على المترشّح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأول

التمرين الأول : (05 نقاط)

المتتالية (u_n) معرفة بحدها الأول $u_1=e^2$ ومن أجل كل عدد طبيعي غيرمعدوم n : $u_{n+1}=e^{-\frac{1}{2}}\sqrt{u_n}$

1) أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $u_n>\frac{1}{e}$.

ب- برهن أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما .

ج- إستنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة نحو عدد l يطلب حسابه .

2) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n كما يلي : $v_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln(u_n)$.

أ- أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ يطلب حساب حدها الأول v_1 .

ب- عبر عن v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n ، جـــد مرة أخرى $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

3) من أجل كل $n\in\mathbb{N}^*$ نضع : $S_n=v_1+v_2+......+v_n$ و $P_n=u_1\times u_2\times.......\times u_n$.

♦ احسب S_n بدلالة n ، ثم استنتج P_n بدلالة n .

التمرين الثاني: (04 نقاط)

تحتوي علبة على أربع كريات خضراء مرقمة بـــ : 1 ، 2 ، 2 ، 2 و ثلاث كريات حمراء مرقمة بـــ : 1 ، 2 ، 2

كل الكريات متماثلة و لا يمكن التمييز بينها عند اللمس .

I) نسحب عشوائيا و في آن واحد ثلاث كريات من العلبة ، نعتبر الحدثين A و B حيث :

A : " الحصول على ثلاث كريات من نفس اللون " B : " توجد في السحب كرية واحدة حمراء على الأقل " .

♦ احسب $P(A)$ و بين أن : $P(B)=\frac{31}{35}$.

II) الآن نقوم بسحب كريات من العلبة الواحدة تلوى الأخرى بدون إرجاع و نتوقف عن السحب عند الحصول على كرية تحمل الرقم 2 لأول مرة .

ليكن X المتغير العشوائي الذي يساوي عدد السحبات التي قمنا بها في هذه التجربة

1) برّر لماذا قيم المتغير العشوائي X هي : 1 ، 2 و 3 .

2) بين أن : $P(X=2)=\frac{5}{21}$ ، ثم عين قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X .

3) استنتج إحتمال الحدث D : " الحصول على الأقل على كرية واحدة تحمل الرقم 1 " .

التمرين الثالث: (04 نقاط)

I) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2=-2-2\sqrt{3}i$ (يمكنك وضع : $z=x+iy$) .

II) المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$. نعتبر النقط A ، B و C لواحقها على الترتيب :

$z_A=-1+i\sqrt{3}$ ، $z_B=\overline{z_A}$ و $z_C=2$.

1) اكتب z_A على الشكل الأسي .

2) نعتبر النقطة D ذات اللاحقة z_D حيث : $z_D=z_A\times\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

أ- تحقق أن : $z_D=2\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)\right]$ ، ثم اكتب z_D على الشكل الجبري .

ب- استنتج القيمة المضبوطة لكل من : $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$.

3) أ- بين أن : $\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}=e^{i\frac{\pi}{3}}$ ، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC.

ب- بين أن (C) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث : $z=2e^{i\theta}$ مع $\left(\theta\in\mathbb{R}\right)$ هي الدائرة المحيطة بالمثلث ABC .

التمرين الرابع : (07 نقاط)

الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ بـــ : $f(x)=x+(x-1)e^{-x}$ و ليكن $\left(C_f\right)$ تمثيلها البياني في المستو المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ ، وحدة الطول هي : $2cm$.

1) بين أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ ، ثم احسب : $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$.

2) أ- بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x$ مقارب للمنحنى $\left(C_f\right)$ بجوار $+\infty$.

ب- ادرس الوضع النسبي للمنحنى $\left(C_f\right)$ بالنسبة للمستقيم (Δ) .

3) الشكل المقابل يمثل جدول التغيرات للدالة f' الدالة المشتقة للدالة f :

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$+\infty$ ↘	$1-\frac{1}{e^3}$	↗ 1

أ- بين أن المنحنى $\left(C_f\right)$ يقبل نقطة الإنعطاف I يطلب تعيين إحداثييها .

ب- تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن : $f'(x)>0$.

4) شكل جدول التغيرات للدالة f .

5) تحقق أن : $f(0)\times f\left(\frac{1}{2}\right)<0$ ، ثم استنتج أن $\left(C_f\right)$ يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α يطلب تعيين حصرا له .

6) أنشئ المستقيم (Δ) و مثل المنحنى (C_f) .

7) نعتبر العدد $A(\lambda)$ حيث : $A(\lambda)=4\int_1^{\lambda}\left[f(x)-x\right]dx$ مع λ عدد حقيقي أكبر تماما من 1 .

♦ أعط تفسيرا هندسيا للعدد $A(\lambda)$ ، ثم احسبه بدلالة λ و ذلك باستعمال المكاملة بالتجزئة .

8) لتكن الدالة $x\mapsto -xe^{-x}$ هي دالة أصلية للدالة $x\mapsto(x-1)e^{-x}$ على $\mathbb{R}$:

– نضع من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $u_n=\int_n^{n+1}(x-1)e^{-x}\,dx$ و ليكن : $S_n=u_1+u_2+.....+u_n$.

♦ عبر عن S_n بدلالة n ، ثم احسب $\lim_{n\to+\infty}S_n$.

Boudehed

إنتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

يحتوي صندوق على 10 كريات متماثلة ، منها 7 كريات بيضاء و البقية حمراء ، لدينا زهرتا نرد غير مزيفتين الأولى مكعبة الشكل وجوهها تحمل الأرقام من 1 إلى 6 ، أما الثانية رباعية الوجوه تحمل الأرقام من 1 إلى 4 .

I) نسحب عشوائيا كرية من الصندوق ، إذا كانت بيضاء نرمي الزهرة المكعبة مرة واحدة و إذا كانت حمراء نرمي الزهرة الرباعية مرة واحدة .

♦ نعتبر الحدثين : A " ظهور الرقم 1 " ، C " ظهور رقم زوجي " .

1) بين أن : $P(A)=\dfrac{23}{120}$ ، ثم احسب $P(C)$. (يمكنك الإستعانة بشجرة الإحتمالات)

2) علما أنه ظهر في الرمي الرقم 1 ، ما هو إحتمال أن نكون سحبنا كرية بيضاء ؟ .

II) الآن ننزع من الصندوق الكريات البيضاء و نضع مكانها n كرية سوداء حيث : $(n\geq 2)$ ، ثم نقوم بسحب كريتين على التوالي و بدون إرجاع .

1) احسب P_n إحتمال سحب كريتين من لونين مختلفين .

2) بين أن: $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n=0$ ، ثم اعط تفسيرا لهذه النتيجة .

التمرين الثاني: (05 نقاط)

المتتالية (u_n) معرفة بحدها الأول $u_1=\dfrac{2}{3}$ ومن أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $u_{n+1}=\left(\dfrac{2n+2}{3n}\right)u_n$.

1) احسب كلا من : u_2 و u_3 ، ثم تحقق أن المتتالية (u_n) ليست حسابية و لا هندسية .

2) نعرف من أجل كل $n\in\mathbb{N}^*$ المتتالية (v_n) كما يلي : $v_n=\dfrac{u_n}{n}$.

أ- برهن أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\dfrac{2}{3}$ يطلب حساب حدها الأول v_1 .

ب- عبر عن v_n بدلالة n ، ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n .

ج- تحقق أن : $\ln u_n=n\left[\dfrac{\ln n}{n}+\ln\left(\dfrac{2}{3}\right)\right]$ ، ثم استنتج نهاية المتتالية (u_n) .

3) نضع : $S_n=\dfrac{2}{u_1}+\dfrac{2^3}{u_2}+\dfrac{3\times 2^3}{u_3}+......+\dfrac{n\times 2^n}{u_n}$.

♦ بين أنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}^*$ ، $S_n=\dfrac{1}{2}\left(3^{n+1}-3\right)$.

التمرين الثالث : (04 نقاط)

✍ **لكل سؤال جواب واحد فقط صحيح من بين الأجوبة الثلاثة المقترحة ، عينه مع التعليل :**

1) في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة $2z^2-5\bar{z}=-3$:

أ) تقبل حلين حقيقيين ب) تقبل حلين حقيقيين و حلين مركبين مترافقين ج) لا تقبل حلول .

2) العدد المركب $z=\frac{2e^{i\frac{1446\pi}{12}}}{1+i\sqrt{3}}$ يساوي :

أ) $\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}+i\right)$ ب) $\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}-i\right)$ ج) $\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{3}i\right)$.

3) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث : $\sqrt{2}\left|z-1+i\right|=\left|(1-i)z\right|$ هي :

أ) محور قطعة المستقيم $[OA]$ حيث : $z_A=1-i$ ب) المستقيم ذا المعادلة : $y=\sqrt{2}x$

ج) دائرة مركزها O و نصف قطرها 2 .

4) z عدد مركب حيث : $z=\left(i\cos\frac{2\pi}{5}-\sin\frac{2\pi}{5}\right)^5$ ، الشكل الأسي لــ z هو :

أ) $e^{i\frac{\pi}{4}}$ ب) $e^{i\frac{\pi}{2}}$ ج) $e^{-i\frac{\pi}{2}}$.

التمرين الرابع : (07 نقاط)

الدالة f معرفة على $]0;+\infty[$ بـــ : $f(x)=x\ln x-\frac{1}{2}(\ln x)^2$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) بين أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ ، ثم احسب : $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}f(x)$ و فسر النتيجة بيانيا .

2) أ- بين أنه من أجل كل $x\in]0;+\infty[$ فإن : $f'(x)=1+\frac{(x-1)\ln x}{x}$.

ب- أثبت أنه من أجل كل $x>0$: $(x-1)\ln x\geq 0$ ، ثم استنتج إتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها .

3) بين أن المماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 1 له معادلة من الشكل : $y=x-1$.

4) نعتبر الدالة g المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي : $g(x)=f(x)-x+1$ و جدول تغيراتها التالي :

x	0	$+\infty$
$g(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

أ- احسب : $g(1)$ ، ثم استنتج وضعية (C_f) بالنسبة إلى (T) .

ب- ماذا يمكن القول عن النقطة A من المنحنى (C_f) ذات الفاصلة 1 ؟ .

ج- بين أن المعادلة $g(x)=1$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $3{,}3<\alpha<3{,}4$.

5) باستعمال السؤال السابق برهن أن (C_f) يقطع المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x$ في النقطة ذات الفاصلة α .

6) أنشئ كلا من : (T) ، (Δ) و مثل (C_f) .

7) الدالة h معرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي : $h(x)=\left|\ln x\right|\left(x-\frac{\ln x}{2}\right)$ و (C_h) تمثيلها البياني .

♦ اشرح كيف يمكن انشاء (C_h) انطلاقا من (C_f) (إنشاء (C_h) غير مطلوب) .

8) A هي مساحة الحيزالمستوي المحدد بالمنحنى (C_f) ، محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتهما $x=1$ و $x=e$.

أ- باستعمال التكامل بالتجزئة ، بين أن : $\int_1^e x\ln x\,dx=\frac{e^2+1}{4}$.

ب- بين أن الدالة $x\mapsto x(\ln x)^2-2x\ln x+2x$ هي دالة أصلية للدالة $x\mapsto(\ln x)^2$ على $]0;+\infty[$

ثم استنتج أن : $A=\frac{e^2-2e+5}{4}\,u.a$.

إنتهى الموضوع الثاني

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة الـــدفـــاع الوطـــــــني
أركان الجيش الوطني الشعبي
دائرة الإستعمال و التحضير
مديرية مدارس أشبال الأمـــة

السنة الدراسية : 2024 - 2025
إخـــتبـــار الثـــلاثـــي الثـــالـــث
المستوى: ثالثة ثانوي   الشعبة: علوم تجريبية

التصحيح النموذجي لإختبـــار مادة الرياضيات " الموضوع الأول "

م	عناصر الإجـــــــابة	العلامـــة: مجزأة	العلامـــة: كاملة
	حل التمرين الأول: (5ن)		
	1) أ- نستعمل البرهان بالتراجع :		
	التحقق من أجل $n=1$: $u_1>\frac{1}{e}$ (محققة)	0.75	
	نفرض صحتها من أجل n كيفي أي : $u_n>\frac{1}{e}$		
	و نبرهن صحتمها من أجل $n+1$ أي : $u_{n+1}>\frac{1}{e}$.		
	لدينا : $u_n>e^{-1}$ أي : $\sqrt{u_n}>e^{-\frac{1}{2}}$ و منه : $e^{-\frac{1}{2}}\sqrt{u_n}>e^{-1}$ أي أن : $u_{n+1}>\frac{1}{e}$		
	و بالتالي من أجل كل $n\in\mathbb{N}^*$: $u_n>\frac{1}{e}$.		
	ب- نجد : $u_{n+1}-u_n=\frac{u_n\left(e^{-1}-u_n\right)}{e^{-\frac{1}{2}}\sqrt{u_n}+u_n}<0$ و منه فإن المتتالية (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$.	0.5	
	جـ المتتالية (u_n) متقاربة، لأنها متناقصة تماما و محدودة من الأسفل.	0.25	
	أي تقبل نهاية l تحقق : $l=e^{-\frac{1}{2}}\sqrt{l}$ أي : $l^2=e^{-1}.l$ و منه : $\boxed{l=e^{-1}}$.	0.25	
	2) أ- لدينا : $v_{n+1}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln\left(e^{-\frac{1}{2}}\sqrt{u_n}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left[\ln e^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}\ln u_n\right]=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\ln u_n$.	0.5	
	و منه : $v_{n+1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln u_n\right)$ أي : $v_{n+1}=\frac{1}{2}v_n$ ، إذن (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ و $v_1=\frac{3}{2}$.	0.25	
	ب- نجد : $\boxed{v_n=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}$.	0.5	
	ـ لدينا : : $u_n=e^{2v_n-1}$ إذن : $\boxed{u_n=e^{3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-1}}$.	0.5	
	ـ لدينا : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=e^{-1}$ ، لأن : $\lim\limits_{x\to+\infty}v_n=0$.	0.5	
	4) أ- لدينا : $\boxed{3\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}=\frac{3}{2}\left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}}\right)=S_n$.	0.5	

ب ـ لدينا : $P_n = e^{2v_1-1}\times e^{2v_2-1}\times .....\times e^{2v_n-1}$ أي : $P_n = e^{(2v_1-1)+(2v_2-1)+......+(2v_n-1)}$ **0.5**

و منه : $\boxed{P_n = e^{2S_n-n}}$.

حل التمرين الثاني(4 ن)

الجزء الأول :

$P(A) = \frac{C_4^3 + C_3^3}{C_7^3} = \boxed{\frac{1}{7}}$. **0.75**

$P(B) = 1 - \frac{C_4^3}{C_7^3} = \boxed{\frac{31}{35}}$ هو المطلوب. **0.75**

الجزء الثاني :

1) تبرير قيم المتغير العشوائي . **0.5**

2) لدينا : $P(X=2) = \frac{A_2^1 \times A_5^1}{A_7^2} = \frac{10}{42} = \frac{5}{21}$. **0.5**

نجد : $P(X=1) = \frac{5}{7}$ ، $P(X=3) = \frac{A_2^2 \times A_5^1}{A_7^3} = \frac{10}{210} = \frac{1}{21}$. **0.5** **0.5**

3) لدينا : $P(D) = P(X=2) + P(X=3) = \frac{6}{21}$. **0.5**

حل التمرين الثالث: (4 ن)

I) أي البحث عن الجذرين التربيعيين للعدد $-2-2\sqrt{3}i$ نجد : $z_1 = 1 - i\sqrt{3}$ و $z_2 = -1+\sqrt{3}i$. **01**

II)

1) نجد : $\boxed{z_A = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}}$. **0.5**

2) أ ـ لدينا : $z_D = 2e^{i\frac{2\pi}{3}} \times \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ أي : $z_D = 2\sqrt{2}e^{i\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)}$ و منه : $z_D = 2\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{12}}$ **0.5**

إذن نجد : $z_D = 2\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)\right]$ هو المطلوب.

ـ لدينا : $z_D = z_A \times \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ أي : $z_D = \left(-1+i\sqrt{3}\right)\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left(-1+i\sqrt{3}\right)(1-i)$ **0.5**

و منه : $\boxed{z_D = \left(\sqrt{3}-1\right) + \left(\sqrt{3}+1\right)i}$.

ب ـ نجد : $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ و $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$. **0.5**

3) أ ـ لدينا : $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \frac{6+6\sqrt{3}i}{12} = \frac{-3-i\sqrt{3}}{-3+i\sqrt{3}} = \frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}$ و منه : $\boxed{\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = e^{i\frac{\pi}{3}}}$. **0.5**

ـ لدينا : $\left|\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right| = 1 \Rightarrow AC = BC$ و $\arg\left(\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \Rightarrow \left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$

و هذا ما يدل أن المثلث ABC متقايس الأضلاع. **0.25**

ب ـ لدينا من جهة : $z = 2e^{i\theta}$ تكافئ $z - z_O = 2e^{i\theta}$ و منه : $|z - z_O| = 2$ أي : $OM = 2$

إذن : (C) هي الدائرة التي مركزها O و نصف قطرها 2 .

و من جهة أخرى لدينا : $|z_A| = |z_B| = |z_C| = 2$ أي أن النقط A ، B و C تنتمي إلى الدائرة التي **0.25**

0.25 مركزها O و نصف قطرها 2 و بالتالي فإن (C) هي الدائرة المحيطة بالمثلث ABC .

حل التمرين الرابع : (7 ن)

0.25

0.25 1) لدينا : $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x+\frac{x}{e^x}-\frac{1}{e^x}=+\infty$.

0.5 لدينا : $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} x+\frac{x-1}{e^x}=-\infty$.

2) أ- لدينا : $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-x\right]=\lim_{x\to+\infty}(x-1)e^{-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}-\frac{1}{e^x}=0$.

و منه المستقيم (Δ) مقارب لـ (C_f) بجوار $+\infty$.

01 ب- أي ندرس إشارة $(x-1)e^{-x}$ أي ندرس إشارة $x-1$ و بالتالي المناقشة تكون كما يلي :

- المنحنى (C_f) يقع تحت (Δ) في المجال $]-\infty;1[$.
- المنحنى (C_f) يقع فوق (Δ) في المجال $]1;+\infty[$.
- المنحنى (C_f) يقطع (Δ) في النقطة $A(1,1)$.

0.5 3) أ- نلاحظ أن f'' تنعدم و تغير من إشارتها إذن : المنحنى (C_f) يقبل نقطة الإنعطاف I

حيث : $I(3, f(3))$ و منه : $\boxed{I\left(3,3+2e^{-3}\right)}$.

0.5 ب- نلاحظ أن أصغر قيمة تبلغها الدالة f' هي $\left(1-\frac{1}{e^3}\right)\approx 0,95$ و منه من أجل كل $x\in\mathbb{R}$

فإن : $f'(x)>0$.

0.25

0.25 4) الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

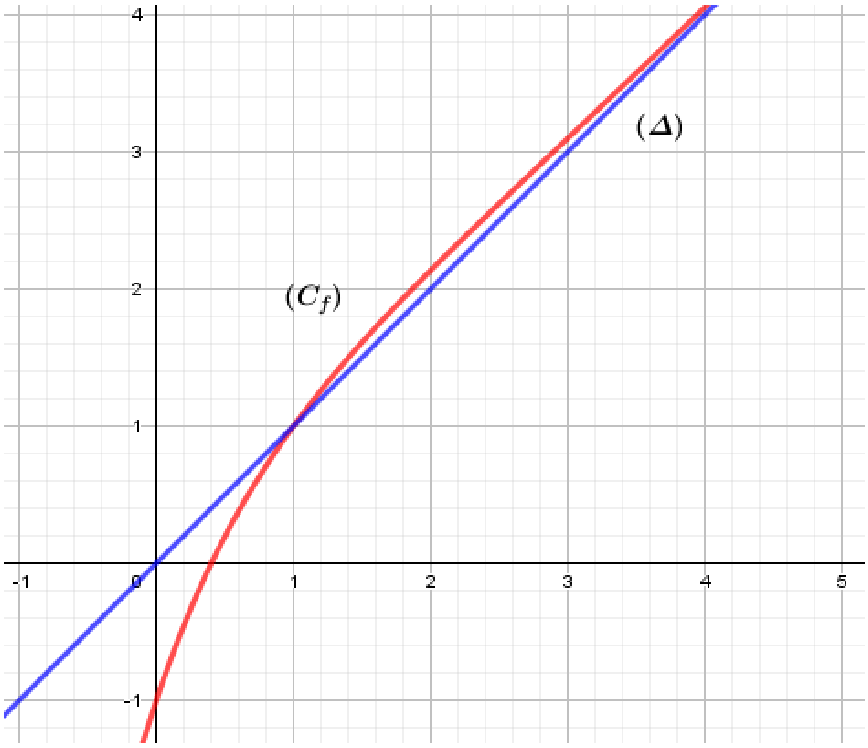
x	$-\infty$ $\quad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

0.25 5) لدينا : $\begin{cases} f(0)=-1 \\ f\left(\frac{1}{2}\right)\approx 0,2 \end{cases}$ و منه : $f(0)\times f\left(\frac{1}{2}\right)<0$.

0.5 - الدالة f مستمرة و متزايدة تماما على $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ و لدينا : $f(0)\times f\left(\frac{1}{2}\right)<0$

و منه فإن (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث : $0<\alpha<\frac{1}{2}$.

6) الإنشاء و التمثيل :



0.75

7) $A(\lambda)$ هي المساحة بـ cm^2 للحيز المستو المحدد بـ (C_f) ، (Δ) و المستقيمين : $x=1$ و $x=\lambda$

- باستعمال التكامل بالتجزئة نضع : $\begin{cases} u(x)=x-1 \ ; \ u'(x)=1 \\ v'(x)=e^{-x} \ ; \ v(x)=-e^{-x} \end{cases}$

و منه : $A(\lambda)=4\int_1^{\lambda}(x-1)e^{-x}\,dx=4\left[-(x-1)e^{-x}\right]_1^{\lambda}+4\int_1^{\lambda}e^{-x}\,dx$

أي : $A(\lambda)=-4(\lambda-1)e^{-\lambda}+4\left[-e^{-x}\right]_1^{\lambda}=4\left[-(\lambda-1)e^{-\lambda}-e^{-\lambda}+e^{-1}\right]$

و منه نجد : $\boxed{A(\lambda)=4\left(-\lambda e^{-\lambda}+e^{-1}\right)cm^2}$.

01

8) لدينا : $S_n=\int_1^2(x-1)e^{-x}\,dx+\int_2^3(x-1)e^{-x}\,dx+.....+\int_n^{n+1}(x-1)e^{-x}\,dx$ باستعمال شال نجد :

$S_n=\int_1^{n+1}(x-1)e^{-x}\,dx$ و منه : $S_n=\left[-xe^{-x}\right]_1^{n+1}$ أي : $\boxed{S_n=-(n+1)e^{-(n+1)}+e^{-1}}$.

0.5

لدينا : $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=\lim\limits_{t\to-\infty}\left(te^t+e^{-1}\right)$ و ذلك بوضع : $t=-(n+1)$ أي : $\begin{cases} n\to+\infty \\ t\to-\infty \end{cases}$

و منه نجد : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=e^{-1}}$ لأن : $\lim\limits_{t\to-\infty}te^t=0$.

0.5

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة الدفاع الوطني
أركان الجيش الوطني الشعبي
دائرة الإستعمال و التحضير
مديرية مدارس أشبال الأمة

السنة الدراسية : 2024 - 2025

إختبار الثلاثي الثالث

المستوى: ثالثة ثانوي الشعبة: علوم تجريبية

التصحيح النموذجي لإختبار مادة الرياضيات " الموضوع الثاني "

كاملة	مجزأة	عناصر الإجابة	م
		حل التمرين الأول : (4 ن)	
	0.75	I) يمكن الاستعانة بشجرة الإحتمالات .	
		1) نجد : $P(A)=\left(\frac{7}{10}\times\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{3}{10}\times\frac{1}{4}\right)=\frac{7}{60}+\frac{3}{40}$ و منه $\boxed{P(A)=\frac{23}{120}}$ هو المطلوب .	
	0.75	- نجد : $P(C)=\left(\frac{7}{10}\times\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{3}{10}\times\frac{1}{2}\right)=\frac{7}{20}+\frac{3}{20}$ و منه : $\boxed{P(C)=\frac{1}{2}}$.	
	01	2) نسمي الحدث B " الكرية المسحوبة بيضاء " ، أي نحسب الإحتمال الشرطي : $P_A(B)$.	
	0.5	و منه : $P_A(B)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}=\frac{\frac{7}{60}}{\frac{23}{120}}$ أي نجد : $\boxed{P_A(B)=\frac{14}{23}}$.	
	0.5	II) الكيس به $(n+3)$ كرية .	
	0.5	1) لدينا : $P_n=\frac{2\left(A_3^1\times A_n^1\right)}{A_{n+3}^2}=\frac{6n}{(n+3)(n+2)}$.	
		2) نجد : $\lim\limits_{n\to+\infty}P_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{6n}{n^2}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{6}{n}=0$.	
	0.25	**التفسير :** كلما كان عدد الكريات السوداء كبيرا بالقدر الكافي فإن حدث سحب	
	0.25	كريتين من لونين مختلفين يؤول إلى الحدث المستحيل .	
	0.5		
		حل التمرين الثانى(5 ن)	
	01	1) نجد : $u_2=\frac{8}{9}$ و $u_3=\frac{8}{9}$.	
		لدينا : $2u_2\neq u_1+u_3$ و $u_2^2\neq u_1\times u_3$ أي أن المتتالية (u_n) ليست حسابية و لا هندسية .	
	0.25	2) لدينا : $v_n=\frac{u_n}{n}$.	
	0.5		
	0.5	أ - لدينا : $\frac{2}{3}\times\frac{u_n}{n}=\frac{2(n+1)u_n}{3n(n+1)}=\frac{(2n+2)u_n}{(n+1)3n}=\frac{\left(\frac{2n+4}{3n+3}\right)u_n}{n+1}=v_{n+1}$ أي : و منه : $v_{n+1}=\frac{2}{3}v_n$	
	0.5	و منه : (v_n) متتالية هندسية اساسها $\frac{2}{3}$ و حدها الأول $v_1=\frac{2}{3}$.	
		ب - نجد : $v_n=\left(\frac{2}{3}\right)^n$.	
	0.5		

العلامة	عناصر الإجابة
0.75	لدينا : $v_n=\dfrac{u_n}{n}$ و منه : $u_n=n.v_n$ و بالتالي : $\boxed{u_n=n\left(\dfrac{2}{3}\right)^n}$.
0.25	ج - لدينا : $u_n=n\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ أي : $\ln u_n=\ln\left[n\left(\dfrac{2}{3}\right)^n\right]$ و منه : $\ln u_n=\ln n+n\ln\left(\dfrac{2}{3}\right)$
0.75	و بالتالي : $\boxed{\ln u_n=n\left[\dfrac{\ln n}{n}+\ln\left(\dfrac{2}{3}\right)\right]}$ هو المطلوب .
0.25 0.75	لدينا : $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln(u_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}n\left[\dfrac{\ln n}{n}+\ln\left(\dfrac{2}{3}\right)\right]=-\infty$ ، لأن : $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\ln n}{n}=0$ و $\ln\left(\dfrac{2}{3}\right)<0$.
0.25 0.75	إذن : بما أن : $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln(u_n)=-\infty$ فإن : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0}$.
0.25 0.75	3) لدينا : $\dfrac{n\times2^n}{u_n}=3^n$ و منه : $S_n=3^1+3^2+3^3+......+3^n$ (مجموع متتالية هندسية) .
0.25 0.25	إذن : $S_n=3\times\dfrac{3^n-1}{3-1}$ و بالتالي : $\boxed{S_n=\dfrac{1}{2}\left(3^{n+1}-3\right)}$ هو المطلوب .
	حل التمرين الثالث: (4 ن)
0.25	1) الإجابة الصحيحة هي (ب)
	التعليل :
0.5	2) الإجابة الصحيحة هي (أ)
	التعليل :
	3) الإجابة الصحيحة هي (أ) .
	التعليل :
0.5	4) الإجابة الصحيحة هي (ب)
	التعليل :
	حل التمرين الرابع : (7 ن)
	1) حساب النهايات :
0.25	$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x\ln x\left(1-\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\ln x}{x}\right)=+\infty$.
	$\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}f(x)=-\infty$ ، لأن : $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}x\ln x=0$.
0.25	**التفسير البياني** : المستقيم $x=0$ مقارب لـ (C_f) .
	2) أ - الدالة f قابلة للإشتقاق على $]0;+\infty[$ و لدينا : $f'(x)=\ln x+1-\dfrac{\ln x}{x}=1+\dfrac{x\ln x-\ln x}{x}$
0.5	و منه : $\boxed{f'(x)=1+\dfrac{(x-1)\ln x}{x}}$ هو المطلوب .
0.25 0.25	
	ب - نلخص الإشارة في الجدول التالي :
0.5	

0.25

0.5

x	0		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$	
lnx		$-$	0	$+$	
$(x-1)lnx$		$+$	0	$+$	

0.25

- بما أنه من أجل كل $x>0$: $f'(x)>0$ فإن الدالة f متزايدة تماما على $]0;+\infty[$.
- جدول التغيرات للدالة f :

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

0.75

3) لدينا : $(T): y=f'(1)(x-1)+f(1)$ أي : $\begin{cases} f'(1)=1 \\ f(1)=0 \end{cases}$ و منه نجد : $\boxed{(T): y=x-1}$.

4) أ - لدينا : $g(1)=f(1)=0$ و منه إشارة $g(x)$ تكون كما يلي :

x	0		1		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

- إذن نستنتج أن وضعية (C_f) بالنسبة لـ (T) تكون حسب إشارة $g(x)$ أي أن :
- (C_f) يقع تحت (T) في المجال $]0,1[$.
- (C_f) يقع فوق (T) في المجال $]1;+\infty[$.
- (T) يخترق (C_f) في النقطة $A(1,0)$.

0.25

ب - نلاحظ أن المنحنى (C_f) يغير من وضعيته بالنسبة للمماس في النقطة A و منه هذه الأخيرة هي نقطة الإنعطاف للمنحنى (C_f) .

0.25

ج - الدالة g مستمرة و متزايدة تماما على $[3.3,3.4]$ و $\begin{cases} g(3.3)\approx 0,92 \\ g(3.4)\approx 1,01 \end{cases}$ أي أن :

0.5

$g(3.3)<1<g(3.4)$ و منه فإن المعادلة $g(x)=1$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]3.3,3.4[$.

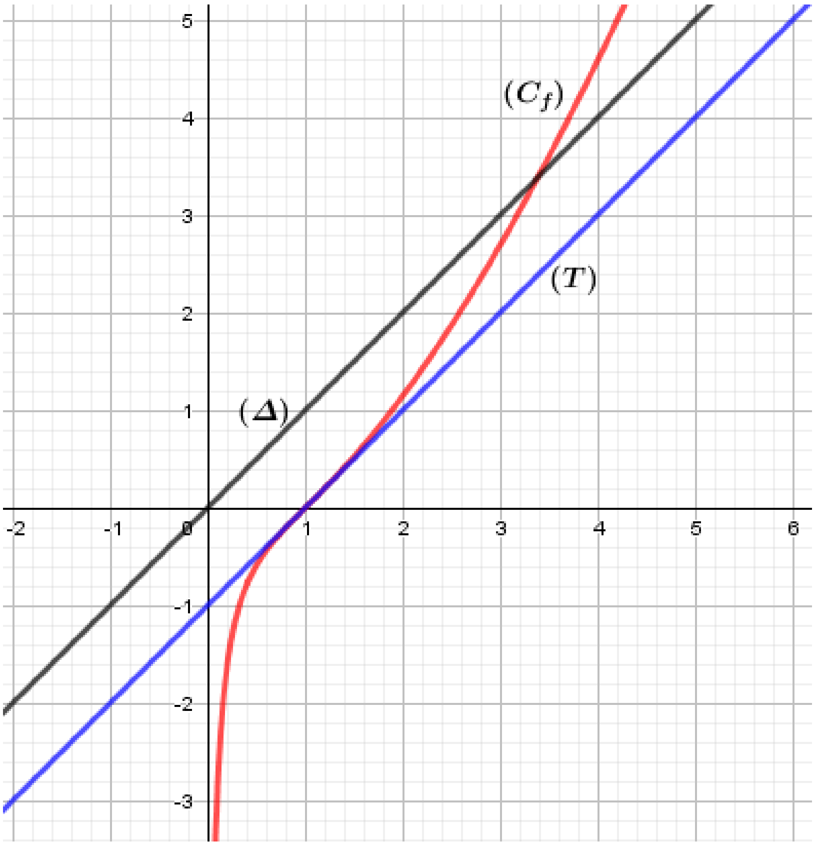
5) لدينا : $g(x)=f(x)-x+1$ أي : $g(x)-1=f(x)-x$ و منه فإن المعادلة $g(x)-1=0$ تكافئ $f(x)-x=0$ أي المعادلة $g(x)=1$ تكافئ $f(x)=x$ لكن حسب ما سبق نعلم أن المعادلة $g(x)=1$ تقبل حلا وحيدا α و منه فإن المعادلة $f(x)=x$ تقبل حلا وحيدا α

0.25

إذن فإن المنحنى (C_f) يقطع المستقيم (Δ) في النقطة ذات الفاصلة α .

0.25

6) الإنشاء و التمثيل :



7) لدينا : $h(x)=|\ln x|\left(x-\frac{\ln x}{2}\right)$.

و منه : $\begin{cases} h(x)=-f(x) & ; x\in]0,1] \\ h(x)=f(x) & ; x\in[1;+\infty[\end{cases}$

إذن : (C_h) ينطبق على (C_f) لما $x\in[1;+\infty[$ و (C_h) نظير (C_f) بالنسبة لمحور الفواصل لما $x\in]0,1]$.

8) أ - باستعمال التكامل بالتجزئة نضع : $\begin{cases} u(x)=\ln x \; ; \; u'(x)=\frac{1}{x} \\ v'(x)=x \; ; \; v(x)=\frac{1}{2}x^2 \end{cases}$ و منه :

$$\int_1^e x\ln x\,dx=\left[\frac{1}{2}x^2\ln x\right]_1^e-\int_1^e\left(\frac{1}{2}x\right)dx=\frac{1}{2}e^2-\left[\frac{1}{4}x^2\right]_1^e=\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{4}e^2+\frac{1}{4}$$

و منه نجد : $\boxed{\int_1^e x\ln x\,dx=\frac{e^2+1}{4}}$.

ب - باستعمال تعريف الدالة الأصلية نبين أن الدالة $x\mapsto x(\ln x)^2-2x\ln x+2x$ هي دالة أصلية للدالة $x\mapsto(\ln x)^2$ على $]0;+\infty[$.

لدينا : $A=\int_1^e f(x)dx=\int_1^e x\ln x\,dx-\frac{1}{2}\int_1^e(\ln x)^2\,dx=\frac{e^2+1}{4}-\frac{1}{2}\left[x(\ln x)^2-2x\ln x+2x\right]_1^e$

و منه : $\boxed{A=\frac{e^2-2e+5}{4}\,u.a}$.