(n) = u_0 + u_1 + \dots + u_n = \frac{n+1}{2}(3+3n+3) = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \times 3$

* تعيين قيم n حتى: $S'(n)+25 = 2023$

بكافئ: $S'(n)+25 = 2023$ $n^2+3n-1330=0$

ومنه: $\Delta = 5329$ $\sqrt{\Delta}=73$ و

$n=35$ و $n=-38$ مرفوض.

إذن: $S'(35)+25 = 2023$.

4) $\alpha_n = 3n^2+9n+78$

$\beta_n = 3n+9$

أ) البرهان أن: $PGCD(\alpha_n;\beta_n) = PGCD(\beta_n;78)$

لدينا: $\alpha_n = n \times \beta_n + 78$ ومنه: q

ومنه: $PGCD(\alpha_n;\beta_n) = PGCD(\beta_n;78)$

ب) تعيين القيم الممكنة لـ $PGCD(\beta_n;78)$:

ومنه: $PGCD(\beta_n;78)=d$ $d/78$ ومنه $d \in D_{78}$

أي: $d \in \{1;2;3;6;13;26;39;78\}$ ($78=2\times3\times13$ جداء أولي)

ج) تعيين قيم n حتى $PGCD(\alpha_n;\beta_n)=78$:

$\begin{cases} \alpha_n \equiv 0[78] \\ \beta_n \equiv 0[78] \end{cases}$ ومنه: $\begin{cases} 3 \mid n^2+3n+78 \equiv 0[3] \\ 3n+9 \equiv 0[78] \end{cases}$

$\begin{cases} n^2+n \equiv 0[26] \\ n+3 \equiv 0[26] \end{cases}$ ومنه: $\begin{cases} n^2+n+26 \equiv 0[26] \\ n+3 \equiv 0[26] \end{cases}$

إذن: $n+3 \equiv 0[26]$ و $n \equiv 23[26]$ أي:

$n = 26m+23$ مع $m \in \mathbb{N}$

التمرين 2:

1) حساب $P(A)$ و $P(B)$:

$P(A) = \frac{C_6^4 + C_6^4 + C_5^4 + C_4^4}{C_{25}^4} = \frac{21}{2530}$

$P(B) = \frac{C_{11}^4 + C_{14}^4}{C_{25}^4} = \frac{121}{1150}$

2) حساب $P(A \cap B)$

$P(A \cap B) = \frac{C_4^4 + C_4^4 + C_5^4}{C_{25}^4} = \frac{7}{12650}$

* استنتاج احتمال ظهور الوجهين لـ 4 مواطنين الحاصلين على الدرجة الأولى من الجنس:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1429}{12650}$

3) حساب $P_A(B)$:

$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A} = \frac{1}{15}$

4) المتغير العشوائي X :

$X \in \{0; 1; 2\}$: قيم X هي

قانون احتمال X :

$$P(X=0) = \frac{C_{23}^4}{C_{25}^4} = \frac{7}{10}$$

$$P(X=1) = \frac{C_2^1 \times C_{23}^3}{C_{25}^4} = \frac{7}{25}$$

$$P(X=2) = \frac{C_2^2 \times C_{23}^2}{C_{25}^4} = \frac{1}{50}$$

وضعه في جدول:

x_i	0	1	2
$P(X=x_i)$	$\frac{7}{10}$	$\frac{7}{25}$	$\frac{1}{50}$

* حساب $E(X)$:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{3} x_i \cdot P(X=x_i) = \boxed{0,32}$$

التمرين ③ :

أ) F حل المعادلة : $Z^2 - 2Z + 4 = 0$

المعادلة حلولها في $\mathbb{C}$ ، $\Delta = -12 = (2i\sqrt{3})^2$

$Z_1 = 1 + i\sqrt{3}$ ؛ $Z_2 = 1 - i\sqrt{3}$

إذن : $S = \{1 - i\sqrt{3}; 1 + i\sqrt{3}\}$

ب) كتابة كل من العددين على الشكل الأسي :

لدينا : $|Z_1| = |1 + i\sqrt{3}| = 2$

ولدينا : $\cos\theta_1 = \frac{1}{2}$ ؛ $\sin\theta_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

إذن : $\theta_1 = \arg(Z_1) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$; $(k \in \mathbb{Z})$

ومنه : $Z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$

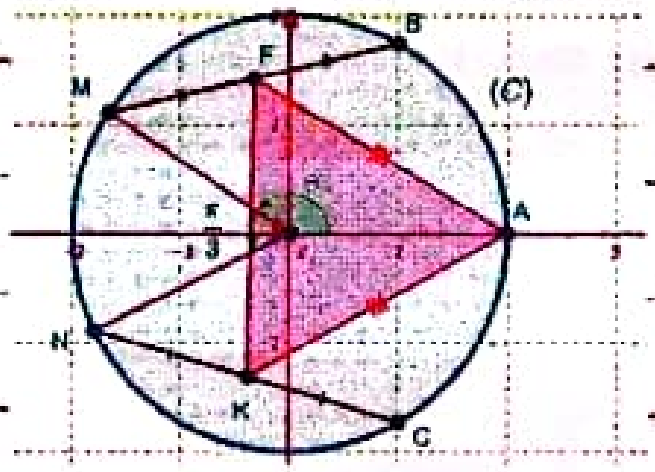
ومنه نستنتج أن : $Z_2 = \overline{Z_1}$ ومنه $Z_2 = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$

ج) F تعيين طبيعة (Γ) :

لدينا : $Z = 2e^{i\theta}$ معناه $|Z| = 2$ ومنه $M \in (\Gamma)$

(Γ) هي الدائرة التي مركزها O (المبدأ) ونصف قطرها $r = 2$

ب) تعليم النقطتين B و C :



3) تبيان أن : $Z_N = 2e^{i(\frac{\pi}{3}+\theta)}$ $(N \neq A, \theta \in \mathbb{R})$

N نقطة من الدائرة (Γ) ومنه $|Z_N| = 2$

ولدينا : $(\vec{u}; \vec{ON}) = (\vec{u}; \vec{OM}) + (\vec{OM}; \vec{MN}) = \theta + \frac{\pi}{3}$ (2π)

ومنه : $\arg(Z_N) = \theta + \frac{\pi}{3}$ $[2\pi]$

وبالتالي : $Z_N = 2e^{i(\frac{\pi}{3}+\theta)}$

4) أ) F تبيان أن ما هو R و S التشابه :

العبارة المركبة لـ R على الشكل : $Z' = e^{i\frac{\pi}{3}}Z + 2 - 2e^{i\frac{\pi}{3}}$

أي : $Z' - Z_A = e^{i\frac{\pi}{3}}(Z - Z_A)$

$Z' = e^{i\frac{\pi}{3}}(Z - Z_A) + Z_A = e^{i\frac{\pi}{3}}Z - 2e^{i\frac{\pi}{3}} + 2$

ومنه : $Z' = e^{i\frac{\pi}{3}}Z + 2 - 2e^{i\frac{\pi}{3}}$

ب) F تبيان أن : $R(F) = K$

لدينا : $Z_F = \frac{Z_B + Z_M}{2} = \frac{2e^{i\frac{\pi}{3}} + 2e^{i\theta}}{2}$ ومنه : $Z_F = e^{i\frac{\pi}{3}} + e^{i\theta}$

ولدينا : $Z_K = \frac{Z_C + Z_N}{2} = \frac{-2e^{-i\frac{\pi}{3}} + 2e^{i(\theta+\frac{\pi}{3})}}{2}$

أي : $Z_K = e^{-i\frac{\pi}{3}} + e^{i(\theta+\frac{\pi}{3})}$

إذن : $R(F) = F'$ ومنه

$Z_{F'} = e^{i\frac{\pi}{3}}Z_F + 2 - 2e^{i\frac{\pi}{3}} = e^{i(\theta+\frac{\pi}{3})} + 2 + e^{i\frac{2\pi}{3}} - 2e^{i\frac{\pi}{3}}$

ولدينا : $2 + e^{i\frac{2\pi}{3}} - 2e^{i\frac{\pi}{3}} = 2 + \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} - 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$

$= 2 - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i - 1 - i\sqrt{3}$

$= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = e^{-i\frac{\pi}{3}}$

أي : $Z_{F'} = e^{i(\theta+\frac{\pi}{3})} + e^{-i\frac{\pi}{3}} = Z_K$

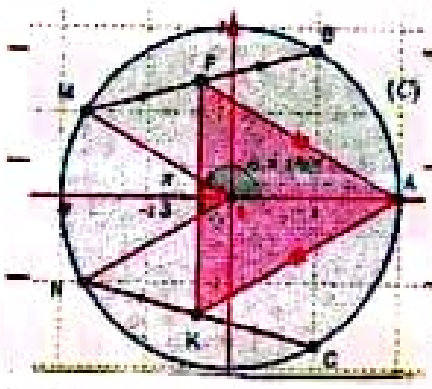
إذن : $Z_{F'} = Z_K$ ومنه : $R(F) = K$

θ	$-\pi$		$-\frac{\pi}{6}$		$\frac{5\pi}{6}$		π
$f'(\theta)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(\theta)$	$f(-\pi)$	↘	$f(-\frac{\pi}{6})$	↗	$f(\frac{5\pi}{6})$	↘	$f(\pi)$

وبالتالي أكبر ما يمكن من أجل AF هو $\theta = \frac{5\pi}{6}$

$Z_M = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$: M ولحقة النقطة

لإنشاء المثلث:



التمرين ④:

$f(x) = -x+1+\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$;

$g(x) = -[2(x\sqrt{x}-1)+\ln x]$ (I)

① حساب $g(1)$ واستنتاج إشارة $g(x)$:

من أجل $0<x<1$ لدينا $\ln x < 0$ و $g(1)=0$

و $x\sqrt{x}-1<0$ إذن $(2(x\sqrt{x}-1)+\ln x)<0$

وبالتالي $g(x)>0$

من أجل $x>1$ لدينا $x\sqrt{x}-1>0$ و $\ln x>0$

إذن $g(x)<0$ و $[2(x\sqrt{x}-1)+\ln x>0]$

② نهايات الدالة f واستنتاج المستقيمات المقاربة:

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(-x+1+\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right) = \lim_{y\to+\infty}\left(-y^2+1+\frac{2\ln y}{y}\right) = -\infty$

$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\left(-x+1+\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right) = -\infty$

يتبع ...

ب) استنتاج طبيعة المثلث AFK:

$r(F)=K$ يعني $AK=AF$

$(\vec{AF};\vec{AK}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$

وبالتالي AFK متقايس الأضلاع.

ج) ① تبيان أن: $AF^2 = 4-2\sqrt{3}\cos(\theta+\frac{\pi}{3})$

لدينا: $Z_{\overrightarrow{AF}} = Z_F - Z_A = e^{i\frac{\pi}{3}} + e^{i\theta} - 2$

وبالتالي:

$AF^2 = |Z_F - Z_A|^2 = |e^{i\frac{\pi}{3}} + e^{i\theta} - 2|^2 = (e^{i\frac{\pi}{3}} + e^{i\theta} - 2)\overline{(e^{i\frac{\pi}{3}} + e^{i\theta} - 2)}$

$= (e^{i\frac{\pi}{3}} + e^{i\theta} - 2)(e^{-i\frac{\pi}{3}} + e^{-i\theta} - 2)$

$= 6 + e^{i(\frac{\pi}{3}-\theta)} + e^{-i(\frac{\pi}{3}-\theta)} - 2(e^{i\theta}+e^{-i\theta}) - 4(\frac{e^{i\frac{\pi}{3}}+e^{-i\frac{\pi}{3}}}{2})$

$2\cos(\frac{\pi}{3}-\theta)$; $2\cos\theta$; $2\cos\frac{\pi}{3}$

$= 6 + 2\cos(\frac{\pi}{3}-\theta) - 4\cos\theta - 2\times 1$

$= 4 + 2\cos(\frac{\pi}{3}-\theta) - 4\cos\theta$

$= 4 + 2\cos\frac{\pi}{3}\cos\theta + 2\sin\frac{\pi}{3}\sin\theta - 4\cos\theta$

$= 4 + \cos\theta + \sqrt{3}\sin\theta - 4\cos\theta$

$= 4 - (3\cos\theta - \sqrt{3}\sin\theta)$

$= 4 - 2\sqrt{3}(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta - \frac{1}{2}\sin\theta)$

$AF^2 = 4-2\sqrt{3}\cos(\theta+\frac{\pi}{6})$

② استنتاج لاحقة M:

نضع: $f(\theta) = AF^2 = 4-2\sqrt{3}\cos(\theta+\frac{\pi}{6})$

ومنه $f'(\theta) = 2\sqrt{3}\sin(\theta+\frac{\pi}{6})$

$f'(\theta)=0$ معناه:

$\theta+\frac{\pi}{6}=0$ أو $\theta+\frac{\pi}{6}=\pi$

أي $\theta=-\frac{\pi}{6}$ أو $\theta=\frac{5\pi}{6}$

ومنه ينتج جدول تغيرات f كما يلي:

المستقيم (Δ) مقارب لـ (C_f) بجوار +∞ :

لدينا : $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = 0$ ومنه

$\lim_{x\to+\infty} [f(x)-(-x+1)] = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = 0$

ومنه يكون المستقيم ذو المعادلة $y=-x+1$ مقارب مائل لـ (C_f) عند $+\infty$.

$\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$ و $x=0$ مستقيم مقارب موجب لـ (C_f).

③ دراسة اتجاه تغير الدالة f :

$f'(x) = \frac{g(x)}{2x\sqrt{x}}$ لدينا :

ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ على $]0;+\infty[$

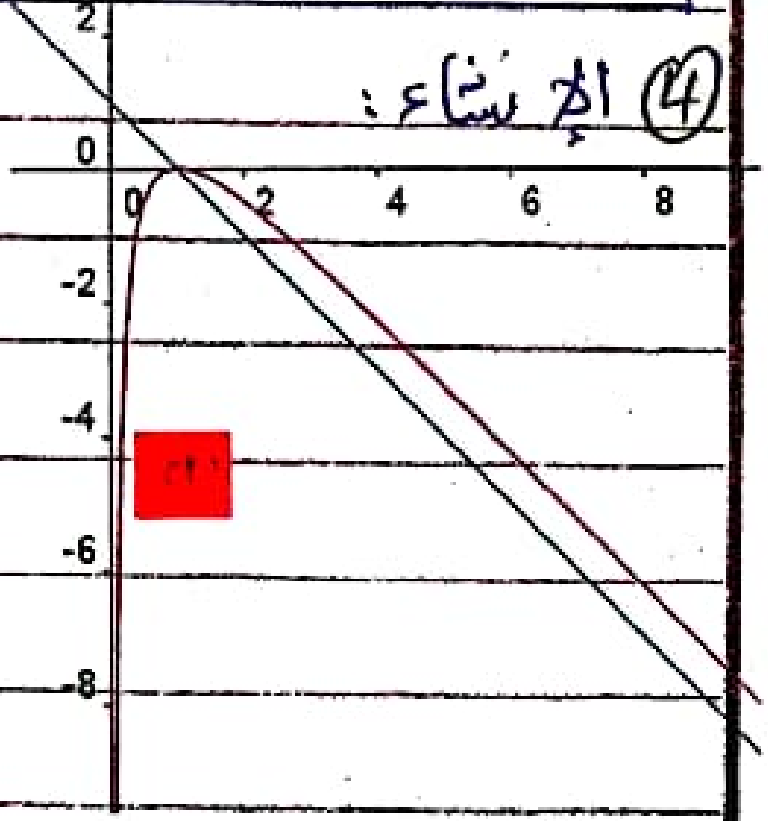
على المجال $]0;1]$ يكون $f'(x)\geq 0$ إذن f متزايدة تماما على $]0;1]$

على المجال $[1;+\infty[$ يكون $f'(x)\leq 0$ إذن f متناقصة تماما على $[1;+\infty[$

وبالتالي جدول تغيراتها هو :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$

④ انجاز :



II) تعيين دالة أصلية لـ $x \to \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$:

$$\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \int [\ln(x)] \times \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx$$

$$= [2\sqrt{x}\ln x] - \int \frac{2\sqrt{x}}{x} dx$$

$$= 2\sqrt{x}\ln x - 2\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

$$= 2\sqrt{x}\ln x - 4\sqrt{x}$$

$$= \boxed{(2\sqrt{x})(\ln x - 2)}$$

② حساب $S(\alpha)$:

$$S(\alpha) = \int_{\alpha}^{1} |f(x)-y| dx$$

$$= -\int_{\alpha}^{1} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$$

$$= -[(2\sqrt{x})(-2-\ln(x))]_{\alpha}^{1} \quad (\times 2\,cm^2)$$

$$= (2\sqrt{1}(-2-\ln 1) - 2\sqrt{\alpha}(-2-\ln\alpha))(cm^2)$$

$$= (4 - 4\sqrt{\alpha} + 2\sqrt{\alpha}\ln\alpha)(cm^2)$$

$$S(\alpha) = \boxed{8 - 8\sqrt{\alpha} + 4\sqrt{\alpha}\ln\alpha\ cm^2}$$

③ حساب $\lim_{\alpha\to 0} S(\alpha)$:

$$\lim_{\alpha\to 0} S(\alpha) = \lim_{\alpha\to 0} [8 - 8\sqrt{\alpha} + 4\sqrt{\alpha}\ln\alpha]$$

$$= 8\,cm^2$$

التفسير : نهاية $S(\alpha)$ هو مساحة الحيز المحدد بـ (C_f) و المقارب المائل $(y=-x+1)$ و المستقيمان $x=0$ و $x=1$.

III) $\begin{cases} u_0 \in [1;2] \\ u_{n+1} = \frac{\ln u_n}{\sqrt{u_n}} + 1 \end{cases}$

① البرهان أن : $0 \leq \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \leq 1$ (على المجال $[1;2]$) :

لدينا : $1 \leq x \leq 2$ ومنه : $0 \leq \ln x \leq \ln 2 \leq 1$

ولدينا : $1 \leq \sqrt{x} \leq \sqrt{2}$ ومنه : $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}} \leq 1$

ومنه نستنتج : $0 \leq \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \leq 1$

(الباقي في الوجه)

(2) البرهان أن: $U_n \in [1;2]$

لتكن: $P(n)$ ... $U_n \in [1;2]$

$P(0)$ صحيحة لأن: $U_0 \in [1;2]$

نفرض أن $P(n)$ صحيحة أي أن: $U_n \in [1;2]$

ونبرهن أن $P(n+1)$ صحيحة أي

أن: $U_{n+1} \in [1;2]$

بما أن: $1 \leq U_n \leq 2$ ومنه يكون: $0 \leq \frac{\ln U_n}{\sqrt{U_n}} \leq 1$

ومنه: $1 \leq \frac{\ln U_n}{\sqrt{U_n}} + 1 \leq 2$ أي أن:

$U_{n+1} \in [1;2]$ ومنه $P(n+1)$ صحيحة

وحسب مبدأ الاستدلال بالتراجع

فإن: $U_n \in [1;2]$

(3) دراسة اتجاه تغير (U_n):

لدينا: $U_{n+1} = \frac{\ln U_n}{\sqrt{U_n}} + 1$

$U_{n+1} - U_n = \frac{\ln U_n}{\sqrt{U_n}} + 1 - U_n = f(U_n)$

بما أن $U_{n+1} - U_n \leq 0$ فإن $f(U_n) \leq 0$

ومنه (U_n) متناقصة تماما.

(4) (U_n) محدودة ومتناقصة تماما

فهي متقاربة نحو ℓ

لدينا: $\lim (U_{n+1}) = \lim (U_n) = \ell$

ومنه: $\ell = \frac{\ln \ell}{\sqrt{\ell}} + 1$ أي:

$f(\ell) = 0$ أي: $\frac{\ln \ell}{\sqrt{\ell}} - \ell + 1 = 0$

و (C_f) يقطع (xx') في نقطة وحيدة

فاصلتها 1 ومنه: $\ell = 1$

أنهى الحل موضوع الأول

تصحيح الموضوع (II)

التمرين الأول:

(N) من أجل $n \in \mathbb{N}^*$: $\begin{cases} u_{n+1} = u_n \times \frac{(n+1)^2}{e \times n^2} \\ u_0 = 0 \; ; \; u_1 = 1 \end{cases}$

(F)

لإثبات أن: $u_n > 0$

نسمي $P(n)$ ... $u_n > 0$

من أجل $n = 1$: $u_1 > 0$ ومنه $P(1)$ صحيحة.

نفرض أن $P(n)$ صحيحة أو $u_n > 0$

ونبرهن أن $P(n+1)$ صحيحة أو $u_{n+1} > 0$

لدينا: $u_n > 0$ ومنه: $\frac{u_n}{e \times n^2} \times (n+1)^2 > 0$

ومنه $P(n+1)$ صحيحة

ومنه حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع

فإن $u_n > 0$.

(ب)

لدينا: (u_n) متناقصة ومنه: $u_n > 0$

تماما معناه: $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ (موجبة تماما الحدود)

أي: $\frac{(n+1)^2}{e n^2} < 1$ ومنه:

$(1-e)n^2 + 2n + 1 < 0$ ومنه يكون:

$\Delta = 4e$ ومنه: $n_1 \approx 1{,}54$ ؛ $n_2 = -0{,}58$ (مرفوض)

n	0	n_1	$+\infty$
$\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1$	$+$	0	$-$

وعليه يكون: $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ من أجل $n > n_1$

أي ابتداءً من $n = 2$ أو ابتداءً من الحد الثاني تكون (u_n) متناقصة تماما

نسخ

⊛ التقارب: من أجل $n \geq 2$ المتتالية (u_n) متناقصة تماما ومحدودة من الأسفل فهي متقاربة.

A) الإثبات أن: $u_n = \frac{n^2}{e^{n-1}}$

نسمي $P(n)$ الخاصية $u_n = \frac{n^2}{e^{n-1}}$

⊛ $P(0)$ و $P(1)$ صحيحتان لأن: $u_0 = \frac{0^2}{e^{0-1}} = 0$

و $u_1 = \frac{1^2}{e^{1-1}} = 1$.

⊛ نفرض أن: $P(n)$ صحيحة أي: $u_n = \frac{n^2}{e^{n-1}}$

ونبرهن صحتها من أجل $(n+1)$ أي $P(n+1)$؛

$u_{n+1} = \frac{(n+1)^2}{e^{n+1-1}}$

لدينا: $u_{n+1} = \frac{(n+1)^2}{e \times n^2} \times u_n = \frac{(n+1)^2}{e \times n^2} \times \frac{n^2}{e^{n-1}}$

ومنه:

$= \frac{(n+1)^2}{e^{n+1-1}}$

ومنه الخاصية صحيحة من أجل $(n+1)$

أي أن $P(n+1)$ محققة ومنه حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فإن:

$u_n = \frac{n^2}{e^{n-1}}$

⊛ حساب $\lim u_n$:

$\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{n^2}{e^{n-1}} = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{n^2}{e^n} \times \frac{1}{e^{-1}} \right) = 0$

(2) لدينا (V_n) هندسية:

$V_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2} u_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2} \cdot \frac{(n+1)^2}{e \times n^2} u_n$

$= \frac{1}{e} \times \frac{1}{n^2} u_n = \frac{1}{e} V_n$

$\frac{1}{e}$ هو أساسها ومنه (V_n)

$V_1 = \frac{1}{1^2} \times u_1 = 1$ حدها الأول:

(ب) حساب S:

... نسخ

$S = 8 - [\ln(u_1) + \ln(\frac{1}{4}u_2) + \cdots + \ln(\frac{1}{64^2}u_{64})]$

ⓒ V_n الحد العام لـ (F) هو:

$V_n = (e^{-1})^{n-1} = e^{1-n}$

$K_n = \ln(\frac{1}{n^2}u_n) = \ln(v_n) = \ln(e^{1-n}) = 1-n$

ومنه نستنتج أن (K_n) متتالية حسابية أساسها -1:

$S = 8 - (K_1 + K_2 + \cdots + K_{64})$

$= 8 - \frac{64}{2}(K_1 + K_{64}) = 8 - 32(0 - 63)$

$S = 2024$

ⓒ $a = -\ln(v_n^2)$ $c = 2n-1$ $b = S_{n-2}$

أ) القيم الممكنة لـ $d = PGCD(a;b)$:

$a = -\ln(v_n^2) = -2\ln v_n = 2n-2$

d/a و d/b إذن: $d/2b-5a$ ومنه $d/6$

أي: $d \in \{1;2;3;6\}$.

* أجل أي قيم n حتى يكون: $PGCD(a;b) = 3$:

$\begin{cases} a \equiv 0[3] \\ b \equiv 0[3] \end{cases}$ و $\begin{cases} a \neq 0[6] \\ b \neq 0[6] \end{cases}$ أو

ومنه: $\begin{cases} a \equiv 3[6] \\ b \equiv 3[6] \end{cases}$ أو $\begin{cases} 2n-2 \equiv 3[6] \\ 5n-2 \equiv 3[6] \end{cases}$

ومنه: $(5n-2) - 2(2n-2) \equiv 3 - 2(3)[6]$ أو $1[6]$

$n+2 \equiv 3[6]$ وعليه: $n \equiv 1[6]$

إذن: $n = 6k+1$ مع $k \in \mathbb{N}^*$

ب) تبيان أن b و c أوليان فيما بينهما:

من أجل $n > 1$ يكون:

$-5c + 2b = 1$

ومنه حسب مرهنة بيزو العدان b و c أوليان فيما بينهما.

التمرين ②:

① $2022x - 1443y = 9 \quad \ldots (E)$

ⓐ حساب $PGCD(2022;1443)$

$PGCD(2022;1443) = 3$ (التحليل أو خوارزمية)

ⓑ لدينا $3/9$ فإن المعادلة (E) تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$.

ⓒ حل المعادلة (E):

لدينا: $2022x - 1443y = 9$ بالقسمة على 3 نجد:

$2022(5) - 1443(7) = 9$

بالطرح نجد: $2022(x-5) = 1443(y-7)$

$674/481(y-7)$ ومنه $674(x-5) = 481(y-7)$

بما أن $PGCD(674;481) = 1$ فإن $674/y-7$

إذن: $y-7 = 674k$ ومنه $y = 674k+7$

بالتعويض نجد: $x = 481k+5$

ⓓ حلول (E) هي الثنائيات $(x;y)$ مع $k \in \mathbb{Z}$

$(x;y) = (481k+5; 674k+7) / k \in \mathbb{Z}$

ⓐ إيجاد قيم λ:

$\begin{cases} \lambda \equiv 1[674] \\ \lambda \equiv 4[481] \end{cases}$

$\lambda = 674m + 1 = 481n + 4$ ومنه:

$674m - 481n = 3$ أي:

$m = 481p + 5$; $p \in \mathbb{Z}$ حسب ما سبق نجد:

$\lambda = 674(481p+5) + 1$ ومنه:

$p \in \mathbb{Z} / \lambda = 324194p + 3371$ أي أن:

12,008 dh

(2) (1) دراسة بواقي القسمة على 9 لـ 7^n :

لدينا : $7^3 \equiv 1[9]$ وعليه بواقي قسمة 7^n على 9 دورية دورها 3 إذن :

$n =$	$3k$	$3k+1$	$3k+2$	
$7^n \equiv$	1	7	4	$[9]$

(ب) استنتاج باقي قسمة A على 9 :

لدينا : $1441 \equiv 1[9]$ ؛ $1442 \equiv 2[9]$ ؛ $1443 \equiv 3[9]$ وعليه ،

لدينا : $1441^{2020} \equiv 1[9]$ ولدينا :

$1442^{2021} \equiv -7[9]$ ومنه $1442^{2021} \equiv -7[9]$

لدينا : $2021 \equiv 2[3]$ وعليه : $1442^{2021} \equiv -4[9]$

ولدينا : $1443^{2022} \equiv 3^{2022}[9]$ ومنه :

$1443^{2022} \equiv (3^2)^{1011}[9]$ وعليه :

ومنه : $1443^{2022} \equiv 0[9]$

$A \equiv 1-4+0[9]$

أي $A \equiv -3[9]$ ومنه : $A \equiv 6[9]$

وباقي قسمة A على 9 هو 6.

(3) $\alpha = \overline{31042}^5$ ؛ $\beta = \overline{21233}^5$

(أ) كتابة α و β في النظام العشري :

$\alpha = 2+4\times5+0\times5^2+1\times5^3+3\times5^4$

$\alpha = 2022$

$\beta = 3+3\times5+2\times5^2+1\times5^3+2\times5^4$

$\beta = 1443$

(ب) تعيين قيم n حتى يكون :

$$\begin{cases} \alpha x - \beta y = 9 \\ 7^{x+y} + 2n^2 \equiv 0[9] \end{cases}$$

$2022x - 1443y = 9$ يكافئ

$7^{x+y} + 2n^2 \equiv 0[9]$

$(x;y) \in (481k+5; 674k+7)$ / $k \in \mathbb{N}$

ومنه يكون : $7^{x+y} = 7^{1155k+12}$

و يكون : $1155k+12 \equiv 3(385k+4)$

ومنه ينتج : $7^{x+y} \equiv 1[9]$ حيث :

$7^{x+y} + 2n^2 \equiv 1 + 2n^2[9]$

أي : $2n^2 + 1 \equiv 0[9]$ يكافئ $2n^2 \equiv 8[9]$

لدينا : $PGCD(2;9) = 1$ ومنه : $n^2 \equiv 4[9]$

ومنه يكون : $n \equiv 2[9]$ أو $n \equiv 7[9]$

حيث :

$n \equiv$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	$[9]$
$n^2 \equiv$	0	1	4	0	7	7	0	4	1	$[9]$

ومنه ينتج أن : $n \in \{9k+2; 9k+7 / k \in \mathbb{N}\}$

التمرين (3) :

(1) حل المعادلة : $(z^2+3)(z^2-6z+21) = 0$ ...

إما $z^2+3=0$ أو $z^2-6z+21=0$

أي أنه إما : $z = i\sqrt{3}$ أو $z = -i\sqrt{3}$

أو : $\Delta = 36-4\times21 = -48$ أي : $D = (4i\sqrt{3})^2$

إذن : $z_1 = 3-2i\sqrt{3}$ ؛ $z_2 = 3+2i\sqrt{3}$

مجموعة حلول المعادلة هي :

$S = \{i\sqrt{3}; -i\sqrt{3}; 3-2i\sqrt{3}; 3+2i\sqrt{3}\}$

(2) تبيان أن : A ، B ، C ، D على نفس الدائرة (C) :

بعد الحساب :

$|z_A - z_\Omega| = |z_B - z_\Omega| = |z_C - z_\Omega| = |z_D - z_\Omega| = 2\sqrt{3}$

أي : $\Omega A = \Omega B = \Omega C = \Omega D = 2\sqrt{3}$

ومنه ...

وبالتالي A ، B ، C ، D تنتمي
إلى نفس الدائرة (C) ذات المركز
Ω ذات اللاحقة $z_\Omega = 3$
ونصف قطرها $r = 2\sqrt{3}$.

(3)
E نظيرة D بالنسبة إلى O أي:
$z_E = -z_D = -3 + 2i\sqrt{3}$

أ) لبيان أن: $\frac{z_C - z_B}{z_E - z_B} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$

لدينا: $\frac{z_C - z_B}{z_E - z_B} = \frac{1 + i\sqrt{3}}{-1 + i\sqrt{3}}$

$= \frac{1+i\sqrt{3}}{-1+i\sqrt{3}} \times \frac{-1-i\sqrt{3}}{-1-i\sqrt{3}} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\left|\frac{z_C - z_B}{z_E - z_B}\right| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$

ولدينا: $\begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{2} \\ \sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ ومنه $\theta = -\frac{\pi}{3}$

$\arg\left(\frac{z_C - z_B}{z_E - z_B}\right) = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$

ومنه $\frac{z_C - z_B}{z_E - z_B} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$

طبيعة المثلث BCE:

لدينا: $\left|\frac{z_C - z_B}{z_E - z_B}\right| = 1$ تكافئ: $\frac{BC}{BE} = 1$

أي: $BC = BE$ ، $\theta = -\frac{\pi}{3}$

معناه: $(\vec{BE}; \vec{BC}) = -\frac{\pi}{3}[2\pi]$

وعليه المثلث BCE متقايس الأضلاع.

ب) تبيان أنه يوجد دوران زاويته $\alpha = -\frac{\pi}{3}$ مركزه B يحول E إلى C.

بالتالي يوجد دوران مركزه B يحول E إلى C وزاويته $\alpha = -\frac{\pi}{3}$.

S تحاكي $z' + i\sqrt{3} = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}(z + i\sqrt{3})$ (4)

أ) لتعيين طبيعة S:

لدينا: $\frac{z' + i\sqrt{3}}{z + i\sqrt{3}} = 2e^{-i\frac{\pi}{3}} = \frac{z_M - z_B}{z_E - z_B}$

ولدينا: $\arg\left(\frac{z' + i\sqrt{3}}{z + i\sqrt{3}}\right) = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ و $\left|\frac{z' + i\sqrt{3}}{z + i\sqrt{3}}\right| = 2$

ومنه S هو تشابه مباشر نسبته $k = 2$
وزاويته $\alpha = -\frac{\pi}{3}$ ومركزه B.

ب) تعيين طبيعة (E):

$z - 3 = 2\sqrt{3}e^{i\theta}$ ومنه $z = 3 + 2\sqrt{3}e^{i\theta}$

أي: $|z - 3| = 2\sqrt{3}$ يعني $OM = 2\sqrt{3}$

ومنه (E) هو الدائرة (C') التي مركزها Ω' ذات اللاحقة $z_{\Omega'} = 3$ ونصف قطرها $r = 2\sqrt{3}$

أي: $(E) = (C')$.

ج) تعيين طبيعة (E') صورة (E) بالتحويل S:

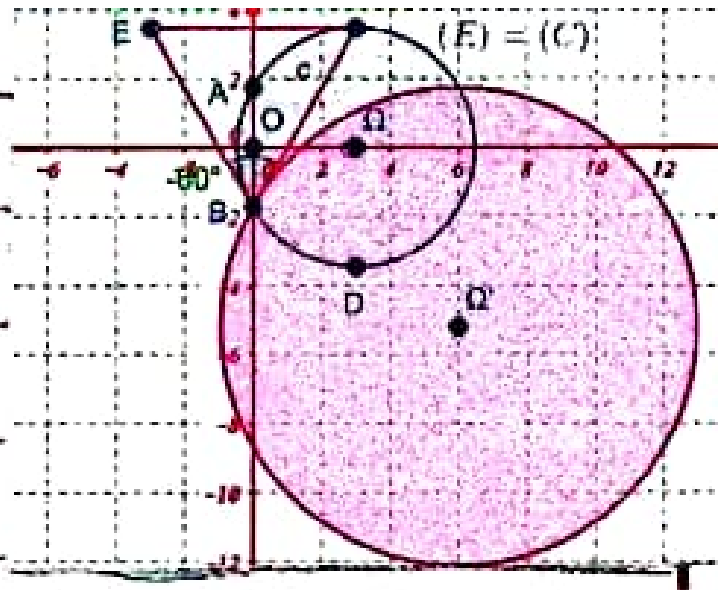
صورة (E) هو دائرة (C'') مركزها Ω'' صورة Ω' بالتحويل S.

$z_{\Omega''} = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}(z_{\Omega'} + i\sqrt{3}) - i\sqrt{3}$

$z_{\Omega''} = 6 - 3i\sqrt{3}$ وصلت بالتعويض في الحساب

ونصف قطرها

$r' = kr = 2 \times 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$



التمرين (4)

I

$g(x) = (2-x)e^x - 1$

① دراسة تغيرات الدالة g:

$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty}(2e^x - xe^x - 1) = -1$ نهاية

$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty}[(2-x)e^x - 1] = -\infty$

من أجل كل x من $\mathbb{R}$:

$g'(x) = (1-x)e^x$

إشارة $g'(x)$ من إشارة $1-x$ وهي

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	

وموجبة تماما على $]-\infty;1]$

ومتناقصة تماما على $[1;+\infty[$

وجدول تغيراتها:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	-1	↗	$g(1) \approx 1,71$	↘	$-\infty$

② إثبات أن المعادلة $g(x)=0$

تقبل حلين α و β،

نظرية القيم المتوسطة

II

$f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x - x}$

① حساب نهايات f:

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \dfrac{e^x - 1}{e^x - x} = 0$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left[\dfrac{e^x(1-e^{-x})}{e^x(1-xe^{-x})}\right] = 1$

المستقيمان المقاربان: $y=1$ و $y=0$

المنحنى (C_f) فوق (Δ) عند $-\infty$ وعند $+\infty$ على الترتيب.

② دراسة اتجاه تغير f:

من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = \dfrac{g(x)}{(e^x - x)^2}$

إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ وهي

موجبة على $[\beta;\alpha]$ ومتناقصة

على كل من $]-\infty;\beta]$ و $[\alpha;+\infty[$

جدول تغيراتها:

x	$-\infty$		β		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↘	$f(\beta)$	↗	$f(\alpha)$	↘	1

③ تبيان أن: $x - f(x) = \dfrac{(x-1)(e^x - x - 1)}{e^x - x}$

$x - f(x) = x - \dfrac{e^x - 1}{e^x - x} = \dfrac{x(e^x - x) - e^x + 1}{e^x - x}$

$= \dfrac{e^x(x-1) + 1 - x^2}{e^x - x} = \dfrac{(x-1)(e^x - x - 1)}{e^x - x}$