الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية — الديوان الوطني للامتحانات و المسابقات

امتحان البكالورياالتجريبي لثانوية بوقروة الذوادي–بابور– — دورة : ماي 2025

الشعبة : رياضيات

اختبار في مادة : الرياضيات — المدة :04 سا و 30 د

على المترشّح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأوّل

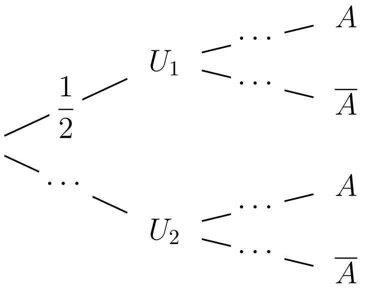
التمرين الأوّل (4 ن)

نعتبر صندوقين غير شفّافين U_1 و U_2 بهما كريّات متماثلة لا نفرّق بينها عند اللّمس.

- U_1 يحتوي على 5 كريّات حمراء و 3 كريّات خضراء .
- U_2 يحتوي على 3 كريّات حمراء و 4 كريّات خضراء .

نرمي عشوائيا قطعة نقود غير مزيّفة، إذا تحصّلنا على وجه نسحب عشوائيا كريّتين في آن واحد من U_1، وإذا تحصّلنا على ظهر نسحب عشوائيا كريّتين على التوالي دون إرجاع من U_2، ونعتبر الأحداث الآتية.

- الحدث A: " الحصول على كريّتين من نفس اللّون " .
- الحدث U_i: " سحب الكريّتين من الصندوق U_i " مع $i \in \{1;2\}$



1. أ. بيّن أنّ $P_{U_1}(A) = \dfrac{13}{28}$ و $P_{U_2}(A) = \dfrac{3}{7}$

ب. أنقل شجرة الاحتمالات المقابلة ثمّ أكملها.

2. أُحسب احتمال أن تكون الكريّتين المسحوبتين من الصندوق U_2 علما أنّهما مختلفتين في اللّون.

3. نعتبر X المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكلّ إمكانية عدد الكريات الخضراء المسحوبة.

أ. بيّن أنّ $P(X=0) = \dfrac{1}{4}$ و $P(X=1) = \dfrac{31}{56}$ ثمّ استنتج قانون احتمال المتغيّر العشوائي X

ب. أُحسب احتمال الحدث ($X^{1962} + X^{2025} + 2 \equiv 0\,[X+1]$)

التمرين الثاني (4 ن)

المتتالية العددية $(U_n)_{n\geq 1}$ معرّفة على $\mathbb{N}^*$ كما يلي : $U_n = \dfrac{2^n}{n!}$

1. أ. بيّن أنّه: من أجل كلّ n من $\mathbb{N}^*$ ، $U_n > 0$

ب. بيّن أنّ $(U_n)_{n\geq 1}$ متناقصة على $\mathbb{N}^*$ ثمّ استنتج أنّها متقاربة.

2. المتتالية العددية $(V_n)_{n\geq 1}$ معرّفة على $\mathbb{N}^*$ كما يلي : $V_n = \dfrac{U_{n+1}}{U_n}$

أ. بيّن أنّه من أجل كلّ n من $\mathbb{N}^*$ حيث $n \geq 2$ ، $V_n \leq \dfrac{2}{3}$

ب. أثبت أنّه : من أجل كلّ n من $\mathbb{N}^*$ حيث $n \geq 2$ ، $U_n \leq \frac{9}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ ثمّ استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

.3 من أجل كلّ n من $\mathbb{N}^*$ نضع : $S_n = \log(2V_1) + \log(3V_2) + \cdots + \log(nV_{n-1})$

• أُحسب S_n بدلالة n ثمّ استنتج أنّ $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n} = \log 2$

التمرين الثالث (5 ن)

نعتبر في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ المعادلة (E) المعرّفة كما يلي $(E) : 1962x - 977y = 8$

.1 أ. بيّن أنّ العدد 977 أوّلي ثمّ استنتج أنّ المعادلة (E) تقبل حلولا في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$

ب. عيّن الحلّ الخاص $(x_0; y_0)$ للمعادلة (E) الذي يحقّق $x_0 + 5y_0 = 11$

ج. استنتج مجموعة حلول المعادلة (E)

.2 نعتبر L عددا طبيعيا يكتب $\overline{\alpha\gamma\gamma\beta\beta\alpha}$ في نظام التعداد الذي أساسه 4 حيث α ، β و γ تشكّل بهذا الترتيب حدودا متتابعة من متتالية حسابية والثنائية $(\alpha;\beta)$ حلّ للمعادلة (E)

• عيّن كُلّا من α ، β و γ ثمّ أُكتب L في النظام العشري.

.3 حلّل العدد 2025 إلى جداء عوامل أوليّة ثمّ استنتج قيم العدد الطبيعي n التي تحقّق $2025 \equiv 0\,[n^3]$

.4 نضع : $PGCD(a;b) = d$ و $PPCM(a;b) = m$ حيث $(a;b) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$

• عيّن كلّ الثنائيات $(a;b)$ حيث $a > b$ و التي تحقّق

$$\begin{cases} m = 6d \\ a^3 + b^4 = 2025 \end{cases}$$

التمرين الرّابع (7 ن)

I) الدّالة العددية g معرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $g(x) = x\ln x - 1$

.1 شكّل جدول تغيّرات الدّالة g على $]0;+\infty[$

.2 أ. بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلّا وحيدا α حيث $1,7 < \alpha < 1,8$

ب. استنتج حسب قيم x من $]0;+\infty[$ إشارة $g(x)$

II) الدّالة العددية f معرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $f(x) = (x-1)(\ln x - 1)$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$ حيث $||\overrightarrow{j}|| = 1cm$

.1 أ. أُحسب $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x)$ وفسّر النتيجة هندسيا ثمّ أُحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

ب. بيّن أنّه من أجل كلّ عدد حقيقي x من $]0;+\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{x}$

ج. بيّن أنّ f متناقصة تماما على $]0;\alpha]$ ومتزايدة تماما على $[\alpha;+\infty[$ ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

.2 أ. أُكتب معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة التي فاصلتها 1

ب. أُدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (T)

.3 أ. أنشئ كُلّا من (T) و (C_f). (تُعطى: $f(\alpha) \approx -0,33$).

ب. باستخدام (C_f) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة $f(x) = -x + m$

4. **نعتبر λ عددا حقيقيا حيث** $0 < \lambda < 1$

أ. **أُكتب بدلالة λ العدد $\mathcal{A}(\lambda)$ المعرّف بـ :** $\mathcal{A}(\lambda) = \displaystyle\int_{\lambda}^{1} [f(x) + x - 1]\, dx$ **، ثمّ فسّر النتيجة هندسيا.**

ب. **أُحسب** $\displaystyle\lim_{\lambda \overset{>}{\to} 0} \mathcal{A}(\lambda)$

5. **المتتالية العددية (ω_n) معرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي :** $\omega_n = 1 - \dfrac{f(e^{-n})}{n+1}$

- **أُحسب بدلالة n المجموع S_n حيث** $S_n = \omega_0 + \omega_1 + \cdots + \omega_n$ **ثمّ استنتج** $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} S_n$

انتهى الموضوع الأوّل

رابط الحل إمسح رمز الإستجابة السريعة بعد نهاية مدة الاختبار

الموضوع الثاني

التمرين الأوّل (4 ن)

كيس غير شفّاف به 5 كريّات متماثلة لا نفرّق بينها عند اللّمس، منها كريّتين خضراوين تحملان العددين: 0 و 0 ، كريّتين بيضاوين تحملان العددين المركّبين: $-i$ و i ، كريّة حمراء تحمل العدد المركّب: $-i$

نسحب عشوائيا من الكيس ثلاث كريّات في آن واحد.

I) 1. أُحسب احتمال كلّا من الحدثين الآتيين.

أ. A: " الحصول على ثلاث كريّات مجموعها عدد حقيقي ".

ب. B: " الحصول على ثلاث كريّات تشكّل ألوان العلم الوطني ".

2. بيّن أنّ $P(A\cap B)=\dfrac{1}{5}$ ، ثمّ استنتج $P\left(\overline{A\cup B}\right)$

II) نضيف إلى الكيس n كريّة تحمل العدد 0 حيث $n\in\mathbb{N}^*$ ، ونسحب عشوائيا من الكيس كريّتين على التوالي دون إرجاع، ونعتبر X المتغيّر العشوائي الذي يُرفق كل إمكانية بطويلة مجموع العددين المحصّل عليهما.

1. أ. بيّن أنّ $P(X=0)=\dfrac{n^2+3n+6}{n^2+9n+20}$

ب. عرّف قانون احتمال المتغيّر العشوائي X

2. عيّن قيمة n التي تحقّق $P\left(A_X^2=2\right)=\dfrac{1}{15}$

التمرين الثاني (4 ن)

من أجل كلّ n من $\mathbb{N}^*$ نضع: $a_n=3\times 2^n-1$ و $b_n=3\times 2^n+1$

1. أ. بيّن أنّ $PGCD\left(a_n;b_n\right)=PGCD\left(a_n;2\right)$

ب. استنتج أنّ $PGCD\left(a_n;b_n\right)=1$

2. من أجل كلّ n من $\mathbb{N}^*$ نضع: $S_n=n+a_1b_1+\cdots+a_nb_n$

أ. بيّن أنه من أجل كلّ n من $\mathbb{N}^*$ ، $S_n=12\left(4^n-1\right)$

ب. استنتج أنّ $S_n\equiv 0\,[9]$

3. أ. عيّن قيم n من $\mathbb{N}^*$ التي يكون من أجلها S_n مضاعفا للعدد 5

ب. استنتج أنّ مجموعة قيم رقم آحاد العدد S_n هي $\{0;6\}$

4. عيّن قيم n من $\mathbb{N}^*$ التي يكون من أجلها $S_{2025}+S_{1962}+n\equiv 0\,[5]$

التمرين الثالث (5 ن)

من أجل كلّ z من $\mathbb{C}$ نضع : $P(z)=z^4+z^3-z^2+z-2$

I) 1. بيّن أنّه من أجل كلّ z من $\mathbb{C}$ ، $\overline{P(z)}=P(\overline{z})$

2. حلّ في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z)=0$ علما أنّها تقبل حلّا تخيّليا صرفا.

II) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ ، نعتبر النقط A ، B و C التي لاحقاتها z_A ، z_B و z_C على الترتيب حيث : $z_A = i$ ، $z_B = \overline{z_A}$ ، $z_C = |z_A|$

1. بيّن أنّ النقط A ، B و C تنتمي إلى نفس الدائرة يُطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.
2. أ. أُكتب العدد المركّب $\dfrac{z_B - z_C}{z_A - z_C}$ على الشّكل الجبري.
   ب. استنتج طبيعة المثلّث ABC
3. نعتبر النقطة M من المستوي ذات اللّاحقة z حيث $z = \sin\alpha + i(\sin\alpha - 1)$ مع $\alpha \in \mathbb{R}$.
   - حدّد طبيعة مجموعة النقط M ذات اللّاحقة z لمّا α يمسح المجال $[0;\pi]$

التمرين الرّابع (7 ن)

نعتبر k عددا من $\mathbb{N}^*$ ، الدّالة العددية f_k معرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f_k(x) = x - ke^{-x}$

و (C_k) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$

1. أ. أُحسب كُلّا من $\lim\limits_{x\to+\infty} f_k(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f_k(x)$
   ب. بيّن أنّ الدّالة f_k متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.
2. أ. أُحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} [f_k(x) - x]$ ثمّ فسّر النتيجة هندسياً.
   ب. أُدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_k) و المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$
3. أ. أنشئ كُلّا من (Δ) و (C_2)
   ب. باستخدام (C_2) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة : $f_2(x) = x + \ln m$
4. أ. أُدرس الوضع النسبي للمنحنيين (C_k) و (C_{k+1})
   ب. بيّن أنّ المعادلة $f_k(x) = 0$ تقبل حلّا وحيدا α_k حيث $\alpha_k > 0$
   ج. استنتج أنّ المتتالية (α_k) متزايدة تماما
5. أ. بيّن أنّه من أجل كلّ x من $\mathbb{R}$: $x < e^x$
   ب. استنتج أنّه: من أجل كلّ k من $\mathbb{N}^*$ ، $\alpha_k > \ln\sqrt{k}$
6. المتتالية العددية $(\mu_k)_{k\geq1}$ معرّفة على $\mathbb{N}^*$ بـ $\mu_k = \dfrac{1}{\alpha_{k+1} - \alpha_k}\displaystyle\int_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}} f_k(t)dt$
   أ. بيّن أنّه: من أجل كلّ k من $\mathbb{N}^*$ ، $0 \leq \mu_k \leq f_k(\alpha_{k+1})$
   ب. تحقّق أنّه: من أجل كلّ k من $\mathbb{N}^*$ ، $f_k(\alpha_{k+1}) = e^{-\alpha_{k+1}}$ ثمّ استنتج $\lim\limits_{k\to+\infty} \mu_k$

انتهى الموضوع الثاني

رابط الحل(إمسح رمز الإستجابة السريعة بعد نهاية مدة الإختبار)

إجابة نموذجية مقترحة للموضوع الأوّل

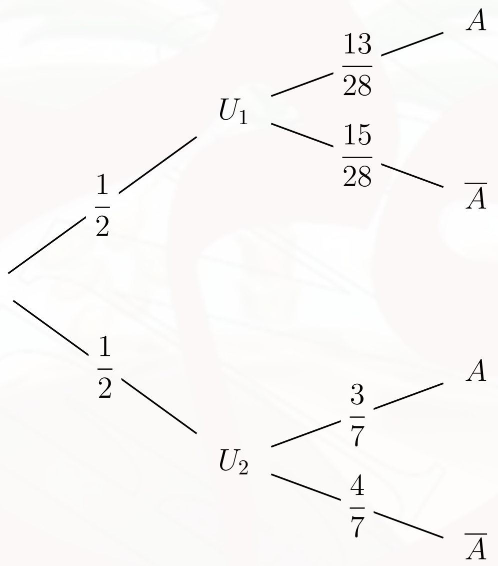
التمرين الأوّل (4 ن)

1. **أ.** تبيين أنّ $P_{U_1}(A) = \dfrac{13}{28}$ و $P_{U_2}(A) = \dfrac{3}{7}$

$$P_{U_1}(A) = \frac{C_5^2 + C_3^2}{C_8^2} = \frac{13}{28}$$

$$P_{U_2}(A) = \frac{A_3^2 + A_4^2}{A_7^2} = \frac{18}{42} = \frac{3}{7}$$

ب. نقل شجرة الاحتمالات المقابلة ثمّ إكمالها.



2. حساب احتمال أن تكون الكريّتين المسحوبتين من الصندوق U_2 علما أنّهما مختلفتين في اللّون.

$$P_{\bar{A}}(U_2) = \frac{P\left(U_2 \cap \bar{A}\right)}{P\left(\bar{A}\right)} = \frac{P\left(U_2 \cap \bar{A}\right)}{P\left(U_1 \cap \bar{A}\right) + P\left(U_2 \cap \bar{A}\right)} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{4}{7}}{\frac{1}{2} \times \frac{15}{28} + \frac{1}{2} \times \frac{4}{7}} = \frac{8}{23}$$

3. أ. تبيين أنّ $P(X=0)=\frac{1}{4}$ و $P(X=1)=\frac{31}{56}$ ثمّ استنتاج قانون احتمال المتغيّر العشوائي X

$$P(X=1)=\frac{1}{2}\times\frac{C_5^1\times C_3^1}{C_8^2}+\frac{1}{2}\times\frac{2\times A_3^1\times A_4^1}{A_7^2}=\frac{1}{2}\times\frac{15}{28}+\frac{1}{2}\times\frac{24}{42}=\frac{31}{56}$$

$$P(X=0)=\frac{1}{2}\times\frac{C_5^2}{C_8^2}+\frac{1}{2}\times\frac{A_3^2}{A_7^2}=\frac{1}{2}\times\frac{10}{28}+\frac{1}{2}\times\frac{6}{42}=\frac{1}{4}$$

مجموعة قيم المتغيّر العشوائي X هي $\{0;1;2\}$ ، عندئذ لدينا

$$P(X=2)=1-[P(X=0)+P(X=1)]=1-\left(\frac{1}{4}+\frac{31}{56}\right)=\frac{11}{56}$$

وبالتالي

x_i	0	1	2
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{31}{56}$	$\frac{11}{56}$

ب. حساب احتمال الحدث ($X^{1962}+X^{2025}+2\equiv 0\,[X+1]$)

لدينا

$$X+1\equiv 0\,[X+1]$$

ومنه

$$X\equiv -1\,[X+1]$$

وعليه

$$X^{2025}\equiv(-1)^{2025}\,[X+1]\equiv -1\,[X+1]$$

$$X^{1962}\equiv(-1)^{1962}\,[X+1]\equiv 1\,[X+1]$$

وبالتالي

$$X^{1962}+X^{2025}+2\equiv 1-1+2\,[X+1]\equiv 2\,[X+1]$$

ومنه

$$2\equiv 0\,[X+1]$$

وعليه

$X+1=2$ أو $X+1=1$

أي

$X=1$ أو $X=0$

عندئذ نستنتج أنّ

$$\begin{aligned}P\left(X^{1962}+X^{2025}+2\equiv 0\,[X+1]\,\right)&=P\left(X=0\right)+P\left(X=1\right)\\&=\frac{1}{4}+\frac{31}{56}\\&=\frac{45}{56}\end{aligned}$$

■

التمرين الثاني (٤ ن)

1. **أ.** تبيين أنّه: من أجل كلّ n من $\mathbb{N}^*$ ، $U_n>0$

من أجل كلّ n من $\mathbb{N}^*$ لدينا

$$\begin{cases}2^n>0\\ n!>0\end{cases}$$

ومنه $U_n>0$

ب. تبيين أنّ $(U_n)_{n\geq 1}$ متناقصة على $\mathbb{N}^*$ ثمّ استنتاج أنّها متقاربة.

من أجل كلّ n من $\mathbb{N}^*$ لدينا

$$\begin{aligned}\frac{U_{n+1}}{U_n}&=\frac{\dfrac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\dfrac{2^n}{n!}}\\&=\frac{2^n\times 2}{(n+1)\,n!}\times\frac{n!}{2^n}\\&=\frac{2}{n+1}\end{aligned}$$

ولدينا

$$n\geq 1$$

ومنه

$$n+1\geq 2$$

وعليه

$$\frac{2}{n+1}\leq\frac{2}{2}$$

أي

$$\frac{U_{n+1}}{U_n}\leq 1$$

وبالتالي $(U_n)_{n\geq 1}$ متناقصة على $\mathbb{N}^*$.

استنتاج التقارب

لدينا

- $(U_n)_{n\geq 1}$ متناقصة على $\mathbb{N}^*$
- من أجل كلّ n من $\mathbb{N}^*$ ، $U_n>0$ ، وعليه $(U_n)_{n\geq 1}$ محدودة من الأسفل بالعدد 0

وبالتالي $(U_n)_{n\geq 1}$ متقاربة.

2. أ. تبيين أنّه من أجل كلّ n من $\mathbb{N}^*$ حيث $n \geq 2$ ، $V_n \leq \frac{2}{3}$

من أجل كلّ n من $\mathbb{N}^*$ حيث $n \geq 2$ لدينا

$$n \geq 2$$

ومنه

$$n+1 \geq 3$$

وعليه

$$\frac{2}{n+1} \leq \frac{2}{3}$$

أي

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} \leq \frac{2}{3}$$

وبالتالي

$$V_n \leq \frac{2}{3}$$

ب. إثبات أنّه : من أجل كلّ n من $\mathbb{N}^*$ حيث $n \geq 2$ ، $U_n \leq \frac{9}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ ثمّ استنتاج $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

- نرمز للخاصية " $U_n \leq \frac{9}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ " بالرمز $P(n)$.
- نتحقّق من صحّة $P(2)$

لدينا

$$\frac{9}{2} \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{9}{2} \times \frac{4}{3} = 2$$

$$U_2 = \frac{2^2}{2!} = 2$$

ومنه

$$U_2 \leqslant \frac{9}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2$$

وعليه $P(2)$ صحيحة.

- من أجل عدد طبيعي كيفي k حيث $k \geq 2$ نفترض صحّة $P(k)$ ونبرهن صحّة $P(k+1)$.

لدينا

$$\begin{aligned} U_{k+1} &= \frac{2^{k+1}}{(k+1)!} \\ &= \frac{2}{k+1} \times \frac{2^k}{k!} \\ &= V_k U_k \end{aligned}$$

وبما أنّ

$$\begin{cases} 0 < U_k \leqslant \frac{9}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^k \\ 0 < V_k \leqslant \frac{2}{3} \end{cases}$$

فإنّ

$$\begin{aligned} U_{k+1} &\leqslant \frac{2}{3}\times\frac{9}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{k} \\ &\leqslant \frac{9}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{k+1} \end{aligned}$$

وبالتالي $P(k+1)$ صحيحة.

• وحسب مبدأ الاستدلال بالتراجع نستنتج أنّ $P(n)$ صحيحة من أجل كلّ $\mathbb{N}^*-\{1\}$.

وبما أنّ $-1<\frac{2}{3}<1$ فإنّ $\lim\left(\frac{2}{3}\right)^{n}=0$ ، ومنه $\lim U_n=0$

3. • **حساب S_n بدلالة n ثمّ استنتاج أنّ** $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{S_n}{n}=\log 2$

من أجل كلّ n من $\mathbb{N}^*$ لدينا

$$\begin{aligned} S_n &= \log(2V_1)+\log(3V_2)+\cdots+\log(nV_{n-1}) \\ &= \log(2V_1\times 3V_2\times\cdots\times nV_{n-1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_n &= \log(V_1\times V_2\times\cdots\times V_{n-1}\times 2\times 3\times\cdots\times n) \\ &= \log\left(\frac{U_2}{U_1}\times\frac{U_3}{U_2}\times\cdots\times\frac{U_n}{U_{n-1}}\times n!\right) \\ &= \log\left(\frac{U_n}{U_1}\times n!\right) \\ &= \log\left(\frac{2^n}{n!}\times\frac{1!}{2^1}\times n!\right) \\ &= \log(2^{n-1}) \\ &= (n-1)\log 2 \end{aligned}$$

وعندئذ لدينا

$$\begin{aligned} \lim\frac{S_n}{n} &= \lim\left(\frac{n-1}{n}\log 2\right) \\ &= \lim\left(\frac{n}{n}\log 2\right) \\ &= \log 2 \end{aligned}$$

■

التمرين الثالث (5 ن)

1. **أ.** **تبيين أنّ العدد 977 أوّلي ثمّ استنتاج أنّ المعادلة (E) تقبل حلولا في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$**

لدينا $\sqrt{977}\approx 31,25$ ، وبما أنّ

$2\nmid 31$	$13\nmid 31$
$3\nmid 31$	$17\nmid 31$
$5\nmid 31$	$19\nmid 31$
$7\nmid 31$	$23\nmid 31$
$11\nmid 31$	$29\nmid 31$

فإنّ 977 عدد أوّلي.

الاستنتاج. بما أنّ 977 عدد أوّلي و 1962 لا يقبل القسمة على 977 فإنّ $PGCD\,(1962;977)=1$ ومنه المعادلة (E) تقبل حلولا في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$

ب. تعيين الحلّ الخاص $(x_0;y_0)$ للمعادلة (E) الذي يحقّق $x_0+5y_0=11$

لدينا

$$x_0+5y_0=11$$

ومنه

$$x_0=11-5y_0$$

وبما أنّ $(x_0;y_0)$ حلّ للمعادلة (E) فإنّ

$$1962x_0-977y_0=8$$

أي

$$1962\,(11-5y_0)-977y_0=8$$

ومنه

$$y_0=2$$

وعليه

$$\begin{aligned}x_0&=11-5\times 2\\&=1\end{aligned}$$

ج. استنتاج مجموعة حلول المعادلة (E)

لدينا

$$\begin{cases}1962x-977y=8\\1962x_0-977y_0=8\end{cases}$$

ومنه

$$1962\,(x-x_0)-977\,(y-y_0)=0$$

وعليه

$$1962\,(x-1)=977\,(y-2)$$

وبما أنّ $PGCD\,(1962;977)=1$ فإنّ $1962\mid y-2$ وينتج عن ذلك أنّ

$$\begin{cases}y=1962k+2\\k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

ومنه

$$\begin{cases}x=977k+1\\k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

وبالتالي مجموعة حلول المعادلة هي S حيث

$$S=\{(977k+1\ ;\ 1962k+2)\mid k\in\mathbb{Z}\}$$

2. تعيين كُلّا من α ، β و γ ثمّ كتابة L في النظام العشري.

الثنائية $(\alpha;\beta)$ حلّ للمعادلة (E) معناه

$$\begin{cases}\alpha=977k+1\\\beta=1962k+2\\k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

وبما أنّ

$$\begin{cases}0<\alpha<4\\0\leqslant\beta<4\end{cases}$$

فإنّ $k=0$ ، وبالتالي $\alpha=1$ و $\beta=2$، وبما أنّ $\alpha+\gamma=2\beta$ فإنّ

$$\begin{aligned}\gamma&=2\beta-\alpha\\&=2\times2-1\\&=3\end{aligned}$$

كتابة L على الشكل العشري

$$\begin{aligned}L&=\alpha\times4^0+\beta\times4^1+\beta\times4^2+\gamma\times4^3+\gamma\times4^4+\alpha\times4^5\\&=1\times4^0+2\times4^1+2\times4^2+3\times4^3+3\times4^4+1\times4^5\\&=2025\end{aligned}$$

.3 تحليل العدد 2025 إلى جداء عوامل أوليّة ثمّ استنتاج قيم العدد الطبيعي n التي تحقّق $1962\equiv0\,[n^3]$

لدينا

$$\begin{array}{r|l}2025&3\\675&3\\225&3\\75&3\\25&5\\5&5\\1&\end{array}$$

ومنه $2025=3^4\times5^2$ ونستنتج أنّ قيم العدد الطبيعي n التي تحقّق $2025\equiv0\,[n^3]$ هي : 1 و 3

.4 تعيين كلّ الثنائيات $(a;b)$ حيث $a>b$ و التي تحقّق $m=6d$ و $a^3+b^4=2025$

لدينا

$$\begin{cases}m\times d=a\times b\\a=d\times a'\\b=d\times b'\\PGCD\,(a'\,;b')=1\end{cases}$$

ومنه

$$\begin{cases}m=d\times a'\times b'\\a=d\times a'\\b=d\times b'\\PGCD\,(a'\,;b')=1\end{cases}$$

وعليه

$$\begin{cases}d\times a'\times b'=6d\\(d\times a')^3+(d\times b')^4=2025\\PGCD\,(a'\,;b')=1\end{cases}$$

وبالتالي

$$\begin{cases}a'\times b'=6\\d^3\left[(a')^3+d(b')^4\right]=2025\\d\in\{1;3\}\\PGCD\,(a'\,;b')=1\end{cases}$$

وينتج

$$\begin{cases}(a';b') \in \{(6;1)\,;(3;2)\}\\ d^3\left[(a')^4 + d(b')^3\right] = 2025\\ d \in \{1;3\}\end{cases}$$

- في حالة $d = 1$ الجملة غير محقّقة لأنّ

$$\begin{cases}6^4 + 1^3 < 2025\\ 3^4 + 2^3 < 2025\end{cases}$$

- في حالة $d = 3$، لدينا

$$\begin{cases}(a';b') \in \{(6;1)\,;(3;2)\}\\ (a')^4 + 3(b')^4 = 75\end{cases}$$

ومنه $a' = 3$ و $b' = 2$ ، وعليه $a = 9$ و $b = 6$

■

التمرين الرابع (7 ن)

I) 1. تشكيل جدول تغيّرات الدّالة g على $]0;+\infty[$

لدينا

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty}(x\ln x - 1) = +\infty$$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} g(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 0}(x\ln x - 1) = -1$$

g قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ ولدينا

$$g'(x) = 1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x} = \ln x + 1$$

المعادلة

$$g'(x) = 0$$

تكافئ

$$\ln x + 1 = 0$$

وتكافئ

$$x = e^{-1}$$

وعندئذ لدينا

x	0		e^{-1}		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$g(x)$	‖ -1	↘	$-e^{-1}-1$	↗	$+\infty$

2. أ. تبيين أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلّا وحيدا α حيث $1,7 < \alpha < 1,8$

- $g(x) < 0$ على $]0;e^{-1}]$
- g مستمرة على $[e^{-1};+\infty[$

- g متزايدة تماما على $[e^{-1};+\infty[$
- لدينا

$$g(1,8)\approx 0,06 \qquad\qquad g(1,7)\approx -0,1$$

ومنه $g(1,7)\times g(1,8)<0$

عندئذ نستنتج أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلّا وحيدا α حيث $1,7<\alpha<1,8$.

ب. استنتاج إشارة $g(x)$ حسب قيم x من $]0;+\infty[$

- $g(x)<0$ على $]0;e^{-1}]$
- g متزايدة تماما على $[e^{-1};+\infty[$
- $g(\alpha)=0$

وعليه

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$	||	$-$	0	$+$	

II) 1. أ. حساب $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x)$ وتفسير النتيجة هندسيا ثمّ حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} f(x)=\lim_{x \overset{>}{\to} 0}\left[(x-1)(\ln x-1)\right]=+\infty$$

لأنّ

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0}\ln x=-\infty$$

المستقيم ذو المعادلة $x=0$ (حامل محور التراتيب) مقارب لـ (C_f)

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[(x-1)(\ln x-1)\right]=+\infty$$

لأنّ

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x-1)=+\infty\end{cases}$$

ب. تبيين أنّه من أجل كلّ عدد حقيقي x من $]0;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x}$

f قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ ولدينا

$$\begin{aligned}f'(x)&=1\times(\ln x-1)+\frac{1}{x}\times(x-1)\\&=\frac{x(\ln x-1)}{x}+\frac{x-1}{x}\\&=\frac{x\ln x-1}{x}\\&=\frac{g(x)}{x}\end{aligned}$$

ج. تبيين أنّ f متناقصة تماما على $]0;\alpha]$ ومتزايدة تماما على $[\alpha;+\infty[$ ثمّ تشكيل جدول تغيّراتها.

من أجل كلّ x من $]0;+\infty[$ لدينا

$$x>0$$

ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة البسط $g(x)$ وعندئذ لدينا

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	||	$-$	0	$+$	

- $f'(x) < 0$ على $]0;\alpha[$ و $f'(\alpha) = 0$ ومنه f متناقصة تماما على $]-\infty;\alpha]$
- $f'(x) > 0$ على $]\alpha;+\infty[$ و $f'(\alpha) = 0$ ومنه f متزايدة تماما على $[\alpha;+\infty[$

x	0		α		$+\infty$
$f(x)$	|| $+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

.2 أ. كتابة معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة التي فاصلتها 1

f قابلة للاشتقاق عند 1 ومنه (C_f) يقبل مماسا (T) معامل توجيهه $f'(1)$ حيث

$$(T) : y = f'(1)(x-1) + f(1)$$

وبما أنّ $f(1) = 0$ و $f'(1) = -1$ فإنّ

$$(T) : y = -x + 1$$

ب. دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى (T)

من أجل كلّ x من $]0;+\infty[$ لدينا

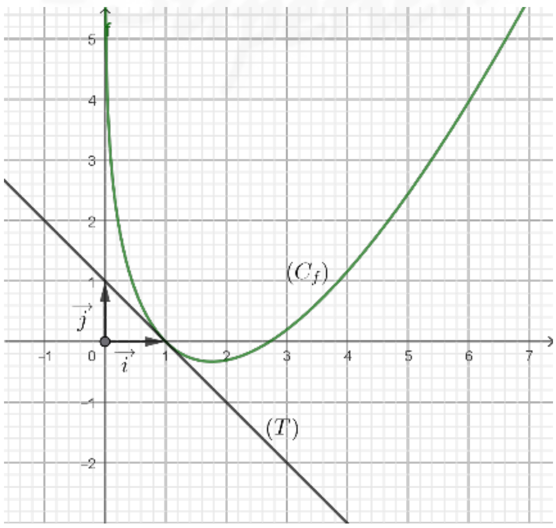
$$\begin{aligned} f(x) - (-x+1) &= (x-1)(\ln x - 1) - (-x+1) \\ &= (x-1)(\ln x - 1) + (x-1) \\ &= (x-1)(\ln x - 1 + 1) \\ &= (x-1)\ln x \end{aligned}$$

ومنه

x	0		1		$+\infty$
$x-1$	||	$-$	0	$+$	
$\ln x$	||	$-$	0	$+$	
$f(x) - (-x+1)$	||	$+$	0	$+$	

- (C_f) يقع فوق (T) على $]0;1[\cup]1;+\infty[$
- (C_f) يقطع (T) في النقطة $A(1;0)$

.3 أ. إنشاء كُلّا من (T) و (C_f).



ب. مناقشة عدد حلول المعادلة $f(x) = -x + m$ حسب قيم الوسيط الحقيقي m

حلول المعادلة بيانيا هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيم (Δ_m) حيث

$$(\Delta_m) : y = -x + m$$

وعندئذ لدينا

قيم m	عدد حلول المعادلة
$m \in]-\infty; 1[$	لا توجد حلول
$m = 1$	حلّ واحد
$m \in]1; +\infty[$	حلّان

4. أ. كتابة بدلالة λ العدد $\mathcal{A}(\lambda)$ المعرّف بـ : $\mathcal{A}(\lambda) = \int_{\lambda}^{1} [f(x) + x - 1]\, dx$ ، ثمّ تفسير النتيجة هندسيا.

$$\mathcal{A}(\lambda) = \int_{\lambda}^{1} [f(x) + x - 1]dx$$

$$= \int_{\lambda}^{1} [(x-1)\ln x]dx$$

$$\mathcal{A}(\lambda) = \left[\left(\frac{x^2}{2} - x\right)\ln x\right]_{\lambda}^{1} - \int_{\lambda}^{1} \left(\frac{x}{2} - 1\right)dx$$

$$= \left(\lambda - \frac{\lambda^2}{2}\right)\ln\lambda - \left[\left(\frac{x^2}{4} - x\right)\right]_{\lambda}^{1}$$

$$= \left(\lambda - \frac{\lambda^2}{2}\right)\ln\lambda + \frac{\lambda^2}{4} - \lambda + \frac{3}{4}$$

التفسير. من أجل كلّ x من $]0; +\infty[$ لدينا $f(x) - (-x+1) \geq 0$ ، ومنه $\mathcal{A}(\lambda)$ هي مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحنى (C_f) والمماس (T) والمستقيمين ذوا المعادلتين $x = \lambda$ و $x = 1$

ب. حساب $\lim\limits_{\lambda \overset{>}{\to} 0} \mathcal{A}(\lambda)$

لدينا

$$\left(\lambda - \frac{\lambda^2}{2}\right)\ln\lambda + \frac{\lambda^2}{4} - \lambda + \frac{3}{4} = \lambda\ln\lambda - \frac{1}{2}\lambda^2\ln\lambda + \frac{\lambda^2}{4} - \lambda + \frac{3}{4}$$

وبما أنّ

$$\begin{cases} \lim\limits_{\lambda \overset{>}{\to} 0} (\lambda\ln\lambda) = 0 \\ \lim\limits_{\lambda \overset{>}{\to} 0} (\lambda^2\ln\lambda) = 0 \end{cases}$$

فإنّ

$$\lim_{\lambda \overset{>}{\to} 0} \mathcal{A}(\lambda) = \frac{3}{4}$$

5. حساب بدلالة n المجموع S_n حيث $S_n=\omega_0+\omega_1+\cdots+\omega_n$ ثمّ استنتاج $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

من أجل كلّ n من $\mathbb{N}$ لدينا

$$\begin{aligned}\omega_n &= 1-\frac{f(e^{-n})}{n+1}\\ &= 1-\frac{(e^{-n}-1)(\ln e^{-n}-1)}{n+1}\\ &= 1-\frac{(e^{-n}-1)(-n-1)}{n+1}\\ &= 1+\frac{(e^{-n}-1)(n+1)}{n+1}\\ &= e^{-n}\end{aligned}$$

وعليه

$$\begin{aligned}S_n &= \omega_0+\omega_1+\cdots+\omega_n\\ &= 1+e^{-1}+\cdots+e^{-n}\\ &= 1\times\frac{1-\left(e^{-1}\right)^{n-0+1}}{1-e^{-1}}\\ &= \frac{1-e^{-n-1}}{1-e^{-1}}\\ &= \frac{e-e^{-n}}{e-1}\end{aligned}$$

وبما أنّ

$$\begin{aligned}\lim e^{-n} &= \lim\frac{1}{e^n}\\ &= 0\end{aligned}$$

فإنّ

$$\lim_{n\to+\infty} S_n=\frac{e}{e-1}$$

■

سلّم تنقيط الموضوع الأوّل

التمرين الأوّل (4 ن)

ترقيم السؤال	التنقيط
1.أ	0,25+ 0,25
1.ب	1,25
2	0,5
3.أ	1,25
3.ب	0,5

التمرين الثاني (4 ن)

ترقيم السؤال	التنقيط
1.أ	0,5
1.ب	0,25 + 0,5
2.أ	0,75
2.ب	0,25 + 0,75
3	0,25 + 0,75

التمرين الثالث (5 ن)

ترقيم السؤال	التنقيط
1.أ	0,5 + 0,5
1.ب	0,5
1.ج	1
2	1
3	0,5 + 0,5
4	0,5

التمرين الرابع (7 ن)

ترقيم السؤال	التنقيط
I) 1	0,5
I) 2.أ	0,5
I) 2.ب	0,5
II) 1.أ	0,75
II) 1.ب	0,5
II) 1.ج	0,25 + 0,5
II) 2.أ	0,5
II) 2.ب	0,5
II) 3.أ	0,5 + 0,25
II) 3.ب	0,25
II) 4.أ	0,25 + 0,5
II) 4.ب	0,25
II) 5	0,25 + 0,25

إجابة نموذجية مقترحة للموضوع الثاني

التمرين الأوّل (٤ ن)

I) 1. حساب احتمال كلّا من الحدثين الآتيين.

أ. A: " الحصول على ثلاث كريّات مجموعها عدد حقيقي ".

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{A \text{ عدد عناصر}}{\text{عدد الإمكانيات}} \\ &= \frac{C_2^1 \times C_2^1 \times C_1^1}{C_5^3} \\ &= \frac{4}{10} \\ &= \frac{2}{5} \end{aligned}$$

ب. B: " الحصول على ثلاث كريّات تشكّل ألوان العلم الوطني ".

$$\begin{aligned} P(B) &= \frac{B \text{ عدد عناصر}}{\text{عدد الإمكانيات}} \\ &= \frac{C_2^1 \times C_2^1 \times C_1^1}{C_5^3} \\ &= \frac{4}{10} \\ &= \frac{2}{5} \end{aligned}$$

2. تبيين أنّ $P(A \cap B) = \frac{1}{5}$ ، ثمّ استنتاج $P\left(\overline{A \cup B}\right)$

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= \frac{C_2^1 \times C_1^1 \times C_1^1}{C_5^3} \\ &= \frac{2}{10} \\ &= \frac{1}{5} \end{aligned}$$

وعندئذ نستنتج

$$\begin{aligned} P\left(\overline{A \cup B}\right) &= 1 - P(A \cup B) \\ &= 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)] \\ &= 1 - \left(\frac{2}{5} + \frac{2}{5} - \frac{1}{5}\right) \\ &= \frac{2}{5} \end{aligned}$$

II) 1. أ. تبيين أنّ $P(X=0)=\dfrac{n^2+3n+6}{n^2+9n+20}$

$$P(X=0)=\frac{A_{n+2}^2+2A_1^1\times A_2^1}{A_{n+5}^2}=\frac{(n+2)(n+1)+2\times1\times2}{(n+5)(n+4)}=\frac{n^2+3n+6}{n^2+9n+20}$$

ب. تعريف قانون احتمال المتغيّر العشوائي X

لدينا

$$\begin{cases}|0+0|=0\\|-i+i|=0\\|i+0|=1\\|-i+0|=1\\|-i-i|=2\end{cases}$$

وعليه مجموعة قيم المتغيّر العشوائي هي $\{0;1;2\}$ ولدينا

$$P(X=1)=\frac{2A_{n+2}^1\times A_2^1+2A_{n+2}^1\times A_1^1}{A_{n+5}^2}=\frac{2(n+2)\times2+2(n+2)\times1}{(n+5)(n+4)}=\frac{6n+12}{n^2+9n+20}$$

$$P(X=2)=\frac{A_2^2}{A_{n+5}^2}=\frac{2}{(n+5)(n+4)}=\frac{2}{n^2+9n+20}$$

وبالتالي

x_i	0	1	2	المجموع
$P(X=x_i)$	$\dfrac{n^2+3n+6}{n^2+9n+20}$	$\dfrac{6n+12}{n^2+9n+20}$	$\dfrac{2}{n^2+9n+20}$	1

2. تعيين قيمة n التي تحقّق $P(A_X^2=2)=\dfrac{1}{15}$

المعادلة

$$A_X^2=2$$

تكافئ

$$X(X-1)=2$$

وتكافئ

$$X^2-X-2=0$$

وتكافئ

$$X=2$$

وبالتالي

$$P(A_X^2=2)=P(X=2)=\frac{2}{n^2+9n+20}$$

عندئذ لدينا

$$\frac{2}{n^2+9n+20}=\frac{1}{15}$$

وذلك يكافئ

$$n=1$$

■

التمرين الثاني (4 ن)

1. أ. تبيين أنّ $PGCD(a_n;b_n)=PGCD(a_n;2)$

نضع: $d_1=PGCD(a_n;b_n)$ و $d_2=PGCD(a_n;2)$

- لدينا

$$\begin{cases} d_1 \mid a_n \\ d_1 \mid b_n \end{cases}$$

ومنه

$$d_1 \mid b_n-a_n$$

أي

$$d_1 \mid 2$$

وبالتالي

$$d_1 \mid d_2$$

- لدينا

$$\begin{cases} d_2 \mid a_n \\ d_2 \mid 2 \end{cases}$$

ومنه

$$d_2 \mid a_n+2$$

أي

$$d_2 \mid b_n$$

ومنه

$$d_2 \mid d_1$$

وبما أنّ $d_1>0$ و $d_2>0$ فإنّ $d_1=d_2$

ب. استنتاج أنّ $PGCD(a_n;b_n)=1$

بما أنّ a_n عدد فردي فإنّه لا يقبل القسمة على 2 ومنه $PGCD(a_n;2)=1$ ، وعليه $PGCD(a_n;b_n)=1$

2. أ. تبيين أنّه من أجل كلّ n من $\mathbb{N}^*$ ، $S_n=12(4^n-1)$

من أجل كلّ n من $\mathbb{N}^*$ لدينا

$$a_nb_n=9\times4^n-1$$

ومنه

$$\begin{aligned} S_n &= n+a_1b_1+\cdots+a_nb_n \\ &= n+9\times4^1-1+\cdots+9\times4^n-1 \\ &= n+9\left(4+4^2+\cdots+4^n\right)-1-1-\cdots-1 \\ &= n+9\times4\times\frac{4^{n-0+1}-1}{4-1}-n\times1 \\ &= 12\left(4^n-1\right) \end{aligned}$$

ب. استنتاج أنّ $S_n \equiv 0\,[9]$

من أجل كلّ n من $\mathbb{N}^*$ لدينا

$$4^n \equiv 1\,[3]$$

ومنه

$$4^n - 1 \equiv 0\,[3]$$

وذلك يكافئ

$$4^n - 1 = 3k \quad \text{حيث} \quad k \in \mathbb{Z}$$

ويكافئ

$$12\,(4^n - 1) = 9\,(4k) \quad \text{حيث} \quad k \in \mathbb{Z}$$

ويكافئ

$$S_n \equiv 0\,[9]$$

3. أ. تعيين قيم n من $\mathbb{N}^*$ التي يكون من أجلها S_n مضاعفا للعدد 5

لدينا

$$S_n \equiv 0\,[5]$$

وذلك يكافئ

$$12\,(4^n - 1) \equiv 0\,[5]$$

ويكافئ

$$4^n - 1 \equiv 0\,[5]$$

ويكافئ

$$4^n \equiv 1\,[5]$$

ومن جهة أخرى لدينا

$$4 \equiv -1\,[5]$$

وعليه من أجل كلّ n من $\mathbb{N}^*$ لدينا

$$4^n \equiv (-1)^n\,[5]$$

وبالتالي

$$(-1)^n \equiv 1\,[5]$$

وذلك يكافئ أنّ $n = 2k$ حيث $k \in \mathbb{N}^*$.

ب. استنتاج أنّ مجموعة قيم رقم آحاد العدد S_n هي $\{0;6\}$

من أجل كلّ k من $\mathbb{N}^*$ لدينا

$$4^{2k} \equiv 1\,[5]$$

وذلك يكافئ

$$4^{2k+1} \equiv 4\,[5]$$

ويكافئ

$$4^{2k+1} - 1 \equiv 3\,[5]$$

ويكافئ

$$12\,(4^{2k+1} - 1) \equiv 1\,[5]$$

أي

$$S_{2k+1} \equiv 1\,[5]$$

وبما أنّ S_n عدد زوجي فإنّ مجموعة رقم آحاد العدد S_n هي $\{0;6\}$

4. تعيين قيم n من $\mathbb{N}^*$ التي يكون من أجلها $S_{2025}+S_{1962}+n\equiv 0\,[5]$

لدينا

$$\begin{cases} S_{1962}\equiv 0\,[5] \\ S_{2025}\equiv 1\,[5] \end{cases}$$

ومنه

$$S_{2025}+S_{1962}+n\equiv n+1\,[5]$$

وعليه

$$n+1\equiv 0\,[5]$$

وبالتالي

$$n\equiv 4\,[5]$$

وينتج أنّ

$$n=5k+4 \quad \text{حيث} \quad k\in\mathbb{N}$$

■

التمرين الثالث (7 ن)

I) 1. تبيين أنّه من أجل كلّ z من $\mathbb{C}$ ، $\overline{P(z)}=P(\overline{z})$

$$\begin{aligned}\overline{P(z)} &= \overline{z^4+z^3-z^2+z-2} \\ &= \overline{z^4}+\overline{z^3}-\overline{z^2}+\overline{z}-\overline{2} \\ &= \overline{z}^4+\overline{z}^3-\overline{z}^2+\overline{z}-2 \\ &= P(\overline{z})\end{aligned}$$

2. حلّ المعادلة $P(z)=0$ في $\mathbb{C}$ علما أنّها تقبل حلّا تخيّليا صرفا.

من السؤال السابق، نستنتج أنّه إذا كان z حلّا للمعادلة $P(z)=0$ فإنّ $\overline{z}$ حلّ لها أيضاً، ولمّا كانت $P(z)=0$ تقبل حلّا تخيّليا صرفا $i\alpha$ حيث $\alpha\in\mathbb{R}$ فإنّ $-i\alpha$ حلّ لها أيضاً، وعندئذ لدينا

$$\begin{aligned}P(z) &= (z-i\alpha)(z+i\alpha)(az^2+bz+c) \\ &= (z^2+\alpha^2)(az^2+bz+c) \\ &= az^4+bz^3+cz^2+a\alpha^2z^2+b\alpha^2z+c\alpha^2 \\ &= az^3+bz^3+(c+a\alpha^2)z^2+b\alpha^2z+c\alpha^2\end{aligned}$$

وذلك يكافئ

$$\begin{cases} a=1 \\ b=1 \\ c+\alpha^2=-1 \\ \alpha^2=1 \\ c\alpha^2=-2 \end{cases}$$

ويكافئ

$$\begin{cases} a=1 \\ b=1 \\ c=-2 \\ \alpha^2=1 \end{cases}$$

أي

$$P(z) = (z^2+1)(z^2+z-2)$$

عندئذ المعادلة تكافئ

$$z^2+1=0 \quad \text{أو} \quad z^2+z-2=0$$

حل المعادلة $z^2+1=0$

المعادلة تكافئ

$$z^2=-1$$

وتكافئ

$$z^2=i^2$$

وتكافئ

$$z=-i \quad \text{أو} \quad z=i$$

حل المعادلة $z^2+z-2=0$

لدينا

$$\begin{aligned}\Delta &= 1^2-4\times 1\times(-2)\\ &= 9\end{aligned}$$

ومنه المعادلة تقبل حليّن z_1 و z_2 حيث

$$z_1 = \frac{-1-3}{2\times 1} = -2 \qquad \Big| \qquad z_2 = \frac{-1+3}{2\times 1} = 1$$

وبالتالي مجموعة حلول المعادلة هي $\{-i; i; -2; 1\}$

II) 1. تبيين أنّ النقط A ، B و C تنتمي إلى نفس الدائرة يُطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

لدينا

$$|z_A| = |z_B| = |z_C| = 1$$

ومنه النقط A ، B و C تنتمي إلى الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها 1.

2. أ. كتابة العدد المركّب $\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}$ على الشّكل الجبري.

$$\begin{aligned}\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C} &= \frac{-i-1}{i-1}\\ &= \frac{(-i-1)(i+1)}{(i-1)(i+1)}\\ &= \frac{-i^2-i-i-1}{i^2-1^2}\\ &= \frac{-2i}{-2}\\ &= i\end{aligned}$$

ب. استنتاج طبيعة المثلّث ABC

لدينا

$$\left|\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}\right| = 1 \qquad \Big| \qquad \arg\left(\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$$

ومنه

$$CA = CB$$

$$\left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$$

وبالتالي المثلّث ABC متساوي الساقين وقائم في C

3. • تحديد طبيعة مجموعة النقط M ذات اللّاحقة z لمّا α يمسح المجال $[0;\pi]$

نضع $z = x + iy$ حيث $(x;y) \in \mathbb{R}^2$ ، عندئذ لدينا

$$\begin{cases} y = x - 1 \\ x = \sin\alpha \\ 0 \leqslant \alpha \leqslant \pi \end{cases}$$

ومنه

$$\begin{cases} y = x - 1 \\ 0 \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$$

وعليه مجموعة النقط M هي القطعة المستقيمة $[BC]$

التمرين الرّابع (7 ن)

1. أ. حساب كُلّا من $\lim\limits_{x\to+\infty} f_k(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f_k(x)$

$$\lim_{x\to+\infty} f_k(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(x - ke^{-x}\right) = +\infty$$

لأنّ

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = \lim_{t\to-\infty} e^{t} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} f_k(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(x - ke^{-x}\right) = -\infty$$

لأنّ

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = \lim\limits_{t\to+\infty} e^{t} = +\infty \end{cases}$$

ب. تبيين أنّ الدّالة f_k متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ ثمّ تشكيل جدول تغيّراتها.

f_k قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا

$$f_k'(x) = 1 + ke^{-x}$$

من أجل كلّ x من $\mathbb{R}$ لدينا $e^{-x} > 0$ وبما أنّ $k > 0$ فإنّ

$$f_k'(x) > 0$$

وبالتالي f_k متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f(x)$	$-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$

2. أ. حساب $\lim\limits_{x\to+\infty}[f_k(x) - x]$ ثمّ تفسير النتيجة هندسياً.

$$\lim_{x\to+\infty}[f_k(x) - x] = \lim_{x\to+\infty}\left(-ke^{-x}\right) = 0$$

لأنّ

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = \lim_{t\to-\infty} e^{t} = 0$$

وبالتالي المستقيم ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل لـ (C_k) عند $+\infty$

ب. دراسة الوضع النسبي للمنحنى (C_k) و المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$

من أجل كلّ x من $\mathbb{R}$ لدينا

$$f(x) - x = -ke^{-x}$$

وبما أنّ

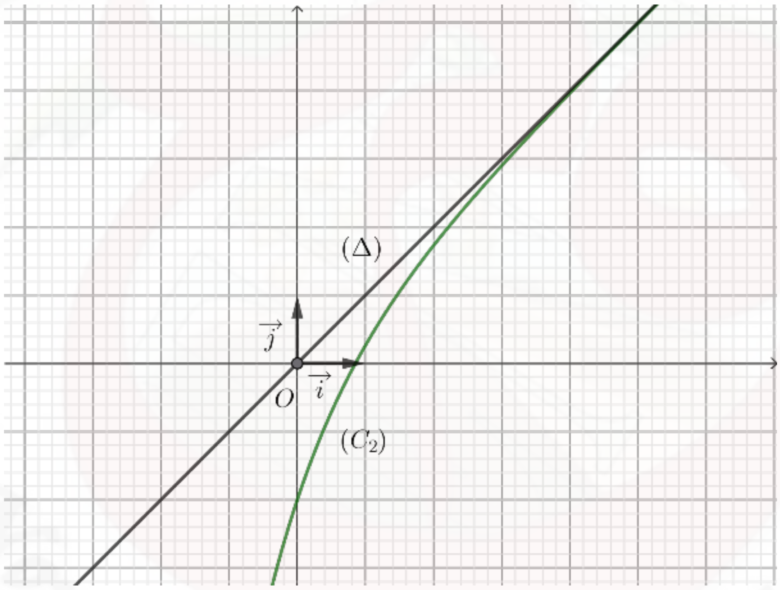
$$\begin{cases} k > 0 \\ e^{-x} > 0 \end{cases}$$

فإنّ

$$f_k(x) - x < 0$$

ومنه (C_k) يقع تحت (Δ).

3. أ. إنشاء كُلّا من (Δ) و (C_2)



ب. مناقشة عدد حلول المعادلة : $f_2(x) = x + \ln m$ حسب قيم الوسيط الحقيقي m

حلول المعادلة بيانيا هي فواصل نقط تقاطع (C_2) مع المستقيم (Δ_m) ذو المعادلة $y = x + \ln m$ ، مجموعة قيم m هي المجال $]0; +\infty[$ ، وبوضع $m' = \ln m$، ينتج

في حالة	قيم m	عدد حلول المعادلة
$m' < 0$	$m \in]0; 1[$	حلّ واحد
$m' \geq 0$	$m \in [0; +\infty[$	لا توجد حلول

4. أ. دراسة الوضع النسبي للمنحنيين (C_k) و (C_{k+1})

من أجل كلّ x من $\mathbb{R}$ لدينا

$$\begin{aligned} f_{k+1}(x) - f_k(x) &= x - (k+1)\,e^{-x} - (x - ke^{-x}) \\ &= -e^{-x} \\ &< 0 \end{aligned}$$

ومنه (C_{k+1}) يقع تحت (C_k)

ب. تبيين أنّ المعادلة $f_k(x)=0$ تقبل حلّا وحيدا α_k حيث $\alpha_k>0$

- f_k مستمرة على $\mathbb{R}$
- f_k متزايدة تماما على $\mathbb{R}$
- لدينا

$$\lim_{x\to-\infty} f_k(x)=+\infty$$

$$\begin{aligned} f_k(0)&=0-ke^{-0}\\ &=-k\\ &<0 \end{aligned}$$

وبالتالي المعادلة $f_k(x)=0$ تقبل حلّا وحيدا α_k حيث $\alpha_k>0$

ج. استنتاج أنّ المتتالية $(\alpha_k)_{k\geq 1}$ متزايدة تماما

من أجل كلّ k من $\mathbb{N}^*$ لدينا

$$f_k\left(\alpha_{k+1}\right)>f_{k+1}\left(\alpha_{k+1}\right)$$

وبما أنّ

$$f_{k+1}\left(\alpha_{k+1}\right)=f_k\left(\alpha_k\right)$$

فإنّ

$$f_k\left(\alpha_{k+1}\right)>f_k\left(\alpha_k\right)$$

ولمّا كانت f_k متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ ينتج

$$\alpha_{k+1}>\alpha_k$$

وبما أنّ f_k متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ فإنّ

$$\alpha_{k+1}>\alpha_k$$

وبالتالي $(\alpha_k)_{k\geq 1}$ متزايدة تماما.

5. أ. تبيين أنّه من أجل كلّ x من $\mathbb{R}$: $x<e^x$

نعتبر الدّالة h المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي $h(x)=e^x-x$ ، الدّالة h قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا

$$h'(x)=e^x-1$$

وينتج عن ذلك

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$		$\searrow$	1	$\nearrow$	

من أجل كلّ x من $\mathbb{R}$ لدينا

$$h(x)\geq 1$$

وعليه

$$h(x)>0$$

وبالتالي

$$e^x>x$$

ب. استنتاج أنّه: من أجل كلّ k من $\mathbb{N}^*$ ، $\alpha_k>\ln\sqrt{k}$

لدينا

$$e^{\alpha_k}>\alpha_k$$

ولدينا

$$f_k\left(\alpha_k\right)=0$$

ومنه

$$\alpha_k=ke^{-\alpha_k}$$

بالتعويض نجد

$$e^{\alpha_k}>ke^{-\alpha_k}$$

أي

$$\left(e^{\alpha_k}\right)^2>k$$

وذلك يكافئ

$$e^{\alpha_k}>\sqrt{k}$$

ويكافئ

$$\alpha_k>\ln\sqrt{k}$$

6. أ. تبيين أنّه: من أجل كلّ k من $\mathbb{N}^*$ ، $0\leq\mu_k\leq f_k\left(\alpha_{k+1}\right)$

من أجل كلّ t من $[\alpha_k;\alpha_{k+1}]$ لدينا

$$\alpha_k\leq t\leq\alpha_{k+1}$$

وبما أنّ f_k متزايدة تماما على $[\alpha_k;\alpha_{k+1}]$ فإنّ

$$f_k\left(\alpha_k\right)\leq f(t)\leq f_k\left(\alpha_{k+1}\right)$$

أي

$$0\leq f(t)\leq f_k\left(\alpha_{k+1}\right)$$

وبما أنّ f_k مستمرّة على $\mathbb{R}$ فإنّ

$$0\leq\int_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}}f(t)\,dt\leq\int_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}}f_k\left(\alpha_{k+1}\right)\,dt$$

أي

$$0\leq\int_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}}f(t)\,dt\leq\left(\alpha_{k+1}-\alpha_k\right)f_k\left(\alpha_{k+1}\right)$$

ومنه

$$0\leq\frac{1}{\alpha_{k+1}-\alpha_k}\int_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}}f_k(t)dt\leq f_k\left(\alpha_{k+1}\right)$$

أي

$$0\leq\mu_k\leq f_k\left(\alpha_{k+1}\right)$$

ب. التحقّق أنّه: من أجل كلّ k من $\mathbb{N}^*$ ، $f_k\left(\alpha_{k+1}\right)=e^{-\alpha_{k+1}}$ ثمّ استنتاج $\lim\limits_{k\to+\infty}\mu_k$

من أجل كلّ k من $\mathbb{N}^*$ ، لدينا

$$f_k\left(\alpha_{k+1}\right)=\alpha_{k+1}-ke^{-\alpha_{k+1}}$$

ولدينا

$$f_{k+1}\left(\alpha_{k+1}\right)=0$$

أي

$$\alpha_{k+1}-(k+1)\,e^{-\alpha_{k+1}}=0$$

وعليه
$$\alpha_{k+1} = (k+1)\, e^{-\alpha_{k+1}}$$
وبالتعويض نجد
$$f_k\left(\alpha_{k+1}\right) = (k+1)\, e^{-\alpha_{k+1}} - ke^{-\alpha_{k+1}}$$
وعليه
$$f_k\left(\alpha_{k+1}\right) = e^{-\alpha_{k+1}}$$
وبالتالي من أجل كلّ k من $\mathbb{N}^*$ لدينا
$$0 \leq \mu_k \leq e^{-\alpha_{k+1}}$$
ولدينا
$$\alpha_{k+1} > \ln \sqrt{k+1}$$
وبما أنّ
$$\lim \left(\ln \sqrt{k+1}\right) = +\infty$$
فإنّ
$$\lim \alpha_{k+1} = +\infty$$
ومنه
$$\lim e^{-\alpha_{k+1}} = 0$$
وبالتالي
$$\lim \mu_k = 0$$

■

سلّم تنقيط الموضوع الثاني

التمرين الأوّل (4 ن)

ترقيم السؤال	التنقيط
I) 1.أ	0,5
I) 1.ب	0,5
I) 2	0,5 + 0,5
II) 1.أ	0,5
II) 1.ب	0,25 + 0,5 + 0,25
II) 2	0,5

التمرين الثاني (4 ن)

ترقيم السؤال	التنقيط
1.أ	0,75
1.ب	0,5
2.أ	0,5
2.ب	0,75
3.أ	0,5
3.ب	0,5
4	0,5

التمرين الثالث (5 ن)

ترقيم السؤال	التنقيط
I) 1	0,75
I) 2	1 + 0,5
II) 1	0,75
II) 2.أ	0,75
II) 2.ب	0,75
II) 3	0,5

التمرين الرابع (7 ن)

ترقيم السؤال	التنقيط
1.أ	0,25 + 0,25
1.ب	0,25 + 0,5
2.أ	0,25 + 0,5
2.ب	0,5
3.أ	0,5 + 0,25
3.ب	0,25
4.أ	0,5
4.ب	0,5
4.ج	0,5
5.أ	0,5
5.ب	0,5
6.أ	0,5
6.ب	0,25 + 0,25

انتهى