1. الأعداد الطبيعية والأعداد الناطقة والحساب على الجذور

القاسم المشترك الأكبر لعددين

حسابيه توجد ثلاث طرق أفضلها خوارزمية اقليدس.

في كل طريقة نحسب الـ PGCD للعددين 1053 و 832.

☺ **الطريقة الأولى خوارزمية اقليدس(الأكثر استعمالا)**

مثال

$1053 = 832 \times 1 + 221$

$832 = 221 \times 3 + 169$

$221 = 169 \times 1 + 52$

$169 = 52 \times 3 + 13$

$52 = 13 \times 4 + 0$

آخر باق غير معدوم هو 13 ومنه

$PGCD(1053;832) = 1$

☺ **الطريقة الثانية خوارزمية الفرق المتتالية**

مثال حساب الـ

$1053 - 832 = 221$ ؛ $832 - 221 = 611$ ؛

$611 - 221 = 390$ ؛ $390 - 169 = 221$ ؛

$221 - 169 = 52$ ؛ $169 - 52 = 117$ ؛

$117 - 52 = 65$ ؛ $65 - 52 = 13$ ؛

$52 - 13 = 39$ ؛ $39 - 13 = 26$ ؛

$26 - 13 = 13$ ؛ $13 - 13 = 0$.

فحسب الخوارزمية فإن

$PGCD(13;39) = 13$.

☺ **الطريقة الثالثة ايجاد القواسم المشتركة**

مثال

نحسب الـ $PGCD(12;21)$.

قواسم 21: 1؛ 3 ؛ 7؛ 21.

قواسم 12. 1؛ 2؛ 3؛ 4؛12.

إذن: $PGCD(12;21) = 3$.

توظيفه يُستعمل القاسم المشترك الأكبر لعددين في اختزال كسر، فاختزال كسر $\frac{a}{b}$ ، نقسم a و b على القاسم المشترك الأكبر لهما.

مثال نُريد اختزال الكسر $\frac{832}{1053}$

لدينا الـ $PGCD(1053;832) = 13$ ،إذن $\frac{832}{1053} = \frac{832\div13}{1053\div13} = \frac{64}{81}$

ملاحظة توجد كسور لا يُمكن اختزالها، إذا كان الـ $PGCD(a;b) = 1$

مثال نُريد اختزال الكسر $\frac{31}{61}$: لدينا الـ $PGCD(31;61) = 1$،إذن الكسر $\frac{31}{61}$ غير قابل للاختزال.

معرفة العددين الأوليان فيما بينهما

العددان الأوليان فيما بينهما هما كل عددين قاسمهما المشترك الأكبر يُساوي 1، والكسر الذي يُشكلانه.

مثال نُري العددين 695 و 98 أوليان فيما بينهما لأن: $PGCD(695;98) = 1$ ، إذن الكسر $\frac{98}{695}$ غير قابل للاختزال.

معرفة العددين غير أوليان فيما بينهما

الطريقة الأولى (حساب القاسم المشترك الأكبر للعددين)	**الطريقة الثانية** (استعمال قواعد قابلية القسمة)
مثال 126 و 75 غير أوليان فيما بينهما لأن الـ $PGCD(75;126) = 3 \neq 1$	**مثال** 126 و 75 غير أوليان، لأنهما يقبلان قاسما مشترك آخر هو العدد 3.

أولوية الحساب في سلسلة عمليات

عند حساب سلسلة عمليات، يجب مُراعاة ما يلي:

1. **الأولوية لحساب القوى ثم للعمليات داخل الأقواس.**
2. **ثم للضرب والقسمة حسب الترتيب.**
3. **ثم للجمع والطرح حسب الترتيب.**

مثال

$A = \left(\frac{27}{25} - \left(\frac{4}{5}\right)^2\right) \div 4$

$= \left(\frac{27}{25} - \frac{4^2}{5^2}\right) \div 4$

$= \left(\frac{27}{25} - \frac{16}{25}\right) \div 4 = \left(\frac{27-16}{25}\right) \div 4$

$= \frac{11}{25} \div 4 = \frac{11}{25} \times \frac{1}{4} = \frac{11\times1}{25\times4} = \frac{11}{100}$

☺ قواعد الحساب على قوى العدد 10(3 قواعد)

$10^n \times 10^m = 10^{n+m}$	$(10^n)^m = 10^{n\times m}$	$\frac{10^n}{10^m} = 10^{n-m}$
مثال $10^4 \times 10^{-1} = 10^{4+(-1)} = 10^3$	**مثال** $(10^7)^3 = 10^{7\times3} = 10^{21}$	**مثال** $\frac{10^6}{10^{-23}} = 10^{6-(-23)} = 10^{6+23} = 10^{29}$

واختر قرينك واصطفيه تفاخرا إن القرين إلى المقارن ينسب صفحة الأستاذ هلال خالد لتعليم الرياضيات

الكتابة العلمية

☺ الكتابة العلمية لعدد عدد عشري A هي من الشكل $a \times 10^n$ حيث n عدد صحيح نسبي و a عدد عشري برقم قبل الفاصلة غير معدوم.

أمثلة $51000 = 5{,}1 \times 10^4$ ؛ $14{,}07 = 1{,}407 \times 10^1$ ؛ $0{,}000085 = 8{,}5 \times 10^{-5}$

تطبيق اكتب العددين A و B كتابة علمية، حيث $A = \frac{25\times10^{33}\times5\times10^{-6}}{80\times10^{44}\times5}$ ؛ $B = 0{,}00000026 \times 10^3$

حل مختصر $A = \frac{25\times5}{80\times5} \times \frac{10^{33}\times10^{-6}}{10^{44}} = 3{,}125 \times 10^{-18}$ ؛ $B = 0{,}00000026 \times 10^3 = 2{,}6 \times 10^{-4}$

قواعد الحساب على القوى (5 قواعد)

$a^n \times a^m = a^{n+m}$ **مثال** $8^3 \times 8^{-5} = 8^{3+(-5)} = 8^{-2}$

$(a^n)^m = a^{n\times m}$ **مثال** $(7^{-3})^6 = 7^{-3\times6} = 7^{-18}$	$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ **مثال** $\frac{12^{-2}}{12^6} = 12^{-2-6} = 12^{-8}$
$a^n \times b^n = (a \times b)^n$ **مثال** $5^4 \times 9^4 = (5 \times 9)^4 = 45^4$	$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$ **مثال** $\frac{-6^7}{3^7} = \left(\frac{-6}{3}\right)^7 = (-2)^7$

العلاقات الخاصة في الحساب على القوى (5 قواعد)

$a^0 = 1$ **مثال** $(-2)^0 = 1$ $(41)^0 = 1$	$a^1 = a$ **مثال** $4^1 = 4$ $(-5)^1 = -5$	$a^n \times a^{-n} = 1$ **مثال** $3^9 \times 3^{-9} = 1$ $40^{-10} \times 40^{10} = 1$	$\frac{a^n}{a^n} = 1$ **مثال** $\frac{12^{-60}}{12^{-60}} = 1$ ؛ $\frac{30^5}{30^5} = 1$

إذا كان عددا زوجيا فإن $(-1)^n = 1$ **مثال** $(-1)^6 = 1$ ؛ $(-1)^{20} = 1$	إذا كان عددا فرديا فإن $(-1)^n = -1$ **مثال** $(-1)^3 = -1$ ؛ $(-1)^{27} = -1$

قواعد قابلية القسمة

يقبل عدد القسمة على 2

إذا كان رقم آحاده عدد **زوجي.**

مثال العدد 124 يقبل القسمة على 2،لأن رقم آحاده 4

يقبل عدد القسمة على 5

إذا كان رقم آحاده 0 أو 5

مثال العدد 186930 يقبل القسمة على 5 لأن رقم آحاده 0

يقبل عدد القسمة على 4

إذا كان العدد المُشكل من

رقمي آحاده وعشراته من مضاعفات العدد 4.

مثال العدد 77952 يقبل القسمة على 4 لأن 52 من مضاعفات 4.

يقبل عدد القسمة على 3

إذا كان مجموع أرقامه من مضاعفات 3.

مثال

العدد 405 يقبل القسمة على 3 لأن مجموع أرقامه $(4 + 0 + 5)$ يُساوي 9 وهو مضاعف للعدد 3.

يقبل عدد القسمة على 9

إذا كان مجموع أرقامه من مضاعفات 9 .

مثال

العدد 2565 يقبل القسمة على 9 لأن مجموع أرقامه $(2 + 5 + 6 + 5)$ يُساوي 18 وهو مضاعف للعدد 9.

يقبل عدد القسمة على 6 **إذا كان يقبل القسمة على 2 و 3معا**

امثلة 12576 قابل للقسمة على 2 لأن آخر أرقامه وهو 6 زوجي.

12576 قابل للقسمة على 3 لأن مجمع أرقامه يُساوي 21

وهو قابل للقسمة على 3 إذن 12576 يقبل القسمة على 6.

2. الحساب على الجذور

أ. تبسيط أو حساب عبارة تتضمن جذورا هو كتابتها على أحد الأشكال الآتية

على الشكل $a\sqrt{b}$		على الشكل $c + a\sqrt{b}$		على شكل عدد ناطق
b معلوم	b غير معلوم	b معلوم	b غير معلوم	في أغلب الأحيان نستعمل المتطابقة الشهيرة الثالثة $(a+b)(a-b) = (a)^2 - (b)^2$

وقبل تبسيط أو حساب أي عبارة تتضمن جذورا لابد لك من أهم شيئ تقوم به وهو التمكن من القواعد الستّ الآتية:

$\sqrt{a^2} = a$ مثال1 $\sqrt{13^2} = 13$ مثال2 $\sqrt{4} = \sqrt{2^2} = 2$	$\sqrt{a^2 \times b} = a\sqrt{b}$ $\sqrt{11^2 \times 2} = 11\sqrt{2}$ $\sqrt{9 \times 5} = \sqrt{3^2 \times 5} = 3\sqrt{5}$	$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$ $\sqrt{2} \times \sqrt{8} = \sqrt{16} = 4$ مثال2 $\sqrt{36 \times 7} = \sqrt{6^2 \times 7} = 6\sqrt{7}$
$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$ مثال1 $\left(\sqrt{17}\right)^2 = 17$ مثال2 $\left(\sqrt{\left(\frac{7}{11}\right)}\right)^2 = \frac{7}{11}$	$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$ مثال1 $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{8}{2}} = \sqrt{4} = 2$ مثال2 $\sqrt{\frac{49}{36}} = \frac{\sqrt{49}}{\sqrt{36}} = \frac{7}{6}$	$\sqrt{a} \times \sqrt{a} = a$ مثال $\sqrt{17} \times \sqrt{17} = 17$

khaledhellal2018@gmail.com
الأستاذ خالق
خالد
تخليم
الرياضيات

1) أهم خطوتين في تبسيط عبارة تتضمن جذور:
1. إنجاز عمليات الضرب والقسمة بين الجذور إن وجدت أولا؛ وهذا باستعمال أحد القواعد الواردة في الجدول أعلاه.
2. تبسيط ما بداخل الجذر، باستعمال أحد القاعدتين $\sqrt{a^2 \times b} = a\sqrt{b}$ أو $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$.

2) تبسيط العبارات التي تتضمن جذورا ينقسم الى نوعين:

a. تبسيط عبارات لا تتضمن عمليات ضرب أو قسمة بين الجذور

تبسيط عبارة على الشكل $a\sqrt{b}$ حيث b معلوم (ما بداخل الجذر معلوم من السؤال)

مثال بسط العبارة $B = \sqrt{252} - 6\sqrt{28} + 2\sqrt{175}$ على الشكل $a\sqrt{7}$ (العدد b معلوم ويُساوي 7).

$$B = \sqrt{252} - 6\sqrt{28} + 2\sqrt{175}$$
$$= \sqrt{36 \times 7} - 6\sqrt{4 \times 7} + 2\sqrt{25 \times 7}$$
$$= \sqrt{6^2 \times 7} - 3\sqrt{2^2 \times 7} + 2\sqrt{5^2 \times 7}$$
$$= 6\sqrt{7} - 6\sqrt{7} + 40\sqrt{7} = (6 - 6 + 10)\sqrt{7} = 10\sqrt{7}$$

تبسيط عبارة على الشكل $a\sqrt{b}$ حيث b غير معلوم (ما بداخل الجذر غير معلوم من السؤال)

فنميز حالتين:

أ) العدد b غير معلوم ولكنه موجود في العبارة المُراد تبسيطها (أصغر ما بداخل الجذر)

مثال بسط العبارة $B = 11\sqrt{6} - 6\sqrt{24} + 2\sqrt{384}$ على الشكل $a\sqrt{b}$ (العدد b يُساوي 6)

$$B = 11\sqrt{6} - 6\sqrt{24} + 2\sqrt{384}$$
$$= 11\sqrt{6} - 6\sqrt{4 \times 6} + 2\sqrt{64 \times 6}$$
$$= 11\sqrt{6} - 6\sqrt{2^2 \times 6} + 2\sqrt{8^2 \times 6}$$
$$= 11\sqrt{6} - 12\sqrt{6} + 16\sqrt{6} = 15\sqrt{6}$$

khaledhellal2018@gmail.com
الأستاذ خالق
خالد
تخليم
الرياضيات

khaledhellal2018@gmail.com
الأستاذ هلال
خالد
تعليم
الرياضيات

ب) العدد b غير معلوم، فنستعمل قواعد قابلية القسمة

مثال بسط العبارة $A = \sqrt{80} - 3\sqrt{45} + \sqrt{20}$ على الشكل $a\sqrt{b}$.

نلاحظ أن الأعداد 20 و 45 و 80 تقبل القسمة على 5 أرقام آحادها 0 أو 5

$$A = \sqrt{80} - 3\sqrt{45} + \sqrt{20}$$
$$= \sqrt{16 \times 5} - 3\sqrt{9 \times 5} + \sqrt{4 \times 5}$$
$$= \sqrt{4^2 \times 5} - 3\sqrt{3^2 \times 5} + \sqrt{2^2 \times 5}$$
$$= 4\sqrt{5} - 9\sqrt{5} + 2\sqrt{5} = (4 - 9 + 2)\sqrt{5} = -3\sqrt{5}$$

تبسيط عبارة على الشكل $c + a\sqrt{6}$ حيث b معلوم (ما بداخل الجذر معلوم من السؤال):

مثال بسط العبارة $B = \sqrt{486} + 5\sqrt{24} + \sqrt{36} + 3$ على الشكل $c + a\sqrt{6}$

كتابة العبارة كما أعطيت	$B = -\sqrt{486} + 5\sqrt{24} + \sqrt{36} + 3$
كتابة ما بداخل على شكل جُداء عددين أحدهما 3	$= -\sqrt{81 \times 6} + 5\sqrt{4 \times 6} + \sqrt{6^2} + 3$
كتابة جداء العددين على الشكل $\sqrt{a^2 \times b}$	$= -\sqrt{9^2 \times 6} + 5\sqrt{2^2 \times 6} + 6 + 3$
تطبيق الخاصية $\sqrt{a^2 \times b} = a\sqrt{b}$	$= -9\sqrt{6} + 10\sqrt{6} + 9$
التبسيط	$= 9 + \sqrt{6}$

تبسيط عبارة على الشكل $c + a\sqrt{b}$ حيث b غير معلوم (ما بداخل الجذر غير معلوم من السؤال):

مثال بسط العبارة $B = 4\sqrt{12} - \sqrt{108} - 4$ على الشكل $c + a\sqrt{b}$ (قواعد قابلية القسمة)

كتابة العبارة كما أعطيت	$B = 4\sqrt{12} - \sqrt{108} - 4$
كتابة ما بداخل على شكل جُداء عددين أحدهما 3	$= 4\sqrt{4 \times 3} - \sqrt{36 \times 3} - 4$
كتابة جداء العددين على الشكل $\sqrt{a^2 \times b}$	$= 4\sqrt{2^2 \times 3} - \sqrt{6^2 \times 3} - 4$
تطبيق الخاصية $\sqrt{a^2 \times b} = a\sqrt{b}$	$= 8\sqrt{3} - 6\sqrt{3} - 4$
التبسيط	$= 2\sqrt{3} - 4$

تبسيط عبارة على الشكل $c + a\sqrt{b}$ حيث b غير معلوم (ما بداخل الجذر غير معلوم من السؤال):

مثال بسط العبارة $B = \sqrt{325} - \sqrt{13} - 1 + 6\sqrt{52}$ على الشكل $c + a\sqrt{b}$ (b معلوم في العبارة)

كتابة العبارة كما أعطيت	$B = \sqrt{325} - \sqrt{13} - 1 + 6\sqrt{52}$
كتابة ما بداخل على شكل جُداء عددين أحدهما 13	$= \sqrt{25 \times 13} - \sqrt{13} - 1 + 6\sqrt{4 \times 13}$
كتابة جداء العددين على الشكل $\sqrt{a^2 \times b}$	$= \sqrt{5^2 \times 13} - \sqrt{13} - 1 + 6\sqrt{2^2 \times 3}$
تطبيق الخاصية $\sqrt{a^2 \times b} = a\sqrt{b}$	$= 5\sqrt{13} - \sqrt{13} - 1 + 12\sqrt{13}$
التبسيط	$= 16\sqrt{13} - 4$

khaledhellal2018@gmail.com
الأستاذ هلال
خالد
تعليم
الرياضيات

b. تبسيط عبارات تتضمن عمليات ضرب أو قسمة بين الجذور

أ) إنجاز عمليات الضرب والقسمة التي بين الجذور بتطبيق القواعد السابقة.

ب) فنحصل إما على عدد ناطق وإما على عبارة من الجذور لا تتضمن بينها عمليات القسمة والضرب.

وهي ثلاث أنواع:

1. تبسيط عبارة ليست على أحد الشكلين الآتيين: $(a+b)(a-b)$ أو $(a+b)(c+d)$.
2. تبسيط عبارة من الشكل $(a+b)(c+d)$.
3. تبسيط عبارة من الشكل $(a+b)(a-b)$ (**المتطابقة الشهيرة الثالثة**).

1. **تبسيط عبارة ليست على أحد الشكلين الآتيين $(a+b)(a-b)$ أو $(a+b)(c+d)$:**

مثال بسط العبارة $G=\sqrt{8}\times\sqrt{2}+6\sqrt{108}-\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{6}}+\sqrt{144}$ على الشكل $c+a\sqrt{b}$

كتابة العبارة كما أعطيت	$G=\sqrt{8}\times\sqrt{2}+\sqrt{108}-\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{6}}+\sqrt{144}$
إنجاز عمليات الضرب والقسمة بين الجذور	$=\sqrt{8\times2}+\sqrt{36\times3}-\sqrt{\frac{24}{6}}+12$
تبسيط ما بداخل الجذر	$=\sqrt{16}+\sqrt{6^2\times3}-\sqrt{4}+12$
إعطاء النتيجة	$=4+6\sqrt{3}-2+12=14+6\sqrt{3}$

2. **تبسيط عبارة من الشكل $(a+b)(c-d)$**

مثال بسط العبارة $F=(\sqrt{7}-2)(3+\sqrt{7})$ على الشكل $c+a\sqrt{b}$

كتابة العبارة كما أعطيت	$F=(\sqrt{7}-2)(3+\sqrt{7})$
النشر	$=\sqrt{7}\times(3+\sqrt{7})-2\times(3+\sqrt{7})$
النشر	$=\sqrt{7}\times3+\sqrt{7}\times\sqrt{7}-2\times3+\sqrt{7}\times(-2)$
إنجاز عمليات الضرب	$=3\sqrt{7}+7-6-2\sqrt{7}$
الناتج بعد التبسيط	$=1+\sqrt{7}$

3. **تبسيط عبارة من الشكل $(a+b)(a-b)$ (المتطابقة الشهيرة الثالثة)**

مثال بين أن E عدد طبيعي حيث $E=(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)$

كتابة العبارة كما أعطيت	$E=(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)$
تطبيق المتطابقة الشهيرة $(a+b)(a-b)=(a)^2-(b)^2$	$=(\sqrt{5})^2-(2)^2$
إكمال الحساب	$=5-4=1$

ب. كتابة مقام نسبة عدد ناطق

طريقة

لكتابة مقام نسبة $\frac{a}{c\sqrt{b}}$ على شكل عدد ناطق، أولا نضع العدد a بين قوسين ثم نضرب بسط النسبة ومقامها في $\sqrt{a}$ أي:

$$\frac{a}{c\sqrt{b}}=\frac{(a)}{c\sqrt{b}}=\frac{(a)\times\sqrt{b}}{c\sqrt{b}\times\sqrt{b}}.$$

مثال1 نكتُب مقام النسبة $\frac{5}{\sqrt{7}}$ على شكل عدد ناطق $\frac{5}{\sqrt{7}}=\frac{(5)}{\sqrt{7}}=\frac{(5)\times\sqrt{7}}{\sqrt{7}\times\sqrt{7}}=\frac{5\sqrt{7}}{7}$

مثال2 نكتُب مقام النسبة $\frac{6}{11\sqrt{3}}$ على شكل عدد ناطق $\frac{6}{11\sqrt{3}}=\frac{(6)}{11\sqrt{3}}=\frac{(6)\times\sqrt{3}}{11\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\frac{6\sqrt{3}}{11\times3}=\frac{6\sqrt{3}}{33}$

مثال3 نكتُب مقام النسبة $\frac{7\sqrt{2}}{\sqrt{13}}$ على شكل عدد ناطق $\frac{7\sqrt{2}}{\sqrt{13}}=\frac{(7\sqrt{2})}{\sqrt{13}}=\frac{(7\sqrt{2})\times\sqrt{13}}{\sqrt{13}\times\sqrt{13}}=\frac{7\sqrt{26}}{13}$

مثال4 نكتُب مقام النسبة $\frac{3+\sqrt{6}}{\sqrt{6}}$ عددا ناطقا $\frac{3+\sqrt{6}}{\sqrt{6}}=\frac{(3+\sqrt{6})}{\sqrt{6}}=\frac{(3+\sqrt{6})\times\sqrt{6}}{\sqrt{6}\times\sqrt{6}}=\frac{3\sqrt{6}+6}{6}$

مثال5 نكتُب مقام النسبة $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{8}}{2\sqrt{2}}$ عددا ناطقا $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{8}}{2\sqrt{2}}=\frac{(\sqrt{3}+\sqrt{8})}{2\sqrt{2}}=\frac{(\sqrt{3}+\sqrt{8})\times\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}\times\sqrt{2}+\sqrt{8}\times\sqrt{2}}{2\times2}=\frac{4+\sqrt{6}}{4}$

ج. حل معادلة من الشكل $x^2 = b$

لحل المعادلة $x^2 = b$ نميز ثلاث حالات:

الحالة الأولى: b عدد موجب	الحالة الثانية: b عدد يساوي صفر	الحالة الثالثة: b عدد سالب
للمعادلة $x^2 = b$ في هذه الحالة حلين، هما: $x = \sqrt{b}$ أو $x = -\sqrt{b}$	للمعادلة $x^2 = 0$ في هذه الحالة حل واحد هو $x = 0$	ليس للمعادلة حل في هذه الحالة!
مثال1 للمعادلة $x^2 = 81$ حلين هما: $x = \sqrt{81} = 9$ أو $x = -\sqrt{81} = -9$	**مثال** للمعادلة $x^2 = 0$ حل وحيد هو $x = 0$	**مثال** المعادلة $x^2 = -16$ ليس لها حل، لأن $-16 < 0$
مثال2 للمعادلة $x^2 = 2$ حلين: $x = \sqrt{2}$ أو $x = -\sqrt{2}$		

حل معادلات يؤول حلها إلى حل معادلة من الشكل $x^2 = b$

مثال1

حل المعادلة $x^2 + 4 = 20$

لدينا $x^2 + 4 = 20$

معناه $x^2 = 20 - 4$

أي $x^2 = 16$

إذن $x = \sqrt{16} = 4$ أو $x = -\sqrt{16} = -4$

مثال2 حل المعادلة $\frac{x}{\sqrt{2}-1} = \frac{\sqrt{2}-1}{9x}$

معناه $x \times 9x = (\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}-1)$

أي $9x^2 = 1$ أي $x^2 = \frac{1}{9}$

إذن $x = \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}$ أو $x = -\sqrt{\frac{1}{9}} = -\frac{1}{3}$

العدد الناطق

تعريفه هو كل عدد يُكتب على الشكل $\frac{p}{q}$ (حيث p و q عددان صحيحان و $q \neq 0$) حاصله إما كتابة عُشرية منتهية وإما كتابة عُشرية غير منتهية دورية.

مثال1 العدد 5 هو عدد ناطق لأن $5 = \frac{5}{1}$ ؛ **مثال2** العدد -14 هو عدد ناطق لأن $-14 = \frac{-14}{1}$

مثال3 العدد 6,24 عدد ناطق لأن $6,24 = \frac{6,24}{1} = \frac{624}{100}$ ؛ **مثال4** العدد $-45,8$ عدد ناطق لأن $-45,8 = \frac{-458}{10}$

مثال5 العدد $\frac{5,3}{2,5}$ عدد ناطق لأن $\frac{5,3}{2,5} = \frac{53}{25}$

مثال5 العدد $0,33333\ldots$ هو عدد ناطق كتابته العشرية دورية (دوره 3) لأنه يمكن كتابته على الشكل $\frac{1}{3}$ (الطريقة موضحة في السنة أولى ثانوي في باب الاعداد والحساب)

العدد المربع التام a و k عددان صحيحان موجبان

تعريفه هو كل عدد a يُحقق $a = k^2$ أو $\sqrt{a} = k$

مثال1 العدد 36 مُربع تام لأن $36 = 6^2$ ؛ **مثال2** العدد 144 مربع تام لأن $144 = 12^2$

مثال3 العدد 56 ليس مربع تام لأن لا يوجد عدد k حيث $56 = k^2$

بعض المربعات التامة 4، 9، 16، 25، 36، 49، 64، 81، 100، 121، 144، 169، 196، 225.

متى نقول أن العدد من الشكل $\sqrt{a}$ عدد ناطق !؟

إذا كان العدد a مربع تام

العدد $\sqrt{a}$ عدد ناطق

مثال الأعداد $\sqrt{169}$ و $\sqrt{4}$ أعداد ناطقة لأنّ:

$\sqrt{4} = \sqrt{2^2} = 2$ ؛ $\sqrt{169} = \sqrt{13^2} = 13$

العدد $\sqrt{a}$ ← a مربع تام

العدد $\sqrt{a}$ ← a ليس مربع تام

العدد $\sqrt{a}$ ليس عدد ناطق

مثال $\sqrt{17}$ ؛ $\sqrt{3}$

صفحة الأستاذ هلال خالد لتعليم الرياضيات

3. خاصية طالس و حساب المثلثات في المثلث القائم

خاصية طالس ← حساب طول

نأخذ الشكل المقابل كمثال

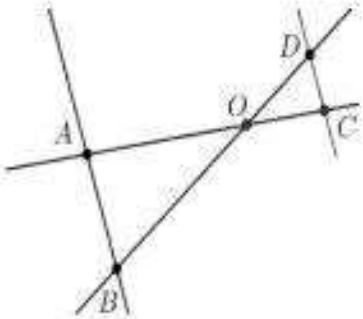
شروط تطبيقها(نأخذ المثال أمامنا)

1. **استقامية** النقط B و O و D والنقط A و O و C .
2. **ترتيب** النقط B و O و Dبنفس ترتيب النقط Aو O و C.
(يمكن أن تختصر الشرطين الأول و الثاني بأن نقول المستقيمان (AC) و (BD) مُتقاطعان في النقطة O).
3. التوازي (DC) // (AB).

النتيجة تساوي النسب الثلاث مُحقق $\frac{OD}{OB} = \frac{OC}{OA} = \frac{DC}{AB}$

وهذه النسب أحسُب بها الطول المطلوب منا.

مثال في الشكل المُقابل $(AB)//(DC)$ وحدة الطول الـ cm و $OD = 5 ; OB = 11 ; OC = 4$.احسُب OA.



لدينا (AC) و(BD) مُتقاطعان في النقطة O.
و (AB) // (DC) فحسب **خاصية طالس**

$$\frac{OD}{OB} = \frac{OC}{OA} = \frac{DC}{AB}$$

وبالتعويض $\frac{5}{11} = \frac{4}{OA}$ ومنه

$$OA = \frac{11 \times 4}{5} = 8{,}8cm$$

الخاصية العكسية لخاصية طالس ← إثبات توازي

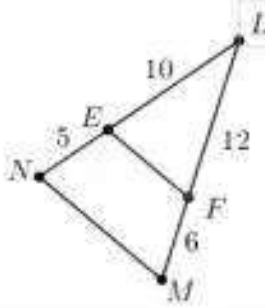
نأخذ الشكل المُقابل كمثال

الشروط: النقط L و E و N **بنفس ترتيب** النقط L و F و M ، والنقط L و E و N في **استقامية** وكذلك النقط L و F و M .

و **تساوي النسبتين** $\frac{LF}{LM}$ و $\frac{LE}{LN}$ أي: $\frac{LE}{LN} = \frac{LF}{LM}$.

النتيجة: (EF) // (MN).

مثال في الشكل المقابل وحدة الطول الـ cm.
أثبت أن: (EF) // (MN).



لدينا $\frac{LE}{LN} = \frac{2}{3}$ و $\frac{LF}{LM}$ والنقط L و E و N بنفس ترتيب النقط L و F و M ، و L و E و N في استقامية وكذلك النقط L و F و M فحسب **الخاصية العكسية لخاصية طالس** (DC) //(AB).

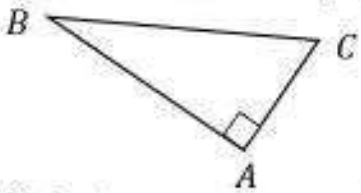
خاصية فيثاغورس ◄ حساب طول ضلع في مثلث

خاصية فيثاغورس

ABC مثلث قائم في A، إذن حسب خاصية فيثاغورس فإن مُربع طول الوتر BC^2 (الضلع المُقابل للزاوية القائمة) يُساوي مجموع الطولين الأخرين $AC^2 + AB^2$ ونكتُب:

$$BC^2 = AC^2 + AB^2$$

مثال ABC مثلث قائم في A. $AB = 4cm$ و $AC = 3cm$.



احسُب AC

لدينا ABC مثلث قائم في B، إذن حسب خاصية فيثاغورس فإن $BC^2 = AB^2 + AC^2$ وبالتعويض $BC^2 = 4^2 + 3^2$ أي أن $BC^2 = 16 + 9$ أي $BC^2 = 25$ ومنه $BC = \sqrt{25} = 5cm$.

الخاصية العكسية لخاصية فيثاغورس ◄ إثبات أن مثلث قائم

إذا كان في مثلث مربع طول ضلعه الأكبر يساوي مجموع مربعي طولي ضلعيه الأخرين، فهو قائم.

← تُستعمل لإثبات أن مثلث عُلمت أطوال أضلاعه الثلاثة قائم

مثال

مثلث EFG طوال أضلاعه $EF = 13cm$ و $FG = 12cm$ و $EG = 5$، هو مثلث قائم لأن:

$EF^2 = 13^2 = 169$ و $FG^2 = 12^2 = 144$ و $EG^2 = 5^2 = 25$

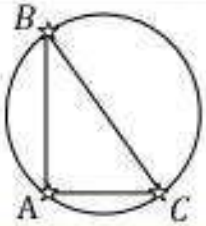
☺ أي أن المساواة التالية محققة $EF^2 = EG^2 + FG^2$ ، فحسب **الخاصية العكسية لخاصية فيثاغورس فالمثلث قائم.**

الخاصية الثانية للدائرة المحيطة بالمثلث القائم ← إثبات أن مثلث قائم

نص الخاصية

في مثلث ABC إذا كان الضلع $[AB]$هو قطر لدائرة،و C نقطة من هذه الدائرة، فإن هذا المثلث قائم في C.

مثال في الشكل الآتي
(C) دائرة و ABC مثلث، فنقول أن:
ABC مثلث قائم في A لأن ضلعه [BC] قطر للدائرة (C) ورأسه الثالث A ينتمي إلى (C)



واختر قريبك و اصطفيه تفاخرا ان القرين إلى المقارن ينتسب صفحة الأستاذ هلال خالد لتعليم الرياضيات

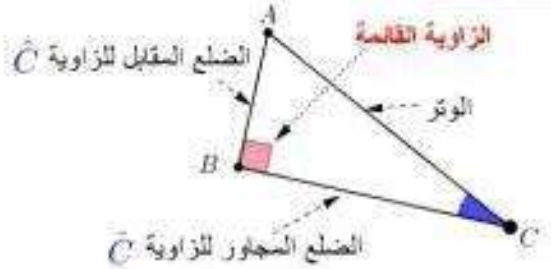
النسب المثلثية لزاوية حادة في مثلث قائم

النسب الثلاث: 1. جيب تمام زاوية حادة الـ cos؛ 2. جيب زاوية حادة الـsin؛ 3. ظل زاوية حادة الـ tan.

توظيفها

1) في حساب قيس زاوية في مثلث قائم ؛ 2) في حساب طول ضلع في مثلث قائم علم منه طول ضلع واحد

كيف نكتب النسب الثلاث لزاوية حادة!؟



مثال

في المثلث القائم ABC نكتب نسب الزاوية الحادة $A\hat{C}B$.

1. أولا نكتب البيانات الموضحة على الشكل.
2. ثانيا القانون المُوافق لكل نسبة من النسب الثلاث الآتية لها.

$$sinA\hat{C}B = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{AB}{AC} \quad \text{و} \quad cosA\hat{C}B = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{BC}{AC}$$

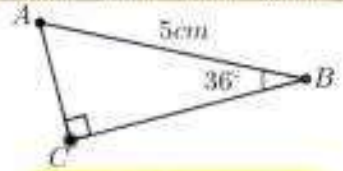
$$\text{و} \quad tanA\hat{C}B = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{AB}{BC}$$

متى أحسب قيس زاوية أو طول بإحدى النسب!؟

مثال1

المثلث القائم ABC

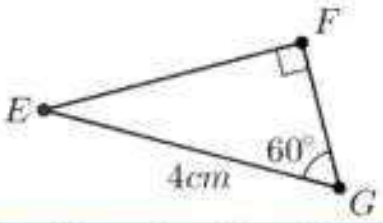
- احسب الطول AC بالتدوير إلى 0,01.



حل مختصر $AC = 2,94cm$

مثال2 في المثلث القائم EFG

- احسب الطول FG.

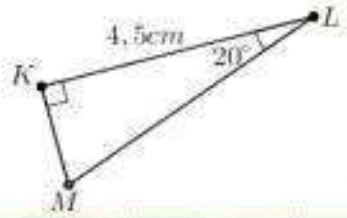


حل مختصر $FG = 2cm$

مثال3

في المثلث القائم KLM

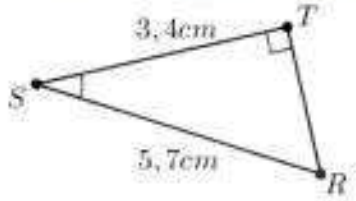
- احسب الطول MK بالتدوير إلى 0,1.



حل مختصر $FG = 1,6cm$

مثال4 في المثلث القائم STR

- احسب قيس الزاوية $\hat{S}$ بالتدوير إلى 0,1

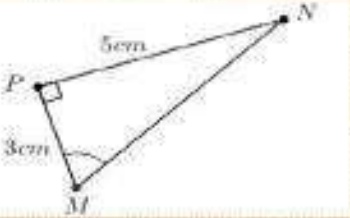


حل مختصر $\hat{S} = 53,4°$

مثال5

في المثلث القائم PNM

- احسب قيس الزاوية $\hat{M}$.

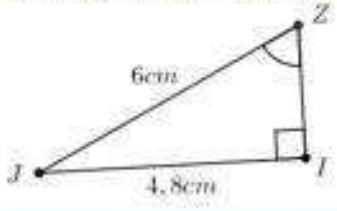


حل مختصر $\hat{M} = 59°$

مثال6

في المثلث القائم JIZ

- احسب قيس الزاوية $\hat{Z}$ بالتقريب إلى الوحدة من الدرجة.



حل مختصر $\hat{Z} = 53°$

العلاقات المثلثية لزاوية حادة في مثلث قائم(اثنتان)

نأخذ كمثال الزاوية الحادة $\hat{C}$ في المثلث القائم ABC في A، فيكون لدينا: $\tan\hat{C}=\frac{\sin\hat{C}}{\cos\hat{C}}$ ، $(\sin\hat{C})^2+(\cos\hat{C})^2=1$

فيما أستعمل هذه العلاقات!؟

أستعملها في حساب جيب تمام زاوية حادة الـ cos أو جيب زاوية حادة الـ sin أو ظل زاوية حادة الـ tan ومن ثم حساب قيس هذه الزاوية الحادة دون الحاجة لاستعمال إحدى نسبها الثلاث.

متى أستعملها!؟

لحساب جيب تمام زاوية حادة (الـ cos) ومن ثم قيسها

- معلوم جيبها (الـ sin) ← نستعمل العلاقة: $\cos\hat{C}=\sqrt{1-(\sin\hat{C})^2}$
- معلوم ظلها (الـ tan) و جيبها (الـ sin) ← نستعمل هذه العلاقة أفضل: $\cos\hat{C}=\frac{\sin\hat{C}}{\tan\hat{C}}$ كما يمكن استعمال الأولى.

مثال

إذا علمت أن $\sin\hat{C}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ، فاحسُب $\cos\hat{C}$.

لدينا $\cos\hat{C}=\sqrt{1-(\sin\hat{C})^2}$

وبالتعويض $\cos\hat{C}=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{1-\frac{\sqrt{3}^2}{2^2}}=\sqrt{1-\frac{3}{4}}=\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$

مثال

احسب $\cos\hat{C}$ إذا علمت أن

$\sin\hat{C}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ و $\tan\hat{C}=\frac{3}{2}$

لدينا $\cos\hat{C}=\frac{\sin\hat{C}}{\tan\hat{C}}$ وبالتعويض: $\cos\hat{C}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{3}{2}}$

وبالحساب $\cos\hat{C}=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{2\sqrt{2}}{6}=\frac{\sqrt{2}}{3}$

لحساب جيب زاوية حادة (الـ sin) ومن ثم قيسها

- معلوم جيبها تمامها (الـ cos) ← نستعمل العلاقة: $\sin\hat{C}=\sqrt{1-(\cos\hat{C})^2}$
- معلوم ظلها(الـ tan) و جيبها تمامها (الـ cos) ← نستعمل هذه العلاقة أفضل: $\sin\hat{C}=\tan\hat{C}\times\cos\hat{C}$ كما يمكن استعمال الأولى.

مثال

إذا علمت أن $\cos\hat{C}=\frac{1}{2}$ فاحسُب $\sin\hat{C}$

لدينا $\sin\hat{C}=\sqrt{1-(\cos\hat{C})^2}$

وبالتعويض $\sin\hat{C}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}$

وبالحساب $\sin\hat{C}=\sqrt{1-\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

مثال

إذا علمت أن $\tan\hat{C}=\frac{5}{4}$ و $\cos\hat{C}=\frac{\sqrt{2}}{3}$

احسُب $\sin\hat{C}$

لدينا $\sin\hat{C}=\tan\hat{C}\times\cos\hat{C}$

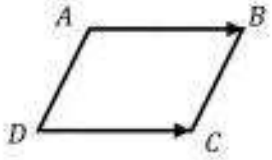
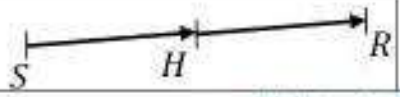
وبالتعويض $\sin\hat{C}=\frac{5}{4}\times\frac{\sqrt{2}}{3}=\frac{5\sqrt{2}}{12}$

وبالحساب $\sin\hat{C}=\frac{5\sqrt{2}}{12}$

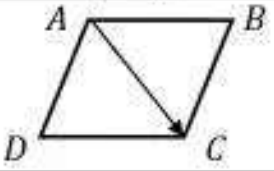
صفحة الأستاذ خالد لتعليم الرياضيات

3. الأشعة و المعالم

1. إنشاء نقطة صورة نُقطة بانسحاب شعاعه معلوم (اكتفي بذكر حالتين من ثلاث هما الأهم)

المطلوب	المقصود حسب تعريف الانسحاب	الانشاء
نعتبر A و B و D ثلاث نقط متمايزة وليست في استقامية. القول أن C صورة النقطة D بالانسحاب الذي يُحول A إلى B (أي أنشئ C حيث $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$)	الرباعي ABCD متوازي أضلاع.	
نعتبر S و H نقطتان متمايزتان أنشئ R حيث $\overrightarrow{SH} = \overrightarrow{HR}$	يعني أن H منتصف [SR]	

2. إنشاء نقطة صورة نقطة بانسحاب باستعمال قاعدة متوازي اضلاع

المطلوب	المقصود حسب قاعدة متوازي أضلاع	الانشاء
نعتبر A و B و D ثلاث نقط متمايزة وليست في استقامية أنشئ D حيث $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$	نص قاعدة متوازي أضلاع مجموع شُعاعين لهما نفس المبدأ، فالرباعي ABCD متوازي أضلاع.	

3. إثبات ما تساويه مجاميع شعاعية علاقة شال

المطلوب

مثال أثبت أن $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AN}$ (علاقة شال مجموع شُعاعين نهاية الشعاع الأول هي بداية الشعاع الثاني)

الاثبات دون وجود شكل هندسي مُنجز

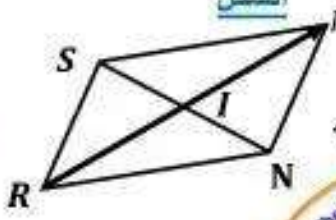
لدينا $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ (حسب علاقة شال) ..... (1)

و $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN} = \overrightarrow{AN}$ (حسب علاقة شال) ..... (2)

من (1) و(2) نستنتج أنه بالفعل $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AN}$

الشكل

الرباعي SMNR متوازي أضلاع I نقطة تقاطع قطريه



الاثبات بوجود شكل هندسي مُنجز (نوظف خواص متوازي اضلاع ومنتصف قطعة مُستقيم)

أثبت أن $\overrightarrow{SM} + \overrightarrow{NI} + \overrightarrow{IM} = \overrightarrow{RM}$

لدينا $\overrightarrow{NI} + \overrightarrow{IM} = \overrightarrow{NM}$ (حسب علاقة شال).....(1)

ولدينا $\overrightarrow{SM} = \overrightarrow{RN}$ (من الشكل).....(2)

إذن $\overrightarrow{RN} + \overrightarrow{NM} = \overrightarrow{RM}$

4. حساب مُركبتي شُعاعين

في المُستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس نعتبر النقطتان A و B حيث $(x_A\,;y_A)$ و $B(x_B\,;y_B)$. فمركبتي الشعاع $\overrightarrow{AB}$ هما $\begin{pmatrix} x_B-x_A \\ y_B-y_A \end{pmatrix}$ ونكتب $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B-x_A \\ y_B-y_A \end{pmatrix}$

مثال أول(حساب مُباشر بحساب المركبتين)

نعتبر النقطتين $(-6\,;5)$ و$B(-1\,;2)$ من مستو مزود بمعلم متعامد ومتجانس.

احسُب مركبتي الشعاع $\overrightarrow{AB}$.

بعد أن نكتُب القانون الذي حفظناه، لابد أن نقوم بهذا العمل على النقطتين $(\underset{x_A}{-6}\,;\underset{y_A}{5})$ و $B(\underset{x_B}{-1}\,;\underset{y_B}{2})$

لدينا $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B-x_A \\ y_B-y_A \end{pmatrix}$

وبالتعويض $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -1-5 \\ 2-(-6) \end{pmatrix}$ أي $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -6 \\ 8 \end{pmatrix}$

مثال ثان(أوظف حساب مُركبتي شعاع في اثبات أن رباعي هو متوازي أضلاع)

نعتبر النقط $A(-2\,;2)$ و $B(2\,;3)$ و $C(2\,;-1)$ و $D(-2\,;-2)$ في المُستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس.

هل الرباعي ABCD متوازي أضلاع؟

لدينا $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B-x_A \\ y_B-y_A \end{pmatrix} = \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2-(-2) \\ 3-2 \end{pmatrix} = \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix} x_C-x_D \\ y_C-y_D \end{pmatrix} = \overrightarrow{DC}\begin{pmatrix} 2-(-2) \\ -1-(-2) \end{pmatrix} = \overrightarrow{DC}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

إذن $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

ومنه الرباعي ABCD متوازي أضلاع.

5. حساب المسافة بين نقطتين في معلم للمستوى

المسافة بين نقطتين A و B في معلم للمستوي م.م.م تُحسب بهذا القانون $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

مثال أول(حساب مباشر)

نعتبر $A(5 ; -6)$ و $B(-1 ; 2)$ نقطتان من م.م.م

احسُب المسافة بين النقطتين A و B

لدينا $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

ولدينا $A(\underset{x_A}{5} ; \underset{y_A}{-6})$ و $B(\underset{x_B}{-1} ; \underset{y_B}{2})$

وبالتعويض

$$AB = \sqrt{(-1-5)^2 + (2-(-6))^2}$$

إذن $AB = \sqrt{(-6)^2 + (8)^2}$

$= \sqrt{36+64} = 10$

مثال ثان(توظيفه لمعرفة أن مثلث هو متساوي ساقين)

$(O; \vec{I}, \vec{J})$ معلم متعامد ومتجانس للمستوي .

1) نعتبر هذه النقط $A(2 ; -1)$ و $B(-2 ; 3)$ و $C(-4 ; -3)$

2) احسب AC واستنتج نوع ABC علما أن $BC = 2\sqrt{10}$

لدينا $AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2}$

ولدينا $A(\underset{x_A}{2} ; \underset{y_A}{-1})$ و $C(\underset{x_B}{-4} ; \underset{y_B}{-3})$

وبالتعويض $AC = \sqrt{(-4-2)^2 + (-3-(-1))^2}$

إذن $AB = \sqrt{(-6)^2 + (-2)^2} = \sqrt{36+4} = \sqrt{40}$

نوع المثلث ABC مثلث متساوي الساقين لأن:

$AB = \sqrt{40} = \sqrt{4 \times 10} = \sqrt{2^2 \times 10} = 2\sqrt{10} = BC$

6. حساب إحداثيتي منتصف قطعة مستقيم

نعتبر $C(x_C ; y_C)$ و $D(x_D ; y_D)$ ، القول أن M منتصف $[DC]$ فإحداثياها هما: $M(\frac{x_C+x_D}{2} ; \frac{y_C+y_D}{2})$.

☺ **مثال أول(حساب مباشر لأن قطعة المستقيم المراد حساب منتصفها معروفة)**

نعتبر C و D نقطتان من مستو مزود بمعلم متعامد ومتجانس، حيث $C(5 ; -6)$ و $D(-1 ; 2)$

احسُب إحداثيتي النقطة M منتصف $[DC]$

لدينا $M(\frac{x_C+x_D}{2} ; \frac{y_C+y_D}{2})$

ولدينا $C(\underset{x_C}{5} ; \underset{y_C}{-6})$ و $D(\underset{x_D}{-1} ; \underset{y_D}{2})$

وبالتعويض $M(\frac{5+(-1)}{2} ; \frac{(-6)+2}{2})$

إذن $M(2 ; -2)$

مثال ثان(حساب إحداثيتا مركز تناظر رباعي أو مركز الدائرة المُحيطة بمثلث قائم)

نعتبر النقط $A(-2;2)$ و $B(2;3)$ و $C(2;-1)$ و $D(-2;-2)$ في المُستوي المنسوب إلى م.م.م

احسُب إحداثيتا N مركز تناظر متوازي الأضلاع ABCD.

لدينا N مركز تناظر متوازي الأضلاع ABCD، إذن N منتصف قُطراه [AC] و [BD](قطرا متوازي أضلاع متناصفان).

لدينا $N(\frac{x_C+x_A}{2} ; \frac{y_C+y_A}{2})$ ولدينا $A(\underset{x_A}{-2} ; \underset{y_A}{2})$ و $C(\underset{x_C}{2} ; \underset{y_C}{-1})$

وبالتعويض $N(\frac{-2+2}{2} ; \frac{2+(-1)}{2})$، إذن $N(2 ; -2)$.

7. تساوي شعاعان

☺ نعتبر الشعاعان $\vec{U}$ و $\vec{V}$ حيث أن $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ مركبتاهما على الترتيب أي $\vec{U}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ و $\vec{V}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

✓ فالقول أنهما متساويان $\vec{U} = \vec{V}$ يعني أن $x = x'$ و $y = y'$ (أي أن مركبتاهما متساويتان).

مثال أول(حساب مباشر)

نعتبر النقط $A(-2;2)$ و $B(2;3)$ و $C(2;-1)$ و $D(-2;-2)$ في المُستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس.

هل الرباعي الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{DC}$ متساويان؟

لدينا $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B-x_A \\ y_B-y_A \end{pmatrix} = \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2-(-2) \\ 3-2 \end{pmatrix} = \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

و $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix} x_C-x_D \\ y_C-y_D \end{pmatrix} = \overrightarrow{DC}\begin{pmatrix} 2-(-2) \\ -1-(-2) \end{pmatrix} = \overrightarrow{DC}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

إذن $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ (أي ان الشعاعان متساويان)

مثال ثان(توظيف تساوي شعاعين في حساب إحداثيتا نقطة)

$(O; \vec{I}, \vec{J})$ م.م.م للمستوي.

نعتبر هذه النقط $A(1 ; -3)$, $B(-5 ; 2)$, $D(-2; 1)$.

احسُب إحداثيتا C صورة D بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AB}$.

لدينا C صورة D بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AB}$.

إذن الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع، إذن: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

لدينا $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B-x_A \\ y_B-y_A \end{pmatrix} = \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -5-1 \\ 2-(-3) \end{pmatrix} = \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -6 \\ 5 \end{pmatrix}$

و $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix} x_C-x_D \\ y_C-y_D \end{pmatrix} = \overrightarrow{DC}\begin{pmatrix} x_C-(-2) \\ y_C-1 \end{pmatrix} = \overrightarrow{DC}\begin{pmatrix} x_C+2 \\ y_C-1 \end{pmatrix}$

إذن نحل المُعادلتين $x_C + 2 = -6$ و $y_C - 1 = 5$

فنجد $x_C = -8$ و $y_C = 6$

الشرط الأول على الرباعي ABCD	الشرط الثاني على ضلعين متتاليين منه نأخذ مثلا الضلعين $[AB]$ و $[BC]$.	السؤال المتوقع
قاعدة متوازي أضلاع أو تعريف الانسحاب الرباعي ABCD متوازي أضلاع	متقايسان $AB = BC$ حاملاهما متعامدان $(AB) \perp (BC)$ أي يُشكل تقاطعهما زاوية قائمة؛ وما يُحقق هذا الأمر المثلث القائم والمتساوي الساقين.	1. بين أن طبيعة الرباعي هو مُربع. 2. هل قُطراه متعامدان؟ 3. هل قُطراه متقايسان؟
	مثال1 $(O;\vec{I},\vec{J})$ معلم متعامد ومتجانس. نعتبر A (1; 3) , B (3 ; 1) , D (-1; 1). 1) احسب BD و AB و AD. ماذا تُلاحظ؟ 2) بيّن أن المثلث ABD قائم. 3) أنشئ C حيث $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$. 4) اثبت أن: ABCD مُربّع.	**مثال2** $(O;\vec{I},\vec{J})$ معلم متعامد ومتجانس. في المثال الأول، السؤال 4) كان يمكن أن نسأل: هل $(AC) \perp (BD)$؟
المعين		
	متقايسان $AB = BC$؛ وما يُحقق هذا الأمر المثلث المتساوي الساقين.	1. بين أن طبيعة الرباعي هو مُعين 2. هل قُطراه متعامدان؟
	مثال1 $(O;\vec{I},\vec{J})$ معلم متعامد ومتجانس علّم A(1 ; 2) B(-2 ; 1) C(-3 ; -2) 1) احسب الطولين AB و BC 2) أنشئ النقطة D صورة A بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{BC}$ 3) بيّن نوع الرباعي ABCD معين	**مثال2** $(O;\vec{I},\vec{J})$ معلم متعامد ومتجانس علّم $A(2;-1)$, $B(-2;3)$, $C(-4;-3)$. *1) احسب الطول AC واستنتج نوع المثلث ABC علما أن* $BC = 2\sqrt{10}$. *2) أنشئ D حيث* $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BD}$. *3) بيّن أن* $(AB) \perp (CD)$
المستطيل		
	◎ حاملاهما متعامدان (يُشكل تقاطعهما زاوية قائمة)$(AB) \perp (BC)$ وما يُحقق هذا الأمر المثلث القائم.	1. بين أن طبيعة الرباعي هو مستطيل. 2. هل قُطراه متقايسان؟
	مثال1 $(O;\vec{I},\vec{J})$ معلم متعامد ومتجانس للمستوي. علّم A (-2; -3), B (4 ; 1) $AC = \sqrt{65}$ و C(2; 4), و $BC = \sqrt{13}$ و $AB = \sqrt{52}$ 1. بيّن أن المثلث ABC قائم . 2. أنشئ النقطة E صورة A بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{BC}$. 3. اثبت أن ABCE مستطيل.	**مثال2** $(O;\vec{I},\vec{J})$ معلم متعامد ومتجانس للمستوي. علّم النقط $A(4;-2)$، $B(4;5)$، $C(-1;-2)$ ؛ $AC = 5$ ؛ $AB = 7$ ؛ $BC = \sqrt{74}$ 1. بين أن المثلث ABC قائم. 2. أنشئ D صورة C بالإنسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AB}$. 3. هل $(BC) \perp (AD)$؟

8. تمثيل شُعاع عُلمت مركبتيه على معلم للمستوى

لتمثيل الشُعاع $\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ نتبع ما يلي:

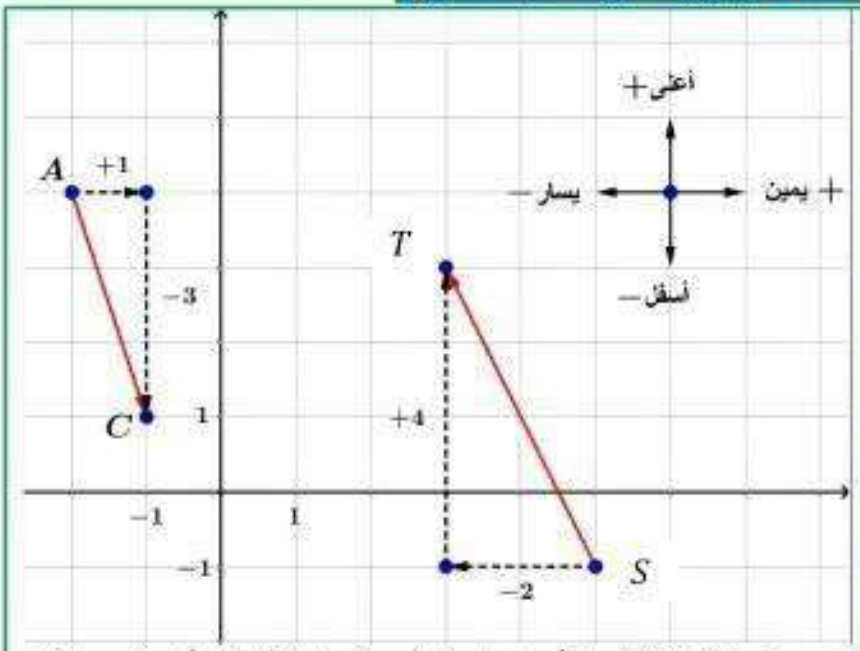
(وجب تعيين مبدؤه ونهايته)

1. نُعين نقطة هي مبدأ الشعاع نُسميها M في أي موضع من المعلم.
2. نتقدم بـ x وحدة إلى اليمين إذا كان x موجب وإذا كان سالب نرجع إلى اليسار بـ x وحدة.
3. من حيث توقفنا بعد السحب بـ x وحدة، نصعد بـ y وحدة إذا كان y موجب وإذا كان y سالب نهبط بـ y وحدة ونعين نهاية الشعاع.

مثال1

لتمثيل الشُعاع $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}+1\\-3\end{pmatrix}$ نتبع ما يلي:

1. نُعين نقطة هي مبدأ الشعاع نُسميها A في أي موضع من المعلم(مثلا نختار $A(-2;4)$).
2. نتقدم بـ 1 (وحدة واحدة) إلى اليمين لأن $+1$ موجب.



3. من حيث توقفنا بعد السحب بـ 1 (وحدة واحدة)، نهبط بـ 3 وحدات لأن -3 سالب، ونُعين نهاية الشعاع.

مثال2 لتمثيل الشُعاع $\vec{S}\begin{pmatrix}-2\\+4\end{pmatrix}$ بنفس الطريقة.

9. قراءة مركبتي شعاع تمثيله معلوم على معلم للمستوى

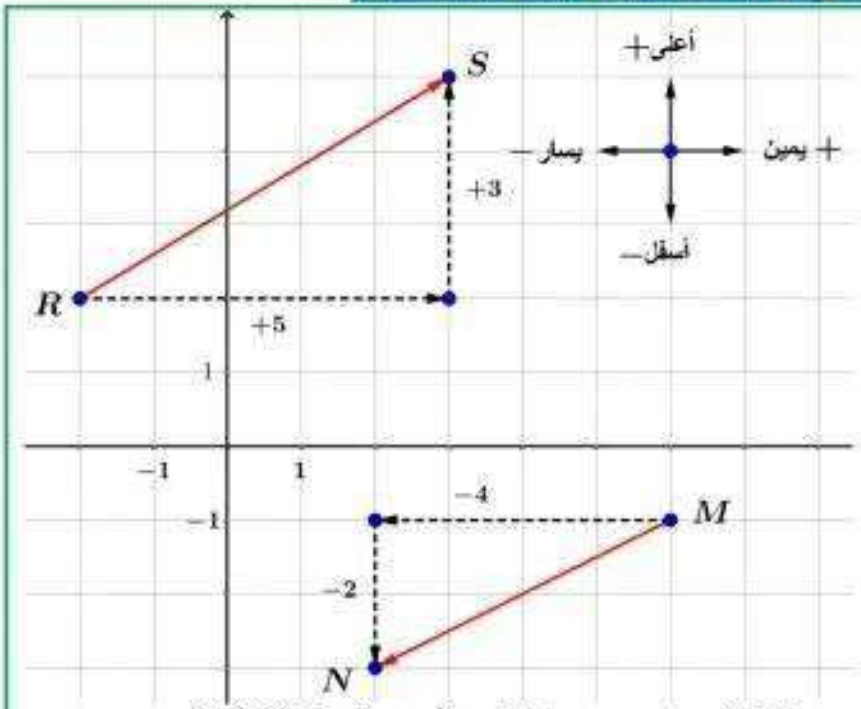
لقراءة مركبتي شُعاع معلوم تمثيله نتبع الخطوات الآتية:

1. نرسُم مُستقيم يشمل مبدأ الشعاع ويُوازي محور الفواصل.
2. ثم نرسم مستقيما يشمل نهاية الشعاع فيقطع المستقيم الأول في نقطة.
3. لقراءة المركبة الأولى نتقدم من مبدأ الشعاع نحو نقطة تقاطع المُستقيمين ونحسُب عدد الوحدات(سالبة إذا كان الاتجاه يسار أم موجبة إذا كان الاتجاه يمين).
4. لقراءة المركبة الثانية نتقدم من نقطة تقاطع المُستقيمين نحو نهاية الشعاع نحو ونحسُب عدد الوحدات (سالبة إذا كان الاتجاه أعلى أم موجبة إذا كان الاتجاه أسفل).

مثال1 نقرأ مركبتي الشعاع $\overrightarrow{RS}$

1. نرسُم مُستقيم يشمل R ويُوازي محور الفواصل.
2. ثم نرسم مستقيما يشمل S فيقطع المستقيم الأول في نقطة.

مثال2 قراءة مركبتي الشعاع $\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix}-4\\-2\end{pmatrix}$



3. نتقدم بخمس وحدات نحو اليمين نحو نقطة التقاطع وهي المركبة الأولى (أي $+5$).
4. نصعد من نقطة التقاطع إلى نهاية الشعاع نحو الأعلى بثلاث وحدات وهي المركبة الثانية (أي $+3$).

إذن $\vec{R}\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$

4. التناسبية والدالة الخطية

1. القوانين الثلاثة المستعملة في الحساب(لاحظ أن y يُعطى بعبارة دالة خطية متغيرها x وp ثابت مُعطى)

يعني لما تجد سؤال جد عبارة الدالة الخطية لـ y بدلالة x نستعمل أحد هذه القوانين الثلاثة حسب المُعطيات.

x هو المقدار الأصلي (قبل التخفيض، قبل الارتفاع، قبل الزيادة...)

$y = \left(1 + \frac{p}{100}\right)x$

$y = \left(1 - \frac{p}{100}\right)x$

y هو المقدار الجديد (بعد التخفيض، بعد الزيادة بعد الارتفاع...)

$y' = \frac{p}{100}x$ ← y' هو المقدار المُخفّض أو المقدار المُرتفع

حساب المقدار الأصلي (حل مُعادلة)

تخفيض (نسبة الزيادة معلومة)

المقدار الجديد معلوم ← أستعمل هذا القانون $y = \left(1 + \frac{p}{100}\right)x$

مثال

سعر تلفاز بعد ارتفاعه بنسبة 20% هو 45000 دج.

احسُب سعر التلفاز قبل الارتفاع. **حل مُختصر 37500دج**

المقدار المرتفع معلوم ← أستعمل هذا القانون $y' = \frac{p}{100}x$

مثال

نسبة ارتفاع أسعار ملابس في محل هي 20%.

احسُب سعر معطف زاد ثمنه بـ 3000 دج؟ **حل مُختصر 15000دج**

زيادة (نسبة التخفيض معلومة)

المقدار الجديد معلوم ← أستعمل هذا القانون $y = \left(1 - \frac{p}{100}\right)x$

مثال

سعر هاتف نقال بعد تخفيض ثمنه بنسبة 30% هو 35000 دج.

احسُب سعر الهاتف قبل التخفيض. **حل مُختصر 50000دج**

المقدار المُنخفض معلوم ← أستعمل هذا القانون $y' = \frac{p}{100}x$

مثال

نسبة تخفيض في محل لبيع الأثاث المنزلي 15%.

ما هو سعر ثلاجة خُفض ثمنها بـ 1200 دج؟ **حل مُختصر 8000دج**

حساب المقدار الجديد (تعويض x فقط)

نسبة الارتفاع أو الزيادة معلومة ← أستعمل هذا القانون $y = \left(1 + \frac{p}{10}\right)x$

مثال

ارتفع مُستوى ماء سد الذي هو 50m بنسبة 5% بعد سقوط الأمطار.

احسُب ارتفاعه الجديد. **حل مُختصر 52,5m.**

نسبة التخفيض معلومة ← أستعمل هذا القانون $y = \left(1 - \frac{p}{10}\right)x$

مثال

سعر معطف قبل تخفيض ثمنه بنسبة 60% هو 12000 دج.

احسُب سعره بعد التخفيض. **حل مُختصر 4800دج**

مُلاحظة

ارتفاع مقدار بنسبة ثم تخفيظه بنفس النسبة لا يعني عودته لثمنه الأول ـ والعكس صحيح-

مثال ثمن بدلة رياضية 7500 دج، ارتفع ثمنها بـ 10% ثم انخفض بـ 10%. كم أصبح ثمنها؟

حل مُختصر 7425دج

5. حل جملة مُعادلتين جبريا(حسابيا)

نُميز ثلاث طرُق لحل جملة مُعادلتين، ونأخذ كمثال حل الجملة الآتية: $\begin{cases} x+y=10 \\ 2x+5y=32 \end{cases}$

طريقة التعويض	طريقة الجمع	طريقة الجمع والتعويض

1. ترقيم الجملتين

$$\begin{cases} x+y=10 \ \dots (1) \\ 2x+5y=32 \ \dots (2) \end{cases}$$

2. نستنتج عبارة x (أو عبارة y) من إحدى المُعادلتين ونضعها بين قوسين:
من المعادلة (1) مثلا: $x=(10-y)$

3. نُعوض x بعبارته في المعادلة (2) فنجد قيمة y بحل مُعادلة من الدرجة الأولى:

$$2(10-y)+5y=32$$
$$20-2y+5y=32$$
$$3y=12 \text{ إذن: } y=4$$

4. نعوض قيمة y في عبارة x فنجد قيمة x : $x=(10-4)=6$

2. نضرب طرفي المُعادلة (1) في -2 (لأنه معاكس معامل x في المعادلة (2))
فنحصل على المعادلة (3): $-2x-2y=-20 \ \dots (3)$
(الهدف في هذه الخطوة هو جعل معاملي x في المعادلتين متعاكسين أو معاملي y في المعادلتين متعاكسين).

3. نجمع المُعادلتين (2) و (3) فنحصل على قيمة y بحل هذه المعادلة:
$-2x-2y+2x+5y=-20+32$ إذن: $y=4$

4. نضرب طرفي المُعادلة (1) في -5
(لأنه معاكس معامل y في المعادلة (2))،
فنحصل على المعادلة (4):
$-5x-5y=-50 \ \dots (4)$

5. نجمع المُعادلتين (2) و (4) فنحصل على قيمة x بحل هذه المعادلة:
$-5x-5y+2x+5y=-50+32$
إذن: $x=6$

4. نعوض قيمة y في أحد المُعادلتين (1) أو (2) فنجد:
(نختار المعادلة (1)):
قيمة x: $x+4=10$
إذن $x=10-4=6$

صفحة الأستاذ هلال خالد لتعليم الرياضيات

المرحلة قبل الأخيرة من **الحل بإحدى الطرق الثلاث التحقق(مرحلة اختيارية)**

$$x+y=6+4=10$$
$$2x+5y=2\times 6+5\times 4=32$$

المرحلة الأخيرة وهي **التصريح بالحل** الثنائية $(6;4)$ هي حل للجملة.

مُلاحظة اختيار الطريقة المُناسبة يعتمد على معاملات x و y في الجملة.

مثال حل الجملة $\begin{cases} 3x+4y=70 \\ -3x+11y=40 \end{cases}$ بطريقة الجمع والتعويض أفضل، لأن معاملي x متعاكسين.

6. حل جملة مُعادلتين بيانيا

نأخذ كمثال حل الجملة $\begin{cases} x-3y=5 \\ 2x+y=2 \end{cases}$

1. أول خطوة هي أن نستنتج عبارتي y في كلتا المُعادليتن، ونجد: $\begin{cases} y=\frac{1}{3}x-\frac{5}{3} \\ y=-2x+2 \end{cases}$

2. نُسمي كل عبارة بدالة كالآتي: $f(x)=\frac{1}{3}x-\frac{5}{3}$ و $f(x)=-2x+2$

3. نرسُم (d) و (d') التمثيلان البيانيين للدالتين f و g على الترتيب(توظيف التمثيل البياني للدالة التآلفية).

4. الحل البياني للجملة هو إحداثيتا نقطة تقاطعهما.

جدول مُساعد لإنشاء (d) التمثيل البياني للدالة f:

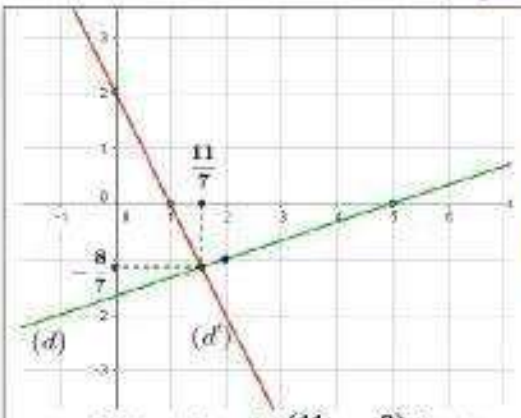
x	5	2
y	0	-1
$(x;y)$	$(5;0)$	$(2;-1)$

$$f(5)=\frac{1}{3}\times 5-\frac{5}{3}=\frac{5}{3}-\frac{5}{3}=\frac{5-5}{3}=0$$
$$f(2)=\frac{1}{3}\times 2-\frac{5}{3}=\frac{2}{3}-\frac{5}{3}=\frac{2-5}{3}=-1$$

جدول مُساعد لإنشاء (d') التمثيل البياني للدالة g:

x	0	1
y	2	0
$(x;y)$	$(0;2)$	(

$g(1)=-2\times 1+2=0$ ؛ $g(x)=-2\times 0+2=2$



إذن حل الجملة هو الثنائية $\left(\frac{11}{7};-\frac{8}{7}\right)$ (في هذه الحالة قراءة إحداثيتا نقطة التقاطع صعب جدا!).

7. الدالة الخطية والدالة التآلفية

أ. إيجاد عبارتي الدالتين الخطية والدالة التآلفية

الدالة الخطية

☺ كل دالة تُكتب على الشكل: $f(x) = ax$ هي دالة خطية حيث a عدد مُعطى وهو معامل توجيهها.

هذا يعني أن إيجاد عبارتها هو إيجاد قيمة العدد a فقط وهو يُحقق $a = \frac{f(x)}{x} = \frac{y}{x}$. أي أن $f(x) = y$

فكرة الحل تكمن في معرفة x و y من المُعطيات المقدمة فقط، ثم نُعوض لإيجاد قيمة a.

مثال أول

f دالة خطية، حيث: $f(3) = -12$ جد عبارتها.

لدينا f دالة خطية معناه: $f(x) = ax$، حيث:

$a = \frac{f(x)}{x} = \frac{y}{x}$ و لدينا: $y = -12$ و $x = 3$

وبالتعويض نجد: $a = \frac{f(x)}{x} = \frac{y}{x} = \frac{-12}{3} = -4$

إذن عبارة الدالة الخطية f هي $f(x) = -4x$

مثال ثان

g دالة خطية، تمثيلها البياني يشمل النقطة $A(-1;-2)$ جد عبارتها. لدينا g دالة خطية معناه $g(x) = ax$، حيث:

$a = \frac{g(x)}{x} = \frac{y}{x}$ و لدينا $y = -2$ و $x = -1$

وبالتعويض $a = \frac{g(x)}{x} = \frac{y}{x} = \frac{-2}{-1} = 2$

إذن عبارة الدالة الخطية g هي $g(x) = 2x$

الدالة التآلفية

☺ كل دالة تُكتب على الشكل: $f(x) = ax + b$ هي دالة تآلفية، وهذا يعني أننا لإيجادها يكفي تعيين قيمتي a و b

حيث $a = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ ، حيث $f(x_2) = y_2$ و $f(x_1) = y_1$ (بالتعويض فقط) وأما العدد b فنحل إحدى المعادلتين $ax_1 + b = y_1$ أو $ax_2 + b = y_2$

فكرة الحل تكمن في معرفة قيم x_1 و x_2 و y_2 و y_1 من المُعطيات المقدمة فقط، ثم نعوض لإيجاد قيمتي a و b.

مثال

f دالة تآلفية حيث $f(-5) = 28$ و $f(1) = 4$

لدينا f دالة تآلفية معناه $f(x) = ax + b$، حيث:

$a = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

ولدينا $f(-5) = 28$ و $f(1) = 4$

ونُسمي $f(x_2) = y_2$ و $f(x_1) = y_1$

فيكون $x_2 = -5$ و $y_2 = 28$ و $x_1 = 1$ و $y_1 = 4$

وبالتعويض $a = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{28-4}{-5-1} = \frac{24}{-6} = -4$

وبالتعويض في المعادلة $ax_1 + b = y_1$ نجد

$-4 \times 1 + b = 4$ أي $b = 8$

فتكون عبارة الدالة f هي: $f(x) = -4x + 8$

صفحة الأستاذ هلال خالد لتعليم الرياضيات

ب. حساب صورة عدد بالدالتين (تعويض قيمة العدد في عبارة الدالتين)

(لاحظ أن الصورة ذُكرت قبل العدد، إذن أعوض العدد فقط)

الدالة الخطية

لحساب صورة عدد c بدالة خطية f علمت عبارتها $f(x) = ax$ نُعوض x بهذا العدد في عبارتها. أي: $g(c) = a \times c$

مثال

f دالة خطية، حيث: $f(x) = -3x$

☺ احسب صورة العدد 5 بالدالة f

$f(5) = -3 \times 5 = -15$

الدالة التآلفية

لحساب صورة عدد c بدالة تآلفية g علمت عبارتها $g(x) = ax + b$ ، نعوض x بهذا العدد في عبارتها. أي: $g(c) = a \times c + b$ ونُكمل الحساب بعدها.

مثال g دالة تآلفية، حيث: $g(x) = \frac{1}{2}x - 6$

☺ احسب صورة العدد 8 بالدالة g.

$g(8) = \frac{1}{2} \times 8 - 6 = \frac{8}{2} - 6 = 4 - 6 = 2$

ج. حساب عدد علمت صورته بالدالتين (حل مُعادلة من الدرجة الأولى)

(لاحظ أن العدد ذُكر قبل الصورة، إذن أحل مُعادلة للحصول على العدد)

الدالة الخطية

لحساب العدد x الذي صورته K بدالة خطية g عبارتها من الشكل $g(x) = ax$ ، نحل المُعادلة: $ax = k$ فيكون $x = \frac{k}{a}$

مثال نعتبر الدالة الخطية g حيث: $g(x) = -9x$.

احسب العدد الذي صورته بالدالة g هي 36

لدينا $ax = k$ وبالتعويض $-9x = 36$

ومنه $x = \frac{36}{-9} = -4$

الدالة التآلفية

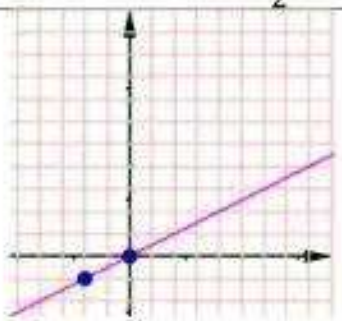
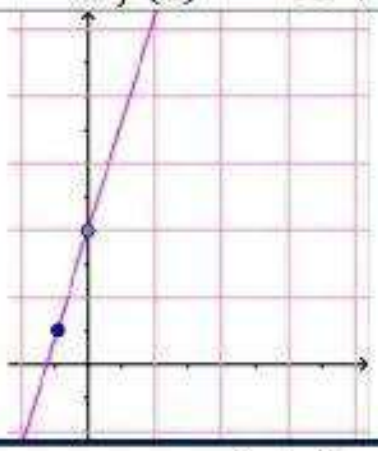
لحساب العدد x الذي صورته k بدالة تآلفية عبارتها من الشكل: $f(x) = ax + b$ ، نحل المُعادلة $ax + b = k$ فيكون:

مثال f دالة تآلفية حيث: $f(x) = -3x + 1$

احسب العدد الذي صورته 22 بالدالة f.

$-3x + 1 = 22$ أي: $-3x = 22 - 1$ أي $-3x = 21$

ومنه: $x = \frac{21}{-3} = -7$

<table>
<tr><th>الدالة</th><th>عبارتها(دستورها)</th><th>وضعية تمثيلها البياني بالنسبة إلى المبدأ</th></tr>
<tr><td>الخطية</td><td>$f(x)=ax$</td><td>يمر من المبدأ، ولتمثيله نحتاج جدول مُساعد
<table>
<tr><td>x</td><td>0</td><td>x_1</td></tr>
<tr><td>$f(x)$</td><td>0</td><td>$f(x_1)$</td></tr>
<tr><td>$(x;\ f(x))$</td><td>$(0;0)$</td><td>$(x_1;\ f(x_1))$</td></tr>
</table>
العدد x_1 نحن من نختاره، ثم نحسُب $f(x_1)$
مثال1 التمثيل البياني للدالة الخطية $f(x)=\frac{1}{2}x$
جدول مُساعد
<table>
<tr><td>x</td><td>0</td><td>-2</td></tr>
<tr><td>$f(x)$</td><td>0</td><td>$f(-2)=-1$</td></tr>
<tr><td>$(x;\ f(x))$</td><td>$(0;0)$</td><td>$(-2;\ -1)$</td></tr>
</table>
اخترنا $x_1=-2$ ونحسُب $f(-2)$
$f(-2)=\frac{1}{2}(-2)=-1$
 </td></tr>
<tr><td>التآلفية</td><td>$f(x)=ax+b$</td><td>لا يمر من المبدأ(يقطع محور التراتيب في b)
ولتمثيله نحتاج جدول مُساعد
<table>
<tr><td>x</td><td>x_1</td><td>x_2</td></tr>
<tr><td>$f(x)$</td><td>$f(x_1)$</td><td>$f(x_2)$</td></tr>
<tr><td>$(x;\ f(x))$</td><td>$(x_1;\ f(x_1))$</td><td>$(x_2;\ f(x_2))$</td></tr>
</table>
العددان x_1 و x_2 نحن من نختارهما ثم نحسُب $f(x_1)$ و $f(x_2)$
مثال1 التمثيل البياني للدالة التآلفية $f(x)=-3x+4$
جدول مُساعد
<table>
<tr><td>x</td><td>0</td><td>-1</td></tr>
<tr><td>$f(x)$</td><td>$f(0)=4$</td><td>$f(-1)=1$</td></tr>
<tr><td>$(x;\ f(x))$</td><td>$(0;\ 4)$</td><td>$(-1;\ 1)$</td></tr>
</table>
$f(0)=-3\times 0+4=4$
$f(-1)=-3\times(-1)+4=1$
 </td></tr>
<tr><td>الثابتة</td><td>$f(x)=b$</td><td>يُوازي محور الفواصل
لا نحتاج جدول مُساعد في إنشاء تمثيلها البياني وإنما نرسُم مستقيم يوازي محور الفواصل ويشمل محور التراتيب في b.
مثال1 التمثيل البياني للدالة الثابتة $f(x)=4$
هو مستقيم يشمل محور التراتيب في الترتيبة 4 ويُوازي محور الفواصل.</td></tr>
</table>

د. إثبات أن ثلاث نقط في استقامية (توظيف انتماء نقطة إلى تمثيل بياني لدالة خطية أو تآلفية).

تعريف القول أن نقطة $A(x_A;y_A)$ تنتمي إلى التمثيل البياني لدالة f يعني أن: $f(x_A)=y_A$
(أي أن ترتيبتها هي صورة فاصلتها بالدالة f)

مثال

f دالة تآلفية حيث: $f(x)=-6x+1$. هل النقطتين $A(-3;19)$ و $B(0;-1)$ تنتمي إلى التمثيل البياني للدالة f ؟
$f(x_A)=f(-3)=-6\times(-3)+1=18+1=19=y_A$ ، إذن A تنتمي إلى التمثيل البياني للدالة f
$f(x_B)=f(0)=-6\times 0+1=0+1=1\neq -1=y_B$، إذن B لا تنتمي إلى التمثيل البياني للدالة f

نقطتين من الثلاث نقط يشملهما تمثيل بياني لدالة

f دالة تآلفية، تمثيلها البياني يشمل النقطتين $A(-2;8)$ و $B(-1;5)$ حيث: $f(x)=-3x+2$
نعتبر النقطة C حيث $C(1;-1)$.
هل النقط A و B و C في استقامية؟

الإجابة

يكفي أن نُثبت أن C تنتمي إلى التمثيل البياني للدالة f.
لدينا f دالة تآلفية، تمثيلها البياني يشمل النقطتين A وB، يعني أن المستقيم (AB) هو التمثيل البياني للدالة f .
إذن نُثبت أن C تنتمي إلى (AB) ومن أجل هذا لابد أن تُحقق إحداثيتا النقطة C: $f(x_C)=y_C$ وهذا محققة لأن:
$f(x_C)=f(1)=-3\times 1+2=-3+2=-1=y_C$
إذن النقط A و B و C في استقامية.

لا يوجد تمثيل بياني يشمل نقطتين من الثلاثة

E ، F و G ثلاث نقط من معلم متعامد للمستوي حيث: $E(2;-3)$ ، $F(3;-5)$ و $G(-2;5)$.
هل النقط E ، F و G في استقامية؟

الإجابة

نفترض أن (EF) التمثيل البياني لدالة تآلفية نُسميها f، نقوم بتعيين عبارتها.
$a=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{-3-(-5)}{2-3}=\frac{2}{-1}=-2$
و $-2\times 2+b=-3$ أي $-4+b=-3$ ومنه $b=1$
إذن عبارة الدالة التآلفية f هي $f(x)=-2x+1$
والآن نُثبت أن: $f(x_G)=y_G$
$f(x_G)=f(-2)=-2\times(-2)+1=4+1=5=y_G$
إذن النقط E ، F و G في استقامية.

و. تعيين إحداثيتا نقطة تقاطع تمثيلين بيانيين لدالتين تآلفيتين

نعتبر f و g دالتين تآلفيتان، القول أن التمثيلين البيانيين للدالتين متقاطعان معناه أن المعادلة: $f(x)=g(x)$ محققة و x حل هذه المعادلة هو فاصلة نقطة التقاطع وترتيبة النقطة هي صورة هذه الفاصلة بأحد عبارتي الدالتين.

مثال

نعتبر f و g دالتين تآلفيتان، حيث $f(x)=-x+2$ و $g(x)=2x-1$
تعيين احداثيتا M نقطة تقاطع التمثيلين البيانيين للدالتين f و g حسابيا
حساب x_M (فاصلة M)
لدينا: $f(x)=g(x)$ وبتعويض عبارتيهما: $-x+2=2x-1$ فنجد أن $x=1$ ومنه $x_M=1$
حساب y_M (ترتيبة M)
$y_M=f(x_M)=f(1)=-1+2=1$ أو $y_M=g(x_M)=(1)=2\times 1-1=1$، إذن $y_M=1$
ومنه إحداثيتا M هما $(x_M;y_M)=(1;1)$

تعيين احداثيتا M نقطة تقاطع التمثيلين البيانيين للدالتين f و g بيانيا

جدول مُساعد لإنشاء (Δ) التمثيل البياني للدالة f

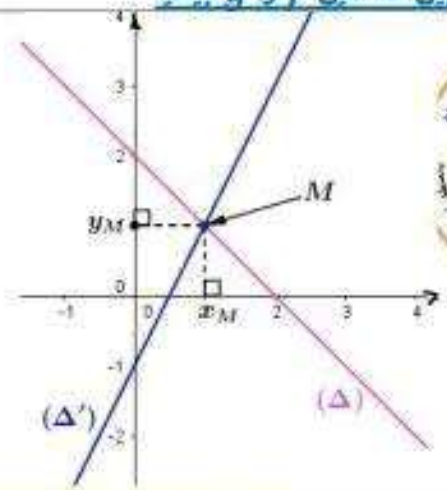
x	3	0
y	-1	2
$(x;y)$	$(3;-1)$	$(0;2)$

$f(3)=-3+2=-1$ و $f(0)=-0+2=2$

جدول مُساعد لإنشاء (Δ') التمثيل البياني للدالة g

x	2	0
y	3	-1
$(x;y)$	$(2;3)$	$(0;-1)$

$g(2)=2\times 2-1=3$ ؛ $g(0)=2\times 0-1=-1$



بقراءة بيانية نجد أن: $(x_M;y_M)=(1;1)$

صفحة الأستاذ هلال خالد لتعليم الرياضيات
والله إن ذات الفتى بالعلم والتقى فإن لم يكونا فلا اعتبار لذاته

د. تعيين العبارة الجبرية لدالة تآلفية انطلاقا من تمثيلها البياني

نأخذ المثال المقابل

المُستقيم (d) التمثيل البياني لدالة f لا يمر من المبدأ
إذن هو تمثيل بياني لدالة تآلفية.

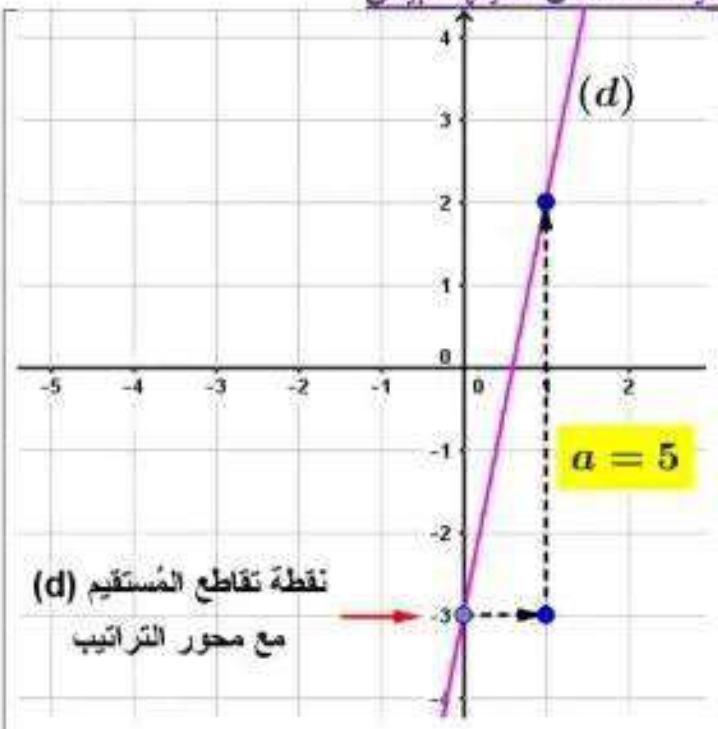
أي أن $f(x) = ax + b$ وتعيينها هو تعيين a و b .

تعيين b (الترتيب إلى المبدأ)

هو المُستقيم (d) يقطع محور التراتيب في b

تعيين a (معامل التوجيه) نتقدم بوحدة إلى اليمين انطلاقا من b ثم نصعد أو نهبط لنصل إلى المُستقيم (d).

نصعد فالعدد a موجب	نهبط فالعدد a سالب



مثال

في الشكل المُقابل $b = -3$ لأن المستقيم (d) يقطع محور التراتيب في عند الترتيبة -3

نتقدم بوحدة إلى اليمين انطلاقا من -3 ثم نصعد بـ 5 وحدات وهو العدد a أي $a = 5$

فعبارتها هي $f(x) = 5x - 3$

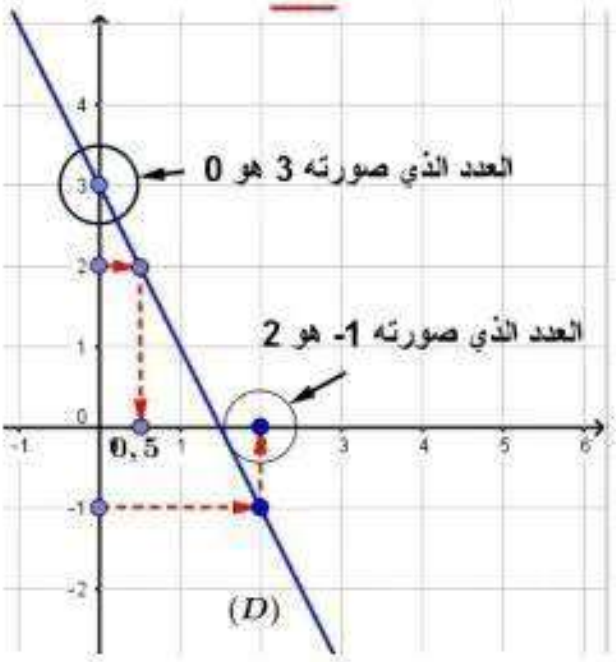
د. قراءة سابقة وصورة عدد من تمثيل بياني لدالة تآلفية

الحالة الأولى(قراءة عدد صورته معلومة)

طريقة لقراءة العدد a (غير المعلوم) والذي صورته b معلومة:

1. نرسُم مُستقيم أفقي انطلاقا من
2. العدد b حتى يقطع المُستقيم (D).
3. بإسقاط عمودي من نقطة التقاطع المُحصّل عليها سابقا على محور الفواصل نقرأ العدد a.

أمثلة

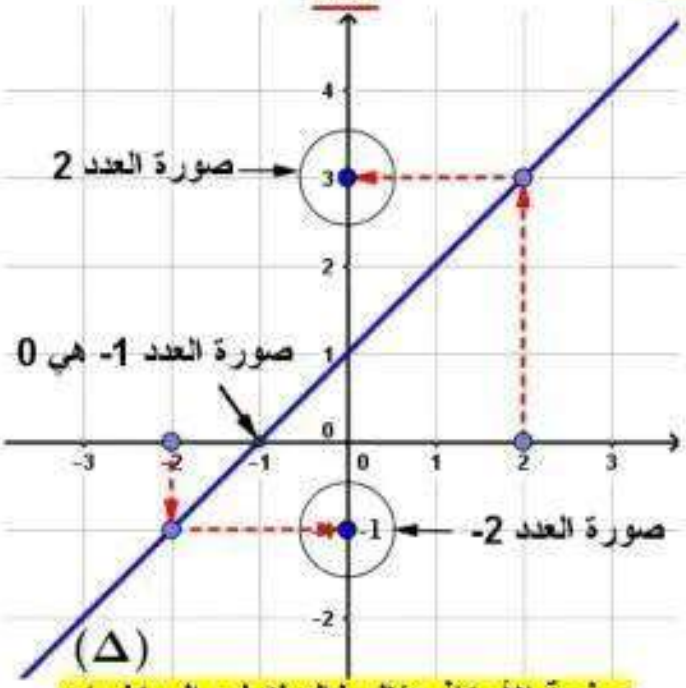


الحالة الأولى(قراءة صورة عدد معلوم)

طريقة لقراءة الصورة b (غير المعلومة) والذي عدده (سابقته) a معلومة:

1. نرسُم مُستقيم عمودي انطلاقا من
2. العدد a حتى يقطع المُستقيم (D).
3. بإسقاط أفقي من نقطة التقاطع المُحصّل عليها سابقا على محور التراتيب نقرأ العدد b.

أمثلة



صفحة الأستاذ هلال خالد لتعليم الرياضيات

8. الحساب الحرفي

أهم ما يجب معرفته:	أ. تبسيط عبارة حرفية
ب. حل مُتراجحة من الدرجة الأولى	ج. تحليل عبارة حرفية
د. حل معادلة جداء معدوم يؤول إلى حل معادلة من الدرجة الاولى	ه. حساب قيمة عبارة حرفية من اجل قيمة لمتغيرها

1. تبسيط ونشر عبارة جبرية نستعمل مايلي للنشر

قاعدة حذف الأقواس المسبوقة بإشارة (−)

$$-(a-b+c) = -a+b-c$$

مثال

$$-(x^2-4x+3) = -1x^2+4x-3$$

قاعدة حذف الأقواس المسبوقة بإشارة (+)

$$+(a-b+c) = a-b+c$$

مثال

$$+(x^2-4x+3) = x^2-4x+3$$

الأستاذ حلال خالد تعليم الرياضيات

نشر عبارة من الشكل $k\times(a+b)$

الخاصية التوزيعية على الجمع

$$k\times(a+b) = k\times a + b\times k$$

مثال

$$x\times(4x+4) = x\times 4x + 4\times x = 4x^2+4x$$

نشر عبارة من الشكل $k\times(a-b)$

الخاصية التوزيعية على الطرح

$$k\times(a-b) = k\times a - b\times k$$

مثال

$$2x(x-1) = 2x\times x - 1\times 2x = 2x^2-2x$$

نشر عبارة من الشكل $(a+b)(c-d)$

$$(a+b)(c-d) = a\times c - a\times d + b\times c - b\times d$$

مثال

$$\begin{aligned}&(x-2)(4x+4)\\ &= x\times 4x + 4\times x - 2\times 4x + 4\times(-2)\\ &= 4x^2+4x-8x-8\\ &= 4x^2-4x-8\end{aligned}$$

نشر عبارة من الشكل $(a+b)(a-b)$

المُتطابقة الشهيرة الثالثة (فرق عددين في مجموعهما)

$$(a+b)(a-b) = (a)^2-(b)^2$$

مثال

$$(2x+3)(2x-3) = (2x)^2-(3)^2 = 4x^2-9$$

صفحة الأستاذ حلال خالد لتعليم الرياضيات

نشر عبارة من الشكل $(a+b)^2$

المُتطابقة الشهيرة الأولى(مربع مجموع عددين)

$$(a+b)^2 = (a)^2+2\times a\times b+(b)^2$$

مثال

$$\begin{aligned}(5x+3)^2 &= (5x)^2+2\times 5x\times 3+(3)^2\\ &= 25x^2+30x+9\end{aligned}$$

نشر عبارة من الشكل $(a-b)^2$

المُتطابقة الشهيرة الثانية (مربع فرق عددين)

$$(a-b)^2 = (a)^2-2\times a\times b+(b)^2$$

مثال

$$\begin{aligned}(3x-6)^2 &= (3x)^2-2\times 3x\times 6+(6)^2\\ &= 9x^2-36x+36\end{aligned}$$

مثال شامل بين أن: $A=-(6x-5)+(x-2)(4x+4)-2x(x-1)+(3x-6)^2 = 11x^2-44x+33$

ب. حل مُتراجحة من الدرجة الأولى بمجهول واحد

وهي كل متراجحة يمكن كتابتها على أحد الأشكال الآتية: $ax+b<cx+d$ أو $ax+b\leq cx+d$ أو $ax+b>cx+d$ أو $ax+b\geq cx+d$ ثم تمثيل حلولها بمستقيم عددي.

نأخذ كمثال حل متراجحات من الشكل $ax+b\leq cx+d$ تكافئ: $(a-c)x\leq d-b$

إذا كان $a-c$ عدد موجب، فإن حلها هو: $x\leq\frac{d-b}{a-c}$ (لا يتغير اتجاه المتباينة في كل حالة).

مثال نحل المُتراجحة $5x-3\leq 2x+1$ تكافئ $(5-2)x\leq 1+3$ أي $3x\leq 4$ ومنه $x\leq\frac{4}{3}$ (3 عدد موجب)

إذا كان $a-c$ عدد سالب، فإن حلها هو: $x\geq\frac{d-b}{a-c}$ (يتغير اتجاه المتباينة في كل حالة).

مثال نحل المُتراجحة $6x-2\leq 8x-1$ تكافئ $(6-8)x\leq -1+2$ أي $-2x\leq 1$ ومنه $x\geq\frac{1}{-2}$ (2− عدد سالب)

التمثيل البياني

إذا كانت حل المتراجحة هو $x\leq\frac{b}{a}$ ، فاتجاه حلول هذه المتراجحة هو من اتجاهها.

إذا كانت حل المتراجحة هو $x\geq\frac{b}{a}$ ، فاتجاه حلول هذه المتراجحة هو من اتجاهها.