الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

مديرية التربية لولاية الأغواط — ثانويات الأغواط -المقاطعة 1 -

إمتحان البكالوريا التجريبي للتعليم الثانوي — دورة ماي 2025

شعبة : الرياضيات

إختبار في مادة : الرياضيات — المدة :4 ساعات ونصف

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين على الخيار

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04.50 نقاط)

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ $u_n = 2^n$ ، وليكن S_n المجموع المعرف بـ $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$

1) أكتب S_n بدلالة n ، ثم استنتج أن S_n و u_n أوليان فيما بينهما

2) ا) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية لـ u_n على 7

ب) نعتبر العدد A حيث $A = (u_{2024} + u_{1962} - S_{1445})^{1954} - 2 \times 6^{2022}$
- بين أن A مضاعف لـ 7

ج) عيّن قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون S_{2n} مضاعفا لـ 7

3) نعتبر المعادلة $(E) : 4x - 7y = 3$ ذات المجهولين الصحيحين x و y

ا) بيّن أن الثنائية $(S_2 - 1; S_1)$ حل لـ (E)،ثمّ حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E)

ب) نضع $D = PGCD(x; y)$، عيّن القيم الممكنة لـ D

4) ليكن P العدد الطبيعي الذي يكتب $\overline{1\alpha\alpha220}$ في النظام ذا الأساس 4 ، بحيث α عدد طبيعي
- جد قيمة α حتى يكون $(P - 1)$ مضاعفا لـ 7 ، ثم أكتب P في النظام العشري

التمرين الثاني: (04.50 نقاط)

كيس يحتوي على خمس كريات حمراء تحمل الأعداد $1, e, e, e^2, e^2$ وثلاث كريات سوداء تحمل الأعداد e, e^2, e^2
وثلاث كريات خضراء تحمل الأعداد $1, \frac{1}{e}, \frac{1}{e^2}$ (الكريات متماثلة ولانفرق بينها باللمس)
نسحب بطريقة عشوائية من هذا الكيس كريتان في آن واحد
نعتبر الحدثين A،B حيث :

- A : "سحب كريتين مختلفتين في اللون"
- B : "سحب كريتين لهما نفس العدد"

1) ا) أحسب $P(A), P(B)$ و $P(A \cap B)$ ثم استنتج $p(A \cup B)$.

ب) ماهو احتمال سحب كريتين مختلفتين في اللون علماً أن لهما نفس العدد؟

2) نسمي α و β العددين الظاهرين على الكريتين المسحوبتين، وليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب العدد $\ln(\alpha\beta)$.

ا) عرّف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X

ب) أحسب احتمال الحادثة " $X^2 \succ 4$"

3) نسحب الآن من هذا الكيس ثلاث كريات على التوالي بدون إرجاع بحيث نرتبها ترتيباً تصاعدياً عند ظهورها.
أحسب $P(C)$ و $P(D)$ احتمال الحادثتين C و D.
حيث:
- C : "سحب كرية واحدة فقط حمراء والكرية الأولى سوداء"
- D : "سحب ثلاث كريات تحمل أعداداً تشكل حدوداً متتابعة من متتالية هندسية"

التمرين الثالث: (04 نقاط)

I) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O, \vec{u}, \vec{v})$، α عدد مركب حيث :

$$\begin{cases} \alpha + \overline{\alpha} & = 2\sqrt{2+\sqrt{2}} \\ \alpha\overline{\alpha} & = 4 \\ Im(\alpha) & > 0 \end{cases}$$

1) ا/ اكتب العدد α على الشكل الجبري
ب/ اكتب العدد α^2 على الشكل الأسي

2) ا/ بيّن أن $\alpha = 2e^{\frac{\pi}{8}i}$
ب/ استنتج القيمة المضبوطة لـ $\tan(\frac{\pi}{8})$

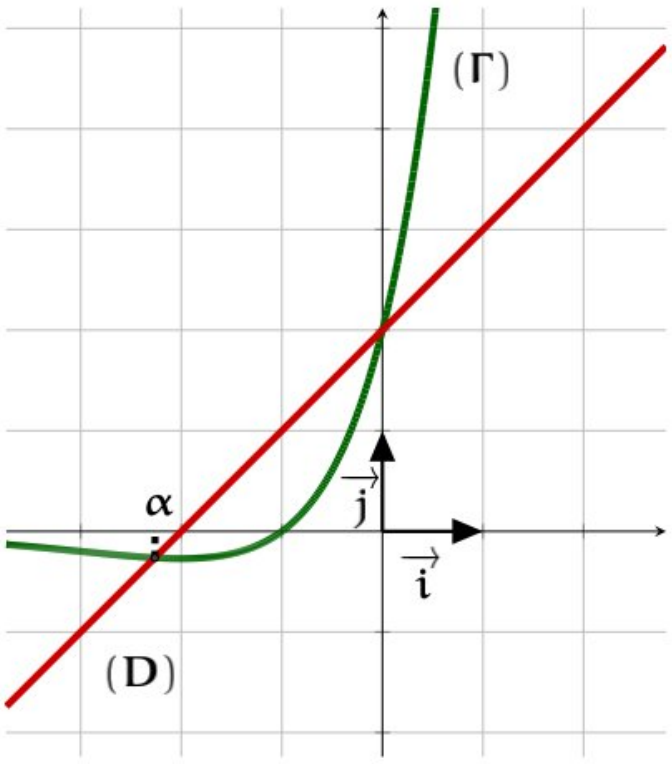
II) من أجل كل عدد طبيعي n نضع : $Z_n = \alpha^n$ ، ونعتبر النقطتين A و B ذات اللاحقتين Z_2 و Z_3 على الترتيب

1) عيّن قيم n التي من أجلها العدد Z_{4n} تخيلي صرف

2) المتتالية العددية (U_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $U_n = \arg(Z_n)$
ا/ بيّن أنّ (U_n) حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول ، ثم اكتب U_n بدلالة n
ب/ احسب بدلالة n عبارة S_n حيث : $S_n = \arg(\overline{Z_0} \times \overline{Z_1} \times \ldots \times \overline{Z_n})$

3) ا/ عيّن (E_1) مجموعة النقط M ذات اللاحقة L والتي تحقق $L = Z_1(Z_2 - e^{i\theta})$ حيث : θ تمسح $\mathbb{R}$.
ب/ عيّن (E_2) مجموعة النقط M ذات اللاحقة L والتي تحقق $\arg[(iL + \overline{iZ_2})^2] = \frac{3\pi}{4} + 4k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$.

التمرين الرابع: (07 نقاط)



I) في الشكل المقابل: (Γ) هو التمثيل البياني للدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $x \mapsto (2x+2)e^x$ و (D) هو المستقيم ذو المعادلة $y = x + 2$.
(Γ) و (D) يتقاطعان في نقطتين فاصلتيهما 0 و α حيث $-2.3 < \alpha < -2.2$.

1) بقراءة بيانية، حدد وضعية (Γ) بالنسبة إلى (D).

2) استنتج حسب قيم x إشارة الدالة g على $\mathbb{R}$ حيث:
$g(x) = -x - 2 + 2(x+1)e^x$.

II) لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة :

$f(x) = x(e^x - 1)^2$

و تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O; \vec{i}; \vec{j}\right)$.

1) أ) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

ب) بين أنّ المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل لـ (C_f) عند $-\infty$.

ج) أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ).

2) أ) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x: $f'(x) = (e^x - 1)^2 + 2xe^x(e^x - 1)$.

ب) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x: $x(e^x - 1) \geq 0$ ، ثم استنتج أن الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ وشكل جدول تغيراتها.

3) أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x: $f''(x) = 2e^x g(x)$ ، ثم استنتج أن المنحنى (C_f) يقبل نقطتي إنعطاف معينا فاصلتيهما.

4) أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0 ، ثم أثبت أنه المماس الوحيد الذي يمر من المبدأ.

5) أ) أنشئ (Δ) و (C_f) بدقة. (الوحدة: 2cm)

ب) عين قيم العدد الحقيقي m بحيث تقبل المعادلة $f(x) = mx$ ثلاثة حلول مختلفة مثنى مثنى.

6) أ) باستعمال المكاملة بالتجزئة بين أن : $\int_0^{\ln 2} xe^x(e^x - 2)dx = \frac{1}{4}(5 - 8\ln 2)$.

ب) استنتج بـ cm^2 مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات: $x = 0$ و $x = \ln 2$ و $y = x$.

إنتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

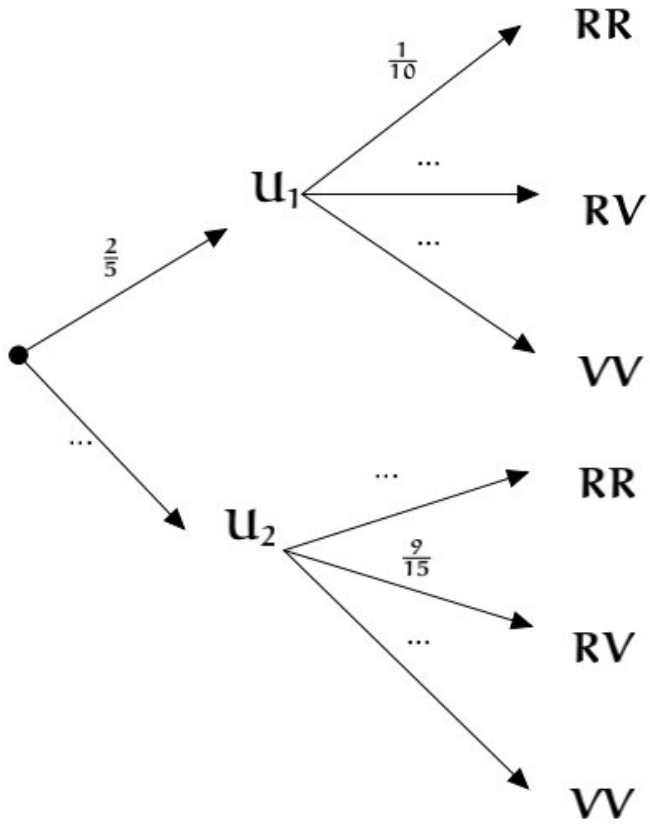
1) أدرس حسب قيم بواقي القسمة الإقليدية للعدد 4^n على 13.
2) نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $(E_n) : 286x - 247y = 4^n - 25$ حيث n عدد طبيعي.
   - عين قيم n التي من أجلها المعادلة (E_n) تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$.
3) نضع: $n = 3$
   أ) بين أن (E_3) تكافئ المعادلة $(E') : 22x - 19y = 3$ ،ثم حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E').
   ب) ماهي القيم الممكنة لـ $PGCD(x; y)$ حيث $(x; y)$ حلول المعادلة (E') .
   ج) عيّن الثنائيات $(x; y)$ حلول المعادلة (E') بحيث يكون $PGCD(x; y) = 3$.
   د) عيّن الثنائيات $(x; y)$ حلول المعادلة (E') التي تحقق $|2x - y| < 17$.

التمرين الثاني: (04.50 نقاط)

يحتوي صندوق U_1 كريتين حمراوين وثلاث كريات خضراء، ويحتوي صندوق U_2 ثلاث كريات حمراء وكريتين خضرواين، بحيث كل الكريات متماثلة،لا يمكن التفريق بينهما باللمس.

نسحب ثلاث كريات كما يلي: نسحب كرية واحدة من الصندوق U_1 ونسجل لونها ،
فإذا كانت حمراء نعيدها إلى الصندوق U_1 ثم نسحب كريتين في آن واحد من U_1 ،
وإذا كانت خضراء نضعها داخل الصندوق U_2 ثم نسحب كريتين في آن واحد من U_2.

1) أنقل ثم أتمم شجرة الإحتمالات المقابلة :
(نرمز للكريات الحمراء بـ R وللخضراء بـ V)



2) احسب احتمال الحدثين التاليين:
A "الكريات الثلاث المسحوبة من نفس اللون"
B "الحصول على كرية حمراء على الأقل"

3) بين أن : $P_A(U_2) = \frac{3}{4}$.

4) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب لثلاث كريات عدد الكريات الخضراء المتبقية في الصندوق U_1 بعد إنتهاء عملية السحب.

   أ) برّر أن قيم المتغير العشوائي X هي : 1 ، 2 و 3.
   ب) عيّن قانون احتمال المتغير العشوائي X ثم أحسب أمله الرياضياتي $E(X)$.
   ج) أحسب الإحتمال : $P(C_3^X = 3)$.

التمرين الثالث: (04.50 نقاط)

I) نعتبر العدد المركب $L = 2 + \sqrt{3} + i$.

1) بيّن أن طويلة L هي : $2\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

2) تحقق من أن : $L = 2\left[1 + \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\right] + 2i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

3) أ) بيّن أن : $1 + \cos(2\theta) = 2\cos^2(\theta)$.

ب) بيّن أن : $L = 4\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) + 4i\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$:(تذكر أنّ: $\sin(2\theta) = 2\cos(\theta)\sin(\theta)$).

ج) أكتب العدد المركب L على شكله الأسي.

د) بيّن أنّ: $L^6 = \left(8 + 4\sqrt{3}\right)^3 i$.

II) نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$.النقطتين Ω و P اللتين لاحقتهما $w = \sqrt{3}$ و L على الترتيب.وليكن h التحاكي الذي مركزه Ω ونسبته 2 .

1) بيّن أنّ d لاحقة النقطة D صورة النقطة p بالتحاكي h هي $(4+\sqrt{3}) + 2i$.

2) حدد (Γ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث : $|\bar{z} - 4 - \sqrt{3} + 2i| = |L|$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I) نعتبر g الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $g(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}$

1) أدرس تغيرات الدالة g ثم شكّل جدول تغيراتها

2) استنتج أنه من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$ يكون : $g(x) > 0$

II) لتكن f الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ:

$$\begin{cases} f(x) = x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) + x + 1; x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) ا/ بيّن أن $\lim_{x\to+\infty} x\ln(\frac{x+1}{x}) = 1$ ، ثم استنتج $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

ب/ بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x + 2$ مقارب مائل لـ (C_f) عند $+\infty$

2) ا/ أدرس قابلية إشتقاق الدالة f على يمين 0 ، ثم فسر النتيجة هندسيا .

ب/ بين أنه من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$ يكون : $f'(x) = g(x) + 1$ ، ثم استنتج إتجاه تغير الدالة f وشكّل جدول تغيراتها .

3) أحسب $f(1)$،ثم أنشئ (Δ) و (C_f) بدقة .(الوحدة 2cm)

4) ا/ بين أن الدالة F المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بالعبارة : $F(x) = \frac{1}{2}xf(x) - \frac{1}{2}\ln(x+1) + x$ هي دالة أصلية للدالة f على المجال $]0;+\infty[$.

ب/ استنتج بـcm^2 مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها : $x = 1$ و $x = 0$ و $y = \frac{1}{2}$

5) لتكن (u_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ: $u_n = (1 + \frac{1}{n})^n$

ا/ بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n يكون : $u_n = e^{f(n)-n-1}$

ب/ أثبت أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما .(يمكنك الاستفادة من نتيجة السؤال II/2/ب)

ج/ بيّن أن : $\lim_{n\to+\infty} u_n = e$ ماذا تستنتج؟

تصحيح الموضوعين للبكالوريا التجريبية

الموضوع الأول : شعبة رياضيات .

التمرين الأول : (4,5 نقاط)

1- $u_1 = 2^n$

$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

$S_n = u_0 \left[\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right]$

$S_n = 2^0 \left[\frac{1-2^{n+1}}{1-2}\right]$

$S_n = \frac{2^{n+1}-1}{}$

استنتاج S_n و u_n أولياني فيمابينهما

$S_n = 2^{n+1} - 1$

$S_n = 2 \times 2^n - 1$

$-S_n + 2 \times 2^n = 1$

$2 \times 2^n - S_n = 1$

ومنه توجد ثنائية $(u, v) = (2, -1)$

$2u_n + vS_n = 1$

ومنه حسب بيزو فإن $u_n \wedge S_n = 1$

ومنه حسب مبرهنة ② فإن قواسم u_n هي قواسم 7.

لدينا

$u_0 = 2^0 \equiv 1[7]$

$u_1 = 2^1 \equiv 2[7]$

$u_2 = 2^2 \equiv 4[7]$

$u_3 = 2^3 \equiv 1[7]$

ومنه بواقي u_n على 7 دائرية

في الجدول الآتي

فرع 1 نقطة

n	3α	$3\alpha+1$	$3\alpha+2$	$\alpha \in \mathbb{N}$
$u_n \equiv$	1	2	4	[7]

فرع 1 نقطة

② نبين أن A مضاعف للعدد 7

$A = \left(u_{2024} + u_{1962} - S_{1445}\right)^{1954} - 2 \times 6^{2022}$

$A \equiv \left(2^{2024} + 2^{1962} - 2^{1445+1} + 1\right)^{1954} - 2(6)^{2022}[7]$

$\equiv \left(2^{3\alpha+2} + 2^{3\alpha} - 2^{3\alpha} + 1\right)^{1954} - 2(-1)^{2022}[7]$

$\equiv 5^{1954} - 2[7]$

$\equiv (-2)^{1954} - 2[7]$

$\equiv 2^{3\alpha+1} - 2[7]$

$\equiv 2 - 2[7]$

$\equiv 0[7]$

ومنه $A \equiv 0[7]$

③ تعيين قيم n حتى يكون S_{2n} مضاعف لـ 7 :

لدينا : $S_{2n} \equiv 0[7]$

معناه

$2^{2n+1} - 1 \equiv 0[7]$

$2^{2n+1} \equiv 1[7]$

$2n+1 = 3\alpha$

ومنه $2n+1 \equiv 0[3]$

ومنه $2n \equiv -1[3]$

ومنه $2n \equiv 2[3]$ -2-

$(3\wedge 2=1)\ n\equiv 1\ [3]$

$n=3k+1$ $k\in\mathbb{N}$

③ برهن أن (S_2-1, S_1) حل للمعادلة (E)

$4(S_2-1)-7S_1=4(2^{2+1}-1-1)-7\cdot$
$-7(2^{1+1}-1)$

$=4(6)-7(3)$
$=3$

ومنه التناسبية (S_2-1, S_1) حل للمعادلة (E).

ومنه $(x_0, y_0)=(6,3)$ حل خاص للمعادلة (E)

$\begin{cases}4x-7y=3\\ 4\times 6-7(3)=3\end{cases}$

$4(x-6)-7(y-3)=0$ ومنه

$4(x-6)=7(y-3)$

$7/4(x-6)$ و $4/7(y-3)$

بما أن $4\wedge 7=1$

فإن حسب غوص

$7/(x-6)$ و $4/(y-3)$

ومنه $\begin{cases}x-6=7k\\ y-3=4k\end{cases}$ $k\in\mathbb{Z}$

ومنه $\begin{cases}x=7k+6\\ y=4k+3\end{cases}$

④ تعيين العدد الطبيعي D

$D=x\wedge y$

D/x و D/y ومنه

$D/4x-3y$

ومنه

$D/4x-3y$

ومنه $D/3$

ومنه $D\in\{1,3,-1,-3\}$

④ تعيين قيمة α

$p=\overline{1\alpha\alpha 220}^{4}$

$=0(4)^0+2\times(4)^1+2\times(4)^2+\alpha(4)^3+\alpha(4)^4+1(4)^5$

$=320\alpha+1064$

لدينا

$p-1\equiv 0\ [7]$

$-1+\frac{320\alpha+1064}{p}\equiv 0\ [7]$

$5\alpha+6\equiv 0\ [7]$

$5\alpha\equiv 1\ [7]$

$15\alpha\equiv 3\ [7]$

$\alpha\equiv 3\ [7]$

$\alpha=7k+3$ $k\in\mathbb{Z}$

$0\leq\alpha<4$

$\alpha=3$

وعليه

$p=\overline{133220}^{4}=2024$

تمرين الثاني: 4,5 نقاط

$$p(A) = 1 - \frac{C_5^2 + C_3^2 + C_3^2}{C_{11}^2} = \frac{39}{55}$$

$$p(B) = \frac{C_4^2 + C_3^2 + C_2^2}{C_{11}^2} = \frac{10}{55} = \frac{2}{11}$$

$$p(A \cap B) = \frac{C_2^1 C_2^1 + C_2^1 C_1^1 + C_1^1 C_1^1}{C_{11}^2} = \frac{7}{55}$$

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$
$$= \frac{42}{55}$$

① حساب احتمال سحب كريتان مختلفتان في اللون علما أنهما تحملان عددين زوجيين.

$$p_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{\frac{7}{55}}{\frac{10}{55}} = \frac{7}{10}$$

② قانون الاحتمال X. نوع كل نقطة

$X(\Omega) = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$

$$p(X=-3) = \frac{C_1^1 \times C_1^1}{C_{11}^2} = \frac{1}{55} \quad \left\{\frac{1}{e^2} \times \frac{1}{e} = e^{-3}\right\}$$

$$p(X=-2) = \frac{C_2^1 \times C_1^1}{C_{11}^2} = \frac{2}{55} \quad \left\{\frac{1}{e^2} \times 1 = e^{-2}\right\}$$

$$p(X=-1) = \frac{C_1^1 C_3^1 + C_1^1 C_2^1}{C_{11}^2} = \frac{5}{55} \quad \left\{\frac{1}{e^2} \times e = \frac{1}{e} \times 1 = e^{-1}\right\}$$

$$p(X=0) = \frac{C_2^2 + C_1^1 \times C_4^1 + C_1^1 \times C_3^1}{C_{11}^2} = \frac{8}{55} \quad \left\{1 \times 1, \frac{1}{e^2} \times e^2 = \frac{1}{e} \times e\right\}$$

$$p(X=1) = \frac{C_2^1 \times C_3^1 + C_4^1 C_1^1}{C^2} = \frac{10}{55} \quad \left\{1 \times e = e \times \frac{1}{e} = e^{11}\right.$$

$$p(X=2) = \frac{C_2^1 \times C_4^1 + C_5^2}{C_{11}^2} = \frac{11}{55}$$

$$p(X=3) = \frac{C_4^1 \times C_3^1}{C_{11}^2} = \frac{12}{55}.$$

$$p(X=4) = \frac{C_4^2}{C_{11}^2} = \frac{6}{55} \quad \left\{\begin{array}{l} e^2 \times e = e^3 \\ e^2 \times e^2 = e^4 \end{array}\right. \text{ وهكذا}$$

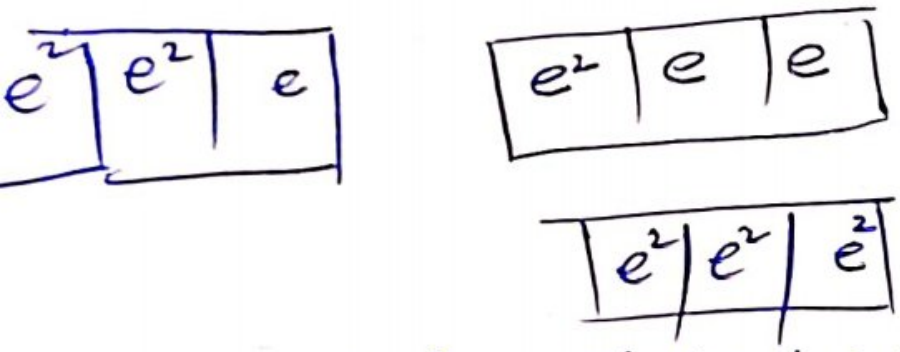
$X = x_i$	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{55}$	$\frac{2}{55}$	$\frac{5}{55}$	$\frac{8}{55}$	$\frac{10}{55}$	$\frac{11}{55}$	$\frac{12}{55}$	$\frac{6}{55}$

1 جزء ونقطة 1,25

$$p(X^2 > 4) = p(|X| > 2)$$
$$= p(X < -2) + p(X > 2)$$
$$= p(X=-3) + p(X=3) + p(X=4)$$
$$= \frac{19}{55}$$

③ حساب $p(C)$ نسحب 3 كريات.

0,5



$$p(C) = \frac{A_1^1 A_2^1 A_2^1 + 2 A_1^1 \times A_2^1 \times A_2^1 + 2 A_2^1 \times A_1^1 \times A_2^1}{A_{11}^3}$$

0,5

$$= \frac{20}{990} = \frac{2}{99}.$$

0,75

حساب $p(D)$ حيث: D: "الكريات تحمل نفس الأساس"

$(1, e, e^2)$ (e, e, e) (e^2, e^2, e^2)

$\left(\frac{1}{e^2}, \frac{1}{e}, 1\right)$ $\left(\frac{1}{e^2}, 1, e^2\right)$ $\left(\frac{1}{e}, 1, e\right)$

$$p(D) = \frac{A_2^1 A_1^1 A_1^1 + A_1^1 A_2^1 \times A_4^1 + A_1^1 \times A_2^1 A_3^1 *}{A_{11}^3}$$
$$* \frac{A_2^1 \times A_3^1 \times A_4^1 + A_3^3 + A_4^3}{A_{11}^3} = \frac{70}{990} = \frac{7}{99}$$

التمرين الثالث:

1,I- كتابة α على الشكل الجبري.

$$\begin{cases} \alpha + \bar{\alpha} = 2\sqrt{2+\sqrt{2}} \\ \alpha + \bar{\alpha} = 2\,Re(\alpha) \end{cases}$$

ومنه

$$Re(\alpha) = \sqrt{2+\sqrt{2}}$$

ولدينا:

$$\alpha\bar{\alpha} = 4$$
$$\alpha\bar{\alpha} = Re^2(\alpha) + Im^2(\alpha)$$
$$Re^2(\alpha) + Im^2(\alpha) = 4$$
$$2+\sqrt{2} + Im^2(\alpha) = 4$$
$$Im^2(\alpha) = 4 - 2 - \sqrt{2}$$
$$= 2 - \sqrt{2}.$$

$Im(\alpha) = \sqrt{2-\sqrt{2}}$ أو $Im(\alpha) = -\sqrt{2}$

نرفض $Im(\alpha) = -\sqrt{2-\sqrt{2}}$

لأن $Im(\alpha) > 0$

لدينا:

$$Re(\alpha) = \sqrt{2+\sqrt{2}}.$$
$$Im(\alpha) = \sqrt{2-\sqrt{2}}.$$

إذن

$$\alpha = \sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

$$\alpha^2 = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i$$
$$= 4\left[\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right]$$
$$= 4\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$
$$= 4e^{i\frac{\pi}{4}}$$

or

2,I- تبيان أن $\alpha = 2e^{i\frac{\pi}{8}}$

$$|\alpha^2| = 4$$
$$|\alpha| = 2$$

ولدينا: $\arg(\alpha^2) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$

أي

$k \in \mathbb{Z}$

ومنه $2\arg(\alpha) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$

أي $\arg(\alpha) = \frac{\pi}{8} + k\pi$.

$(k' \in \mathbb{Z})$ $k = 2k'$ لما $\in$

$\arg(\alpha) = \frac{\pi}{8} + 2k'\pi$

$(k' \in \mathbb{Z})$ $k = 2k'+1$ لما:

$\arg(\alpha) = \frac{\pi}{8} + \pi + 2k'\pi$ فإن

$\begin{cases} Re(\alpha) > 0 \\ Im(\alpha) > 0 \end{cases}$ بما أن

$\arg(\alpha) = \frac{\pi}{8} + 2k'\pi$ فإن

$\alpha = 2e^{i(\frac{\pi}{8})}$

3/ استنتاج القيمة الدقيقة لـ $\tan\frac{\pi}{8}$.

$\alpha = 2e^{i\frac{\pi}{8}}$

$= 2\left[\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right]$

$2\cos\frac{\pi}{8} = \sqrt{2+\sqrt{2}}.$

$2\sin\frac{\pi}{8} = \sqrt{2-\sqrt{2}}.$

$\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

$\sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

$\tan\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}$

II

$z_n = \alpha^{n}$.

$z_1 = \alpha^1 = \alpha$.

$z_2 = \alpha^2$

$z_3 = \alpha^3$.

* $z_{4n} \in \mathbb{C}$

$z_{4n} = \alpha^{4n}$.

$\arg z_{4n} = \arg \alpha^{4n} = \frac{\pi}{2} + k\pi$

$4n \arg\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ومنه

$4n \times \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + k\pi$

ومنه

$n = 2k+1$

② المتتالية العددية (u_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بـ:

$u_{n+1} = \arg(z_{n+1})$

$= \arg(\alpha^{n+1})$

$= \arg(\alpha^n) + \arg\alpha$.

$u_{n+1} = u_n + \frac{\pi}{8}$

اذن (u_n) حسابية اساسها $r = \frac{\pi}{8}$ وحدها الاول u_0 حيث

$u_0 = \arg z_0 = \arg 1 = 0$

كتابة u_n بدلالة n من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ لدينا:

$u_n = u_0 + nr$

$u_n = n\frac{\pi}{8}$

$S_n = \arg(\overline{z_0} \times \overline{z_1} \times \overline{z_2} \times \overline{z_3} \times \dots \times \overline{z_n})$

$S_n = \arg\left(\frac{z_0 \times z_1 \times z_2 \times z_3 \times \dots \times z_{n-1}}{z_0 \times z_1 \times z_2 \times z_3 \times \dots \times z_n}\right)$

$= -\arg(z_0 \times z_1 \times z_2 \dots \times z_n)$

$= -[\arg z_0 + \arg z_1 + \arg z_2 \dots + \arg z_n]$

$= -[u_0 + u_1 \dots + u_n]$

$= -\frac{1}{2}(n+1)\arg(z_n)$

$= -\frac{1}{2}(n+1)\, n\frac{\pi}{8}$.

$= \frac{n\pi(n+1)}{16}$

③ تعيين E_1: لدينا θ من $\mathbb{R}$ حيث

$L = z_1(z_2 - e^{i\theta})$

$L = z_1 z_2 - z_1 e^{i\theta}$

$L = z_3 - \alpha e^{i\theta}$.

$L = z_3 + \alpha e^{i\pi} \times e^{i\theta}$.

$L - z_3 = 2e^{i\frac{\pi}{8}} \times e^{i\pi} \times e^{i\theta}$.

$L - z_3 = 2e^{i\left(\frac{9\pi}{8} + \theta\right)}$

(E₁) دائرة ذات مركز A وشعاعها 3

ومركزها B لاحقته z_3 النقطة

① عين (E₂).

$$\arg(iL + i\overline{z_2})^2 = \frac{3\pi}{4} + 4k\pi$$

$$2\arg(iL + i\overline{z_2}) = \frac{3\pi}{4} + 4k\pi$$

$$\arg(iL + i\overline{z_2}) = \frac{3\pi}{8} + 2k\pi$$

$$\arg(iL - iz_2) = \frac{3\pi}{8} + 2k\pi$$

$$\arg(i(L - z_2)) = \frac{3\pi}{8} + 2k\pi$$

$$\arg i + \arg(L - z_2) = \frac{3\pi}{8} + 2k\pi$$

$$\frac{\pi}{2} + \arg(L - z_2) = \frac{3\pi}{8} + 2k\pi$$

$$\arg(L - z_2) = -\frac{\pi}{8} + 2k\pi$$

$$(\vec{u}, \vec{MA}) = -\frac{\pi}{8} + 2k\pi$$ ومنه

إذن (E₂) دائرة نصف

مستقيم الذي يصل

A ومبدوه النقطة

و $\tan(-\frac{\pi}{8})$

التدقيط:

I

ب - P - 1 ... 0,75

ب - P - 2 ... 0,75

II

0.5 - ④

P ... ② ... ب ... ① دقيقة

P ... 3 ... ب ... ① دقيقة

التمرين الرابع: (7 نقاط)

(D) $y = x + 2$ و (Γ): $y = (2x+2)e^x$

الوضعية النسبية

لـ (Γ) و (D)

(Γ) و (D) يتقاطعان في نقطة

فاصلتها 0 و α.

(Γ) يقع فوق (D) على كل من

$]0, +\infty[$ و $]-\infty, \alpha[$

(Γ) يقع تحت (D) على المجال

$]\alpha, 0[$

② استنتاج إشارة $g(x)$

$g(x) = -x - 2 + 2(x+1)e^x$

من خلال الوضعية النسبية لـ (Γ) و (D)

x	$-\infty$	α	0	$+\infty$
$g(x)$	$+$	0	$-$	0 $+$

$D_f = \mathbb{R}$ $f(x) = x(e^x - 1)^2$ (II)

حساب النهايات:

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim x(e^x - 1)^2 = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim x(e^x - 1)^2 = +\infty$

$\lim (e^x - 1)^2 = +\infty$ (ح ظ)

ب/ المستقيم المقارب المائل:

لدينا: • $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(x(e^{2x}-2e^x+1)-x)$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}(xe^{2x}-2e^x)$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}(\frac{1}{2}2xe^{2x}-2e^x)=0$

إذن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $-\infty$.

ج/ دراسة الوضعية النسبية لـ (C_f) و (Δ) :

لذلك ندرس إشارة:

$f(x)-x=x(e^x-1)^2-x=x\left((e^x-1)^2-1\right)$

$=x\left(e^x-1-1\right)\left(e^x-1+1\right)=\boxed{xe^x(e^x-2)=f(x)-x}$

وعليه:

x	$-\infty$		0		$\ln 2$		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
e^x-2		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)-x$		$+$	0	$-$	0	$+$	

إذن: - (C_f) يقع فوق (Δ) على المجالين: $]0;+\infty[$ و $]-\infty;\ln 2]$.

- (C_f) يقع تحت (Δ) على المجال: $]0;\ln 2[$.

- (C_f) و (Δ) يتقاطعان في النقطتين: $O(0;0)$ و $A(\ln 2;\ln 2)$.

2/ تبيان أن: $x(e^x-1)\geq 0$: لدينا:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x		$-$	0	$+$	$+$
e^x-1		$-$	0	$+$	
$x(e^x-1)$		$+$	0	$+$	

إذن من أجل كل عدد حقيقي x : $x(e^x-1)\geq 0$.

إتجاه تغير الدالة f :

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x : $\boxed{f'(x)=(e^x-1)^2+2xe^x(e^x-1)}$

بما أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $2e^x(e^x-1)x\geq 0$ وكذلك $(e^x-1)^2\geq 0$ ، فإنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x)\geq 0$.

إذن الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

جدول التغيرات:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗		↗	$+\infty$

3/ إثبات عبارة المشتق الثاني: لدينا من أجل كل عدد حقيقي x :

$f''(x)=2e^x(e^x-1)+(2e^x+2xe^x)(e^x-1)+2xe^xe^x$

$=2e^x(e^x-1+(1+x)(e^x-1)+xe^x)$

$=2e^x(e^x-1+e^x-1+xe^x-x+xe^x)$

$=2e^x(-x-2+e^x(2x+2))=\boxed{2e^xg(x)=f''(x)}$

استنتاج نقاط الإنعطاف: لدينا: $f''(x)=2e^xg(x)$ ومنه إشارة $f''(x)$ من إشارة $g(x)$ ، وعليه $f''(x)$ تنعدم عند كل من 0 و α وتغير إشارتها في جوارهما، إذن المنحنى (C_f) يقبل نقطتي إنعطاف فاصلتيهما 0 و α

4/ معادلة المماس (T) : $(T):\ y=f'(0)(x-0)+f(0)$

وبما أن: $f(0)=0$ و $f'(0)=(1-1)^2+0=0$ فإن: $\boxed{(T):\ y=0}$.

إثبات وحدانية المماس الذي يمر من المبدأ:

لذلك نحل المعادلة: $0=f'(a)(0-a)+f(a)$

أي المعادلة: $-a[(e^a-1)^2+2a(e^a-1)]+a(e^a-1)^2=0$

تكافئ: $a(e^a-1)(-e^a+1-2a+e^a-1)=0$

تكافئ: $-2a^2(e^a-1)=0$ معناه: $a=0$.

إذن المنحنى (C_f) يقبل مماسا وحيدا يشمل المبدأ هو نفسه المماس (T) .

$$= \left(\frac{\ln 2}{2}(e^{\ln 2}-2)^2 - 0\right) - \frac{1}{2}\int_0^{\ln 2}(e^{2x}-4e^x+4)\,dx$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}e^{2x}-4e^x+4x\right]_0^{\ln 2}$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}e^{2\ln 2}-4e^{\ln 2}+4\ln 2-\frac{1}{2}+4\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{4}{2}-4\times 2+4\ln 2-\frac{1}{2}+4\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\left(-2+4\ln 2-\frac{1}{2}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)(4-8\ln 2+1)$$

$$\boxed{\int_0^{\ln 2} xe^x(e^x-2)\,dx = \frac{1}{4}(5-8\ln 2)}$$

ب/ استنتاج المساحة: بما أن المنحنى (C_f) يقع تحت المستقيم (Δ) على المجال $[0;\ln 2]$ فإن مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) على هذا المجال هي:

$$A = \int_0^{\ln 2}(x-f(x))\,dx = -\int_0^{\ln 2} xe^x(e^x-2)\,dx$$

$$= -\frac{1}{4}(5-8\ln 2) \quad u.a = \frac{1}{4}(-5+8\ln 2)\times 4\ cm^2$$

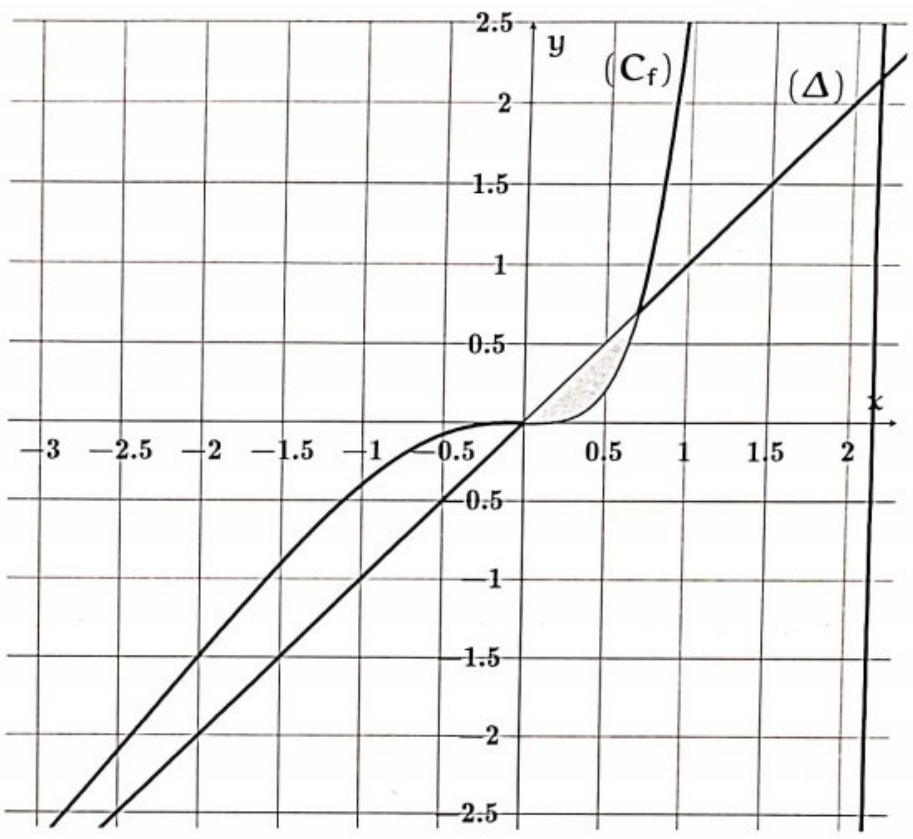
$$\boxed{A = -5+8\ln 2\ cm^2}$$

التدقيط:

(I)
- 1- 0,5 نقطة
- 2- 0,5 نقطة
- 0,5 — 0,25 — 0,75 — 0,5 — 0,25

(II)
- 1. 0,5
- 2. 0,25 — 0,75 — 0,5 — 0,5

/5 **ا/ الإنشاء:**



ب/ تعيين قيم العدد الحقيقي m : بقراءة بيانية:

تقبل المعادلة $f(x)=mx$ ثلاثة حلول مختلفة لما $m \in]0;1[$.

/6 **ا/ المكاملة بالتجزئة:** لتبيان أن: $\int_0^{\ln 2} xe^x(e^x-2)\,dx = \frac{5-8\ln 2}{4}$

نعتبر: $\begin{cases} u(x)=x \\ v'(x)=e^x(e^x-2) \end{cases}$ ومنه: $\begin{cases} u'(x)=1 \\ v(x)=\frac{1}{2}(e^x-2)^2 \end{cases}$

وبالتالي:

$$\int_0^{\ln 2} xe^x(e^x-2)\,dx = \left[\frac{1}{2}x(e^x-2)^2\right]_0^{\ln 2} - \frac{1}{2}\int_0^{\ln 2}(e^x-2)^2\,dx$$

الموضوع الثاني

التمرين الأول: 4 نقاط.

① دراسة بواقي 4^n على 13.

$4^0 \equiv 1 [13]$
$4^1 \equiv 4 [13]$
$4^2 \equiv 3 [13]$
$4^3 \equiv 12 [13]$
$4^4 \equiv 9 [13]$
$4^5 \equiv 10 [13]$
$4^6 \equiv 1 [13]$

ومنه بواقي قسمة 4^n على 13.
نلخصها في الجدول الآتي

n	$6K$	$6K+1$	$6K+2$	$6K+3$	$6K+4$
4^n	1	4	3	12	9

$6K+5$	$K \in \mathbb{N}$
10	$[13]$

② تعيين قيم n حتى (E_n) تقبل حلول في $\mathbb{Z}^2$

$286 = 247(1) + 39$.
$247 = 39(6) + 13$.
$39 = 13(3) + 0$.
ومنه $PGCD(286, 247) = 13$.
المعادلة (E_n) تقبل حلول في $\mathbb{Z}^2$ معناه.

$13 \mid 4^n - 25$.
$4^n = 13k + 25$ $\quad k \in \mathbb{N}$

ومنه
$4^n - 25 \equiv 0 [13]$
$4^n \equiv 25 [13]$
ومنه
$4^n \equiv 12 [13]$.
ومنه
$n = 6K + 3$

③ تبيان ان (E) تكافئ (E'):
لدينا
$(E)\ 286x - 247y = 39$
$E' : 22x - 19y = 3$
$(E') \Leftrightarrow (E)$ ومنه
نلاحظ ان $(1,1)$ حل خاص لـ (E').
ومنه
$\begin{cases} 22x - 19y = 3 \\ 22(1) - 19(1) = 3 \end{cases}$
بالطرح نجد
$22(x-1) - 19(y-1) = 0$
$22(x-1) = 19(y-1)$
بما أن $22 \wedge 19 = 1$
فإنه حسب غوص.
$22 / y-1$ و $19 / x-1$.
ومنه
$\begin{cases} x-1 = 19K \\ y-1 = 22K \end{cases}$

$\begin{cases} x = 19K+1 \\ y = 22K+1 \end{cases}$

$(x,y) \in \{(19K+1, 22K+1)\}$.

⑤ تعيين الثنائيات (x,y) حلول المعادلة (E') حيث

$|2x-y|<17$

لدينا

$|2x-y|<17$.

معناه

$|2(19k+1)-(22k+1)|<17$.

ومنه

$|16k+11|<17$

ومنه

$-17<16k+1<17$

$-18<16k<16$

$-1,1<k<1$.

ومنه

$k\in\{-1.0\}$

اذن

$(x,y)\in\{(-18,-21)\ (1.1)\}$.

التدقيق:

نقطة	←	1
975	←	②
0,5	P ←	③
0,5	O ←	
0,5	D ←	
0,75	S ←	

⑥ تعيين القيم الممكنة لـ $pgcd(x,y)$

ليكن $d=x\wedge y$.

لدينا:

$d/y \wedge d/x$.

ومنه

$d/22x-19y$

$d/3$

ومنه

$d\in D_3$ ومنه $d\in\{-3,-1,1,3\}$

⑦ تعيين الثنائيات (x,y) حلول (E') حيث

$(x\wedge y=3$.

لدينا:

$x\wedge y=3$.

ومنه

$\begin{cases} x\equiv 0[3]. \\ y\equiv 0[3]. \end{cases}$

ومنه

$\begin{cases} 19k+1\equiv 0[3] \\ 2+k+1\equiv 0[3] \end{cases}$

ومنه

$\begin{cases} k+1\equiv 0[3]. \\ k+1\equiv 0[3] \end{cases}$

ومنه

$k\equiv 2[3]$.

$k=3k'+2$.

لدينا:

$\begin{cases} x=19k+1 \\ y=22k+1 \end{cases}$

ومنه

$\begin{cases} x=57k'+39 \\ y=66k'+45 \end{cases}$

$k'\in\mathbb{Z}$ حيث

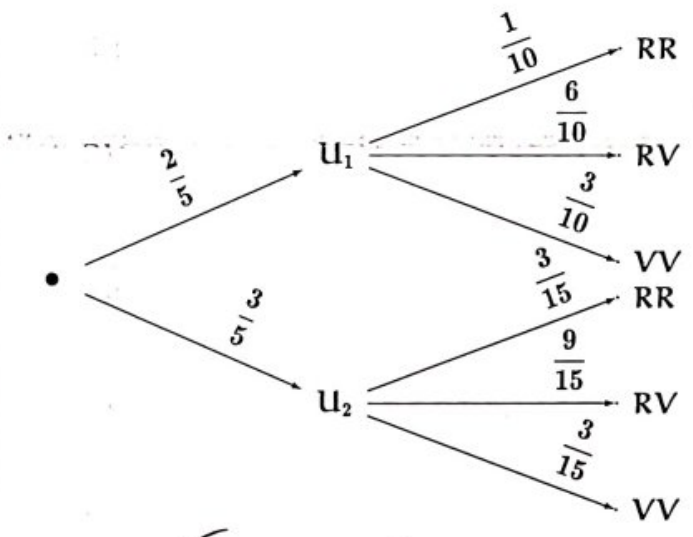
الموضوع الثاني:

التمرين الثاني (04 نقاط)

1/ إتمام شجرة الإحتمالات: لدينا:

- $P(U_2) = 1 - P(U_1) = \frac{3}{5}$
- $P_{U_1}(VV) = \frac{C_3^2}{C_5^2} = \frac{3}{10}$
- $P_{U_1}(RV) = \frac{C_3^1 . C_2^1}{C_5^2} = \frac{6}{10}$ $\left(= 1 - \frac{1}{10} - \frac{3}{10}\right)$
- $P_{U_2}(RR) = \frac{C_3^2}{C_6^2} = \frac{3}{15}$
- $P_{U_1}(VV) = \frac{C_3^2}{C_6^2} = \frac{3}{15}$ $\left(= 1 - \frac{3}{15} - \frac{9}{15}\right)$

وعليه:



2/ حساب إحتمالي الحدثين:

- **الحدث A :** الأولى حمراء والأخرتين حمراوين، أو الأولى خضراء والأخرتين خضراوين:

$$P(A) = P(U_1)P_{U_1}(RR) + P(U_2)P_{U_2}(VV) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{10} + \frac{3}{5} \times \frac{3}{15}$$

$$\boxed{P(A) = \frac{4}{25}}$$

- **الحدث B :** الأولى حمراء، أو الأولى خضراء والأخرتين واحدة حمراء والأخرى خضراء أو الأولى خضراء والأخرتين حمراوين.

(أو يمكن القول أنه الحدث العكسي لثلاث كريات خضراء-الأولى خضراء والأخرتين خضراوين)

$$P(B) = P(U_1) + P(U_2)\left(P_{U_2}(RV) + P_{U_2}(RR)\right) = \frac{2}{5} + \frac{3}{5}\left(\frac{9}{15} + \frac{3}{15}\right)$$

$$\boxed{P(B) = \frac{22}{25}} \qquad \left(P(B) = 1 - \frac{3}{5} \times \frac{3}{15} = 1 - \frac{3}{25} = \frac{22}{25}\right)$$

3/ حساب الإحتمال الشرطي:

$$P_A(U_2) = \frac{P(U_2 \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{3}{5} \times \frac{3}{15}}{\frac{4}{25}} = \frac{\frac{3}{25}}{\frac{4}{25}} = \boxed{\frac{3}{4} = P_A(U_2)}$$

4/ ا/ قيم المتغير العشوائي X نلخصها كما يلي:

في حالة سحب الأولى حمراء (حالة سحب كريتين من U_1): نميز ثلاث حالات: إما: $U_1 - RR \rightarrow X = 3$ وإما: $U_1 - RV \rightarrow X = 2$

وإما: $U_1 - VV \rightarrow X = 1$

في حالة سحب الأولى خضراء (حالة سحب كريتين من U_2):

ببقى في الصندوق U_1 كريتان خضراوان، أي: $X = 2$.

إذن قيم المتغير العشوائي X هي: 1 و 2 و 3 .

ب/ قانون إحتمال المتغير العشوائي X :

- $P(X = 1) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{10} = \frac{3}{25}$
- $P(X = 2) = \frac{3}{5} + \frac{2}{5} \times \frac{6}{10} = \frac{21}{25}$
- $P(X = 3) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{25}$

$X = x_i$	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{3}{25}$	$\frac{21}{25}$	$\frac{1}{25}$

وعليه:

حساب الامل الرياضياتي للمتغير العشوائي X :

التمرين الثالث (4,5)

(1)

$L = 2+\sqrt{3}+i$ (0,5)

$|L| = |2+\sqrt{3}+i|$

$|L| = \sqrt{(2+\sqrt{3})^2+1}$

$|L| = \sqrt{8+4\sqrt{3}}$

$= \sqrt{4(2+\sqrt{3})}$

$= 2\sqrt{2+\sqrt{3}}$

(2) بين أن $L = 2\left[1+\cos\frac{\pi}{6}\right]+2i\sin\frac{\pi}{6}$. (0,75)

$L = 2+\sqrt{3}+i$

$L = 2\left[1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right]+2i\left(\frac{1}{2}\right)$

$L = 2\left[1+\cos\frac{\pi}{6}\right]+2i\sin\frac{\pi}{6}$.

3- بين أن $L = 4\cos\frac{\pi}{12}\left[\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right]$ (0,75)

$L = 4\cos^2\frac{\pi}{12}+4i\cos\frac{\pi}{12}\sin\frac{\pi}{12}$

$L = 2\left[1+\cos\frac{\pi}{6}\right]+2i\sin\frac{\pi}{6}$

$L = 2\left[1+\cos 2\left(\frac{\pi}{12}\right)\right]+2i\sin 2\left(\frac{\pi}{12}\right)$

$= 2\left[2\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right)\right]+2i\,2\cos\frac{\pi}{12}\sin\frac{\pi}{12}$

$= 4\cos^2\frac{\pi}{12}+4i\cos\frac{\pi}{12}\sin\frac{\pi}{12}$.

(4) الكتابة على الشكل الأسي:

$L = 4\cos^2\frac{\pi}{12}+4i\cos\frac{\pi}{12}\sin\frac{\pi}{12}$. (0,75)

$= 4\cos\frac{\pi}{12}\left[\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right]$

$= 4\cos\frac{\pi}{12}\,e^{i\frac{\pi}{12}}$.

$= 2\sqrt{2+\sqrt{3}}\,e^{i\frac{\pi}{12}}$. (0,75)

(5) بين أن $L^6 = (8+4\sqrt{3})i$ ؛ ثم

$L^6 = \left(2\sqrt{2+\sqrt{3}}\,e^{i\frac{\pi}{12}}\right)^6$

$= \left(2\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^6 e^{i\frac{\pi}{2}}$.

$= \left[\left(2\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^2\right]^3 i$

$\left[4(2+\sqrt{3})\right]^3 i$

$= 2\sqrt{2+\sqrt{3}}\,e^{i\frac{\pi}{12}}$.

II

h: $z' - w = 2(z-w)$

وعليه

$ol - w = 2(L-w)$

ومنه

$ol = 2[L-w)+w$

$= 2(2+\sqrt{3}+i-\sqrt{3})+\sqrt{3}$.

$= 2(2+i)+\sqrt{3}$.

$= 4+\sqrt{3}+2i$

(2) تحديد طبيعة (Γ)

$|\bar{z}-4-\sqrt{3}+2i| = |L|$

$|\overline{\bar{z}-4-\sqrt{3}+2i}| = |L|$

$|z-d| = |L|$.

$DM = 2\sqrt{2+\sqrt{3}}$

ومنه (Γ) دائرة مركزها D ونصف قطرها $2\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I/1/ دراسة تغيرات الدالة g : الجزء I . 1 . ع نقاط

• **النهايات:**

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}\right) = 0$$

(لأن: $\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x} = 1$ و $\ln 1 = 0$ ، وكذلك: $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x+1} = 0$)

$$\lim_{x\xrightarrow{>}0} g(x) = \lim_{x\xrightarrow{>}0}\left(\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}\right) = +\infty$$

(لأن: $\lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{x+1}{x} = +\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}\ln x = +\infty$ ،

وكذلك: $\lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{1}{x+1} = 1$)

• **إتجاه التغير:** لدينا من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما x :

$$g'(x) = \frac{\left(\frac{x+1}{x}\right)'}{\left(\frac{x+1}{x}\right)} + \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{x-x-1}{x^2}\times\frac{x}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{-1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{-x-1+x}{x(x+1)^2} = \boxed{\frac{-1}{x(x+1)^2} = g'(x)}$$

نلاحظ أن $g'(x) < 0$ من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما،

إذن الدالة g متناقصة تماما على المجال $]0;+\infty[$.

• **جدول التغيرات:**

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	
$g(x)$	$+\infty$ ↘	0

2/ الإستنتاج: بقراءة جدول التغيرات للدالة g نستنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما x : $g(x) > 0$

II/ من أجل كل $x > 0$: $f(x) = x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) + x + 1$ و $f(0) = 1$.

1/ ا/ تبيان النهاية:

- $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \lim\limits_{t\to0}\frac{1}{t}\ln(1+t)$
$= \lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+t)}{t} = \boxed{1 = \lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)}$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)+x+1\right] = +\infty$.

ب/ تبيان أن $y = x + 2$: (Δ) مقارب مائل لـ (C_f) :

- $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x-2) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)-1\right] = 0$

إذن المستقيم (Δ) ذو معادلة $y = x + 2$ مقارب مائل لـ (C_f) عند $+\infty$.

2/ ا/ دراسة قابلية الإشتقاق عن 0 :

- $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-1}{x} = \lim\limits_{x\to0}\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)+1 = +\infty$

إذن الدالة غير قابلة للإشتقاق على يمين 0 .

التفسير الهندسي:

المنحنى (C_f) يقبل نصف مماس موازٍ لحامل محور التراتيب معادلته: $x = 0$.

ب/ تبيان عبارة المشتقة:

لدينا من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما x :

$$f'(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) + x.\frac{\left(\frac{x+1}{x}\right)'}{\left(\frac{x+1}{x}\right)} + 1$$
$$= \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) + x\left(\frac{x-x-1}{x^2}\right)\left(\frac{x}{x+1}\right) + 1$$
$$= \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{1}{x+1} + 1 = \boxed{g(x)+1 = f'(x)}$$

إتجاه التغير:

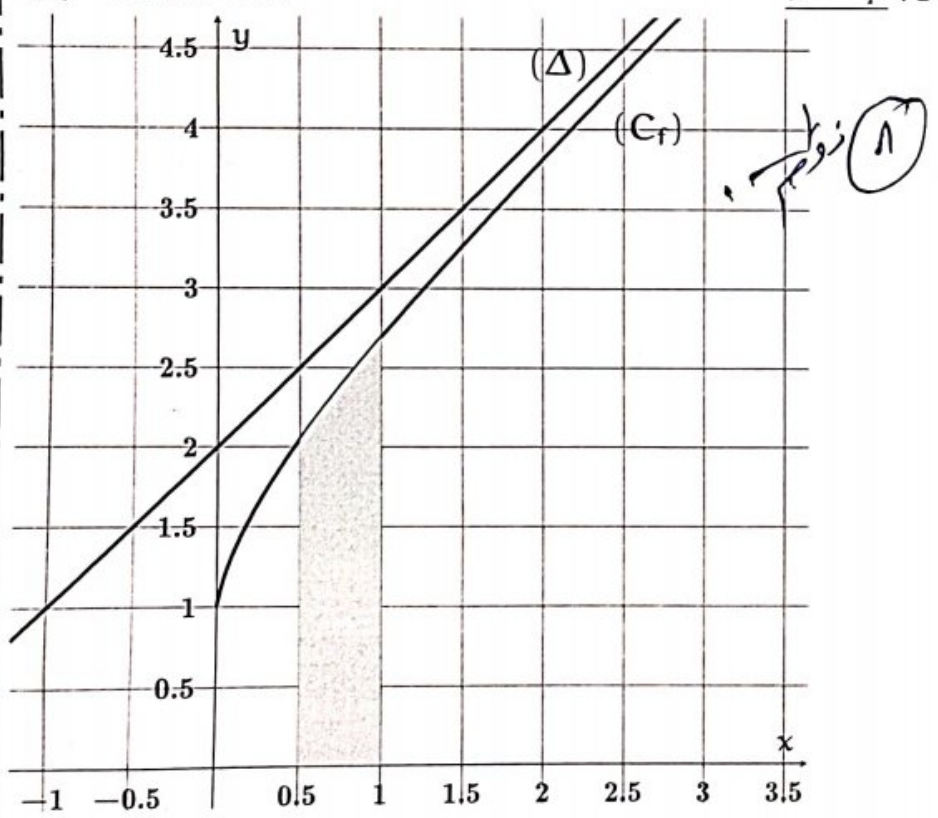
لدينا مماسبق من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما x : $g(x) > 0$

ومنه: $f'(x) > 0$ إذن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$.

جدول التغيرات:

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	1 ↗	$+\infty$

3/ الإنشاء: $f(1) = 2 + \ln 2 \approx 2.7$



4/ أ/ **تبيان أن الدالة F أصلية للدالة f على المجال $]0;+\infty[$:**

لدينا من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما x :

$$F'(x) = \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}xf'(x) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1}\right) + 1$$
$$= \frac{1}{2}\left(f(x) + x(g(x)+1) - \frac{1}{x+1} + 2\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(f(x) + x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{x}{x+1} + x - \frac{1}{x+1} + 2\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(f(x) + x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{x+1}{x+1} + x + 2\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(f(x) + x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) + x + 1\right) = \frac{1}{2}(2f(x))$$

$$\boxed{F'(x) = f(x)}$$

إذن الدالة F دالة أصلية للدالة f على المجال $]0;+\infty[$.

ب/ استنتاج مساحة الحيز:

مساحة الحيز المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات: $y = 0$ و $x = \frac{1}{2}$ و $x = 1$ هي:

$$A = \int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x)\,dx = [F(x)]_{\frac{1}{2}}^{1} = F(1) - F(\frac{1}{2})$$
$$= \frac{1}{8}\left(9 + \ln\left(\frac{27}{16}\right)\right)\ u.a = \frac{1}{8}\left(9 + \ln\left(\frac{27}{16}\right)\right) \times 4\ cm^2$$

$$\boxed{A = \frac{1}{2}\left(9 + \ln\left(\frac{27}{16}\right)\right)\ cm^2}$$

5/ $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$; $n \in \mathbb{N}^*$.

أ/ إثبات عبارة الحد العام:

لدينا من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n :

$$e^{f(n)-n-1} = e^{n\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)} = e^{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = u_n$$

ب/ إثبات أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما:

نعتبر h الدالة المرفقة بعيارة الحد العام للمتتالية (u_n).

الدالة h معرفة على المجال $]0;+\infty[$ بالعبارة: $h(x) = e^{f(x)-x-1}$

لدينا من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما x :

$$h'(x) = (f'(x) - 1)e^{f(x)-x-1} = g(x)e^{f(x)-x-1}$$

بما أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما x : $g(x) > 0$

فإن: $h'(x) > 0$ وبالتالي الدالة h متزايدة تماما على $]0;+\infty[$ ؛

إذن: المتتالية (u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}^*$.

ج/ تبيان النهاية:

- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} e^{f(n)-n-1} = \lim\limits_{n\to+\infty} e^{n\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)} = e$.

(لأن: $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = 1$) .

الإستنتاج:

نستنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة نحو العدد e .

تمنياتنا بالتوفيق والنجاح في شهادة البكالوريا لكل تلاميذنا الشرفاء...