اختبار في مادة الرياضيات — المدة : 4 سا30د

على المترشح اختيار احد الموضوعين

الموضوع الاول

التمرين الأول : (4ن)

يراد عشوائيا اختيار لجنة تضم مسؤول للقسم ونائبه الاول والثاني . من بين المترشحين يوجد خمس مترشحين ذكور من بينهم مترشح اسمه رياض وأربع مترشحات إناث .

1. احسب احتمال الحوادث التالية :
   A : "مسؤول القسم ونائبيه كلهم ذكور" B : "رياض ضمن اللجنة المختارة "
   C : " رياض هو مسؤول القسم "
2. بين أن $P(A\cap C)=\frac{1}{42}$ ثم استنتج $P(A\cup C)$.
3. ليكن Xالمتغير العشوائي الذي يرفق بكل لجنة مختارة عدد الإناث اللواتي تضمهم اللجنة .
   (ا) عرف قانون احتمال المتغير العشوائيX ثم احسب أمله الرياضياتي.
4. احسب احتمال الحدث $(logX>0)$.

التمرين الثاني : (5ن)

نعتبر المتتاليتين (u_n) و (t_n) المعرفتين بحدهما الاول $u_0=3$ و $t_0=1$ ومن اجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=2u_n-1$ و $t_{n+1}=2t_n+3$.

1. (ا) برهن بالتراجع أنه من أجل عدد طبيعي n ، $u_n=2^{n+1}+1$.
   (ب) هل العددان u_nو u_{n+1} أوليان فيما بينهما.
2. (ا) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الاقليدية للعدد 2^n على 5.
   (ب) استنتج باقي قسمة العدد 1447^{2025} على 5 .
3. (ا) برهن بالتراجع أنه من أجل عدد طبيعي n ، $2u_n-t_n=5$ ، ثم استنتج عبارة t_n بدلالة n.
   (ب) عين القيم الممكنة للعدد $PGCD(u_n,t_n)$.
   (ج) عين قيم العدد الطبيعيn التي يكون من أجلها: $PGCD(u_n,t_n)=5$.

التمرين الثالث : (4ن)

لكل سؤال من الأسئلة التالية جواب واحد صحيح فقط ، عينه مع التعليل,

1. الشكل الجبري للعدد المركب $z = \dfrac{7+3i}{5-2i}$ هو:

أ) $1+i$ ب) $1-i$ ج) $\dfrac{7}{5}-\dfrac{3}{2}i$

2. مجموعة حلول المعادلة $z = \dfrac{z-2}{z-1}$ في $\mathbb{C}$ هي :

أ) $\{1+i\}$ ب) $\varnothing$ ج) $\{1-i;1+i\}$

3. إذا كان $z = -\sqrt{3} + e^{i\frac{\pi}{6}}$ فإن الشكل الأسي ل z هو :

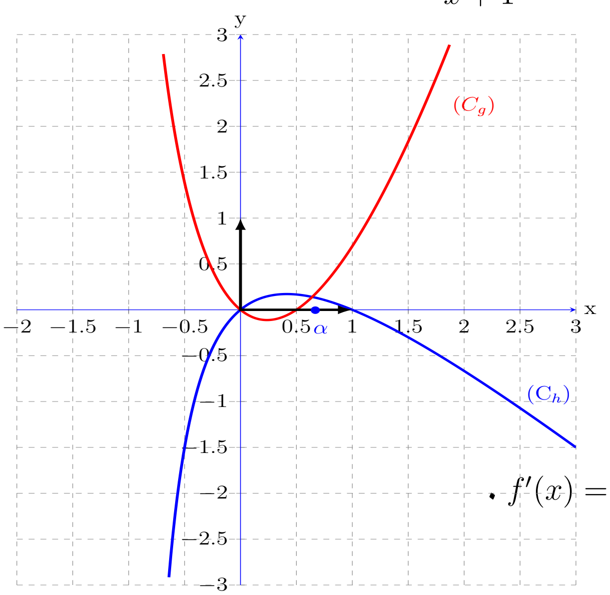
أ) $e^{i\frac{5\pi}{6}}$ ب) $e^{i\frac{5\pi}{3}}$ ج) $\sqrt{3}e^{i\frac{-\pi}{6}}$

4. الحل الخاص للمعادلة التفاضلية $y'' = 2(e^x + 1 - \dfrac{1}{x^2})$ و الذي يحقق $f(1) = 2e+1$ و $f'(1) = 2e+4$ هي الدالة f بحيث:

أ) $f(x) = 2e^x + 2lnx + x^2$ ب) $f(x) = 2e^x + x^2 + 1$ ج) $f(x) = e^{2x} + 2lnx + x^2 + 1$

التمرين الرابع : (7ن)

I) لتكن الدالتان gوhالمعرفتان على المجال $]-1;+\infty[$ ب $g(x) = (2x-1)ln(x+1)$ و $h(x) = \dfrac{-x^2+x}{x+1}$. وليكن (C_g) و (C_h) على الترتيب تمثيلهما في المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ و α فاصلة نقطة تقاطعهما كما هو موضح في الشكل المقابل .



1. بقراءة بيانية عين الوضع النسبي للمنحنيين (C_g) و (C_h).

II) نعتبر الدالة fالمعرفة على $]-1;+\infty[$ ب $f(x) = (x^2-x)ln(x+1)$.
وليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، ثم بين أن $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} -1} f(x) = -\infty$ و استنتج أن (C_f) يقبل مستقيم مقارب (T) يطلب تعيين معادلته .
2. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-1;+\infty[$ ، $f'(x) = g(x) - h(x).$.
3. استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.
4. عين نقط تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل .
5. أنشئ (T) و المنحنى (C_f) . (يعطى $\alpha \simeq 0,64$ و $f(\alpha) \simeq -0,11$)

III) لتكن الدالة k المعرفة على $]-1;+\infty[$ ب $k(x) = -f(x)$.

1. اشرح كيف يمكن إنشاء (C_k) التمثيل البياني للدالة k إنطلاقا من (C_f) ثم أنشئه على نفس المعلم .
2. أثبت أن الدالة F المعرفة ب $F : x \mapsto (\dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{5}{6})ln(x+1) - \dfrac{x^3}{9} + \dfrac{5x^2}{12} - \dfrac{5x}{6}$ دالة أصلية للدالة f على المجال $]-1;+\infty[$
3. استنتج ب cm^2 مساحة الحيز االمستوي المحصور بالمنحنى (C_f) ، (C_k) و المستقيمات التي معادلتها $x=0$ و $x=\alpha$.

إنتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول : (4ن)

يحتوي كيس على أربع كريات بيضاء مرقمة 0، 2 ، 7 و -3 و ثلاث كريات خضراء مرقمة 0 و 7 و 4 و كريتان حمراء مرقمة 2 و 4 (الكريات لا نفرق بينها باللمس) نسحب كريتين عشوائيا في ان واحد.

1. احسب احتمال الحوادث التالية :

A : "سحب كريتين من نفس اللون"　　B : "سحب كريتين رقماهما متوافقان بترديد 5"

C : "سحب كريتين جداء أرقامهما معدوم"

2. بين أن $P(A \cap C) = \dfrac{5}{36}$ ثم استنتج $P(A \cup C)$.

3. ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب عدد الكريات ذات رقم زوجي الباقية في الكيس .

(ا) عرف قانون احتمال المتغير العشوائي X.

(ب) احسب الامل الرياضياتي و التباين للمتغير العشوائي X .

4. عين قيمتي العددين الحقيقين α و β حتى يكون $E(\alpha X + \beta) = 0$ و $V(\alpha X + \beta) = \dfrac{7}{2}$.

التمرين الثاني : (5ن)

لتكن (u_n) المتتالية المعرفة بحدها الأول $u_1 = \dfrac{1}{2}$ و من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $u_{n+1} = \left(\dfrac{n+1}{2n}\right) u_n$

1. (ا) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n: $u_n > 0$

(ب) أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ، ثم استنتج أنها متقاربة.

2. نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $v_n = \dfrac{u_n}{n}$.

(ا) برهن أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\dfrac{1}{2}$.

(ب) أكتب كلا من v_n ثم u_n بدلالة n ، ثم احسب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

3. نعتبر المتتالية (t_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $t_n = ln(v_n)$.

(ا) برهن أن المتتالية (t_n) حسابية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .

(ب) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث $S_n = (v_1 + t_1) + (v_2 + t_2) + ... + (v_n + t_n) + t_{n+1} + t_{n+2} + ... + t_{2n}$

التمرين الثالث : (4ن)

1. (ا) ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة 2^n على 7.

(ب) برهن أن العدد $2025^{1446} + 1446^{2025} - 2 \times 1954^{1962}$ يقبل القسمة على 7.

2. نعتبر في مجموعه الاعداد الصحيحه $\mathbb{Z}$ المعادله (E) ذات المجهولين $(x;y)$التالية

$$74x - 9y = 204 \quad ...(E)$$

(ا) عين الحل الخاص $(x_0;y_0)$ للمعادلة (E) الذي يحقق $x_0 - y_0 = 1$.

(ب) استنتج حلول المعادلة (E) في $\mathbb{Z}^2$.

(ج) حلل العدد 204 إلى جداء عوامل أولية ثم استنتج القيم الممكنة ل $PGCD(x;y)$ حيث الثنائية $(x;y)$ حل للمعادلة (E).

التمرين الرابع : (07ن)

I) نعتبر الدالة gالمعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي $g(x) = (2x+1)e^x - 1$.

1. احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

2. ادرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

3. احسب $g(0)$ ثم استنتج اشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II) نعتبر الدالة fالمعرفة على $\mathbb{R}$ ب $f(x) = x(e^x - 1)^2$ وليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2. (ا) بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$.

   (ب) ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ).

3. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) = (e^x - 1)g(x)$.

4. استنتج اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

5. اكتب معادلة (T) مماس المنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة x_0 والمار من مبدأ المعلم.

6. أنشئ كلا من (T) ، (Δ) و (C_f).

7. (ا) تحقق أن $H : x \mapsto 2(x-1)e^x + \dfrac{1}{4}(1-2x)e^{2x}$ دالة أصلية على $\mathbb{R}$ للدالة h حيث $h(x) = x - f(x)$.

   (ب) احسب $\int_0^{ln2} h(x)dx$ ثم فسر النتيجة بيانيا.

إنتهى الموضوع الثاني

الأستاذ : محيوص محمد

السنة الدراسية: 2024 / 2025

تصحيح الموضوع الأول

التمرين الأول (04 نقاط)

FB: P.Mohamed Maths

1. حساب إحتمال الحوادث :

$$\bullet P(A)=\frac{A_5^3}{A_9^3}=\frac{5}{42} \qquad \bullet P(B)=\frac{3.A_1^1.A_8^2}{A_9^3}=\frac{1}{3} \qquad \bullet P(C)=\frac{A_1^1.A_8^2}{A_9^3}=\frac{1}{9}$$

2. تبيان أن $P(A\cap C)=\frac{1}{42}$ ثم استنتاج $P(A\cup C)$:

$$\bullet P(A\cap C)=\frac{A_1^1.A_4^2}{A_9^3}=\frac{1}{42}$$

$$\bullet P(A\cup C)=P(A)+P(B)-P(A\cap C)=\frac{13}{63}$$

3. تعيين قانون الإحتمال :

x_i	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	$\frac{5}{42}$	$\frac{10}{21}$	$\frac{5}{14}$	$\frac{1}{21}$

$$P(X=1)=\frac{3A_4^1.A_5^2}{A_9^3}=\frac{10}{21}$$

بنفس الطريقة نعين إحتمال تحقق بقية المخارج.

4. حساب الأمل الرياضياتي و التباين :

لدينا

$$\bullet E(X)=\sum_{i=1}^{4}x_i.p_i=\frac{4}{3}$$

5. حساب احتمال الحدث $(logX>0)$:

لدينا $(logX>0)$ تكافئ $(X>10^0)$ أي $(X>1)$ و عليه

$$P(logX>0)=P(X=2)+P(X=3)=\frac{17}{42}$$

التمرين الثاني (05 نقطة)

FB: P.Mohamed Maths

1. البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n=2^{n+1}+1$

نضع : $P(n):u_n=2^{n+1}+1$

- لما $n=0$ لدينا $u_0=3$ ومنه $P(0)$ محققة.
- نفرض صحة $P(n)$ من اجل عدد طبيعي كيفي n ونبرهن صحة $P(n+1)$ أي $u_{n+1}=2^{n+2}+1$.

البرهان:

لدينا

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 2u_n - 1 \\ &= 2(2^{n+1}+1) - 1 \\ &= 2^{n+2} + 1 \end{aligned}$$

و منه حسب مبدأ البرهان بالتراجع من أجل كل عدد طبيعي n $u_n = 2^{n+1} + 1$.

2. هل العددان u_n وu_{n+1} أوليان فيما بينهما :

لدينا $u_{n+1} = 2u_n - 1$ و منه $-u_{n+1} + 2u_n = 1$ و منه حسب مبرهنة بيزو العددان u_n وu_{n+1} أوليان فيما بينهما.

3. تحديد بواقي قسمة 2^n و على 5 :

$n =$	$4k$	$4k+1$	$4k+2$	$4k+3$
باقي قسمة 2^n على 5	1	2	4	3

حيث $k \in \mathbb{Z}$

4. استنتاج باقي قسمة العدد 1447^{2025} على 5 :

لدينا $\begin{cases} 1447 \equiv 2^2\,[5] \\ 2025 = 4 \times 506 + 1 \end{cases}$ و عليه

$$1447^{2025} \equiv 2^{4\times 506+1}\,[5]$$

$$1447^{2025} \equiv 2\,[5]$$

5. البرهان بالتراجع أنه من أجل عدد طبيعي n ، $2u_n - t_n = 5$

نضع : $P(n) : 2u_n - t_n = 5$

- لما $n = 0$ لدينا $2u_0 - t_0 = 5$ ومنه $P(0)$ محققة.
- نفرض صحة $P(n)$ من اجل عدد طبيعي كيفي n ونبرهن صحة $P(n+1)$ أي $2u_{n+1} - t_{n+1} = 5$.

البرهان:

لدينا

$$\begin{aligned} 2u_{n+1} - t_{n+1} &= 2(2u_n - 1) - (2t_n + 3) \\ &= 2(2u_n - t_n) - 5 \\ &= 2 \times 5 - 5 \\ &= 5 \end{aligned}$$

و منه حسب مبدأ البرهان بالتراجع من أجل كل عدد طبيعي n $2u_n - t_n = 5$.

استنتاج عبارة t_n بدلالة n

لدينا $2u_n - t_n = 5$ و منه $t_n = 2u_n - 5$ أي $t_n = 2^{n+2} - 3$.

6. تعيين القيم الممكنة للعدد $PGCD(u_n, t_n)$:

نضع $PGCD(u_n, t_n) = d$ و عليه $\begin{cases} d \mid 2^{n+1}+1 \\ d \mid 2^{n+2}-3 \end{cases}$ و منه $d \mid 2(2^{n+1}+1)-(2^{n+2}-3)$ أي $d \mid 5$

و منه $d \in \{1,5\}$.

7. تعيين قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها: $PGCD(u_n, t_n) = 5$:

$PGCD(u_n, t_n) = 5$ معناه $\begin{cases} 5 \mid 2^{n+1}+1 \\ 5 \mid 2^{n+2}-3 \end{cases}$ و منه $\begin{cases} 2^{n+1}+1 \equiv 0\,[5] \\ 2^{n+2}-3 \equiv 0\,[5] \end{cases}$ أي $\begin{cases} 2^{n+1} \equiv 4\,[5] \\ 2^{n+2} \equiv 3\,[5] \end{cases}$

مما سبق :

$n =$	$4k$	$4k+1$	$4k+2$	$4k+3$
باقي قسمة 2^n على 5	1	2	4	3
باقي قسمة 2^{n+1} على 5	2	4	3	1
باقي قسمة 2^{n+2} على 5	4	3	1	2

ومنه $PGCD(u_n, t_n) = 5$ من أجل $n = 4k+1$ حيث $k \in \mathbb{Z}$.

التمرين الثالث (04 نقاط)

FB: P.Mohamed Maths

1. الشكل الجبري للعدد المركب $z = \dfrac{7+3i}{5-2i}$ هو: أ) $1+i$

2. مجموعة حلول المعادلة $z = \dfrac{z-2}{z-1}$ في $\mathbb{C}$ هي : ج) $\{1-i; 1+i\}$

3. إذا كان $z = -\sqrt{3} + e^{i\frac{\pi}{6}}$ فإن الشكل الأسي لـ z هو : أ) $e^{i\frac{5\pi}{6}}$

4. الحل الخاص للمعادلة التفاضلية $y'' = 2(e^x + 1 - \dfrac{1}{x^2})$ و الذي يحقق $f(1) = 2e+1$ و $f'(1) = 2e+4$ هي الدالة f بحيث: أ) $f(x) = 2e^x + 2\ln x + x^2$

التمرين الرابع (07 نقطة)

FB: P.Mohamed Maths

1. النهايات :

- لما $x \in]-1,0[\cup]\alpha; +\infty[$ (C_g) فوق (C_h) .
- لما $x \in]0, \alpha[$ (C_g) تحت (C_h) .
- (C_g) يقطع (C_h) في نقطتين فاصلتهما 0 و α.

2. النهايات :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (x^2-x)ln(x+1) = +\infty$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\overset{>}{\to}-1} f(x) &= \lim_{x\overset{>}{\to}-1} [(x+1)(x-2)+2]\,ln(x+1)\\ &= \lim_{x\overset{>}{\to}-1} [(x+1)(x-2)ln(x+1)+2ln(x+1)]\\ &= \lim_{t\overset{>}{\to}0} [(t-3)\,tln(t)+2ln(t)]\\ &= -\infty\end{aligned}$$

3. تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) = (e^x-1)g(x)$:

الدالة f قابلة للإشتقاق على D_f و لدينا:

$$\begin{aligned}f'(x) &= (2x-1)ln(x+1) + \frac{1}{x+1}(x^2-x)\\ &= g(x)-h(x)\end{aligned}$$

4. إتجاه تغير الدالة f :

الدالة f متزايدة تماما على المجال$]-1,0]$ و على المجال $]\alpha;+\infty[$ و متناقصة تماما على المجال $]0,\alpha[$.

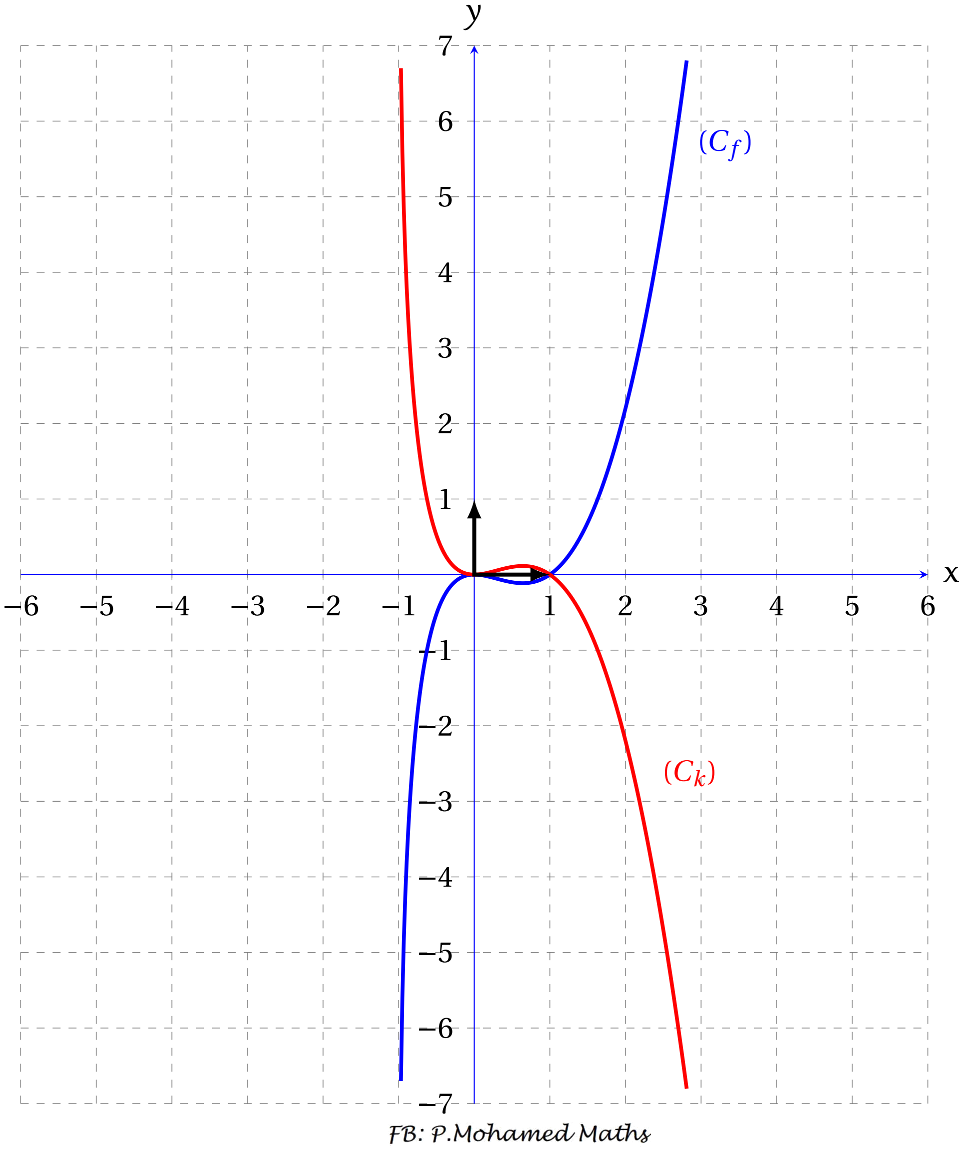
- جدول التغيرات :

x	-1		0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

5. إشارة $g(x)$:

نحل المعادلة $f(x)=0$ أي $(x^2-x)ln(x+1)=0$ و منه $(x^2-x)=0$ أو $ln(x+1)=0$ و منه (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين $(0;0)$ و $(1;0)$.

6. التمثيل البياني:



7. إثبات أن F دالة أصلية ل f على $]-1;+\infty[$:

من أجل كل x من $]-1;+\infty[$ لدينا $F'(x) = f(x)$ و منه المطلوب.

8. حساب قيمة $\int_0^{ln2} h(x)dx$:

لدينا

$$\begin{aligned}\int_0^{\alpha}\left[k(x) - f(x)\right]dx &= \int_0^{\alpha}\left[-f(x) - f(x)\right]dx \\ &= -2\int_0^{\alpha} f(x)dx \\ &= -2\left[F(x)\right]_0^{\alpha} \\ &= -2F(\alpha)\end{aligned}$$

تصحيح الموضوع الثاني

التمرين الأول (04 نقاط)

FB: P.Mohamed Maths

1. حساب إحتمال الحوادث :

$\bullet P(A)=\frac{C_4^2+C_3^2+C_2^2}{C_9^2}=\frac{10}{36}$ $\bullet P(B)=\frac{C_5^2+C_2^2+C_2^2}{C_9^2}=\frac{12}{36}$ $\bullet P(C)=\frac{C_2^2+C_2^1.C_7^1}{C_9^2}=\frac{15}{36}$

2. تبيان أن $P(A\cap C)=\frac{5}{36}$ ثم استنتاج $P(A\cup C)$:

$$\bullet P(A\cap C)=\frac{C_1^1.C_3^1+C_1^1.C_2^1}{C_9^2}=\frac{5}{36}$$
$$\bullet P(A\cup C)=P(A)+P(B)-P(A\cap C)=\frac{20}{36}$$

3. تعيين قانون الإحتمال :

x_i	4	5	6
$P(X=x_i)$	$\frac{15}{36}$	$\frac{18}{36}$	$\frac{3}{36}$

$$P(X=4)=\frac{C_6^2}{C_9^2}=\frac{15}{36}$$

بنفس الطريقة نعين إحتمال تحقق بقية المخارج.

4. حساب الأمل الرياضياتي و التباين :

لدينا

$$\bullet E(X)=\sum_{i=1}^{3}x_i.p_i=\frac{14}{3}$$
$$\bullet V(X)=\sum_{i=1}^{3}x_i^2.p_i-E^2(X)=\frac{7}{18}$$

5. تعيين قيمتي العددين الحقيقين α و β :

لدينا : $\begin{cases}E(\alpha X+\beta)=0\\ V(\alpha X+\beta)=\frac{7}{2}\end{cases}$ تكافئ $\begin{cases}\alpha E(X)+\beta=0\\ \alpha^2V(\alpha X)=\frac{7}{2}\end{cases}$ و منه $\begin{cases}\alpha\frac{14}{3}+\beta=0\\ \alpha^2\frac{7}{18}=\frac{7}{2}\end{cases}$

بحل الجملة الأخيرة نجد $(\alpha;\beta)\in\{(-3;14),(3;-14)\}$

التمرين الثاني (05 نقطة)

FB: P.Mohamed Maths

1. البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n: $u_n>0$

نضع : $P(n):u_n>0$

- لما $n=1$ لدينا $u_1=\frac{1}{2}>0$ ومنه $P(1)$ محققة.
- نفرض صحة $P(n)$ من اجل عدد طبيعي كيفي غبر معدوم n ونبرهن صحة $P(n+1)$ أي $u_{n+1}>0$.

البرهان:

لدينا $u_n > 0$

و منه $\left(\frac{n+1}{2n}\right)u_n > 0$ (لأن n عدد طبيعي)

و منه حسب مبدأ البرهان بالتراجع من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n $u_n > 0$.

2. اتجاه تغير المتتالية (u_n) :

لدينا

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \left(\frac{n+1}{2n}\right)u_n - u_n \\ &= \left(\frac{-n+1}{2n}\right)u_n \end{aligned}$$

مما سبق لدينا $u_n > 0$ و من أجل كل عدد طبيعي n يحقق $n \geq 1$ لدينا $2n > 0$ و $-n+1 \leq 0$ و عليه $u_{n+1} - u_n \leq 0$ و منه المتالية (u_n) متناقصة تماما ، و بما أنها محدودة من الأسفل ب 0 فهي متقاربة.

3. البرهان أن المتتالية (v_n) هندسية :

من أجل كل عدد طبيعي n لدينا :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{u_{n+1}}{n+1} \\ &= \frac{\left(\frac{n+1}{2n}\right)u_n}{n+1} \\ &= \frac{u_n}{2n} \\ &= \frac{1}{2}v_n \end{aligned}$$

و منه المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$.

4. كتابة كلا من v_n ثم u_n بدلالة n :

من أجل كل عدد طبيعي n لدينا $v_n = v_1.q^{n-1}$ أي $v_n = (\frac{1}{2})^n$ و بما أن $u_n = n.v_n$ فإن $u_n = \frac{n}{2^n}$.

نهاية (u_n):

بما أن (u_n) متقاربة فإن نهايتها l موجودة و تحقق $l = \left(\frac{n+1}{2n}\right)l$ و منه $l(1 - \frac{n+1}{2n}) = 0$ و عليه

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = l = 0$$

5. إثبات أن (t_n) متتالية حسابية :

$$\begin{aligned} t_{n+1} - t_n &= ln(v_{n+1}) - ln(v_n) \\ &= ln(\frac{v_{n+1}}{v_n}) \\ &= ln(\frac{1}{2}) \\ &= -ln2 \end{aligned}$$

و منه (t_n) متتالية حسابية أساسها $-ln2$.

6. حساب المجموع :

$$S_n = (v_1+t_1)+(v_2+t_2)+...+(v_n+t_n)+t_{n+1}+t_{n+2}+...+t_{2n}$$
$$= v_1+v_2+...+v_n+t_1+t_2+...+t_{2n}$$
$$= 1-(\frac{1}{2})^n - n(1+2n)ln2$$

التمرين الثالث (04 نقاط)

FB: P.Mohamed Maths

1. تحديد بواقي قسمة 2^n و على 7 :

حيث $k\in\mathbb{Z}$

$n=$	$3k$	$3k+1$	$3k+2$
باقي قسمة 2^n على 7	1	2	4

2. تبيان أن العدد $2025^{1446}+1446^{2025}-2\times1954^{1962}$ يقبل القسمه على 7 :

لدينا $\begin{cases} 2025\equiv 2\,[7] \\ 1446\equiv 2^2\,[7] \\ 1954\equiv 1\,[7]\end{cases}$ و عليه

$$2025^{1446}+1446^{2025}-2\times1954^{1962}\equiv 2^{1446}+2^{4050}-2\times1^{1962}\,[7]$$
$$2025^{1446}+1446^{2025}-2\times1954^{1962}\equiv 1+1-2\times1\,[7]$$
$$2025^{1446}+1446^{2025}-2\times1954^{1962}\equiv 0\,[7]$$

و منه $2025^{1446}+1446^{2025}-2\times1954^{1962}$ يقبل القسمة على 7.

3. تعيين الحل الخاص للمعادلة (E) :

لتكن الثنائية $(x_0;y_0)$ حلا للمعادلة (E) و منه $\begin{cases} 74x_0-9y_0=204 & (*) \\ x_0-y_0=1 & (**)\end{cases}$

من $(**)$ نجد $y_0=x_0-1$. نعوض في $(*)$ فنجد $x_0=3$ و $y_0=2$ و منه الثنائية $(3;2)$ حل ل (E) يحقق الشرط المطلوب.

4. تعيين حلول المعادلة (E) :

لتكن الثنائية $(x;y)$ حل للمعادلة (E) و منه $\begin{cases} 74x-9y=204 & (*) \\ 74\times3-9\times2=204 & (**)\end{cases}$

بطرح $(**)$ من $(*)$ نجد $74(x-3)-9(y-2)=0$ و منه $74(x-3)=9(y-2)$.

و منه $74|9(y-2)$ و بما أن 74 و 9 أوليان فيما بينهما فإن $74|y-2$ و عليه $y=74k+2$ حيث k عدد صحيح .

بتعويض قيمة y في $(*)$ نجد $x=9k+3$. و منه $S=\{(9k+2;74k+3)\,/\,k\in\mathbb{Z}\}$

5. تعيين قيم $PGCD(x;y)$:

لدينا $204 = 2^2 \times 3 \times 17$.

نضع $PGCD(x;y) = d$ و عليه $\begin{cases} d \mid 9k+2 \\ d \mid 74k+3 \end{cases}$ و منه $d \mid 74(9k+3) - 9(74k+3)$ أي $d \mid 204$

و منه $d \in \{1,2,3,4,6,12,17,34,51,68,102,204\}$.

التمرين الرابع (07 نقطة)

FB: P.Mohamed Maths

1. النهايات :

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} 2xe^x + e^x - 1 = -1$$
$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} (2x+1)e^x - 1 = +\infty$$

2. إتجاه تغير الدالة g :

الدالة g قابلة للإشتقاق على مجال تعريفها و لدينا $g'(x) = e^x(2x+3)$.

بما أن $e^x > 0$ فإن إشارة $g'(x)$ من إشارة $2x+3$ و عليه الدالة g متناقصة تماما على المجال $\left]-\infty; -\frac{3}{2}\right[$.
متزايدة تماما على المجال $\left]-\frac{3}{2}; +\infty\right[$.

- جدول التغيرات :

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	-1 ↘	$g(-\frac{3}{2})$	↗ $+\infty$

3. إشارة $g(x)$:

لدينا $g(0) = 0$ و منه إشارة $g(x)$ من الشكل

x	$-\infty$	0	$+\infty$
إشارة $g(x)$	$-$	0	$+$

1. النهايات :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x(e^x-1)^2 = -\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x(e^x-1)^2 = +\infty$$

2. إثبات أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x$ مستقيم مقارب ل (C_f) بجوار $-\infty$:.

لدينا :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}[f(x)-x] &= \lim_{x\to-\infty} x(e^x-1)^2-x\\ &= \lim_{x\to-\infty} xe^{2x}+2xe^x\\ &= 0\end{aligned}$$

و عليه (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ) بجوار $-\infty$ معادلته $y=x$.

3. تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x)=(e^x-1)g(x)$:

الدالة f قابلة للإشتقاق على D_f و لدينا:

$$\begin{aligned}f'(x) &= (e^x-1)^2+2x(e^x-1)\\ &= (e^x-1)g(x)\end{aligned}$$

4. اتجاه التغير :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	
e^x-1		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$+$	

و منه الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

• جدول التغيرات :

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

5. كتابة معادلة (T) مماس المنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة x_0 :

معادلة المماس عند النقطة ذات الفاصلة x_0 هي $y = f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ أي $y = (e^{x_0}-1)\left[(2x_0+1)e^{x_0}-1\right](x-x_0)+x_0(e^{x_0}-1)^2$.

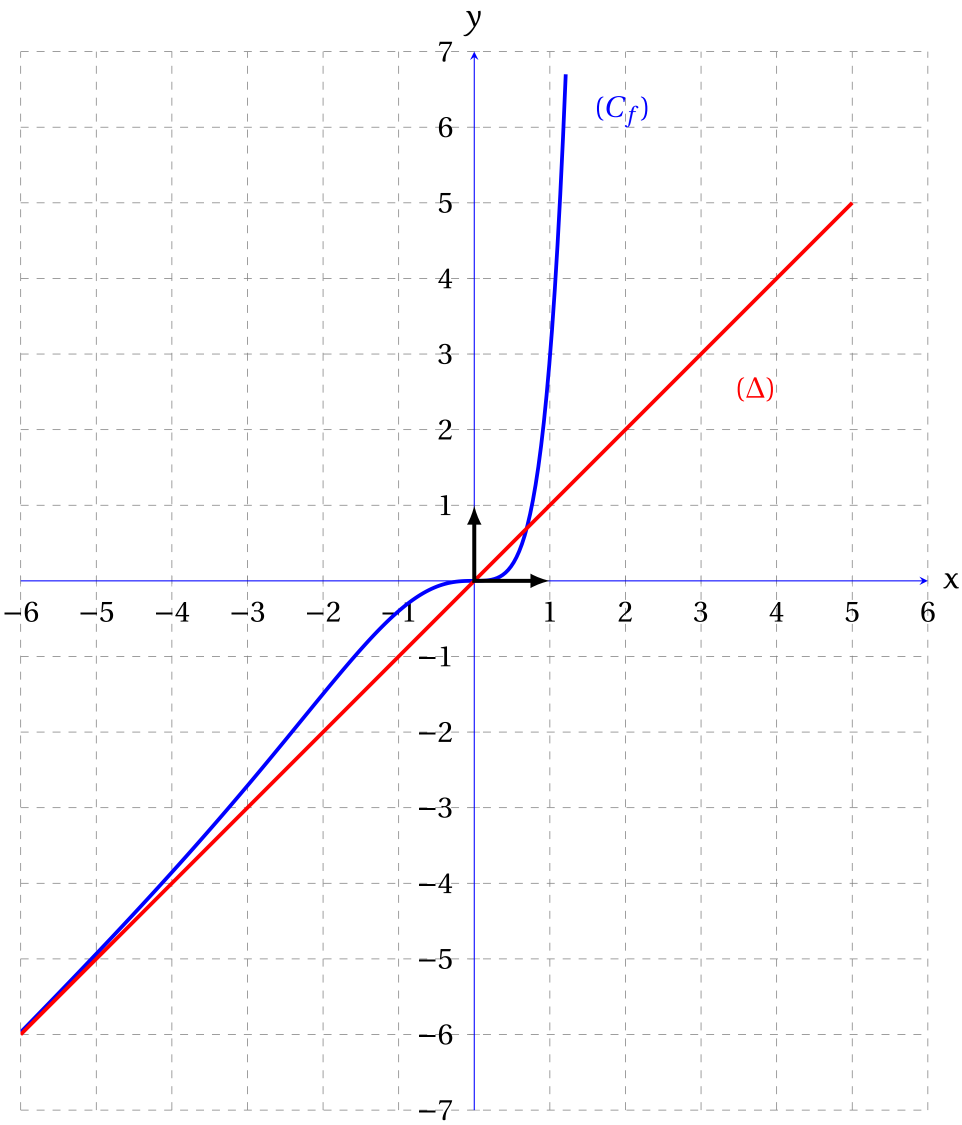
المماس (T) يشمل المبدأ معناه:

$$\begin{aligned}
&(e^{x_0}-1)\left[(2x_0+1)e^{x_0}-1\right](-x_0)+x_0(e^{x_0}-1)^2=0\\
&(e^{x_0}-1)\left[(2x_0e^{x_0}+e^{x_0}-1)(-x_0)+x_0(e^{x_0}-1)\right]=0\\
&(e^{x_0}-1)\left[-2x_0^2e^{x_0}-x_0e^{x_0}+x_0+x_0e^{x_0}-x_0\right]=0\\
&(e^{x_0}-1)(-2x_0^2e^{x_0})=0
\end{aligned} \quad (1)$$

و منه $x_0=0$ و عليه معادلة (T) من الشكل $(T): y=0$

6. التمثيل البياني:

FB: P.Mohamed Maths



FB: P.Mohamed Maths

7. إثبات أن H دالة أصلية لـ h على $\mathbb{R}$:

من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا $H'(x)=h(x)$ و منه المطلوب.

8. حساب قيمة $\int_0^{ln2} h(x)dx$:

لدينا $\int_0^{ln2} h(x)dx = [H(x)]_0^{ln2} = ln(4) - \frac{5}{4}$

قيمة التكامل هي مساحة الحيز المحصور بين (C_f) ، (Δ) و المستقيمات التي معادلتها $x = 0$ و $x = ln2$.