الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات — امتحان بكالوريا التعليم الثانوي التجريبي

الشعبة: رياضيات — أكاديمية بهجة برج البحري — دورة: ماي 2025

اختبار في مادة: الرياضيات — إعداد الأستاذ عبد الحميد بوقطوف — المدة: 04 سا و 30 د

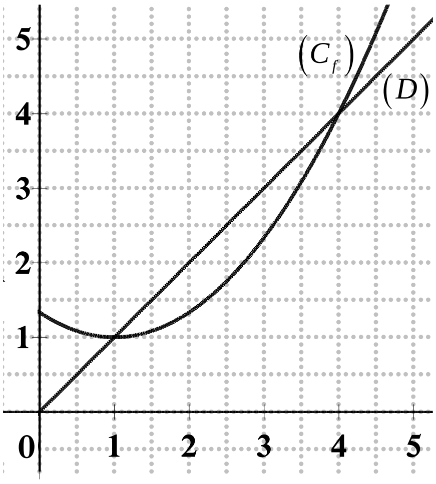
على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (05 نقاط)

f الدالة العددية المعرفة على $[0;+\infty[$ بـ: $f(x)=1+\frac{1}{3}(x-1)^2$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O,\vec{i};\vec{j})$ و (D) المستقيم ذو المعادلة $y=x$ كما هو موضح في الشكل المقابل.



(u_n) المتتالية العددية المعرفة بحدها الأول $u_0=3$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=f(u_n)$

1) أ- أعد رسم الشكل المقابل ثم مثل على حامل محور الفواصل الحدود u_0، u_1، u_2 و u_3 مبرزا خطوط الإنشاء.

ب- ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها.

2) أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $1\leq u_n\leq 4$

ب- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}-u_n=\frac{1}{3}(u_n-1)(u_n-4)$

جـ- استنتج أن المتتالية (u_n) متناقصة وأنها متقاربة.

3) (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n=\ln\left(\frac{u_n-1}{3}\right)$

أ- بين أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها 2 يطلب تعيين حدها الأول.

ب- عبر عن v_n بدلالة n

4) نضع من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، $w_n=\left(\frac{(u_0-1)(u_1-1)(u_2-1)\dots(u_{n-1}-1)}{3^n}\right)$

أ- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، $\frac{1}{2^n}\ln(w_n)=\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\ln\left(\frac{2}{3}\right)$

ب- استنتج $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2^n}\ln(w_n)$

التمرين الثاني: (03,5 نقاط)

يحتوي وعاء على 12 بطاقة منها 4 بطاقات تحمل العدد 1 وبطاقتان تحملان العدد e و 6 بطاقات تحمل العدد $\frac{1}{e}$

كل البطاقات متماثلة ولا نفرق بينها باللمس.

نسحب على التوالي بطاقتين من الوعاء مع إرجاع البطاقة المسحوبة إلى الوعاء في كل مرة.

ليكن x الرقم المسجل على البطاقة المسحوبة الأولى و y الرقم المسجل على البطاقة المسحوبة الثانية.

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$

نعتبر النقطة M ذات اللاحقة $z=\ln x+i\ln y$ ونعتبر الأحداث التالية:

A : " M نقطة من حامل محور الفواصل" ، B : " قيس الزاوية الموجهة $\left(\overrightarrow{OM};\vec{u}\right)$ يساوي $-\frac{\pi}{4}$ "

C : " M نقطة من الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها 1"

1) أحسب $p(A)$ و $p(B)$

2) بين أن $p(C)=\frac{4}{9}$

3) علما أن النقطة M من حامل محور الفواصل، ما احتمال أن تكون من الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها 1؟

4) X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب لكريتين المسافة OM

أ- برر أن قيم المتغير العشوائي X هي: 0، 1 و $\sqrt{2}$

ب- عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ثم احسب $p\left(e^{\sqrt{2}-X}>1\right)$

التمرين الثالث: (04 نقاط)

$\left(u_n\right)$ المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_n=\alpha\times2^n+\beta\times\left(-3\right)^n$ حيث α و β عددان صحيحان.

1) أ- باستعمال خوارزمية إقليدس، أوجد ثنائية $\left(\alpha_0;\beta_0\right)$ حلا للمعادلة $\left(E\right)\ldots\ 8\alpha-27\beta=-11$

ب- حل المعادلة $\left(E\right)$

2) أ- أوجد العدد الصحيح k حتى تكون الثنائية $\left(27k+110\ ;8k+33\right)$ حلا للمعادلة $\left(E'\right)\ldots\ 4\alpha+9\beta=17$

ب- استنتج قيمتي α و β بحيث يكون $u_2=17$ و $u_3=-11$

3) نضع $\alpha=2$ و $\beta=1$

أ- برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n\equiv3\times2^n\left[5\right]$

ب- أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n، بواقي القسمة الإقليدية للعدد u_n على 5

4) نضع من أجل كل عدد طبيعي n، $w_n=2^{n+1}+\left(-3\right)^n$ و $S_n=w_0+w_1+\ldots+w_n$

أ- برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $S_n\equiv2-4\times2^n\left[5\right]$

ب- استنتج باقي القسمة الإقليدية للعدد S_{2025} على 5

التمرين الرابع: (07,5 نقاط)

I. g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}-\left\{1\right\}$ بـ: $g\left(x\right)=\frac{x}{x-1}-\ln\left|x-1\right|$

1) أ- أحسب $\lim_{x\to-\infty}g\left(x\right)$ و $\lim_{x\to+\infty}g\left(x\right)$

ب- أحسب $\lim_{x\overset{<}{\to}1}g\left(x\right)$ و $\lim_{x\overset{>}{\to}1}g\left(x\right)$

2) أ- احسب $g'\left(x\right)$ الدالة المشتقة للدالة g

ب- أدرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

3) بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $4<\alpha<5$

4) استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}-\{1\}$

II. f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ بـ:

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{\ln|x-1|}{x} & ; x>0 \\ f(x)=\dfrac{-6e^x}{e^{2x}+3e^x+2} & ; x\leq 0 \end{cases}$$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i};\vec{j})$ (وحدة الطول $2cm$)

1) أ- أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثم فسر النتيجتين بيانيا.

ب- أحسب $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}1} f(x)$ و $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}1} f(x)$ ثم فسر النتيجتين بيانيا.

2) أ- بين أن: $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x}=-\dfrac{1}{6}$

ب- أحسب $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x}$ (إرشاد: $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0} \dfrac{\ln(1-x)+x}{x^2}=-\dfrac{1}{2}$)

جـ- فسر النتيجتين بيانيا.

3) بين أن: $f(\alpha)=\dfrac{1}{\alpha-1}$

4) أ- أحسب $f'(x)$

ب- أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

5) أحسب $f(-1)$ ، $f(0)$ ، $f(2)$ و $f(5)$ ثم أنشئ (C_f) (نأخذ $\alpha\simeq 4{,}5$)

6) أ- أوجد العددين الحقيقيين a و b بحيث من أجل $x\neq-2$ و $x\neq-1$ ، $\dfrac{-6x}{x^2+3x+2}=\dfrac{a}{x+2}+\dfrac{b}{x+1}$

ب- استنتج أن: $\dfrac{-6e^x}{e^{2x}+3e^x+2}=\dfrac{-12e^{-x}}{1+2e^{-x}}+\dfrac{6e^{-x}}{1+e^{-x}}$

جـ- أحسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) وحامل محور الفواصل والمستقيمين $x=-\ln 2$ و $x=0$

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

n عدد طبيعي أكبر أو يساوي 5

M و N عددان طبيعيان يكتبان على الترتيب $\overline{100n}$ و $\overline{n001}$ في نظام التعداد الذي أساسه $n+1$

1) أكتب كلا من M و N في النظام الذي أساسه n

2) أ– أكتب $M+N$ في النظام الذي أساسه $n+1$

ب– استنتج أن $M+N=k(n+1)$ حيث k عدد طبيعي يطلب تعيينه بدلالة n

جـ– أكتب k في النظام الذي أساسه n

3) برهن أنه يوجد عددان طبيعيان غير معدومين a و b يحققان: $\overline{ab}^{n}\times\overline{aaa}^{n}=k$

4) أوجد جميع الثنائيات $(\alpha;\beta)$ من الأعداد الطبيعية غير المعدومة التي تحقق: $d+m=\beta+9$

حيث: $d=PGCD(\alpha;\beta)$ و $m=PPCM(\alpha;\beta)$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

(I_n) المتتالية العددية المعرفة بـ: $I_0=\int_0^1 e^{-x}dx$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $I_n=\int_0^1 x^n e^{-x}dx$

1) أ– تحقق أن: $I_0=1-\dfrac{1}{e}$

ب– باستعمال المكاملة بالتجزئة، برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $I_{n+1}=(n+1)I_n-e^{-1}$

2) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $\dfrac{1}{(n+1)e}\le I_n\le\dfrac{1}{n+1}$ ثم استنتج نهاية المتتالية (I_n)

3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n=\dfrac{1}{n!}I_n$

أ– برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}-u_n=-\dfrac{e^{-1}}{(n+1)!}$

ب– استنتج أن: $e(1-u_n)=\dfrac{1}{0!}+\dfrac{1}{1!}+\dfrac{1}{2!}+\ldots+\dfrac{1}{n!}$

التمرين الثالث: (05 نقاط)

I. حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية : $(z+2-3i)(z^2-2z+10)=0$

II. المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$

نعتبر النقط A ، B و C لاحقاتها $z_A=-2+3i$ ، $z_B=1-3i$ و $z_C=\overline{z_B}$ على الترتيب.

1) أ– أكتب على الشكل الجبري ثم على الشكل الأسي العدد المركب $\dfrac{z_B-z_C}{z_A-z_C}$ ثم استنتج طبيعة المثلث ABC

ب– أوجد طبيعة التحويل النقطي T الذي يحول النقطة A إلى النقطة B يطلب تحديد عناصره المميزة.

جـ– بين أن النقط A ، B و C تنتمي إلى نفس الدائرة (Γ) يطلب تعيين مركزها Ω ونصف قطرها r

2) (Δ) مجموعة النقط $M(x;y)$ ذات اللاحقة $z=x+yi$ التي تحقق: $\left|\frac{z-z_A}{z-z_C}\right|=1$

أ– عين ثم أنشئ المجموعة (Δ)

بـ– عين ثم أنشئ المجموعة (Δ') صورة المجموعة (Δ) بالتحويل T

3) أ– عين z_D لاحقة النقطة D حتى تكون النقطة C مرجحا للجملة $\{(A;1),(B;1),(D;-1)\}$

بـ– بين أن النقطة D هي نظيرة النقطة C بالنسبة إلى النقطة Ω

جـ– عين بدقة طبيعة الرباعي $ADBC$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I. n عدد طبيعي غير معدوم.

f_n الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f_n(x)=x^n e^{1-x}$

(C_n) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i};\vec{j})$ (وحدة الطول $2cm$)

1) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$

2) بين أن جميع المنحنيات (C_n) تمرّ من نقطتين ثابتتين يطلب تعيين إحداثيتيهما.

3) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x، $f_n'(x)=(n-x)f_{n-1}(x)$

4) أ– أدرس حسب شفعية n اتجاه تغير الدالة f_n ثم شكل جدول تغيراتها.

بـ– أدرس الوضع النسبي للمنحنيين (C_n) و (C_{n+1})

جـ– أنشئ في نفس المعلم المنحنيات (C_1)، (C_2) و (C_3)

II. (I_n) المتتالية العددية المعرفة بـ: $I_0=\int_0^1 e^{1-x}\,dx$ ومن أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، $I_n=\int_0^1 f_n(x)\,dx$

1) أحسب I_0 و I_1

2) أ– بين أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، $I_{n+1}=-1+(n+1)I_n$

بـ– استنتج I_2

III. **1)** A_n مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنيين (C_n) و (C_{n+1}) والمستقيمين $x=0$ و $x=1$

عبر عن A_n بدلالة n و I_n

2) α عدد حقيقي أكبر تماما من 1

$S(\alpha)$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنيين (C_1) و (C_2) والمستقيمين $x=0$ و $x=\alpha$

أ– برهن أن $S(\alpha)=24-4e-4(\alpha^2+\alpha+1)e^{1-\alpha}$

بـ– بين أن $[2A_1=S(\alpha)]$ تكافئ $[e^\alpha=\alpha^2+\alpha+1]$ ثم استنتج وجود وحدانية للعدد α

انتهى الموضوع الثاني

حل مقترح لامتحان البكالوريا التجريبي

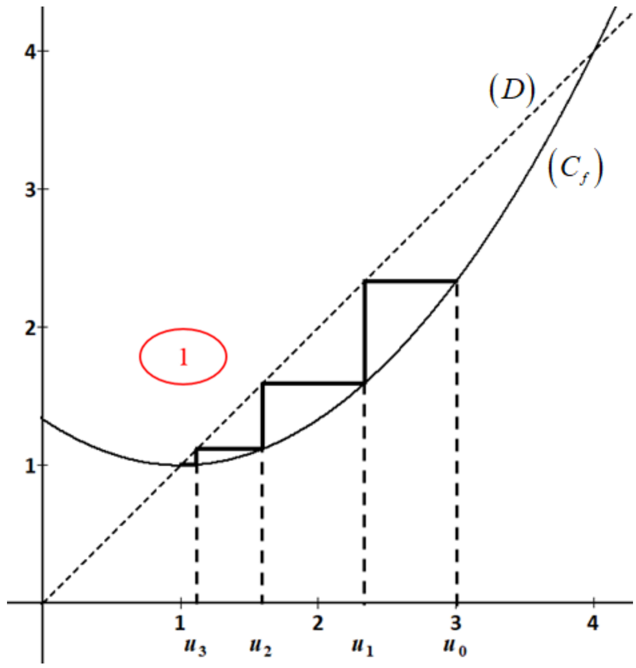
دورة ماي 2025

شعبة الرياضيات

الموضوع الأول

التمرين الأول: (05 ن)

1) أ- تمثيل الحدود u_0، u_1، u_2 و u_3 على حامل محور الفواصل:



1) ب- تخمين اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها:

• نلاحظ أن $u_0>u_1>u_2>u_3$

وعليه: المتتالية (u_n) متناقصة. 0,25

• ونلاحظ أن حدود المتتالية (u_n) تتقارب نحو فاصلة نقطة تقاطع المنحنى (C_f) والمستقيم (D)

وعليه: المتتالية (u_n) متقاربة. 0,25

2) أ- البرهان بالتراجع أن $1\le u_n\le 4$ من أجل كل عدد طبيعي n:

لتكن $P(n)$ الخاصية: "$1\le u_n\le 4$"

من أجل $n=0$ لدينا: $u_0=3$ و $1\le 3\le 4$ أي $1\le u_0\le 4$

ومنه: $P(0)$ محققة. 0,25

ليكن $n\in\mathbb{N}$

نفرض أن الخاصية $P(n)$ صحيحة أي $1\le u_n\le 4$

ونبرهن صحة الخاصية $P(n+1)$ أي $1\le u_{n+1}\le 4$

لدينا: $1\le u_n\le 4$

والدالة المرفقة بالمتتالية (u_n) متزايدة تماما على المجال $[1;4]$

وعليه: $f(1)\le f(u_n)\le f(4)$ 0,25

ومنه: $1\le u_{n+1}\le 4$

لأن: $f(u_n)=u_{n+1}$، $f(1)=1$ و $f(4)=4$

إذن: الخاصية $P(n+1)$ صحيحة.

وبالتالي:

وحسب مبدأ الاستدلال بالتراجع، فإن $1\le u_n\le 4$ من أجل كل عدد طبيعي n 0,25

2) ب- تبيان أن $u_{n+1}-u_n=\frac{1}{3}(u_n-1)(u_n-4)$ من أجل كل عدد طبيعي n:

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n:

$$u_{n+1}-u_n=f(u_n)-u_n$$

$$u_{n+1}-u_n=1+\frac{1}{3}(u_n-1)^2-u_n$$

$$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{3}(u_n-1)^2-(u_n-1)$$

$$u_{n+1}-u_n=(u_n-1)\left[\frac{1}{3}(u_n-1)-1\right]$$

$$u_{n+1}-u_n=(u_n-1)\left(\frac{1}{3}u_n-\frac{1}{3}-1\right)$$

$$u_{n+1}-u_n=(u_n-1)\left(\frac{1}{3}u_n-\frac{4}{3}\right)$$

$$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{3}(u_n-1)(u_n-4)$$ 0,50

2) ج- استنتاج أن المتتالية (u_n) متناقصة وأنها متقاربة:

• لدينا من أجل كل عدد طبيعي n: $1\le u_n\le 4$

أي: $u_n-1\ge 0$ و $u_n-4\le 0$

فيكون: $\frac{1}{3}(u_n-1)(u_n-4)\le 0$ أي: $u_{n+1}-u_n\le 0$

ومنه: نستنتج أن المتتالية (u_n) متناقصة. 0,25

• ولدينا: المتتالية (u_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل بالعدد 1

ومنه: نستنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة نحو نهاية ℓ 0,25

3) أ- تبيان أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها 2 يطلب تعيين حدها الأول:

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n ومن أجل $u_n\neq 1$:

$$v_{n+1}=\ln\left(\frac{u_{n+1}-1}{3}\right)$$

$$v_{n+1}=\ln\left(\frac{f(u_n)-1}{3}\right)$$

$$v_{n+1}=\ln\left(\frac{1+\frac{1}{3}(u_n-1)^2-1}{3}\right)$$

$$v_{n+1}=\ln\left(\frac{\frac{1}{3}(u_n-1)^2}{3}\right)$$

$$v_{n+1}=\ln\left(\frac{(u_n-1)^2}{9}\right)$$

$$v_{n+1}=\ln\left(\frac{u_n-1}{3}\right)^2$$

$$v_{n+1}=2\times\ln\left(\frac{u_n-1}{3}\right)$$

$$v_{n+1}=2\times v_n$$

ومنه: المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q=2$ 0,50

وحدها الأول v_0 حيث: $v_0=\ln\left(\frac{u_0-1}{3}\right)$

$v_0=\ln\left(\frac{2}{3}\right)$ 0,25

3) ب- التعبير عن v_n بدلالة n:

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n=v_0\times q^n$ ومنه: $v_n=2^n\times\ln\left(\frac{2}{3}\right)$ 0,25

4) أ- تبيان أن $\frac{1}{2^n}\ln(w_n)=\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\ln\left(\frac{2}{3}\right)$ من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n:

لدينا من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ومن أجل $u_n\neq1$:

$$w_n=\left(\frac{(u_0-1)(u_1-1)(u_2-1)\dots(u_{n-1}-1)}{3^n}\right)$$

ومنه:

$$\ln(w_n)=\ln\left(\frac{(u_0-1)(u_1-1)\dots(u_{n-1}-1)}{3^n}\right)$$

$$\ln(w_n)=\ln\left[(u_0-1)(u_1-1)\dots(u_{n-1}-1)\right]-\ln3^n$$

$$\ln(w_n)=\ln(u_0-1)+\ln(u_1-1)+\dots+\ln(u_{n-1}-1)-n\ln3$$

$$\ln(w_n)=\ln\left(\frac{u_0-1}{3}\times3\right)+\ln\left(\frac{u_1-1}{3}\times3\right)+\dots+\ln\left(\frac{u_{n-1}-1}{3}\times3\right)-n\ln3$$

$$\ln(w_n)=\ln\left(\frac{u_0-1}{3}\right)+\ln3+\ln\left(\frac{u_1-1}{3}\right)+\ln3+\dots+\ln\left(\frac{u_{n-1}-1}{3}\right)+\ln3-n\ln3$$

$$\ln(w_n)=\ln\left(\frac{u_0-1}{3}\right)+\ln\left(\frac{u_1-1}{3}\right)+\dots+\ln\left(\frac{u_{n-1}-1}{3}\right)+(\ln3+\ln3+\dots+\ln3)-n\ln3$$

$$\ln(w_n)=v_0+v_1+\dots+v_{n-1}+(\ln3+\ln3+\dots+\ln3)-n\ln3$$

$$\ln(w_n)=v_0+v_1+\dots+v_{n-1}+n\ln3-n\ln3$$

$$\ln(w_n)=v_0+v_1+\dots+v_{n-1}$$

$$\ln(w_n)=v_0\frac{q^n-1}{q-1}=\frac{2^n-1}{2-1}\times\ln\left(\frac{2}{3}\right)=(2^n-1)\times\ln\left(\frac{2}{3}\right)$$

ومنه:

$$\frac{1}{2^n}\ln(w_n)=\frac{1}{2^n}(2^n-1)\times\ln\left(\frac{2}{3}\right)$$

إذن:

$$\frac{1}{2^n}\ln(w_n)=\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\times\ln\left(\frac{2}{3}\right)$$ 0,50

4) ب- استنتاج $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{2^n}\ln(w_n)$:

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n: $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{2^n}=0$ ومنه:

$$\lim_{n\to+\infty}-\frac{1}{2^n}=0$$

$$\lim_{n\to+\infty}1-\frac{1}{2^n}=1$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\ln\left(\frac{2}{3}\right)=\ln\left(\frac{2}{3}\right)$$

ومنه:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2^n}\ln(w_n)=\ln\left(\frac{2}{3}\right)$$ 0,25

التمرين الثاني: (03,5 ن)

$1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad e \quad e$

$\frac{1}{e} \quad \frac{1}{e} \quad \frac{1}{e} \quad \frac{1}{e} \quad \frac{1}{e} \quad \frac{1}{e}$

نسحب على التوالي بطاقتين من الوعاء مع إرجاع البطاقة المسحوبة إلى الوعاء في كل مرة.

فيكون عدد الحالات الممكنة لهذا السحب: $12^2=144$

نسجل في الجدول التالي جميع الحالات الممكنة للنقطة M ذات اللاحقة z

x	y	$z=(\ln x)+i(\ln y)$
1	1	$z=0$
1	e	$z=i$
1	$\frac{1}{e}$	$z=-i$
e	e	$z=1+i$
e	1	$z=1$
e	$\frac{1}{e}$	$z=1-i$
$\frac{1}{e}$	$\frac{1}{e}$	$z=-1-i$
$\frac{1}{e}$	1	$z=-1$
$\frac{1}{e}$	e	$z=-1+i$

1) حساب $p(A)$ و $p(B)$:

• A: " M نقطة من حامل محور الفواصل "

معناه: $z=0$ أو $z=1$ أو $z=-1$

ومنه: $p(A)=\frac{4^2+2^1\times4^1+6^1\times4^1}{12^2}$ نجد: $p(A)=\frac{1}{3}$ 0,50

• B: " قيس الزاوية الموجهة $(\overrightarrow{OM};\vec{u})$ يساوي $-\frac{\pi}{4}$ "

الحدث B يكافئ: " قيس الزاوية الموجهة $(\vec{u};\overrightarrow{OM})$ يساوي $\frac{\pi}{4}$ "

معناه: $z=1+i$

ومنه: $p(B)=\frac{2^2}{12^2}$ نجد: $p(B)=\frac{1}{36}$ 0,50

2) تبيان أن $p(C)=\frac{4}{9}$:

• C: " M نقطة من الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها 1 "

معناه: $z=i$ أو $z=-i$ أو $z=1$ أو $z=-1$

ومنه: $p(C)=\frac{4^1\times2^1+4^1\times6^1+2^1\times4^1+6^1\times4^1}{12^2}$

نجد: $p(C)=\frac{4}{9}$ 0,50

3) حساب احتمال أن تكون النقطة M من الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها 1 علما أنها من حامل محور الفواصل:

معناه: حساب $p_A(C)$

ومنه: $p_A(C)=\dfrac{p(A\cap C)}{p(A)}=\dfrac{\dfrac{2^1\times4^1+6^1\times4^1}{12^2}}{\dfrac{1}{3}}$

نجد: $p_A(C)=\dfrac{2}{3}$ 0,50

4) أ- تبرير أن قيم المتغير العشوائي X هي 0، 1 و $\sqrt{2}$:

نستعين بالجدول التالي:

x	y	$z=(\ln x)+i(\ln y)$	$X=OM=\lvert z\rvert$
1	1	0	0
1	e	i	1
1	$\frac{1}{e}$	$-i$	1
e	e	$1+i$	$\sqrt{2}$
e	1	1	1
e	$\frac{1}{e}$	$1-i$	$\sqrt{2}$
$\frac{1}{e}$	$\frac{1}{e}$	$-1-i$	$\sqrt{2}$
$\frac{1}{e}$	1	-1	1
$\frac{1}{e}$	e	$-1+i$	$\sqrt{2}$

0,25

ومنه: $X=\{0;1;\sqrt{2}\}$

4) ب- قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X وحساب $p\left(e^{\sqrt{2}-X}>1\right)$:

$p(X=0)=\dfrac{4^2}{12^2}=\dfrac{1}{9}$

$p(X=1)=p(C)=\dfrac{4}{9}$

$p(X=\sqrt{2})=\dfrac{2^2+2^1\times6^1+6^2+6^1\times2^1}{12^2}=\dfrac{4}{9}$

ومنه:

x_i	0	1	$\sqrt{2}$
$p(X=x_i)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$

0,75

حساب $p\left(e^{\sqrt{2}-X}>1\right)$:

$p\left(e^{\sqrt{2}-X}>1\right)=p\left(\sqrt{2}-X>0\right)$

$p\left(e^{\sqrt{2}-X}>1\right)=p\left(X<\sqrt{2}\right)$

$p\left(e^{\sqrt{2}-X}>1\right)=p(X=0)+p(X=1)$

$p\left(e^{\sqrt{2}-X}>1\right)=\dfrac{5}{9}$ 0,50

التمرين الثالث: (04 ن)

1) أ- إيجاد ثنائية $(\alpha_0;\beta_0)$ حلا للمعادلة $8\alpha-27\beta=-11...(E)$:

باستعمال خوارزمية إقليدس لدينا:

$27=3\times8+3$

$8=2\times3+2$

$3=1\times2+1$

ومنه:

$3-2=1$

$3-(8-2\times3)=1$

$3-8+2\times3=1$

$3\times3-8=1$

$3(27-3\times8)-8=1$

$3\times27-9\times8-8=1$

$-10\times8+27\times3=1$

$8(-10)-27(-3)=1...(*)$

بضرب طرفي المساواة $(*)$ في العدد (-11) نجد:

$8(110)-27(33)=-11$

ومنه: $(\alpha_0;\beta_0)=(110;33)$ 0,50

1) ب- حل المعادلة (E):

لدينا: $8\alpha-27\beta=-11...(E)$

ولدينا أيضا: $8(110)-27(33)=-11...(E_0)$

بطرح (E_0) من (E) نجد: $8(\alpha-110)=27(\beta-33)...(E'')$

من (E'') لدينا: 27 يقسم $8(\alpha-110)$ و 27 أولي مع 8

ومنه: حسب مبرهنة غوص فإن 27 يقسم $\alpha-110$

أي $\alpha-110=27k$ ومنه: $\alpha=27k+110$ مع $k\in\mathbb{Z}$

بتعويض قيمة α في (E'') نجد $y=8k+33$ مع $k\in\mathbb{Z}$

ومنه: $S_{(\alpha;\beta)}=\{(27k+110;8k+33)/k\in\mathbb{Z}\}$ 0,50

2) أ- إيجاد العدد الصحيح k حتى تكون الثنائية $(27k+110;8k+33)$ حلا للمعادلة $4\alpha+9\beta=17...(E')$:

الثنائية $(27k+110;8k+33)$ حل للمعادلة (E') معناه:

$4(27k+110)+9(8k+33)=17$

$108k+440+72k+297=17$

$180k=-720$

$k=-\dfrac{720}{180}$

$k=-4$ 0,25

2) ب- استنتاج قيمتي α و β بحيث يكون $u_2=17$ و $u_3=-11$:

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n=\alpha\times2^n+\beta\times(-3)^n$

من أجل $n=2$ لدينا: $u_2=4\alpha+9\beta=17...(E')$

من أجل $n=3$ لدينا: $u_3=8\alpha-27\beta=-11...(E)$

من 1) ب- و 2) أ- نستنتج أن المعادلتين (E) و (E') نفس الحلول من أجل $k=-4$

ومنه: $\alpha=-27\times4+110$ و $\beta=-8\times4+33$

نجد: $\alpha=2$ و $\beta=1$ 0,50

3) أ- البرهان أن $u_n\equiv 3\times 2^n[5]$ من أجل كل عدد طبيعي n:

من أجل $\alpha=2$ و $\beta=1$ لدينا: $u_n=2\times 2^n+(-3)^n$

ومنه:

$$u_n\equiv 2\times 2^n+(-3)^n[5]\quad(-3\equiv 2[5])$$
$$u_n\equiv 2\times 2^n+2^n[5]$$
$$u_n\equiv 3\times 2^n[5]$$ 0,50

3) ب- دراسة بواقي القسمة الإقليدية للعدد u_n على 5 حسب قيم n:

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n:

$n=$	$4p$	$4p+1$	$4p+2$	$4p+3$	$p\in\mathbb{N}$
$2^n\equiv$	1	2	4	3	$[5]$
$u_n\equiv$	3	1	2	4	$[5]$

1

حيث: $u_n\equiv 3\times 2^n[5]$

4) أ- البرهان أن $S_n\equiv 2-4\times 2^n[5]$ من أجل كل عدد طبيعي n:

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n: $w_n=2^{n+1}+(-3)^n$

ولدينا من أجل كل عدد طبيعي n: $S_n=w_0+w_1+...+w_n$

ومنه:

$$S_n=\left(2^1+(-3)^0\right)+\left(2^2+(-3)^1\right)+...+\left(2^{n+1}+(-3)^n\right)$$
$$S_n=\left(2^1+2^2+...+2^{n+1}\right)+\left((-3)^0+(-3)^1+...+(-3)^n\right)$$
$$S_n=2\times\frac{2^{n+1}-1}{2-1}+1\times\frac{(-3)^{n+1}-1}{-3-1}$$
$$S_n=2\left(2^{n+1}-1\right)-\frac{1}{4}\left((-3)^{n+1}-1\right)$$
$$4S_n=8\left(2^{n+1}-1\right)-\left((-3)^{n+1}-1\right)$$
$$4S_n=8\times 2^{n+1}-8-(-3)^{n+1}+1$$
$$4S_n=16\times 2^n+3(-3)^n-7$$

ومنه:

$$\begin{cases}4S_n\equiv 16\times 2^n+3(-3)^n-7[5]\\ 4\equiv -1[5]\,;\,16\equiv 1[5]\,;\,-3\equiv 2[5]\,;\,7\equiv 2[5]\end{cases}$$
$$-S_n\equiv 2^n+3\times 2^n-2[5]$$
$$-S_n\equiv 4\times 2^n-2[5]$$
$$S_n\equiv 2-4\times 2^n[5]$$ 0,50

4) ب- استنتاج باقي القسمة الإقليدية للعدد S_{2025} على 5:

$$\begin{cases}S_{2025}\equiv 2-4\times 2^{2025}[5]\\ 2^{2025}\equiv 2[5]\ ;\ (2025=4\times 506+1)\end{cases}$$
$$S_{2025}\equiv 2-4\times 2[5]$$
$$S_{2025}\equiv -6[5]\ ;\ (-6\equiv 4[5])$$
$$S_{2025}\equiv 4[5]$$

ومنه: باقي القسمة الإقليدية للعدد S_{2025} على 5 هو 4 0,25

التمرين الرابع: (07,5 ن)

I. g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ بـ: $g(x)=\frac{x}{x-1}-\ln|x-1|$

1) أ- حساب $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$:

$$\lim_{x\to-\infty}g(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{x-1}-\ln(1-x)\right)$$
$$=\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t-1}{t}-\ln t\right)$$
0,25 $$=-\infty$$

لأن: $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{t-1}{t}=1$ و $\lim\limits_{t\to+\infty}(-\ln t)=-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x-1}-\ln(x-1)\right)$$
$$=\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t+1}{t}-\ln t\right)$$
0,25 $$=-\infty$$

لأن: $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{t+1}{t}=1$ و $\lim\limits_{t\to+\infty}(-\ln t)=-\infty$

1) ب- حساب $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}1}g(x)$ و $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}1}g(x)$:

$$\lim_{x\overset{<}{\to}1}g(x)=\lim_{x\overset{<}{\to}1}\left(\frac{x}{x-1}-\ln(1-x)\right)$$
$$=\lim_{t\overset{>}{\to}0}\left(\frac{t-1}{t}-\ln t\right)$$
$$=\lim_{t\overset{>}{\to}0}\left[\frac{1}{t}(t-1-t\ln t)\right]$$
0,25 $$=-\infty$$

لأن: $\lim\limits_{t\overset{>}{\to}0}t\ln t=0$ و $\lim\limits_{t\overset{>}{\to}0}(t-1)=-1$ و $\lim\limits_{t\overset{>}{\to}0}\frac{1}{t}=+\infty$

$$\lim_{x\overset{>}{\to}1}g(x)=\lim_{x\overset{>}{\to}1}\left(\frac{x}{x-1}-\ln(x-1)\right)$$
$$=\lim_{t\overset{>}{\to}0}\left(\frac{t+1}{t}-\ln t\right)$$
$$=\lim_{t\overset{>}{\to}0}\frac{1}{t}(t+1-t\ln t)$$
0,25 $$=+\infty$$

لأن: $\lim\limits_{t\overset{>}{\to}0}t\ln t=0$ و $\lim\limits_{t\overset{>}{\to}0}(t+1)=1$ و $\lim\limits_{t\overset{>}{\to}0}\frac{1}{t}=+\infty$

2) أ- حساب $g'(x)$ الدالة المشتقة للدالة g:

الدالة g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}-\{1\}$ ودالتها المشتقة:

$$g'(x)=\frac{x-1-x}{(x-1)^2}-\frac{1}{x-1}$$
$$g'(x)=\frac{-1}{(x-1)^2}-\frac{1}{x-1}$$
$$g'(x)=\frac{-1-x+1}{(x-1)^2}$$
$$g'(x)=\frac{-x}{(x-1)^2}$$ 0,25

2) ب- دراسة اتجاه تغير الدالة g وتشكيل جدول تغيراتها:

إشارة $g'(x)$ على $\mathbb{R}-\{1\}$ من إشارة $-x$ كما يلي:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$-x$		$+$	0	$-$		$-$	
$g'(x)$		$+$	0	$-$	$\|$	$-$	

ومنه:

- الدالة g متزايدة تماما على المجال $]-\infty;0]$ 0,25
- الدالة g متناقصة تماما على كل من المجالين $[0;1[$ و $]1;+\infty[$

جدول تغيراتها كالتالي:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	$\|$	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty \;\|\; +\infty$	$\searrow$	$-\infty$

0,25

3) تبيان أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $4<\alpha<5$:

الدالة g مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $[4;5]$ 0,50

ولدينا: $g(4)\simeq +0,235$ و $g(5)\simeq -0,136$ أي: $g(4)\times g(5)<0$

ومنه: وحسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $4<\alpha<5$ يحقق $g(\alpha)=0$

4) استنتاج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}-\{1\}$:

من جدول تغيرات الدالة g ومن السؤال **3)** نستنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}-\{1\}$ كما يلي:

x	$-\infty$		0		1		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$-$	$\|$	$+$	0	$-$	

0,25

II. f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ بـ :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{\ln|x-1|}{x} & ; x>0 \\ f(x)=\dfrac{-6e^x}{e^{2x}+3e^x+2} & ; x\le 0 \end{cases}$$

1) أ- حساب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثم تفسير النتيجتين بيانيا:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{-6e^x}{e^{2x}+3e^x+2}=0$$ 0,25

لأن: $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x}=0$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x-1)}{x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x-1)}{x-1}\times\frac{x-1}{x}$$

$$=0$$ 0,25

لأن: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x-1)}{x}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-1}{x}=1$

المنحنى (C_f) الممثل للدالة f يقبل مستقيما مقاربا أفقيا هو حامل محور الفواصل و $y=0$ معادلة له. 0,25

1) ب- حساب $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}1} f(x)$ و $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}1} f(x)$ ثم تفسير النتيجتين بيانيا:

$$\lim_{x\overset{<}{\to}1} f(x)=\lim_{x\overset{<}{\to}1}\frac{\ln(1-x)}{x}$$

$$=\lim_{t\overset{>}{\to}0}\frac{\ln t}{1-t}$$

$$=-\infty$$ 0,25

لأن: $\lim\limits_{t\overset{>}{\to}0}\ln t=-\infty$ و $\lim\limits_{t\overset{>}{\to}0}(1-t)=1$

$$\lim_{x\overset{>}{\to}1} f(x)=\lim_{x\overset{>}{\to}1}\frac{\ln(x-1)}{x}$$

$$=\lim_{t\overset{>}{\to}0}\frac{\ln t}{t+1}$$

$$=-\infty$$ 0,25

لأن: $\lim\limits_{t\overset{>}{\to}0}\ln t=-\infty$ و $\lim\limits_{t\overset{>}{\to}0}(t+1)=1$

المنحنى (C_f) الممثل للدالة f يقبل مستقيما مقاربا عموديا و $x=1$ معادلة له. 0,25

2) أ- تبيان أن $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=-\dfrac{1}{6}$:

$$\lim_{x\overset{<}{\to}0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\overset{<}{\to}0}\frac{\dfrac{-6e^x}{e^{2x}+3e^x+2}+1}{x}$$

$$=\lim_{x\overset{<}{\to}0}\frac{-6e^x+e^{2x}+3e^x+2}{x\left(e^{2x}+3e^x+2\right)}$$

$$=\lim_{x\overset{<}{\to}0}\frac{e^{2x}-3e^x+2}{x\left(e^{2x}+3e^x+2\right)}$$

$$=\lim_{x\overset{<}{\to}0}\frac{\left(e^x-1\right)\left(e^x-2\right)}{x\left(e^{2x}+3e^x+2\right)}$$

$$=\lim_{x\overset{<}{\to}0}\frac{e^x-1}{x}\times\frac{e^x-2}{e^{2x}+3e^x+2}$$

$$=-\frac{1}{6}$$ 0,25

لأن: $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$ و $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}0}\dfrac{e^x-2}{e^{2x}+3e^x+2}=-\dfrac{1}{6}$

2) ب- حساب $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$:

$$\lim_{x\overset{>}{\to}0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\overset{>}{\to}0}\frac{\dfrac{\ln(1-x)}{x}+1}{x}$$

$$=\lim_{x\overset{>}{\to}0}\frac{\ln(1-x)+x}{x^2}$$

$$=-\frac{1}{2}$$ (حسب الإرشاد المعطى) 0,25

2) جـ- تفسير النتيجتين بيانيا:

لدينا: $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}\neq\lim\limits_{x\overset{<}{\to}0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$

الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند 0

ومنه: المنحنى (C_f) يقبل نصفي مماسين عند النقطة ذات الفاصلة 0 معامل توجيهيهما $-\frac{1}{6}$ و $-\frac{1}{2}$ 0,25

معادلتيهما: $(T_g): y=-\frac{1}{6}x-1$ و $(T_d): y=-\frac{1}{2}x-1$

3) تبيان أن $f(\alpha)=\frac{1}{\alpha-1}$:

لدينا من **I. 3)** ومن أجل $\alpha\in]4;5[$: $g(\alpha)=0$

أي: $\frac{\alpha}{\alpha-1}-\ln(\alpha-1)=0$ ومنه: $\ln(\alpha-1)=\frac{\alpha}{\alpha-1}$

ولدينا من أجل $\alpha\in]4;5[$: $f(\alpha)=\frac{\ln(\alpha-1)}{\alpha}$

ومنه:

$$f(\alpha)=\frac{\frac{\alpha}{\alpha-1}}{\alpha}=\frac{\alpha}{\alpha-1}\times\frac{1}{\alpha}$$

$$f(\alpha)=\frac{1}{\alpha-1}$$ 0,25

4) أ- حساب $f'(x)$:

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}-\{0;1\}$ ودالتها المشتقة:

• على المجال $]0;1[\cup]1;+\infty[$:

لدينا: $f(x)=\frac{\ln|x-1|}{x}$ ومنه:

$$f'(x)=\frac{\frac{x}{x-1}-\ln|x-1|}{x^2}$$

$$f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$$ 0,25

• على المجال $]-\infty;0[$:

لدينا: $f(x)=\frac{-6e^x}{e^{2x}+3e^x+2}$ ومنه:

$$f'(x)=\frac{-6e^x\left(e^{2x}+3e^x+2\right)+6e^x\left(2e^{2x}+3e^x\right)}{\left(e^{2x}+3e^x+2\right)^2}$$

$$f'(x)=\frac{6e^x\left(2e^{2x}+3e^x-e^{2x}-3e^x-2\right)}{\left(e^{2x}+3e^x+2\right)^2}$$

$$f'(x)=\frac{6e^x\left(e^{2x}-2\right)}{\left(e^{2x}+3e^x+2\right)^2}$$

$$f'(x)=\frac{6e^x\left(e^x-\sqrt{2}\right)\left(e^x+\sqrt{2}\right)}{\left(e^{2x}+3e^x+2\right)^2}$$ 0,25

ومنه:

$$\begin{cases} f'(x)=\frac{g(x)}{x^2} & ;\quad x]0;1[\cup]1;+\infty[\\ f'(x)=\frac{6e^x\left(e^x-\sqrt{2}\right)\left(e^x+\sqrt{2}\right)}{\left(e^{2x}+3e^x+2\right)^2} & ;\quad x]-\infty;0[\end{cases}$$

4) ب- دراسة اتجاه تغير الدالة f **ثم تشكيل جدول تغيراتها:**

• إشارة $f'(x)$ على المجال $]0;1[\cup]1;+\infty[$ من إشارة $g(x)$

من السؤال **I. 4)** لدينا:

$g'(x)<0$ على كل من المجالين $]0;1[$ و $]1;+\infty[$

$g'(x)>0$ على المجال $]\alpha;+\infty[$

• إشارة $f'(x)$ على المجال $]-\infty;0[$ من إشارة $e^x-\sqrt{2}$

أي: $f'(x)<0$ على المجال $]-\infty;0[$

لأن: $e^x-\sqrt{2}<0$ و $e^x+\sqrt{2}>0$ و $e^x>0$ و $\left(e^{2x}+3e^x+2\right)^2>0$

ومنه:

x	$-\infty$		0		1		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	||	$-$	||	$+$	0	$-$	

وعليه:

- الدالة f متناقصة تماما على كل من المجالات $]-\infty;0[$ ، $]0;1[$ و $[\alpha;+\infty[$

0,25

- الدالة f متزايدة تماما على المجال $]1;\alpha]$

يعطى جدول تغيراتها كالتالي:

x	$-\infty$		0		1		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\frac{-1}{6}$ || $\frac{-1}{2}$	$-$	||	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↘	-1	↘ $-\infty$	|| $-\infty$	↗	$\frac{1}{\alpha-1}$	↘	0

0,25

5) حساب $f(-1)$ ، $f(0)$ ، $f(2)$ و $f(5)$ **ثم إنشاء** (C_f) :

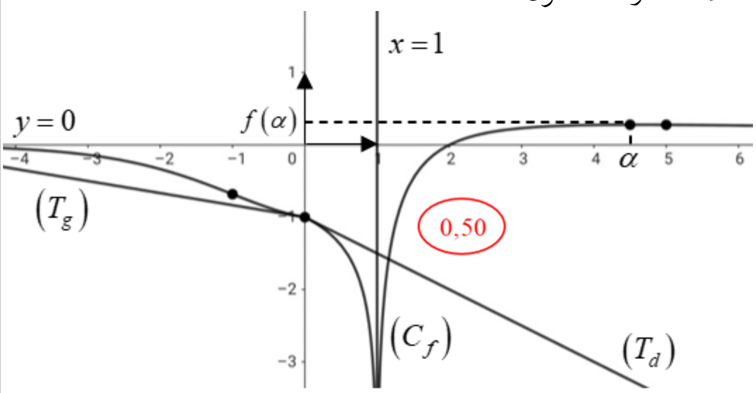
لدينا:

$$\begin{cases} x\in]0;1[\cup]1;+\infty[\ : \ f(x)=\frac{\ln|x-1|}{x} \Leftrightarrow \begin{cases} f(2)=0 \\ f(5)\simeq 0{,}3 \end{cases} \\ x\in]-\infty;0] \ : \ f(x)=\frac{-6e^x}{e^{2x}+3e^x+2} \Leftrightarrow \begin{cases} f(-1)\simeq -0{,}7 \\ f(0)=-1 \end{cases} \end{cases}$$

0,25

إنشاء (C_f) :

ملاحظة: وحدة الطول $2cm$



6) إيجاد العددين الحقيقيين a **و** b :

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}-\{-2;-1\}$:

$$\frac{-6x}{x^2+3x+2}=\frac{a}{x+2}+\frac{b}{x+1}$$

$$\frac{-6x}{x^2+3x+2}=\frac{a(x+1)+b(x+2)}{(x+2)(x+1)}$$

$$\frac{-6x}{x^2+3x+2}=\frac{ax+a+bx+2b}{x^2+3x+2}$$

$$\frac{-6x}{x^2+3x+2}=\frac{(a+b)x+a+2b}{x^2+3x+2}$$

بالمطابقة نجد: $a+b=-6$ و $a+2b=0$

ومنه: $a=-12$ و $b=6$ 0,25

فيكون:

$$\frac{-6x}{x^2+3x+2}=-\frac{12}{x+2}+\frac{6}{x+1}$$

6) ب- استنتاج أن $\frac{-6e^x}{e^{2x}+3e^x+2}=\frac{-12e^{-x}}{1+2e^{-x}}+\frac{6e^{-x}}{1+e^{-x}}$:

من **6)** أ- نستنتج أن:

$$\frac{-6e^x}{e^{2x}+3e^x+2}=-\frac{12}{e^x+2}+\frac{6}{e^x+1}$$

ومنه:

$$\frac{-6e^x}{e^{2x}+3e^x+2}=-\frac{12e^{-x}}{e^{-x}(e^x+2)}+\frac{6e^{-x}}{e^{-x}(e^x+1)}$$

$$\frac{-6e^x}{e^{2x}+3e^x+2}=-\frac{12e^{-x}}{1+2e^{-x}}+\frac{6e^{-x}}{1+e^{-x}}$$ 0,25

6) جـ- حساب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) وحامل محور الفواصل والمستقيمين $x=-\ln 2$ و $x=0$:

لتكن $\mathcal{A}$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) وحامل محور الفواصل والمستقيمين $x=-\ln 2$ و $x=0$

ملاحظة: (C_f) يقع أسفل حامل محور الفواصل على $[-\ln 2;0]$

ومنه:

$$\mathcal{A}=2\times 2\int_{-\ln 2}^{0}-f(x)\,dx$$

$$=4\int_{-\ln 2}^{0}\frac{6e^x}{e^{2x}+3e^x+2}dx$$

$$=4\int_{-\ln 2}^{0}\left(\frac{12e^{-x}}{1+2e^{-x}}-\frac{6e^{-x}}{1+e^{-x}}\right)dx$$

$$=4\int_{-\ln 2}^{0}\frac{12e^{-x}}{1+2e^{-x}}dx-4\int_{-\ln 2}^{0}\frac{6e^{-x}}{1+e^{-x}}dx$$

$$=-24\int_{-\ln 2}^{0}\frac{-2e^{-x}}{1+2e^{-x}}dx+24\int_{-\ln 2}^{0}\frac{-e^{-x}}{1+e^{-x}}dx$$

$$=-24\left[\ln\left(1+2e^{-x}\right)\right]_{-\ln 2}^{0}+24\left[\ln\left(1+e^{-x}\right)\right]_{-\ln 2}^{0}$$

$$=-24(\ln 3-\ln 5)+24(\ln 2-\ln 3)$$

$$=-24\ln 3+24\ln 5+24\ln 2-24\ln 3$$

$$=24(\ln 5+\ln 2-2\ln 3)$$

$$=24(\ln 10-\ln 9)$$

$$\mathcal{A}=24\ln\frac{10}{9}\ cm^2$$ 0,25

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04,5 ن)

1) كتابة كلا من M و N في النظام الذي أساسه n:

لدينا من أجل كل عدد طبيعي $n\geq 5$:

$$M=\overline{100n}^{\,n+1}$$

$$M=n\times(n+1)^0+0\times(n+1)^1+0\times(n+1)^2+1\times(n+1)^3$$

$$M=n+0+0+n^3+3n^2+3n+1$$

$$M=1+4n+3n^2+n^3$$

$$M=1\times n^0+4\times n^1+3\times n^2+1\times n^3$$

$$M=\overline{1341}^{\,n}$$ 0,50

ولدينا من أجل كل عدد طبيعي $n\geq 5$:

$$N=\overline{n001}^{\,n+1}$$

$$N=1\times(n+1)^0+0\times(n+1)^1+0\times(n+1)^2+n\times(n+1)^3$$

$$N=1+0+0+n\left(n^3+3n^2+3n+1\right)$$

$$N=1+n^4+3n^3+3n^2+n$$

$$N=1\times n^0+1\times n^1+3\times n^2+3\times n^3+1\times n^4$$

$$N=\overline{13311}^{\,n}$$ 0,50

2) أ- كتابة $M+N$ في النظام الذي أساسه $n+1$:

لدينا من أجل كل عدد طبيعي $n\geq 5$:

$$M+N=\overline{100n}^{\,n+1}+\overline{n001}^{\,n+1}$$

$$M+N=n\times(n+1)^0+0\times(n+1)^1+0\times(n+1)^2+1\times(n+1)^3$$
$$+1\times(n+1)^0+0\times(n+1)^1+0\times(n+1)^2+n\times(n+1)^3$$

$$M+N=(n+1)(n+1)^0+0\times(n+1)^1+0\times(n+1)^2$$
$$+(n+1)(n+1)^3$$

$$M+N=(n+1)+0+0+(n+1)^4$$

$$M+N=0\times(n+1)^0+1\times(n+1)^1+0\times(n+1)^2+0\times(n+1)^3$$
$$+1\times(n+1)^4$$

$$M+N=\overline{10010}^{\,n+1}$$ 0,50

2) ب- استنتاج أن $M+N=k(n+1)$ حيث k عدد طبيعي يطلب تعيينه بدلالة n:

لدينا من **2)** أ- ومن أجل كل عدد طبيعي $n\geq 5$:

$$M+N=\overline{10010}^{\,n+1}$$

$$M+N=1\times(n+1)^1+1\times(n+1)^4$$

$$M+N=(n+1)^1+(n+1)^4$$

$$M+N=(n+1)\left[1+(n+1)^3\right]$$

$$M+N=(n+1)\left(1+n^3+3n^2+3n+1\right)$$

$$M+N=(n+1)\left(n^3+3n^2+3n+2\right)$$

$$M+N=k(n+1)$$ 0,50

حيث: $k=n^3+3n^2+3n+2$

2) جـ- كتابة k في النظام الذي أساسه n:

لدينا من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 5$:

$$k = n^3 + 3n^2 + 3n + 2$$
$$k = 2 + 3n + 3n^2 + n^3$$
$$k = 2 \times n^0 + 3 \times n^1 + 3 \times n^2 + 1 \times n^3$$
$$k = \overline{1332}^n$$ 0,50

3) البرهان أنه يوجد عددان طبيعيان غير معدومين a و b يحققان:

$$k = \overline{ab}^n \times \overline{aaa}^n$$

لدينا: $k = \overline{ab}^n \times \overline{aaa}^n$

تكافئ:

$$n^3 + 3n^2 + 3n + 2 = \left(b \times n^0 + a \times n^1\right)\left(a \times n^0 + a \times n^1 + a \times n^2\right)$$
$$n^3 + 3n^2 + 3n + 2 = \left(b + an\right)\left(a + an + an^2\right)$$
$$n^3 + 3n^2 + 3n + 2 = a\left(an + b\right)\left(n^2 + n + 1\right)$$
$$n^3 + 3n^2 + 3n + 2 = a\left(an^3 + an^2 + an + bn^2 + bn + b\right)$$
$$n^3 + 3n^2 + 3n + 2 = a\left(an^3 + \left(a+b\right)n^2 + \left(a+b\right)n + b\right)$$
$$n^3 + 3n^2 + 3n + 2 = a^2n^3 + a\left(a+b\right)n^2 + a\left(a+b\right)n + ab$$

بالمطابقة:

$$\begin{cases} a^2 = 1 \\ a\left(a+b\right) = 3 \\ ab = 2 \end{cases}$$

ومنه: $\begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}$ 0,50

4) إيجاد جميع الثنائيات $(\alpha;\beta)$ من الأعداد الطبيعية التي تحقق:

$$d + m = \beta + 9$$

لدينا: $d = PGCD(\alpha;\beta)$

ومنه: $\alpha = \alpha' \times d$ و $\beta = \beta' \times d$ حيث: α' و β' أوليان فيما بينهما.

ولدينا: $PPCM(\alpha;\beta) \times PGCD(\alpha;\beta) = \alpha \times \beta$

أي: $m \times d = \alpha \times \beta$

فينتج بالتعويض: $m \times d = \alpha' \times d \times \beta' \times d$

أي: $m = \alpha' \times \beta' \times d$

ولدينا: $d + m = \beta + 9$

ومنه:

$$d + \alpha' \times \beta' \times d = \beta' \times d + 9$$
$$d + \alpha' \times \beta' \times d - \beta' \times d = 9$$
$$d\left(1 + \alpha' \times \beta' - \beta'\right) = 9 \ldots (*)$$ 0,25
$$d \in D_9 = \{1;3;9\}$$

• $d = 1$

$(*)$ تكافئ:

$$1 + \alpha' \times \beta' - \beta' = 9$$
$$\alpha' \times \beta' - \beta' = 8$$
$$\beta'\left(\alpha' - 1\right) = 8$$

نلخص النتائج في الجدول التالي:

$\alpha'-1$	1	2	4	8
α'	2	3	5	9
β'	8	4	2	1
$PGCD(\alpha';\beta')$	4	1	1	1

ومنه:

$$(\alpha';\beta') = \{(3;4),(5;2),(9;1)\}$$

إذن:

$$(\alpha;\beta) = \{(3;4),(5;2),(9;1)\}$$ 0,75

• $d = 3$

$(*)$ تكافئ:

$$3\left(1 + \alpha' \times \beta' - \beta'\right) = 9$$
$$1 + \alpha' \times \beta' - \beta' = 3$$
$$\alpha' \times \beta' - \beta' = 2$$
$$\beta'\left(\alpha' - 1\right) = 2$$

نلخص النتائج في الجدول التالي:

$\alpha'-1$	1	2
α'	2	3
β'	2	1
$PGCD(\alpha';\beta')$	2	1

ومنه:

$$(\alpha';\beta') = \{(3;1)\}$$

إذن:

$$(\alpha;\beta) = \{(9;3)\}$$ 0,25

• $d = 9$

$(*)$ تكافئ:

$$9\left(1 + \alpha' \times \beta' - \beta'\right) = 9$$
$$1 + \alpha' \times \beta' - \beta' = 1$$
$$\alpha' \times \beta' - \beta' = 0$$
$$\beta'\left(\alpha' - 1\right) = 0$$

بما أن $\beta' \in \mathbb{N}^*$ فإن $\alpha' - 1 = 0$ أي: $\alpha' = 1$

ومنه:

$$(\alpha';\beta') = \{(1;\beta)\}$$

إذن:

$$(\alpha;\beta) = \{(9;9\beta)\}$$ 0,25

خلاصة:

الثنائيات $(\alpha;\beta)$ من الأعداد الطبيعية التي تحقق $d + m = \beta + 9$ هي:

$$(\alpha;\beta) = \left\{(3;4),(5;2),(9;1),(9;3),(9;9\beta) / \beta \in \mathbb{N}^*\right\}$$

التمرين الثاني: (03,5 ن)

1) أ- التحقق أن $I_0=1-\frac{1}{e}$:

$$I_0=\int_0^1 e^{-x}dx=\left[-e^{-x}\right]_0^1=-e^{-1}-(-1)=-e^{-1}+1=-\frac{1}{e}+1$$

$$I_0=1-\frac{1}{e}$$ 0,50

1) ب- البرهان أن $I_{n+1}=(n+1)I_n-e^{-1}$ من أجل كل عدد طبيعي n:

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n: $I_n=\int_0^1 x^ne^{-x}dx$

ومنه: $I_{n+1}=\int_0^1 x^{n+1}e^{-x}dx$

باستعمال المكاملة بالتجزئة، نضع: 0,50 $u=x^{n+1}$ و $v'=e^{-x}$

ومنه: $u'=(n+1)x^n$ و $v=-e^{-x}$

وعليه:

$$I_{n+1}=\left[-x^{n+1}e^{-x}\right]_0^1-\int_0^1-(n+1)x^ne^{-x}dx$$

$$I_{n+1}=\left[-e^{-1}-0\right]+(n+1)\int_0^1 x^ne^{-x}dx$$

$$I_{n+1}=-e^{-1}+(n+1)I_n$$

$$I_{n+1}=(n+1)I_n-e^{-1}$$ 0,50

2) البرهان أن $\frac{1}{(n+1)e}\le I_n\le\frac{1}{n+1}$ من أجل كل عدد طبيعي n:

لدينا $x\in[0;1]$ أي: $0\le x\le 1$ ومنه: $-1\le -x\le 0$

وأيضا: $e^{-1}\le e^{-x}\le 1$ ...(*)

لدينا من أجل $x\in[0;1]$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $0\le x^n\le 1$

ومنه (*) تكافئ:

$$e^{-1}x^n\le x^ne^{-x}\le x^n$$

$$\int_0^1 e^{-1}x^ndx\le\int_0^1 x^ne^{-x}dx\le\int_0^1 x^ndx$$

$$e^{-1}\left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right]_0^1\le I_n\le\left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right]_0^1$$

$$\frac{1}{e}\left[\frac{1}{n+1}-0\right]\le I_n\le\left[\frac{1}{n+1}-0\right]$$

$$\frac{1}{(n+1)e}\le I_n\le\frac{1}{n+1}$$ 0,50

استنتاج نهاية المتتالية (I_n):

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{(n+1)e}\le\lim_{n\to+\infty}I_n\le\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}$$

$$0\le\lim_{n\to+\infty}I_n\le 0$$

حسب مبرهنة النهاية بالحصر فإن:

$$\lim_{n\to+\infty}I_n=0$$ 0,50

3) أ- البرهان أن $u_{n+1}-u_n=\frac{e^{-1}}{(n+1)!}$ من أجل كل عدد طبيعي n:

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n=\frac{1}{n!}I_n$

ومنه:

$$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{(n+1)!}I_{n+1}-\frac{1}{n!}I_n$$

$$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{(n+1)!}\left[(n+1)I_n-e^{-1}\right]-\frac{1}{n!}I_n$$

$$u_{n+1}-u_n=\frac{(n+1)}{(n+1)!}I_n-\frac{e^{-1}}{(n+1)!}-\frac{1}{n!}I_n$$

$$u_{n+1}-u_n=\frac{(n+1)}{(n+1)n!}I_n-\frac{e^{-1}}{(n+1)!}-\frac{1}{n!}I_n$$

$$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{n!}I_n-\frac{e^{-1}}{(n+1)!}-\frac{1}{n!}I_n$$

$$u_{n+1}-u_n=-\frac{e^{-1}}{(n+1)!}$$ 0,50

3) ب- استنتاج أن $e(1-u_n)=\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+...+\frac{1}{n!}$:

من 3) أ- لدينا: $u_{n+1}-u_n=-\frac{e^{-1}}{(n+1)!}$

ومنه: $e(u_n-u_{n+1})=\frac{1}{(n+1)!}$

فيكون:

$$n=0:\ e(u_0-u_1)=\frac{1}{1!}$$

$$n=1:\ e(u_1-u_2)=\frac{1}{2!}$$

$$n=2:\ e(u_2-u_3)=\frac{1}{3!}$$

...

$$n-2:\ e(u_{n-2}-u_{n-1})=\frac{1}{(n-1)!}$$

$$n-1:\ e(u_{n-1}-u_n)=\frac{1}{n!}$$

بالجمع نجد:

$$e(u_0-u_1+u_1-u_2+...+u_{n-2}-u_{n-1}+u_{n-1}-u_n)=\frac{1}{1!}+\frac{1}{1!}+...+\frac{1}{(n-1)!}+\frac{1}{n!}$$

$$e(u_0-u_n)=\frac{1}{1!}+\frac{1}{1!}+...+\frac{1}{n!}$$

$$e(u_0-u_n)+\frac{1}{0!}=\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{1!}+...+\frac{1}{n!}$$

$$e(u_0-u_n)+1=\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{1!}+...+\frac{1}{n!}\quad ...(1)$$

حيث:

$$u_0=\frac{1}{0!}I_0=1\times\left(1-\frac{1}{e}\right)=1-\frac{1}{e}$$

بتعويض u_0 بـ $1-\frac{1}{e}$ في (1):

$$e\left(1-\frac{1}{e}-u_n\right)+1=\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{1!}+\dots+\frac{1}{n!}$$

$$-1+e\left(1-u_n\right)+1=\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{1!}+\dots+\frac{1}{n!}$$

$$e\left(1-u_n\right)=\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{1!}+\dots+\frac{1}{n!}$$ 0,50

التمرين الثالث: (04,5 ن)

I. حل في مجوعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية :

$$\left(z+2-3i\right)\left(z^2-2z+10\right)=0 \ \dots\ (E)$$

(E) تكافئ: $z+2-3i=0$ أو $z^2-2z+10=0$

- $z+2-3i=0$ معناه: $z_0=-2+3i$
- $z^2-2z+10=0$

نحسب المميز Δ فنجد: $\Delta=-36=\left(6i\right)^2$

ومنه: للمعادلة $z^2-2z+10=0$ حلان مترافقان z_1 و $z_2=\overline{z_1}$

هما: $z_1=1-3i$ و $z_2=1+3i$

فتكون حلول (E) المعادلة هي:

0,75 $S=\{z_0=-2+3i\ ;\ z_1=1-3i\ ;\ z_2=1+3i\}$

II. $z_A=-2+3i$ ، $z_B=1-3i$ و $z_C=\overline{z_B}=1+3i$

1) أ- كتابة العدد المركب $\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}$ على الشكل الجبري ثم الأسي:

لدينا: $$\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}=\frac{1-3i-1-3i}{-2+3i-1-3i}=\frac{-6i}{-3}=2i=2e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}=2i=2e^{i\frac{\pi}{2}}$$ 0,50

استنتاج طبيعة المثلث ABC :

لدينا: $\left|\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}\right|=2$ ومنه: $CB=2CA$

ولدينا: $\arg\left(\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}\right)=\frac{\pi}{2}$ ومنه: $\left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}\right)=\frac{\pi}{2}$

نستنتج أن المثلث ABC قائم في C 0,25

1) ب- إيجاد طبيعة التحويل النقطي T الذي يحول A إلى B يطلب تعيين عناصره المميزة:

لدينا من **II. 1)** أ- : $\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}=2i=2e^{i\frac{\pi}{2}}$

ومنه: $z_B-z_C=2i\left(z_A-z_C\right)$

بما أن $2i$ عدد مركب طويلته 2 تختلف عن 1 فإن التحويل النقطي T الذي يحول A إلى B هو تشابه مباشر 0,25

عناصره المميزة:

- مركزه النقطة الصامدة C ذات اللاحقة $z_C=1-3i$
- نسبته $k=|2i|=2$ 0,25
- زاويته $\theta=\arg\left(2i\right)=\frac{\pi}{2}$

1) جـ- تبيان أن النقط A ، B و C تنتمي إلى نفس الدائرة (Γ) يطلب تعيين مركزها Ω ونصف قطرها r:

بما أن المثلث ABC قائم في C (السؤال **II. 1)** أ-) فإن الدائرة المحيطة به تشمل رؤوسه A، B و C

ومنه: النقط A ، B و C تنتمي إلى نفس الدائرة (Γ) التي قطرها هو وتر للمثلث ABC القائم في C 0,25

فيكون:

- مركزها Ω منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$ ذات اللاحقتها z_Ω ونصف قطرها r حيث:

$$z_\Omega=\frac{z_A+z_B}{2}=\frac{-2+3i+1-3i}{2}=-\frac{1}{2}$$

$$r=\Omega A=\Omega B=\Omega C$$

$$r=\left|z_A-z_\Omega\right|=\left|z_B-z_\Omega\right|=\left|z_C-z_\Omega\right|$$ 0,25

$$r=\left|1+3i+\frac{1}{2}\right|=\left|\frac{3}{2}+3i\right|=\frac{3\sqrt{5}}{2}$$

2) أ- تعيين ثم انشاء المجموعة (Δ):

لدينا: $\left|\frac{z-z_A}{z-z_C}\right|=1$

تكافئ:

$$\frac{\left|z-z_A\right|}{\left|z-z_C\right|}=1$$

$$\left|z-z_A\right|=\left|z-z_C\right|$$

$$AM=CM$$

ومنه: المجموعة (Δ) هي المستقيم المحوري للقطعة المستقيمة $[AC]$ 0,25

ملاحظة: إنشاء المجموعة (Δ) في آخر التمرين.

2) ب- تعيين ثم إنشاء المجموعة (Δ') صورة المجموعة (Δ) بالتحويل T:

لدينا من **II. 1)** ب- أن (T) يحول A إلى B و C نقطة صامدة.

أي أن صورة القطعة $[AC]$ بالتحويل T هي $[BC]$

ومنه: المجموعة (Δ') هي المستقيم المحوري للقطعة المستقيمة $[BC]$ وهو حامل محور الفواصل. 0,25

ملاحظة: إنشاء المجموعة (Δ') في آخر التمرين.

3) أ- تعيين z_D لاحقة النقطة D حتى تكون النقطة C مرجحا للجملة $\{(A;1),(B;1),(D;-1)\}$:

النقطة C مرجح للجملة $\{(A;1),(B;1),(D;-1)\}$ معناه:

$$z_C=\frac{1\times z_A+1\times z_B-1\times z_D}{1+1-1}$$

ومنه:

$$z_C=\frac{1\times z_A+1\times z_B-1\times z_D}{1+1-1}$$

$$z_D=z_A+z_B-z_C$$

$$z_D=-2+3i+1-3i-1-3i$$

$$z_D=-2-3i$$ 0,25

3) ب- تبيان أن النقطة D هي نظيرة النقطة C بالنسبة إلى النقطة Ω:

معناه: نبين أن Ω هي منتصف القطعة $[CD]$

لدينا:

$$\frac{z_C+z_D}{2}=\frac{1+3i-2-3i}{2}=-\frac{1}{2}=z_\Omega$$ 0,25

ومنه: النقطة D هي نظيرة النقطة C بالنسبة إلى النقطة Ω

ملاحظة: يمكن أن نبرهن أيضا أن $\overrightarrow{C\Omega}=\overrightarrow{\Omega D}$

$$\begin{cases}\overrightarrow{C\Omega}=z_{\overrightarrow{C\Omega}}=z_\Omega-z_C=-\frac{1}{2}-1-3i=-\frac{3}{2}-3i\\ \overrightarrow{\Omega D}=z_{\overrightarrow{\Omega D}}=z_D-z_\Omega=-2-3i+\frac{1}{2}=-\frac{3}{2}-3i\end{cases}\Rightarrow\overrightarrow{C\Omega}=\overrightarrow{\Omega D}$$

3) جـ- تعيين بدقة طبيعة الرباعي $ADBC$

لدينا: Ω منصف $[AB]$ من **II. 1)** جـ-

ولدينا: Ω منتصف $[CD]$ من **II. 3)** بـ-

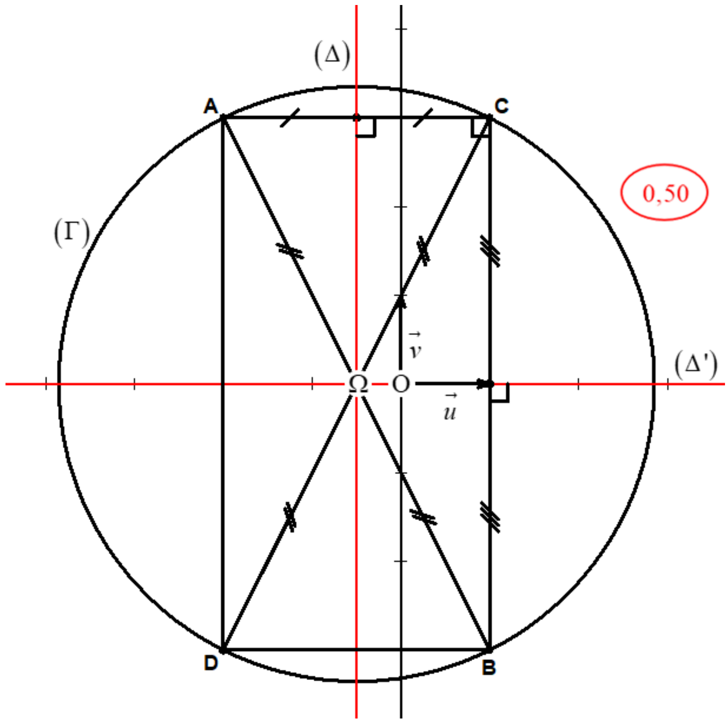
أي: $[AB]$ و $[CD]$ متناصفان.

ومنه: الرباعي $ADBC$ متوازي أضلاع. 0,25

ولدينا: المثلث ABC قائم في C و $CB=2CA$ من **II. 1)** أ-

ومنه: الرباعي $ADBC$ مستطيل. 0,25

الإنشاءات في الشكل المرافق.



التمرين الرابع: (07,5 ن)