الجمهورية الجزائرية الديموقراطية الشعبية
وزارة التربية الوطنية

مديرية التربية لولاية تيزي وزو
امتحان بكالوريا التعليم الثانوي التجريبي (دورة: ماي2025)
الشعبة: رياضيات

ثانوية: الشهيد أعمرخوجة مهنى
– ايلولة اومالو -

اختبار في مادة الرياضيات

المـدة: 04 ساعات ونصف

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضـــوع الأول

التمرين الأول: (04 نقط)

1) نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة ذات المجهول $(x;y)$ التالية : $2011x-1432y=31$ ..... (1)

أ) أثبت أن العدد 2011 أولي .

ب) باستعمال خوارزمية إقليدس ،عين حلا خاصا $(x_0;y_0)$ للمعادلة (1)،ثم حل المعادلة (1) .

2.أ) عين حسب قيم العدد الطبيعي n ،باقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 7 .

ثم جد باقي القسمة الإقليدية للعدد 2025^{1954} على 7 .

ب) عين قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون: $2024^n+2025^n+1446^n\equiv 0[7]$.

3. N عدد طبيعي يكتب $\overline{2\gamma\alpha\beta}$ في نظام التعداد الذي أساسه 9 حيث α ، β و γ بهذا الترتيب تشكل حدودا متتابعة من متتالية حسابية متزايدة تماما و $(\beta;\gamma)$ حل للمعادلة (1) .

- عين α ، β و γ ،ثم أكتب N في النظام العشري.

التمرين الثاني (04 نقط)

نعتبر (u_n) متتالية المعرفة بـ $u_0=2$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=\frac{2}{3}u_n+\frac{1}{3}n+1$

1 - أحسب الحدود u_1 ، u_2 ؛ u_3 ثم ضع تخمينا حول اتجاه تغيرات المتتالية (u_n)

2 - أ-برهن بالتراجع أنه من اجل كل عدد طبيعي n فإن $u_n\le n+3$.

ب-ادرس اتجاه تغيرات المتتالية (u_n)

ج-استنتج ان (u_n) محدودة من الأسفل هل يمكن القول أن (u_n) متقاربة ؟

3 - نعتبر (v_n) متتالية المعرفة بالعلاقة : $v_n=u_n-n$

أ - برهن أن المتتالية (v_n) هي متتالية هندسية يطلب تعيين حدها الأول و أساسها .

ب -عبر عن v_n ثم u_n بدلالة n و أحسب نهاية المتتالية (u_n)

ج-احسب بدلالة n المجموع $S_n=u_0+u_1+u_2+...+u_n$

4 - لتكن (t_n) متتالية المعرفة على $\mathbb{N}$: $t_n=\ln(v_n)$

أ. برهن أن (t_n) المتتالية حسابية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول

Créé dans Photo-to-PDF One Click Converter. Télécharger ici : https://firehawk.ai/phototopdf/

التمرين الثالث (05نقط)

1) نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z :

$(E)\ldots\ \bar{z}^3-3\bar{z}^2+3\bar{z}+7=0$ ، $\bar{z}$ هو مرافق العدد المركب z .

أ) بيّن أنّ المعادلة (E) تكافئ المعادلة : $(\bar{z}+1)\left(\bar{z}^2-4\bar{z}+7\right)=0$.

ب) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E) .

2) في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{u};\vec{v})$ ، نعتبر النقط A ، B ، C و D لواحقها على الترتيب : $z_A=-1$ ، $z_B=2+i\sqrt{3}$ ، $z_C=\bar{z}_B$ ، $z_D=3$.

أ) عيّن قيم العدد الطبيعي n حتى يكون $(z_B-z_A)^n$ عددا حقيقيا سالبا .

ب) عيّن طبيعة المثلث ABC .

3) أ) أكتب العدد $\dfrac{z_A-z_C}{z_D-z_C}$ على الشكل الأسي ، ثم استنتج أن النقطة A صورة D بتحويل نقطي يطلب تعيينه .

ب) أوجد مركز ونصف قطر الدائرة المحيطة بالمثلث ACD .

4) (Γ) مجموعة النقط M من المستوي لاحقتها Z تحقق : $z+1=2\sqrt{3}.ke^{i\frac{\pi}{6}}$ حيث k يمسح المجال $[0;+\infty[$

- عين قيسا للزاوية الموجهة $(\vec{u};\overrightarrow{AB})$ ، ثم استنتج مجموعة النقط (Γ) .

5) أ) عيّن قيمة العدد الحقيقي α بحيث يكون : $-\overrightarrow{CA}+2\overrightarrow{CB}+\alpha\overrightarrow{CD}=\vec{0}$.

ب) عيّن (E) مجموعة النقط M من المستوي حيث : $\left\|-\overrightarrow{AM}+2\overrightarrow{BM}-3\overrightarrow{DM}\right\|\leq 2\left\|\overrightarrow{BM}-\overrightarrow{CM}\right|$

ج) استنتج مجموعة نقط تقاطع (E) و (Γ) .

Créé dans Photo-to-PDF One Click Converter. Télécharger ici : https://firehawk.ai/phototopdf/

التمرين الرابع (07 نقط)

I) g الدالة العددية المعرّفة على المجال $]0\,;+\infty[$ بـ: $g(x)=\ln x+\frac{1}{x}$.

1) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ ، و بيّن أنّ $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=+\infty$.

2) ادرس اتجاه تغيّر g على المجال $]0\,;+\infty[$ ، ثم شكّل جدول تغيراتها.

3) استنتج إشارة $g(x)$ على $]0\,;+\infty[$ ، ثم بيّن أنه من أجل كل x من $]0\,;+\infty[$ ، $g\left(1+\frac{2}{x}\right)>0$.

II) f دالة عددية معرّفة على المجال $]0\,;+\infty[$ بـ: $f(x)=x-3+x\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)$ و $f(0)=-3$.

و (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$.

1) بيّن أنّ الدالة f مستمرة على يمين 0.

2) أ- بيّن أنّ: $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)=2$. (يمكن استعمال النتيجة: $\lim\limits_{u\to 0}\frac{\ln(1+u)}{u}=1$).

ب- استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

ج- بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x-1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

3) أ- بيّن أنّ f قابلة للاشتقاق على المجال $]0\,;+\infty[$ و أنّ: $f'(x)=g\left(1+\frac{2}{x}\right)$.

ب- استنتج اتّجاه تغيّر الدالة f ثمّ شكّل جدول تغيراتها.

جـ- بيّن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]0\,;+\infty[$ ، ثم تحقّق أنّ: $1{,}6<\alpha<1{,}7$.

د- أرسم (Δ) و (C_f). (نقبل أنّ (C_f) تحت (Δ) على المجال $]0\,;+\infty[$).

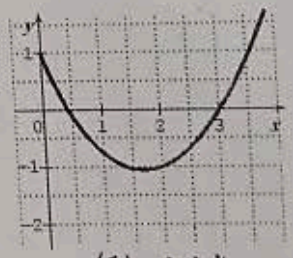
4) F الدالة العددية المعرّفة على المجال $]0\,;+\infty[$ بـ: $F(x)=\int_{\alpha}^{x} f(t)\,dt$.

وليكن (C_F) تمثيلها البياني في المستوي السابق.

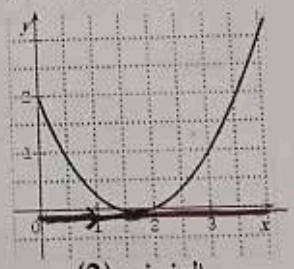
أ- أدرس اتجاه تغيّر الدالة F (دون حساب عبارة $F(x)$).

ب- عيّن معادلة لـ (T) ، مماس المنحنى (C_F) عند النقطة ذات الفاصلة α .

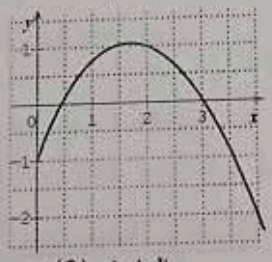
جـ- من بين المنحنيات الثلاث التالية (1)، (2) و (3)، عيّن المنحنى (C_F) مع التبرير .



المنحنى (1)



المنحنى (2)



المنحنى(3)

Créé dans Photo-to-PDF One Click Converter. Télécharger ici : https://firehawk.ai/phototopdf/

الموضـــوع الثاني

التمرين الأول: (03 نقط)

1) نعتبر المعادلة (E) ذات المجهولين الصحيحين x و y حيث: $11x - 5y = 2$

أ) اثبت أنه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ من $\mathbb{Z}^2$ حلا للمعادلة (E) فإن $y \equiv 4[11]$.

ب) استنتج حلول المعادلة (E).

2) ليكن n عددا طبيعيا غير معدوم ، نضـــع: $a = 5n + 2$ و $b = 11n + 4$.

أ) عين القيم الممكنة للقاسم المشترك الأكبر للعددين a و b.

ب) عين قيم العدد الطبيعي غير المعدوم n بحيث يكون: $PGCD(a;b) = 2$.

ج) استنتج قيم العدد الطبيعي غير المعدوم n بحيث يكون العددان a و b أوليان فيما بينهما.

3) من أجل كل عدد طبيعي n، نضع: $A = 5n^2 + 7n + 2$ و $B = 11n^2 + 15n + 4$.

أ) بين أن العدد $(n+1)$ يقسم كل من العددين A و B.

ب) استنتج حسب قيم n القاسم المشترك الأكبر للعددين A و B.

التمرين الثاني: (05 نقط)

في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$

$p(z)$ كثير الحدود للمتغير المركب z حيث: $p(z) = 8z^3 + (-16+12i)z^2 + 50z - 100 + 75i$

1. أ - عين قيم العدد الحقيقي α التي من أجلها يكون $p(\alpha i) = 0$.

ب - عين العدد المركب β حيث من أجل كل عدد مركب z : $p(z) = \left(z^2 + \frac{25}{4}\right)(8z + \beta)$

ج-استنتج حلول المعادلة $p(z) = 0$.

2. نعتبر النقطتين A و B لاحقتاهما على الترتيب: $z_A = 2 - \frac{3}{2}i$ و $z_B = \frac{5}{2}i$.

أ - عين z_C لاحقة النقطة C حيث : $\begin{cases} 2|z_C - z_A| = |z_B - z_A| \\ \arg(z_C - z_A) = \frac{\pi}{2} + \arg(z_B - z_A) \end{cases}$

ب - استنتج أن C هي صورة B بالتشابه المباشر S الذي مركزه A يطلب تعيين نسبته و زاوية له .

ج - حدد طبيعة المثلث ABC ، ثم أحسب مساحته .

د - لتكن النقطة D صورة النقطة C بالتشابه المباشر S. بين أن مساحة المثلث ACD تساوي $\frac{5}{4}ua$.

3. أ-عين العبارة المركبة للتشابه المباشر S.

ب-من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n \geq 2$ ، نعتبر التحويل النقطي T_n المعرف بـ: $T_n = \underbrace{S \circ S \circ \ldots\ldots \circ S}_{n \text{ مرة}}$

برهن بالتراجع أن العبارة المركبة للتحويل T_n هي: $z' = \frac{1}{2^n}e^{in\frac{\pi}{2}}(z - z_A) + z_A$.

ج - عين قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها التحويل T_n تحاكيا مركزه النقطة A يطلب تعيين نسبته.

Créé dans Photo-to-PDF One Click Converter. Télécharger ici : https://firehawk.ai/phototopdf/

التمرين الثالث: (04 نقط)

يحتوي صندوق على 8 كريات منهم : 3 حمراء و 3 خضراء و كريتين بيضاوين ، جميع الكريات متماثلة ولا تميز بينها باللمس

1) نسحب عشوائيا كريتين على التوالي بدون إرجاع من الصندوق

نعتبر الحادثين : "A" الحصول على كرية بيضاء واحدة على الأقل

"B" الحصول على كريتين من نفس اللون

- بين أن $P(A)=\frac{13}{28}$ ، $P(B)=\frac{1}{4}$.

2) نضيف إلى الصندوق n كرية بيضاء ، نعتبر الحدث C الحصول على كريتين بيضاوين

- بين أن $P(C)=\frac{(n+2)(n+1)}{(n+8)(n+7)}$ ثم أحسب $\lim_{n\to+\infty} P(C)$ وماذا تستنتج ؟

3) نسحب عشوائيا 3 كريات في آن واحد من الصندوق (وضعية الصندوق الأولى)

وليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب عدد الكرات الحمراء المسحوبة .

أ) اعط قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X .

ب) احسب أمله الرياضياتي، ثم احسب التباين والانحراف المعياري

التمرين الرابع: (07 نقط)

I. نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=x-(1+x^2)e^{-x+1}$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$.

1. أ. احسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و بين أن $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

ب. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x)=1+(x-1)^2e^{-x+1}$

جـ. استنتج اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها .

2. بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) ثم ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) بالنسبة لـ (Δ)

3. بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حل وحيد α حيث: $1.8<\alpha<1.9$

4. أكتب معادلة ديكارتية للمماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1

5. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f''(x)=-(x-1)(x-3)e^{-x+1}$ ثم استنتج أن (C_f) يقبل نقطتي انعطاف يطلب تعيينهما .

6. احسب $f(0)$ ، $f(3)$ ثم ارسم (Δ) ، (T) و (C_f) .

7. ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة : $f(x)=x+m$

II. نضع من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $I_n=\int_0^1 x^n e^{-x+1}dx$

1. أ. بين أن الدالة G المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $G(x)=-(x+1)e^{-x+1}$ هي الدالة الأصلية للدالة $x\to xe^{-x+1}$

ب. احسب I_1

2. أ. باستعمال المكاملة بالتجزئة بين أن : $I_{n+1}=-1+(n+1)I_n$ لكل عدد طبيعي غير معدوم n .

ب. احسب I_2

3. احسب بـ cm^2 مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) والمستقيمين الذين معادلتيهما $x=0$ و $x=1$

Créé dans Photo-to-PDF One Click Converter. Télécharger ici : https://firehawk.ai/phototopdf/

التمرين الأول:

1) إثبات أن 2011 عددا أوليا:

أ) $\sqrt{2011} \approx 44,8$ و 2011 لا يقبل القسمة على الأعداد الأولية الأصغر من 44 وهي 37، 31، 29، 23، 19، 17، 13، 11، 7، 5، 3، 2 إذن 2011 عددا أوليا. 43، 41

ب) 2011 لا يقبل القسمة على الأعداد الأولية 47، 43، 41، 37، 31، 29، 23، 19، 17، 13، 11، 7، 5، 3، 2 وحاصل قسمة 2011 على 47 أصغر من 47 إذن 2011 عددا أوليا.

ج) الثنائية الخاصة $(x_0; y_0)$ بالمعادلة حل خاص لها:

لدينا: $2011 = 1432(1) + 579$
$1432 = 579(2) + 274$
$579 = 274(2) + 31$

يمكن المعاملة لكن الأفضل عدم المعاملة.

منه $31 = 579 - 274(2)$
منه $31 = 579 - (1432 - 579(2))(2)$
$= 579(5) - 1432(2)$
$= (2011 - 1432)(5) - 1432(2)$
$= 2011(5) - 1432(7)$

منه $(x_0, y_0) = (5, -7)$ حلا خاصا للمعادلة (1)

ب) استنتاج $\mathbb{Z}^2$ حلول المعادلة (1):

لدينا $\begin{cases} 2011x - 1432y = 31 & -① \\ 2011(5) - 1432(7) = 31 & -② \end{cases}$

بطرح ① و ② طرفا لطرف.

نجد $2011(x-5) = 1432(y+7)$ ---③

منه $1432 \mid 2011(x-5)$ و $PGCD(2011, 1432) = 1$

حسب نظرية غوص! $1432 \mid x-5$

منه $x = 1432k + 5$ $k \in \mathbb{Z}$

نعوض x بعبارته في ③

نجد $y = 2011k - 7$ $k \in \mathbb{Z}$

منه مجموعة حلول المعادلة (1) في $\mathbb{Z}^2$ هي $S_1 = \{(x, y) / x = 1432k + 5, y = 2011k - 7, k \in \mathbb{Z}\}$

التمرين الثاني:

1) دراسة بواقي قسمة 2^n على 7:

$2^3 \equiv 1[7]$ ، $2^2 \equiv 4[7]$ ، $2^1 \equiv 2[7]$ ، $2^0 \equiv 1[7]$

لدينا n عدد طبيعي، حسب مبرهنة الباقي 3 نعين باقي قسمة 2^n على 7

(1) (الباقي 1) $2^n \equiv 1[7]$ إذا كان $n = 3k$

(2) (الباقي 2) $2^n \equiv 2[7]$ إذا كان $n = 3k+1$

(4) (الباقي 4) $2^n \equiv 4[7]$ إذا كان $n = 3k+2$

باقي قسمة 2025^{1954} على 7

$2025 \equiv 2[7]$ منه $2025 = 7(289) + 2$

$2025^{1954} \equiv 2^{1954}[7]$ منه

ولدينا $1954 = 3(651) + 1$

منه $2025^{1954} \equiv 2[7]$

إذن باقي قسمة 2025^{1954} على 7 هو 2.

ج) تعيين قيم العدد الطبيعي n

$2024^n \equiv 1^n[7]$ منه $2024 \equiv 1[7]$

إذن $2024^n \equiv 1[7]$

$2025^n \equiv 2^n[7]$ منه $2025 \equiv 2[7]$

$1446^n \equiv (2^2)^n[7]$ منه $1446 \equiv 2^2[7]$

إذن $1446 \equiv 2^{2n}[7]$

منه $2024^n + 2025^n + 1446^n \equiv 0[7]$

بكافئ $1 + 2^n + 2^{2n} \equiv 0[7]$

بكافئ $2^n + 2^{2n} + 1 + 6 \equiv 6[7]$

بكافئ $2^n(2^n + 1) \equiv 6[7]$

$n \equiv .[3]$	0	1	2
$2^n \equiv .[7]$	1	2	4
$2^n + 1 \equiv .[7]$	2	3	5
$2^n(2^n+1) \equiv .[7]$	2	6	6

منه $2025^n + 2024^n + 1446^n \equiv 0[7]$

بكافئ $n = 3k+2$ أو $n = 3k+1$ $k \in \mathbb{N}$

3) لدينا α, β, γ أعداد طبيعية تحقق $\gamma = 2\alpha\beta^2 + 1$ و (β, γ) حل للمعادلة (1)

$\gamma = 2011k + 7$ ، $\beta = 1432k + 5$ حسب (1)

$k = 0$ من أجل $-\frac{7}{2011} \leq k \leq \frac{5}{1432}$ أي $0 \leq \beta \leq 5$

$\beta = 5$ ، $\gamma = 7$ لدينا

Créé dans Photo-to-PDF One Click Converter. Télécharger ici : https://firehawk.ai/phototopdf/

لما أن α, β, γ حدود متتابعة من متتالية حسابية

نستنتج $\alpha = 3$ ثم $\alpha + 7 = 10$ ثم $2\alpha + \gamma = 2\beta$

لدينا $N = 2735 = 5 + 3\times 9 + 7\times 9^2 + 2\times 9^3$

نجد $N = 2057$

التمرين الثاني:

$n \in \mathbb{N}$; $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1$; $u_0 = 2$.

$u_1 = \frac{2}{3}u_0 + \frac{1}{3}(0) + 1 = \frac{2}{3}(2) + 0 + 1 = \frac{7}{3}$

$u_2 = \frac{2}{3}(u_1) + \frac{1}{3}(1) + 1 = \frac{2}{3}\left(\frac{7}{3}\right) + \frac{1}{3} + 1 = \frac{26}{9}$.

$u_3 = \frac{2}{3}u_2 + \frac{1}{3}(2) + 1 = \frac{2}{3}\left(\frac{26}{9}\right) + \frac{2}{3} + 1 = \frac{88}{27}$.

التخمين: نلاحظ: $u_0 < u_1 < u_2 < u_3$

نخمن (u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$.

البرهان بالتراجع:

$n \in \mathbb{N}$; $u_n \leq n + 3$ نسمي $P(n)$ الخاصية

a) التحقق من صحة $P(0)$

$P(0)$ صحيحة لأن $u_0 \leq 0 + 3$ أي $2 \leq 3$ محققة

b) نفرض صحة $P(n)$ أي $u_n \leq n + 3$

نبرهن صحة $P(n+1)$ أي $u_{n+1} \leq n + 4$

إذا كان $u_n \leq n + 3$ فإن $\frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1 \leq \frac{2}{3}(n+3) + \frac{1}{3}n + 1$

ومنه $u_{n+1} \leq n + 3$

ولدينا $n + 3 \leq n + 4$

ومنه ⑤ $u_{n+1} \leq n + 4$

من ⓐ و ⑤ ومن مبدأ الاستدلال بالتراجع نستنتج أن

من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $u_n \leq n + 3$

ب) اتجاه تغير المتتالية (u_n)

من أجل كل $n \in \mathbb{N}$

$u_{n+1} - u_n = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1 - u_n = -\frac{1}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1$

$= -\frac{1}{3}(u_n - (n+3)) \geq 0$

لأن $u_n \leq n + 3$ أي $u_n - (n+3) \leq 0$.

إذن (u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$.

ج) استنتاج: حدود المتتالية (u_n) موجبة

أي من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $u_n \geq 0$

بالتالي (u_n) محدودة من الأسفل.

لا يمكننا القول أن (u_n) متقاربة

لأن (u_n) متزايدة ومحدودة من الأسفل فقط

التمرين الثالث:

$n \in \mathbb{N}$; $v_n = u_n - n$ (3

البرهان: من أجل كل $n \in \mathbb{N}$

$v_{n+1} = u_{n+1} - n - 1 = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1 - n - 1$

$= \frac{2}{3}u_n - \frac{2}{3}n = \frac{2}{3}(u_n - n) = \frac{2}{3}v_n$

$q = \frac{2}{3}$ لدينا (v_n) متتالية هندسية أساسها

$v_0 = u_0 - 0 = 2 - 0 = 2$ حدها الأول

ب) التعبير عن v_n بدلالة n:

لدينا $v_n = v_0 \times q^n = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n$

ولدينا $u_n = v_n + n$ ومنه $v_n = u_n - n$

إذن $u_n = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n + n$

$\lim u_n = \lim 2\left(\frac{2}{3}\right)^n + n = +\infty$

لأن $\lim \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$ لأن $\left(-1 < \frac{2}{3} < 1\right)$

ج) حساب المجموع S_n بدلالة n:

$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$

$= (v_0 + 0) + (v_1 + 1) + \cdots + (v_n + n)$

$= (v_0 + v_1 + \cdots + v_n) + (0 + 1 + 2 + \cdots + n)$

$= 2 \times \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{2}{3}} + \frac{n(n+1)}{2}$

$S_n = 3\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right) + \frac{n(n+1)}{2}$

(4 $t_n = \ln(v_n)$; $n \in \mathbb{N}$

البرهان أن (t_n) متتالية حسابية.

من أجل كل n : $n \in \mathbb{N}$

$t_{n+1} = \ln(v_{n+1}) = \ln(v_n \times q)$

$= \ln(v_n) + \ln(q)$

$t_{n+1} = t_n + \ln\left(\frac{2}{3}\right)$

إذن (t_n) متتالية حسابية

حدها الأول $t_0 = \ln(v_0) = \ln(2)$

أساسها $r = \ln\left(\frac{2}{3}\right)$

Créé dans Photo-to-PDF One Click Converter. Télécharger ici : https://firehawk.ai/phototopdf/

التمرين الثالث

$z \in \mathbb{C}$ حيث $\bar{z}^3 - 3\bar{z}^2 + 3\bar{z} + 7 = 0 \dots (E)$

أ) البرهان: ليكن z حلا للمعادلة (E) ومرافقه $\bar{z}$

لدينا $(\bar{z}+1)(\bar{z}^2 - 4\bar{z} + 7) = 0$

بكتابة $\bar{z}^3 - 4\bar{z}^2 + 7\bar{z} + \bar{z}^2 - 4\bar{z} + 7 = 0$

بكتابة: $\bar{z}^3 - 3\bar{z}^2 + 3\bar{z} + 7 = 0$ وهو المطلوب

ب) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E)

لدينا (E) بكتابة $(\bar{z}+1)(\bar{z}^2 - 4\bar{z} + 7) = 0$

بكتابة $\begin{cases} \bar{z}+1 = 0 \dots (1) \\ \bar{z}^2 - 4\bar{z} + 7 = 0 \dots (2) \end{cases}$

(1) بكتابة $\bar{z} = -1$ ومنه $z = 1$

حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (2) $\bar{z}^2 - 4\bar{z} + 7 = 0$

$\Delta = (-4)^2 - 4(1)(7) = -12 = (2\sqrt{3}i)^2$

إذن (2) تقبل حلان مترافقتان.

$\bar{z}_1 = 2 + \sqrt{3}i$ ومنه $z_1 = \frac{4 - 2\sqrt{3}i}{2} = 2 - \sqrt{3}i$

$\bar{z}_2 = 2 - \sqrt{3}i$ ومنه $z_2 = \frac{4 + 2\sqrt{3}i}{2} = 2 + \sqrt{3}i$

المعادلة (E) تقبل ثلاث حلول A و B و C:

$2 - \sqrt{3}i$ ، $2 + \sqrt{3}i$ ، -1

$z_D = 3$ ؛ $z_C = 2 - i\sqrt{3}$ ؛ $z_B = 2 + i\sqrt{3}$ ؛ $z_A = -1$ (2

ج) تعيين قيم العدد الطبيعي n:

لدينا $(z_B - z_A)^n = (3 + i\sqrt{3})^n = 2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$

$= \left[2\sqrt{3}\, e^{i\frac{\pi}{6}}\right]^n = (2\sqrt{3})^n e^{i\frac{n\pi}{6}}$

$\begin{cases} \sin\left(\frac{n\pi}{6}\right) = 0 \\ \cos\left(\frac{n\pi}{6}\right) < 0 \end{cases}$ بكتابة $(z_B - z_A)^n \in \mathbb{R}_-$.

بكتابة $\frac{n\pi}{6} = 0 + k\pi$ بكتابة $\sin\frac{\pi}{6} = 0$

$k \in \mathbb{N}$ و $n = 6k$ بكتابة

في حالة $n = 6k$

بكتابة $\cos(k\pi) \leq 0$ بكتابة $\cos\left(\frac{n\pi}{6}\right) \leq 0$

بكتابة $q \in \mathbb{N}$ و $k = 2q + 1$

$q \in \mathbb{N}$ و $n = 12q + 1$ إذا $n = 6(2q+1)$ ومنه

ب) طبيعة المثلث ABC

$\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \frac{(3 + i\sqrt{3})(3 + i\sqrt{3})}{(3 - i\sqrt{3})(3 + i\sqrt{3})} = \frac{6 + 6\sqrt{3}i}{12} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$AB = AC$ ومنه $\frac{AB}{AC} = \left|\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right| = 1$

$(\vec{AC}, \vec{AB}) = \text{Arg}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \frac{\pi}{3}$

بالتالي المثلث ABC متقايس الأضلاع ومباشر

الكتابة على الشكل الأسي والاستنتاج (P13

$\frac{z_A - z_C}{z_B - z_C} = \frac{(-3 + i\sqrt{3})(1 - i\sqrt{3})}{(1 + i\sqrt{3})(1 - i\sqrt{3})} = \frac{-3 + 3 + 4\sqrt{3}i}{4} = \sqrt{3}i$

$\frac{z_A - z_C}{z_B - z_C} = \sqrt{3}\, e^{i\frac{\pi}{2}}$

الاستنتاج: $z_A - z_C = \sqrt{3}\, e^{i\frac{\pi}{2}}(z_D - z_C)$

إذن A هي صورة D بالتشابه المباشر

الذي مركزه C نسبته $\sqrt{3}$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

ب) مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ACD

بما أن A هي صورة D بالتشابه المباشر الذي زاويته $\frac{\pi}{2}$

و $[AD]$ وتره C و ACD مثلث قائم في C

إذن مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ACD

هي I منتصف $[AD]$ $z_I = \frac{z_A + z_D}{2} = \frac{-1+3}{2} = 1$

طول نصف قطر الدائرة: $r = |z_I - z_A| = |2| = 2$ cm

ج) مجموعة النقط $M(z)$ (T) حيث $z + 1 = 2\sqrt{3}k\, e^{i\frac{\pi}{6}}$ و $k \in [0; +\infty[$

قياس الزاوية $(\vec{u}, \vec{AB})$

لدينا $\theta = (\vec{u}, \vec{AB}) = \text{Arg}(z_B - z_A) = \text{Arg}(3 + i\sqrt{3})$

$k \in \mathbb{Z}$ ؛ $\theta = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$ ومنه $\begin{cases} \cos\theta = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \end{cases}$

استنتاج الحصر (T).

إذا $z + 1 = 0$ بكتابة $M \in (T)$

$(\vec{u}, \vec{AM}) = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$ ، $AM = 2\sqrt{3}k$

إذن $(T) = [AB)$

لدينا $-\vec{CA} + 2\vec{CB} + \alpha\vec{CB} = \vec{0}$ فيما α (P-5

بكتابة $z_C - z_A + 2(z_B - z_C) + \alpha(z_D - z_C) = 0$

بكتابة $-z_A + 2z_B - z_C + \alpha z_D - \alpha z_C = 0$

بكتابة $1 + 4 + 2\sqrt{3}i - 2 + \sqrt{3}i + 3\alpha - 2\alpha + \alpha\sqrt{3}i = 0$

بكتابة $(\alpha + 3) + \sqrt{3}(\alpha + 3)i = 0$

بكتابة $\alpha + 3 = 0$ إذا $\alpha = -3$

ب) تعيين الحصر (E)

بكتابة $M \in (E)$ $\|-\vec{AM} + 2\vec{BM} - 3\vec{CM}\| = \|\vec{BA} - \vec{CM}\|$

بكتابة $\|\vec{CM}\| \leq 2\|\vec{BC}\|$

$\{A(-1); B(2); D(3)\}$ مرجح الجملة C

Créé dans Photo-to-PDF One Click Converter. Télécharger ici : https://firehawk.ai/phototopdf/

$M \in (E)$ لكل $CM \leq CB$

لتبيان أن (E) هو القرص الذي مركزه النقطة C وطول نصف قطره CB

$r = CB = |z_B - z_C| = |2\sqrt{3}i| = 2\sqrt{3}$

$CA = |z_A - z_C| = |-3 + \sqrt{3}i| = 2\sqrt{3}$

$A \in (E)$ إذن

$A \in (T)$ و $B \in (T)$ و $B \in (E)$ ولدينا أيضا

$(E) \cap (T) = [AB]$ تقاطع (T) مع (E) هو

التمرين الرابع:

(I

$x \in]0; +\infty[$ و $g(x) = \ln x + \frac{1}{x}$.

1) الحساب والتبيان:

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(\ln x + \frac{1}{x}\right) = +\infty .$$

$$\lim_{x \to 0} g(x) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{x \ln x + 1}{x}\right) = +\infty .$$

لأن $\lim_{x \to 0} x \ln x + 1 = 1$ ، $\lim_{x \to 0} x = 0^+$

2) دراسة إشارة g وتشكيل جدول تغيراتها:

g قابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$

ولدينا $g'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2}$

إشارة $g'(x)$ من إشارة $x - 1$ على $]0; +\infty[$

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	

g متناقصة تماما على $]0; 1]$

g متزايدة تماما على $[1; +\infty[$

جدول تغيرات الدالة g

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

3) إشارة $g(x)$ على $]0; +\infty[$

x	0		1		$+\infty$
$g(x)$	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$
إشارة $g(x)$	‖		$+$		

ب) التبيان: من أجل كل $x \in]0; +\infty[$ لدينا $g(x) > 0$

وبما أن $1 + \frac{2}{x} \in]0; +\infty[$ فإن $g\left(1 + \frac{2}{x}\right) > 0$

II

$x > 0$: $f(x) = x - 3 + x \ln\left(1 + \frac{2}{x}\right)$; $f(0) = -3$

أ) التبيان: لدينا: $f(0) = -3$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \left(x - 3 + x \ln\left(1 + \frac{2}{x}\right)\right)$$

نضع $y = \frac{2}{x}$ إذن $x = \frac{2}{y}$ لما $x \to 0^+$ فإن $y \to +\infty$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{y \to +\infty} \left(\frac{2}{y} - 3 + \frac{2}{y} \ln\left(\frac{1+y}{y}\right)\right) = -3$$

ب) التبيان:

نضع $y = \frac{2}{x}$ إذن $x = \frac{2}{y}$ لما $x \to +\infty$ فإن $y \to 0$

$$\lim_{x \to +\infty} x \ln\left(1 + \frac{2}{x}\right) = \lim_{y \to 0} 2 \frac{\ln(1+y)}{y} = 2 .$$

ج) الاستنتاج:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(x - 3 + x \ln\left(1 + \frac{2}{x}\right)\right) = +\infty$$

د) التبيان:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(f(x) - (x-1)\right) = \lim_{x \to +\infty} \left(-2 + x \ln\left(1 + \frac{2}{x}\right)\right) = 0$$

إذن المستقيم (Δ) ذي معادلة $y = x - 1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$

ه) دراسة الوضع النسبي لـ (C_f) و (Δ):

$x \to 1 + \frac{2}{x}$ موجبة تماما وقابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$

إذن $x \to \ln\left(1 + \frac{2}{x}\right)$ قابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$

ومنه $x \to x \ln\left(1 + \frac{2}{x}\right)$ قابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$

و $x \to x - 3$ قابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$

بالتالي f قابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$

و

$$f'(x) = 1 + \ln\left(1 + \frac{2}{x}\right) + x \frac{-\frac{2}{x^2}}{1 + \frac{2}{x}}$$

$$= 1 + \ln\left(1 + \frac{2}{x}\right) - \frac{\frac{2}{x}}{\frac{x+2}{x}}$$

$$= \ln\left(1 + \frac{2}{x}\right) - \frac{2}{x+2} + 1$$

$$f'(x) = \ln\left(1 + \frac{2}{x}\right) + \frac{x}{x+2}$$

$$g\left(1 + \frac{2}{x}\right) = \ln\left(1 + \frac{2}{x}\right) + \frac{1}{1 + \frac{2}{x}}$$

$$= \ln\left(1 + \frac{2}{x}\right) + \frac{1}{\frac{x+2}{x}}$$

$$= \ln\left(1 + \frac{2}{x}\right) + \frac{x}{x+2}$$

$$= f'(x) .$$

ومنه الطلوب

Créé dans Photo-to-PDF One Click Converter. Télécharger ici : https://firehawk.ai/phototopdf/

ب) معادلة المماس (T) للمنحنى (C_F) عند النقطة ذات الفاصلة α هي:

$y = f(\alpha)(x-\alpha) + F(\alpha)$

$= 0(x-\alpha) + 0$

$\boxed{y = 0}$

ج) المنحنى الممثل للدالة F هو المنحنى (2)

لأن $F'(\alpha) = f(\alpha) = 0$ و $F(\alpha) = 0$

إذن النقطة ذات الإحداثيين $(\alpha, 0)$ هي النقطة ذات الفاصلة الذروة والمنحنى (2) هو فقط الذي يحقق هذا الشرط.

د) الاستنتاج وتشكيل جدول تغيرات f:

لكل $x \in]0, +\infty[$: $f'(x) = g(1+\frac{2}{x}) > 0$

إذن f متزايدة تماما على $]0, +\infty[$

جدول تغيرات الدالة f:

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	-3	↗	$+\infty$

ه) التبيان ثم التحقق:

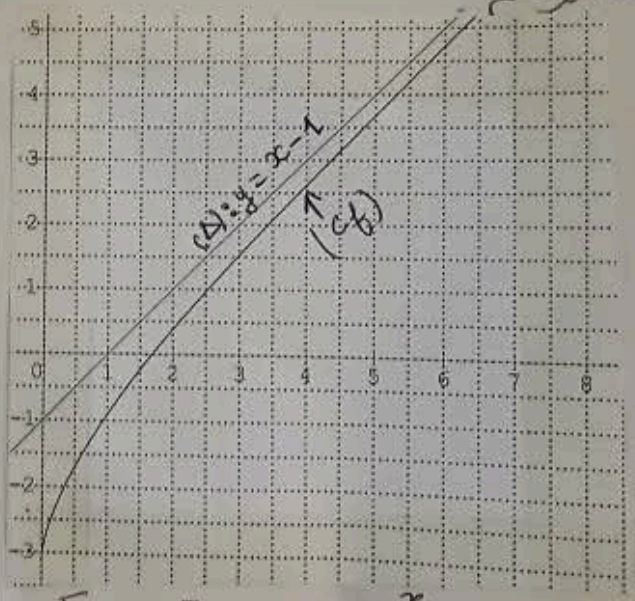
لدينا f مستمرة ومتزايدة تماما على $[0, +\infty[$

$f(0) = -3$ ، $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ $(0 \in [-3, +\infty[)$

حسب مبرهنة القيم المتوسطة والرتابة التامة نستنتج أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في $[0, +\infty[$

$f(1,6) \cdot f(1,7) < 0$; نجد $1,6 < \alpha < 1,7$ إذن

د- الرسم



(4) $[0, +\infty[$ من $F(x) = \int_{\alpha}^{x} f(t)\,dt$

أ) اتجاه تغير الدالة F:

$F'(x) = f(x)$

لكل $x \in]0, +\infty[$ ؛ إشارة $f(x)$ من إشارة $F'(x)$

x	0		α		$+\infty$
$F'(x)$	‖	$-$	0	$+$	

F متناقصة تماما على $[0, \alpha]$

F متزايدة تماما على $[\alpha, +\infty[$

Créé dans Photo-to-PDF One Click Converter. Télécharger ici : https://firehawk.ai/phototopdf/

الموضوع الأول:

التمرين الأول:

1) أ) إثبات أن كل ثنائية حلول للمعادلة (E) هي من الشكل (x, y) حيث $y \in \mathbb{Z}$ و $x \in \mathbb{Z}$ و $11x - 5y = 2$ ... (E)

$5y = 11x - 2$ فإن

$5y \equiv -2 [11]$ ومنه

$2(5y) \equiv 2(-2) [11]$ ومنه

$10y \equiv -4 [11]$ ، $10y \equiv -y [11]$

ومنه $-y \equiv -4 [11]$

إذن $y \equiv 4 [11]$ وهو المطلوب

ب) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E)

لدينا إذا كانت (x, y) حلا لـ (E) فإن $y \equiv 4 [11]$

من أجل $y = 4$ تكافئ (E) $11x - 20 = 2$

إذن $x = 2$.

بالتالي (2, 4) حل المعادلة (E)

لدينا ... (1) ... $11x - 5y = 2$

... (2) ... $11(2) - 5(4) = 2$

بطرح (1) و (2) طرفا لطرف نجد ... (3) ... $11(x-2) = 5(y-4)$

ومنه $5 | 11(x-2)$ ، $PGCD(5, 11) = 1$

حسب مبرهنة غوص: $5 | x - 2$

إذن $x = 5k + 2$ و $k \in \mathbb{Z}$

نعوض x بما يساويه في (3): $11 \times 5k = 5(y-4)$

ومنه $y = 11k + 4$ و $k \in \mathbb{Z}$

ج) مجموعة حلول المعادلة (E) في $\mathbb{Z}^2$ هي:

$S = \{(x, y) / x = 5k + 2, y = 11k + 4, k \in \mathbb{Z}\}$

2) $n \in \mathbb{N}^*$ و $a = 5n + 2$ ، $b = 11n + 4$

أ) تعيين قيم $PGCD(a, b)$

لدينا $11a - 5b = 11(5n+2) - 5(11n+4) = 2$

إذن $PGCD(a, b) \in \{1; 2\}$

ب) تعيين قيم n حتى يكون $PGCD(a, b) = 2$

تكافئ $PGCD(a, b) = 2$ { $2 | 5n + 2$ ، $2 | 11n + 4$

تكافئ $2 | 11n$ و $2 | 5n$

تكافئ $2 | n$ لأن $PGCD(2, 5) = 1$ و $PGCD(2, 11) = 1$

لدينا: $n = 2k$ ($k \in \mathbb{N}^*$)

أو $n = 2k + 1$ ($k \in \mathbb{N}$)

ج) استنتاج قيم a, b إذا وضعنا $d = PGCD(a, b)$

3) $A = 5n^2 + 7n + 2$ ، $B = 11n^2 + 15n + 4$

أ) تبيان أن $(n+1)$ قاسم لكل من A و B.

من أجل كل عدد طبيعي n:

لدينا $A = (n+1)(5n+2)$ و $5n + 2 \in \mathbb{Z}$

و $B = (n+1)(11n+4)$ و $11n + 4 \in \mathbb{Z}$

إذن $(n+1)$ يقسم كل من العددين A و B.

ب) استنتاج قيم $PGCD(A, B)$

$PGCD(A, B) = PGCD((n+1)(5n+2), (n+1)(11n+4))$

$= (n+1) PGCD(a, b)$

ج) إذا كان $n = 2k$ و $k \in \mathbb{N}$

فإن $PGCD(A, B) = (n+1) \times 2 = 2n + 2$

د) إذا كان $n = 2k + 1$ و $k \in \mathbb{N}$

فإن $PGCD(A, B) = (n+1)(1) = n + 1$

التمرين الثاني:

$P(z) = 8z^3 + (-16 + 12i)z^2 + 50z - 100 + 75i$

1) تعيين قيم $\alpha \in \mathbb{R}$ بحيث $P(\alpha i) = 0$

$8(\alpha i)^3 + (-16 + 12i)(\alpha i)^2 + 50\alpha i - 100 + 75i = 0$ تكافئ

$-8\alpha^3 i + 16\alpha^2 - 12\alpha^2 i + 50\alpha i - 100 + 75i = 0$ تكافئ

$(16\alpha^2 - 100) + (-8\alpha^3 - 12\alpha^2 + 50\alpha + 75)i = 0$ تكافئ

(1) ... $16\alpha^2 - 100 = 0$ } تكافئ

(2) ... $-8\alpha^3 - 12\alpha^2 + 50\alpha + 75 = 0$

تكافئ (1) $\alpha = \frac{5}{2}$ أو $\alpha = -\frac{5}{2}$

(2) العددين $\frac{5}{2}$ و $-\frac{5}{2}$ يحققان المعادلة

$\alpha = \frac{5}{2}$ أو $\alpha = -\frac{5}{2}$ تكافئ $P(\alpha i) = 0$ إذن

ب- تعيين قيمة β،

Créé dans Photo-to-PDF One Click Converter. Télécharger ici : https://firehawk.ai/phototopdf/

ليكن z عدد مركب

لدينا $P(z) = (z^2 + \frac{25}{4})(8z + \beta)$

يكافئ $P(z) = 8z^3 + \beta z^2 + 50z + \frac{25}{4}\beta$

بالمطابقة مع عبارة $P(z)$

نجد $\beta = -16 + 12i$ أي $\begin{cases} \beta = -16 + 12i \\ \frac{25}{4}\beta = -100 + 75i \end{cases}$

ج) استنتاج حلول المعادلة $P(z) = 0$

يكافئ $8z - 16 + 12i = 0$ أو $z^2 + \frac{25}{4} = 0$

يكافئ $z = 2 - \frac{3}{2}i$ أو $z = \frac{5}{2}i$ أو $z = -\frac{5}{2}i$

2) تعيين z_C لاحقة النقطة C

لدينا $\begin{cases} 2|z_C - z_A| = |z_B - z_A| \\ \text{Arg}(z_C - z_A) = \frac{\pi}{2} + \text{Arg}(z_B - z_A) \end{cases}$

أي $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}i$

أي $z_C = \frac{1}{2}i(z_B - z_A) + z_A$

$= \frac{1}{2}i(\frac{5}{2}i - 2 + \frac{3}{2}i) + 2 - \frac{3}{2}i$

$= \frac{1}{2}i(-2 + 4i) + 2 - \frac{3}{2}i$

$z_C = -\frac{5}{2}i$

ب) الاستنتاج:

لدينا $z_C - z_A = \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{2}}(z_B - z_A)$ مما سبق

إذن C هي صورة B بالتشابه المباشر S

الذي مركزه A، نسبته $\frac{1}{2}$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

ج) طبيعة المثلث ABC

C صورة B بالتشابه المباشر S الذي زاويته $\frac{\pi}{2}$ ونسبته $\frac{1}{2}$ إذن المثلث ABC قائم في A وتقع

مساحته: $\alpha = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} AB^2 = \frac{1}{4}|z_B - z_A|^2 = \frac{1}{4}|-2 + 4i|^2$

أي $\alpha = 5$ ua

د) D صورة C بالتشابه المباشر S

إذن المثلث ACD قائم في A مساحته β

$\beta = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} AC^2 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}(\frac{1}{2}AB)^2 = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} AB^2$

$\beta = \frac{1}{4} \times 5 \text{ ua} = \frac{5}{4} \text{ ua}$

3) أ) العبارة المركبة للتشابه المباشر S

هي: $z' - z_A = \frac{1}{2}i(z - z_A)$

أي $z' - 2 + \frac{3}{2}i = \frac{1}{2}i(z - 2 + \frac{3}{2}i)$

$z' = \frac{1}{2}iz + \frac{5}{4} - \frac{5}{2}i$

ب) لدينا $T_n = \underbrace{S \circ S \circ \cdots \circ S}_{n \text{ مرة}}$ $n \geq 2$

البرهان بالتراجع:

لتكن $P(n)$ الخاصية $z' - z_A = \frac{1}{2^n}e^{in\frac{\pi}{2}}(z - z_A)$ من أجل $n \geq 2$

$P(2)$ صحيحة من أجل $n = 2$

$z' - z_A = \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{2}} \times \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{2}}(z - z_A)$ لدينا $T_2 = S \circ S$

$z' - z_A = \frac{1}{2^2}e^{i(2\frac{\pi}{2})}$ ومنه

$z' - z_A = \frac{1}{2^2}e^{i\pi}(z - z_A)$ ومنه

$P(2)$ صحيحة

ليكن $n \geq 2$ نفترض أن $P(n)$ صحيحة: $T_n : z' - z_A = \frac{1}{2^n}e^{in\frac{\pi}{2}}(z - z_A)$

ونبرهن صحة $P(n+1)$: $T_{n+1} : z' - z_A = \frac{1}{2^{n+1}}e^{i(n+1)\frac{\pi}{2}}(z - z_A)$

لدينا: $T_{n+1} = T_n \circ S$

$z' - z_A = \frac{1}{2^n}e^{in\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{2}}(z - z_A)$ ومنه

$z' - z_A = \frac{1}{2^{n+1}}e^{i(n+1)\frac{\pi}{2}}(z - z_A)$ ومنه

$P(n+1)$ صحيحة ~ ⑤

من ④ و ⑤ ومن مبدأ الاستدلال بالتراجع

$z' - z_A = \frac{1}{2^n}e^{in\frac{\pi}{2}}(z - z_A)$ عبارة T_n

أي $z' = \frac{1}{2^n}e^{in\frac{\pi}{2}}(z - z_A) + z_A$

ج) تعيين قيم n حتى تكون T_n تحاكيا.

T_n تحاكي معناه $e^{in\frac{\pi}{2}} \in \mathbb{R}$

معناه $\sin\frac{n\pi}{2} = 0$

يكافئ $\frac{n\pi}{2} = k\pi$

يكافئ $n = 2k$ و $k \in \mathbb{N}^*$

نسبته $r = \frac{1}{2^{2k}}\cos(k\pi) = \frac{1}{4^k}\cos(k\pi)$

إذا كان $n = 4q$ نجد $r = \frac{1}{2^n}$

إذا كان $n = 4q + 2$ نجد $r = -\frac{1}{2^n}$

Créé dans Photo-to-PDF One Click Converter. Télécharger ici : https://firehawk.ai/phototopdf/

التمرين الثالث :

في صندوق : 8 كريات بيضاء و 3 حمراء و 2 سوداء

نسحب كريتين على التوالي بدون إرجاع

A حدث الحصول على كريتين بيضاوين

$P(A) = \frac{2 \cdot A_2^1 \times A_6^1 + A_2^2}{A_8^2} = \frac{24+2}{56} = \frac{13}{28}$ (1b

$P(\bar{A}) = \frac{A_6^2}{A_8^2} = \frac{30}{56} = \frac{15}{28}$ (2b لدينا

$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{15}{28} = \frac{13}{28}$ ومنه

B حدث الحصول على كريتين من لونين

$P(B) = \frac{A_2^2 + A_3^2 + A_3^2}{A_8^2} = \frac{14}{56} = \frac{1}{4}$

(2 نضيف إلى الصندوق n كرية بيضاء

C حدث الحصول على كريتين بيضاوين

لدينا $P(C) = \frac{A_{n+2}^2}{A_{n+8}^2} = \frac{(n+2)(n+1)}{(n+8)(n+7)}$

$\lim_{n \to +\infty} P(C) = \lim \frac{n^2+3n+2}{n^2+15n+56} = \lim_{n \to +\infty} \frac{n^2}{n^2} = 1$

الإستنتاج: الحصول على كريتين بيضاوين في حالة n يؤول إلى $+\infty$ يؤول إلى الحدث الأكيد.

(3 نسحب في الوضعية الأولى 3 كريات في آن واحد.

X يرفق بكل عملية سحب عدد الكريات الحمراء المسحوبة

أ) قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X :

x_i	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	$\frac{10}{56}$	$\frac{30}{56}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{1}{56}$

$P(X=0) = \frac{C_5^3}{C_8^3} = \frac{10}{56}$ $P(X=1) = \frac{C_3^1 \cdot C_5^2}{C_8^3} = \frac{30}{56}$

$P(X=2) = \frac{C_3^2 \times C_5^1}{C_8^3} = \frac{15}{56}$; $P(X=3) = \frac{C_3^3}{C_8^3} = \frac{1}{56}$

$E(X) = \frac{10}{56}(0) + \frac{30}{56}(1) + \frac{15}{56}(2) + \frac{1}{56}(3) = \frac{48}{56} = \frac{6}{7}$ (ب

$V(X) = \frac{10}{56}(0^2) + \frac{30}{56}(1^2) + \frac{15}{56}(2^2) + \frac{1}{56}(3^2) - \left(\frac{6}{7}\right)^2$

$V(X) = \frac{405}{392}$

التباين ←

الإنحراف المعياري:

$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{405}{392}} \approx 1,016$

التمرين الرابع :

$x \in \mathbb{R}$; $f(x) = x - (1+x^2)e^{-x+1}$ (I

1) الحساب والتباين:

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (x - (1+x^2)e^{-x+1}) = -\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(x - \frac{e}{e^x} - e\frac{x^2}{e^x}\right) = +\infty$;

ب) التباين: من أجل كل $x \in \mathbb{R}$

$f'(x) = 1 - 2xe^{-x+1} + (1+x^2)e^{-x+1}$

$= 1 + (e^{-x+1})(x^2 - 2x + 1)$

$f'(x) = 1 + (x-1)^2 e^{-x+1}$ ومنه الاطراد:

ج) الإستنتاج: من أجل كل $x \in \mathbb{R}$

$f'(x) = 1 + (x-1)^2 e^{-x+1} > 0$

إذن f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

جدول تغيرات الدالة f

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$

ب) التباين (C_f)

$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \to +\infty} -(1+x^2)e^{-x} = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{-e}{e^x} - \frac{ex^2}{e^x}\right) = 0$

إذن المستقيم (Δ): y = x مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$

الوضعية: لدينا $f(x) - x = -(1+x^2)e^{-x+1} < 0$

إذن (C_f) دائما تحت المستقيم (Δ)

3) التباين: f مستمرة ومتزايدة تماما على $\mathbb{R}$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ ، $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

إذن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α على $\mathbb{R}$

$1,8 < \alpha < 1,9$ إذن $f(1,8) \cdot f(1,9) < 0$

4) معادلة المماس (T): $y = f'(1)(x-1) + f(1)$

نجد $(T): y = x - 2$

5) من أجل كل $x \in \mathbb{R}$

Créé dans Photo-to-PDF One Click Converter. Télécharger ici : https://firehawk.ai/phototopdf/

$\mathbb{R}$ على $x \to xe^{x+1}$ دالة أصلية للدالة G لتكن

$I_1 = \int_0^1 xe^{-x+1}dx = [G(x)]_0^1$: حساب

$= G(1) - G(0) = -2 + e = \boxed{e-2 = I_1}$

$I_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1} e^{-x+1} dx$: $n \in \mathbb{N}$ لتكن

$u'(x) = (n+1)x^n$, $v(x) = -e^{-x+1}$; $u(x) = x^{n+1}$, $v'(x) = e^{-x+1}$

$I_{n+1} = [-x^{n+1}e^{-x+1}]_0^1 - \int_0^1 (n+1)x^n(-e^{-x+1})dx$

$= -1 + (n+1)\int_0^1 x^n e^{-x+1}dx = -1 + (n+1)I_n$

$\boxed{I_{n+1} = -1 + (n+1)I_n}$: ومنه

$I_2 = -1 + (2+1)I_1 = -1 + 3(e-2)$

$\boxed{I_2 = 3e - 7}$

$S = \int_0^1 (x - f(x))dx = \int_0^1 (1+x^2)e^{-x+1}dx$

$= \int_0^1 x^2 e^{-x+1}dx + \int_0^1 e^{-x+1}dx$

$= I_2 + [-e^{-x+1}]_0^1$

$= 3e - 7 + (-1+e)$

$\boxed{S = 4e - 8 \ ua}$

$f''(x) = 0 + 2(x-1)e^{-x+1} - (x-1)^2 e^{-x+1}$

$= -(x-1)(x-1-2)e^{-x+1}$

$= -(x-1)(x-3)e^{-x+1}$

الاستنتاج:

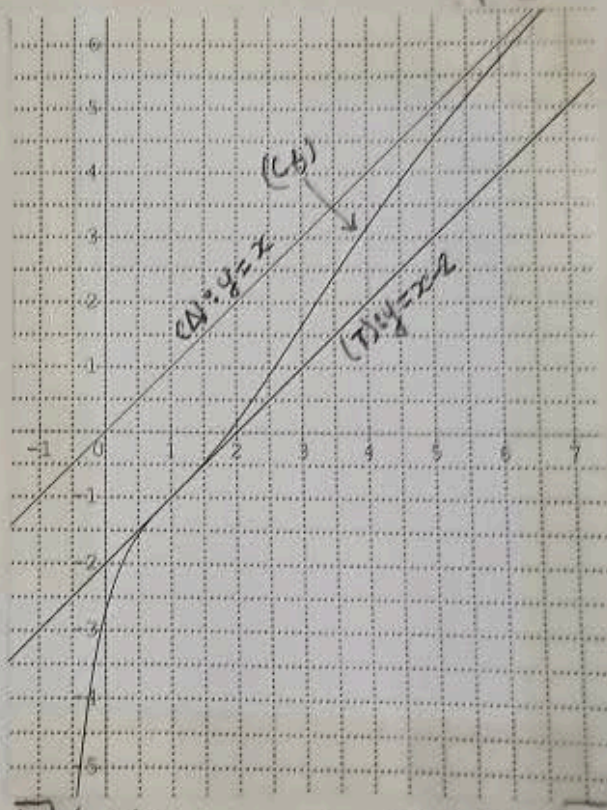
x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

f'' تنعدم عند العددين 1 و 3 مغيرة إشارتها فهما فاصلتا نقطتي انعطاف لـ (C_f) هما النقطتان $(1, f(1))$ و $(3, f(3))$

$(1, -1)$ و $(3, 3 - \frac{10}{e^2})$

$f(1) = 3 - \frac{10}{e^2}$ ، $f(3) = -e$

الرسم



7) المناقشة: حلول المعادلة $f(x) = x + m$ هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيم ذي المعادلة $y = x + m$

أ) إذا كان $m < -e$ المعادلة تقبل حلا واحدا سالبا

ب) إذا كان $m = -e$ المعادلة تقبل حلا واحدا معدوما

ج) إذا كان $-e < m < 0$ المعادلة تقبل حلا واحدا موجبا

د) إذا كان $m = -2$ المعادلة تقبل حلا مضاعفا هو 1

ه) إذا كان $m \geq 0$ المعادلة لا تقبل حلول

II $n \in \mathbb{N}^*$ ، $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x+1}dx$

1) البرهان: من أجل كل x من $\mathbb{R}$

$G'(x) = -e^{-x+1} + (x+1)e^{-x+1} = xe^{-x+1}$

Créé dans Photo-to-PDF One Click Converter. Télécharger ici : https://firehawk.ai/phototopdf/