بكالوريا تجريبي

المستوى: ثالثة علوم تجريبية
المدة: 03 سا و30د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين

الموضوع الأول

التمرين الأول 04.00 نقطة

في كل حالة حالة مما يلي اقترحت ثلاث إجابات، واحدة فقط منها صحيحة، حددها مع التبرير بدقة

[01.00] ❶ الشكل الأسي للعدد المركب

أ/ $\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{6}i}$ ب/ $\sqrt{2}e^{-\frac{5\pi}{6}i}$ ج/ $\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{3}i}$

[01.00] ❷ مجموعة حلول المعادلة $\frac{z-2}{z-1}=z$ في $\mathbb{C}$ هي:

أ/ $S=\{1-i\}$ ب/ $S=\emptyset$ ج/ $S=\{1-i;1+i\}$

[01.00] ❸ المجموعة (Γ) للنقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث: $z+1=k\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$، لما يتغير k في $\mathbb{R}_+$ هي:

أ/ دائرة مركزها $A\left(\frac{1}{2};+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ونصف قطرها $r=1$

ب/ نصف المستقيم الذي مبدؤه $B(-1;0)$ وميله $\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)$

ج/ نصف المستقيم الذي مبدؤه $A\left(\frac{1}{2};+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ وميله $\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)$

[01.00] ❹ العدد المركب $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)^{2025}$ يساوي

أ/ i ب/ -1 ج/ 0

التمرين الثاني 05.00 نقطة

α عدد حقيقي يختلف عن -2 . نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0=\alpha+2$، ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=\frac{(2+\alpha)u_n}{u_n+2-\alpha}$. ولتكن المتتالية العددية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n=\frac{u_n}{u_n-2\alpha}$

I) فيما يلي نفرض أن: $\alpha=1$

[00.75] ❶ تحقق أنّ: $u_{n+1}=3-\frac{3}{u_n+1}$، ثمّ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $2<u_n<4$

[00.50] ❷ بيّن أنّ المتتالية (u_n) متناقصة تماما، ثمّ استنتج أنها متقاربة

[00.75] ❸ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n=\frac{6}{3-3^{-n}}$ ، ثم استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

[00.50] ❹ اكتب v_n بدلالة n

[00.50] ❺ احسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n=\frac{1}{u_0}+\frac{1}{u_1}+\frac{1}{u_2}+\cdots\cdots+\frac{1}{u_n}$

II) فيما يلي نفرض أن: $-2 < \alpha < 0$

❶ بين أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q = \frac{2+\alpha}{2-\alpha}$ ، ثم أكتب v_n بدلالة n و α [01.00]

❷ بين أنّ $\frac{2+\alpha}{2-\alpha} < 1$ ، ثمّ استنتج اتجاه تغير المتتالية (v_n) واحسب نهايتها [01.00]

التمرين الثالث — 04.00 نقطة

تتكون مجموعة أشخاص من ثمانية رجال وإمرأتان من بينهم رجل واحد يحمل اسم "خليل" وإمرأة واحدة تحمل اسم"عهد"

نريد تكوين لجنة من ثلاث أعضاء لهم نفس المهام

نعتبر الأحداث التالية:

◄ A: "تكوين لجنة كلها رجال"

◄ B: "تكوين لجنة تضم إمرأتان"

◄ C: "تكوين لجنة تضم خليل"

◄ D: "تكوين لجنة تضم خليل أو عهد"

❶ احسب احتمال كل من الأحداث A، B، C و D [02.00]

❷ احسب $P(B \cap C)$ [00.50]

❸ ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية تكوين لجنة، عدد النساء فيها

أ/ عيّن القيم الممكنة التي يأخذها X، ثمّ عرف قانون احتماله [00.75]

ب/ احسب الأمل الرياضي $E(X)$ للمتغير العشوائي X، واستنتج قيمة $P(C_4^X = 4)$ [00.75]

التمرين الرابع — 07.00 نقطة

I) f الدالة المعرفة بـ: $f(0) = 1$، ومن أجل كل عدد حقيقي x موجب تماما: $f(x) = \frac{1}{2}x^2(3 - 2\ln x) + 1$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

❶ احسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ [00.25]

❷ أ/ بيّن أنه من أجل كل $x > 0$، $f'(x) = 2x(1 - \ln x)$ [00.50]

ب/ استنتج اتجاه تغير الدالة f، ثمّ شكل جدول تغيراتها [00.50]

❸ جد معادلة المماس (T) لـ (C_f) عند النقطة ω ذات الفاصلة 1 [00.50]

II) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}_+^*$ بـ: $g(x) = f(x) - 2x - \frac{1}{2}$

❶ أ/ احسب $g'(x)$ و $g''(x)$ [00.75]

ب/ بيّن أنّ الدالة g' تقبل قيمة حدية عظمى عند $x = 1$، ثمّ استنتج إشارة $g'(x)$ على $\mathbb{R}_+^*$ [01.00]

ج/ استنتج اتجاه تغير الدالة g [00.50]

د/ احسب $g(1)$، ثمّ استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}_+^*$ [00.50]

❷ استنتج الوضع النسبي لـ (C_f) مع (T)، ثمّ فسّر النتيجة هندسيا [00.50]

❸ احسب $f(6)$، ثمّ مثّل بيانيا كلا من (T) و (C_f) . نأخذ $f(4.7) \approx 0$ [00.75]

III) نضع من أجل كل $\alpha > 1$، $A(\alpha) = \int_1^{\alpha} f(t)dt$

❶ باستعمال المُكاملة بالتجزئة جِدالدالة الأصلية للدالة $x \longmapsto x^2 \ln x$ والتي تنعدم من أجل $x = 1$ [00.50]

❷ احسب $A(\alpha)$، ثمّ فسر النتيجة هندسيا [00.50]

❸ بيّن أنّ $A(\alpha) = \frac{2\alpha^3 + 12\alpha - 29}{18} u.a$ [00.25]

الموضوع الثاني

التمرين الأول — 04.00 نقطة

نعتبر صندوقين متماثلين U و V بحيث U يحتوي على خمس كرات حمراء تحمل الأرقام 0 ، 1 ، 1 ، 1 ، 2 وثلاث كرات خضراء تحمل الأرقام 0 ، 1 ، 1 و V يحتوي على ثلاث كرات حمراء تحمل الأرقام 1 ، 1 ، 2 وكرتان خضراوان تحملان الرقمان 0 ، 1 (كل الكرات متماثلة ولا نميز بينها باللمس).

I) نختار عشوائيا أحد الصندوقين، فإذا كان الصندوق U نسحب منه كرتان على التوالي دون إرجاع وإذا كان الصندوق V نسحب منه كرتان على التوالي بالإرجاع

[01.50] ❶ احسب احتمال الحوادث التالية:

◄ A: "سحب كرتان من نفس اللون"

◄ B: "سحب كرتان تحملان نفس الرقم"

◄ C: "سحب كرة حمراء على الأقل"

[00.50] ❷ هل الحادثتان A و B مستقلتان؟

[00.50] ❸ إذا علمت أن الكرتان المسحوبتان من لونين مختلفين، فما هو احتمال أن تكون من الصندوق U؟

[01.50] II) نأخذ كل الكرات الموجودة في الصندوق V ونضعها في الصندوق U. ثم نسحب عشوائيا وفي آن واحد كرتان من الصندوق U. وليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحبة مجموع الأرقام التي تحملها الكرتان المسحوبتان.

– عيّن قانون احتمال X ثم احسب أمله الرياضياتي $E(X)$

التمرين الثاني — 04.50 نقطة

I) نعتبر (u_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0 = 2$ ، ومن أجل كل $n \in \mathbb{N}$، $u_{n+1} = \dfrac{u_n^{\,2}}{2u_n - 1}$

[00.75] ❶ برهن أنه من أجل كل n طبيعي فإنّ: $u_n \geq 1$

[00.75] ❷ بيّن أنّ (u_n) متناقصة تماما، ثم استنتج أنها متقاربة

II) نضع من أجل كل n طبيعي: $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n}$ و $w_n = \ln(v_n)$

[00.75] ❶ بيّن أنّ (w_n) هندسية أساسها 2 واحسب w_0

[00.50] ❷ كتب بدلالة n عبارة w_n ، ثم استنتج بدلالة n عبارة v_n

[00.75] ❸ استنتج عبارة u_n بدلالة n، ثم احسب نهاية (u_n)

[00.50] ❹ أ/ اكتب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = w_0 + w_1 + \cdots + w_n$

[00.50] ب/ اكتب بدلالة n الجداء P_n حيث: $P_n = v_0 \times v_1 \times \ldots \times v_n$

التمرين الثالث — 04.50 نقطة

[00.50] I) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية: $z^2 = -2 - 2i\sqrt{3}$

II) نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ النقط A ، B و C التي لواحقها على الترتيب: $z_A = -1 + i\sqrt{3}$ ، $z_B = \overline{z_A}$ و $z_C = 2$

[00.25] ❶ أ/ علّم النقط A، B و C

[00.50] ب/ بيّن أنّ $\dfrac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ ، ثمّ استنتج طبيعة المثلث ABC

[00.50] ج/ عيّن المركز ونصف القطر للدائرة $(\mathcal{C})$ المحيطة بالمثلث ABC

❷ (Γ) هي مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث: $z = 2\left(-1 + e^{i\theta}\right)$ و $\theta \in \mathbb{R}$

أ/ بيّن أنّ (Γ) هي دائرة، يطلب تعيين z_D لاحقة مركزها D ونصف قطرها [00.50]

ب/ تحقق أنّ A و B من (Γ) [00.25]

❸ بيّن أنّ $(\mathcal{C})$ هي صورة (Γ) بالدوران R الذي مركزه A ويحول B إلى C (يُطلب تعيين زاويته) [00.50]

❹ S التشابه المباشر الذي مركزه O، نسبته $\sqrt{2}$ وزاويته $-\frac{\pi}{4}$

أ/ عيّن الكتابة المركبة للتشابه المباشر S [00.25]

ب/ بيّن أنّ لاحقة E صورة A بالتحويل S هي: $z_E = \left(\sqrt{3} - 1\right) + i\left(\sqrt{3} + 1\right)$ [00.50]

ج/ اكتب كل من z_A و z_E على الشكل الأسي، ثمّ استنتج القيمة المضبوطة لـ $\tan\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ [00.75]

التمرين الرابع — 07.00 نقطة

I) g الدالة العددية المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ $g(x) = 1 - xe - 2\ln x$

❶ ادرس تغيرات الدالة g ثمّ شكل جدول تغيراتها [01.00]

❷ أ/ بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل في المجال $]0; +\infty[$ حلا وحيدا α بحيث: $\alpha \in]0.66; 0.67[$ [00.25]

ب/ استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$ في المجال $]0; +\infty[$ [00.50]

II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{ex + \ln x}{x^2}$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$

❶ احسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x)$، وفسّر النتائج هندسيا [01.00]

❷ أ/ بيّن أنّه من أجل كل $x > 0$، $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$ [00.50]

ب/ استنتج اتجاه تغير الدالة f، ثمّ شكل جدول تغيراتها [00.50]

❸ بيّن أنّ $f(\alpha) = \frac{1 + e\alpha}{2\alpha^2}$، ثم أعطِ حصرا للعدد $f(\alpha)$ [00.75]

❹ احسب $f(e^{-1})$، ثمّ أنشئ (C_f) [01.00]

❺ نضع، من أجل كل عدد طبيعي n: $A_n = \int_{e^n}^{e^{n+1}} f(t)\,dt$ و $B_n = \int_{e^n}^{e^{n+1}} \frac{\ln t}{t^2}\,dt$

أ/ بيّن، باستعمال المكاملة بالتجزئة، أنّ $B_n = \frac{n+1}{e^n} - \frac{n+2}{e^{n+1}}$ [00.50]

ب/ أثبت أنّ $A_n = B_n + e$ [00.50]

ج/ احسب A_0، ثمّ فسّر النتيجة بيانيا [00.50]

﴿بالتوفيق والنجاح لجموع التلاميذ الشرفاء﴾

التمرين الأول — 04.00 نقطة

❶ الشكل الأسي لـ $z = -\sqrt{2}\left(sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\,cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$ هو ب/ $\sqrt{2}e^{-\frac{5\pi}{6}i}$

$$z = -\sqrt{2}\left(\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$$
$$= -\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right)\right)$$
$$= -\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$$
$$= e^{i\pi}\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{6}}$$
$$= \sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\pi\right)} = \sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{6}} = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{7\pi}{6}-2\pi\right)} = \sqrt{2}e^{-i\frac{5\pi}{6}}$$

❷ مجموعة حلول المعادلة $\frac{z-2}{z-1} = z$ في $\mathbb{C}$ هي: ج/ $S = \{1-i; 1+i\}$

لدينا: $\frac{z-2}{z-1} = z$

ومنه: $z - 2 = z(z-1)$

ومنه: $z^2 - 2z + 2 = 0$

لدينا: $\Delta = -4 = (2i)^2$

ومنه: $z = 1 + i$ أو $z = 1 - i$

ومنه: $S = \{1-i; 1+i\}$

❸ المجموعة (Γ) هي:

ب/ نصف المستقيم الذي مبدؤه $B(-1;0)$ وميله $tan\left(\frac{\pi}{3}\right)$

لدينا: $z+1 = k\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ معناه: $z-(-1) = ke^{i\frac{\pi}{3}}$

ومنه: $z - z_B = ke^{i\frac{\pi}{3}}$ حيث: $z_B = -1$

ومنه: المجموعة (Γ) هي نصف المستقيم الذي مبدؤه $B(-1;0)$

وميله $\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)$

❹ العدد المركب $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)^{2025}$ يساوي

أ/ i

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)^{2025} = \left(e^{-i\frac{\pi}{6}}\right)^{2025}$$
$$= e^{-i\frac{2025\pi}{6}} = e^{-i\frac{675\pi}{2}} = e^{-i\left(\frac{674\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)}$$
$$= e^{-i\left(337\pi+\frac{\pi}{2}\right)} = e^{-i\left(-\pi+\frac{\pi}{2}\right)} = e^{-i\left(-\frac{\pi}{2}\right)} = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$$

التمرين الثاني — 05.00 نقطة

(I

❶ التحقق أنّ $u_{n+1} = 3 - \frac{3}{u_n+1}$:

$$u_{n+1} = \frac{(1+2)\times u_n}{u_n + 2 - 1} = \frac{3u_n}{u_n+1} = \frac{3u_n+3-3}{u_n+1}$$
$$= \frac{3u_n+3}{u_n+1} - \frac{3}{u_n+1} = 3 - \frac{3}{u_n+1}$$

• برهان أنّ: $2 < u_n < 4$:

نضع: $P(n): 2 < u_n < 4$

• لدينا: $u_0 = 3$ ومنه: $2 < 3 < 4$ إذن: $P(0)$ محققة

• ليكن $n \in \mathbb{N}$:

نفرض صحة $P(n)$ ونثبت صحة $P(n+1)$

• لدينا:

$$2 < u_n < 4 \Rightarrow 3 < u_n + 1 < 5$$
$$\Rightarrow \frac{1}{5} < \frac{1}{u_n+1} < \frac{1}{3}$$
$$\Rightarrow -1 < -\frac{3}{u_n+1} < -\frac{3}{5}$$
$$\Rightarrow 2 < 3 - \frac{3}{u_n+1} < \frac{12}{5} < 4$$
$$\Rightarrow 2 < u_{n+1} < 4$$

إذن: $P(n+1)$ محققة

• حسب البرهان بالتراجع $P(n)$ محققة من أجل كل $n \in \mathbb{N}$

❷ تبيين أنّ (u_n) متناقصة تماما واستنتاج أنها متقاربة:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{3u_n}{u_n+1} - u_n = \frac{3u_n - (u_n)^2 - u_n}{u_n+1}$$
$$= \frac{u_n(2-u_n)}{u_n+1}$$

لدينا: $2 < u_n < 4$ ومنه: $\begin{cases} u_n > 0 \\ 2 - u_n < 0 \\ u_n + 1 > 0 \end{cases}$

ومنه: $u_{n+1} - u_n < 0$

إذن: (u_n) متناقصة تماما

وبما أنها محدودة من الأسفل بـ 2 فهي متقاربة

❸ برهان أن: $u_n = \frac{6}{3-3^{-n}}$

نضع: $Q(n): u_n = \frac{6}{3-3^{-n}}$

• لدينا: $\frac{6}{3-3^{-0}} = \frac{6}{3} = 3$

ولدينا: $u_0 = 3$ إذن: $Q(0)$ محققة

• ليكن $n \in \mathbb{N}$:

نفرض صحة $Q(n)$ ونثبت صحة $Q(n+1)$

أي نفرض صحة $u_n = \frac{6}{3-3^{-n}}$ ونثبت صحة $u_{n+1} = \frac{6}{3-3^{-n-1}}$

• لدينا:

$$u_{n+1} = \frac{3u_n}{u_n + 1} = \frac{3\dfrac{6}{3 - 3^{-n}}}{\dfrac{6}{3 - 3^{-n}} + 1} = \frac{18}{9 - 3^{-n}}$$

$$= \frac{18}{9 - 3^{-n}} \times \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}} = \frac{6}{3 - 3^{-n-1}}$$

إذن: $Q(n+1)$ محققة

- حسب البرهان بالتراجع $Q(n)$ محققة من أجل كل $n \in \mathbb{N}$

- استنتاج $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$:

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{6}{3 - 3^{-n}}\right) = 2$$

لأنّ: $\lim\limits_{n \to +\infty} (3^{-n}) = 0$

❹ كتابة v_n بدلالة n :

$$v_n = \frac{u_n}{u_n - 2} = \frac{\dfrac{6}{3 - 3^{-n}}}{\dfrac{6}{3 - 3^{-n}} - 2} = \frac{6}{6 - 6 + 2(3)^{-n}}$$

$$= \frac{6}{2(3)^{-n}} = \frac{3}{3^{-n}} = 3(3)^n = 3^{n+1}$$

❺ حساب بدلالة n المجموع S_n :

لدينا:

$$v_n = \frac{u_n}{u_n - 2} \Rightarrow v_n(u_n - 2) = u_n$$

$$\Rightarrow u_n v_n - 2v_n - u_n = 0$$

$$\Rightarrow u_n = \frac{2v_n}{v_n - 1}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{u_n} = \frac{v_n - 1}{2v_n} = \frac{v_n}{2v_n} - \frac{1}{2v_n}$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{v_n}\right)$$

ومنه:

$$S_n = \frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_1} + \cdots\cdots + \frac{1}{u_n}$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{v_0}\right) + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{v_1}\right) + \cdots + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{v_n}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left[1 - \frac{1}{v_0} + 1 - \frac{1}{v_1} + \cdots + 1 - \frac{1}{v_n}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[n + 1 - \frac{1}{v_0}\left(\frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[n + 1 - \frac{1}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[n + 1 + \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} - 1\right)\right]$$

(II

❶ تبيين أن (v_n) هندسية:

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{u_{n+1} - 2\alpha}$$

$$= \frac{\dfrac{(a+2)u_n}{u_n + 2 - a}}{\dfrac{(a+2)u_n}{u_n + 2 - a} - 2\alpha}$$

$$= \frac{(a+2)u_n}{(a+2)u_n - 2\alpha u_n - 4\alpha + 2\alpha^2}$$

$$= \frac{(a+2)u_n}{u_n(2-\alpha) - 2\alpha(2-\alpha)}$$

$$= \frac{(a+2)u_n}{(2-\alpha)(u_n - 2\alpha)}$$

$$= \left(\frac{2+\alpha}{2-\alpha}\right)\left(\frac{u_n}{u_n - 2\alpha}\right)$$

$$= \left(\frac{2+\alpha}{2-\alpha}\right) v_n$$

إذن (v_n) هندسية أساسها $q = \dfrac{2+\alpha}{2-\alpha}$

- كتابة عبارة v_n بدلالة n و α:

لدينا:

$$v_0 = \frac{u_0}{u_0 - 2\alpha} = \frac{2+\alpha}{2+\alpha-2\alpha} = \frac{2+\alpha}{2-\alpha}$$

ومنه:

$$v_n = \left(\frac{2+\alpha}{2-\alpha}\right)\left(\frac{2+\alpha}{2-\alpha}\right)^n = \boxed{\left(\frac{2+\alpha}{2-\alpha}\right)^{n+1}}$$

❷ تبيين أنّ $0 < \frac{2+a}{2-a} < 1$:

$$\begin{cases} 0 < 2 + \alpha < 2 \\ \dfrac{1}{4} < \dfrac{1}{2-\alpha} < \dfrac{1}{2} \end{cases}$$ ومنه: لدينا: $-2 < \alpha < 0$

بضرب المتراجحتين طرفا لطرف نجد: $0 < \dfrac{2+\alpha}{2-\alpha} < 1$

- استنتاج اتجاه تغير المتتالية (v_n)

لدينا: $\begin{cases} 0 < q < 1 \\ v_0 > 0 \end{cases}$ إذن: (v_n) متناقصة على $\mathbb{N}$

- حساب $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$:

$$\lim_{n \to +\infty} v_n = \lim_{n \to +\infty} \left[\left(\frac{2+\alpha}{2-\alpha}\right)^{n+1}\right] = 0$$

لانّ: $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{2+\alpha}{2-\alpha}\right) = 0$ كون $0 < \frac{2+a}{2-a} < 1$

التمرين الثالث 04.00 نقطة

❶ حساب احتمال كل من الأحداث A، B، C و D:

$$P(A) = \frac{C_8^3}{C_{10}^3} = \boxed{\frac{56}{120}}$$

$$P(B) = \frac{C_2^2 C_8^1}{C_{10}^3} = \boxed{\frac{8}{120}}$$

$$P(C) = \frac{C_1^1 C_9^2}{C_{10}^3} = \boxed{\frac{36}{120}}$$

$$P(D)=\frac{C_1^1C_8^2+C_1^1C_8^2}{C_{10}^3}=\boxed{\frac{56}{120}}$$

❷ حساب $P(B\cap C)$:

$$P(B\cap C)=\frac{C_1^1C_2^2}{C_{10}^3}=\boxed{\frac{1}{120}}$$

❸ أ/ تعريف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X:

لدينا: $X(\Omega)=\{0;1;2\}$ حيث:

$$P(X=0)=P(A)=\boxed{\frac{56}{120}}$$

$$P(X=1)=\frac{C_2^1C_8^2}{C_{10}^3}=\boxed{\frac{56}{120}}$$

$$P(X=2)=P(B)=\boxed{\frac{8}{120}}$$

x_i	0	1	2
$P(X=x_i)$	$\frac{56}{120}$	$\frac{56}{120}$	$\frac{8}{120}$

ب/ حساب التباين $E(X)$ للمتغير العشوائي X:

$$E(X)=\sum_{i=1}^{3}x_iP(X_i)=\frac{72}{12}=\frac{3}{5}$$

0

- استنتاج قيمة $P(C_4^X=4)$:

$$P(C_4^X=4)=P(X=0)=\boxed{\frac{56}{120}}$$

التمرين الرابع — 07.00 نقطة

I)

❶ حساب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ لأنّ: $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$

❷

أ/ تبيين أن $f'(x)=2x(1-\ln x)$، $x>0$:

لدينا الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$، ودالتها المشتقة هي:

$$f'(x)=\frac{1}{2}2x(3-2\ln x)-2\frac{1}{x}\frac{1}{2}x^2$$
$$=x(3-2\ln x)-x=2x(1-\ln x)$$

ب/ استنتاج اتجاه تغير f، وتشكيل جدول تغيراتها:

لدينا: $2x>0$ لما: $x\in]0;+\infty[$

ولدينا: $1-\ln x=0$ معناه: $x=e$، وعليه:

x	0	e	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$

إذن f متزايدة تماما على $]0;e]$ ومتناقصة تماما على $]e;+\infty[$

x	0	e	$+\infty$
$f(x)$		$\frac{1}{2}e^2-1$	
	1		$-\infty$

❸ إيجاد معادلة المماس (T) :

$$(T):y=f'(1)(x-1)+f(1)$$
$$=2(x-1)+\frac{3}{2}$$
$$=2x+\frac{1}{2}$$

II)

❶

أ/ حساب $g'(x)$ و $g''(x)$:

لدينا الدالة g قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$، ودالتها المشتقة هي:

$$g'(x)=f'(x)-2$$

لدينا الدالة g' قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$، ودالتها المشتقة هي:

$$g''(x)=f''(x)=-2\ln x$$

ب/ تبيين انّ g تقبل قيمة حدية عظمى عند $x=1$:

لدينا: $g''(x)=-2\ln x$

لدينا: $-\ln x=0$ معناه: $x=1$

إذن:

x	0	1	$+\infty$
$g''(x)$	$+$	0	$-$

لدينا: الدالة g'' تنعدم عند $x=1$ وتغير إشارتها

إذن: الدالة g' تبلغ قيمة حدية عند $x=1$

- استنتاج إشارة $g'(x)$ على $\mathbb{R}_+^*$:

لدينا: $g'(1)=f'(1)-2=0$

إذن: $g'(x)\le 0$

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$-$

ج/ استنتاج اتجاه تغير الدالة g:

بما أنّ: $g'(x)\le 0$ فإنّ: g متناقصة تماما على $]0;+\infty[$

د/ حساب $g(1)$، واستنتاج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}_+^*$:

لدينا : $g(1)=f(2)-2(1)-\frac{1}{2}=0$

x	0	1	$+\infty$
$g(x)$	$+$	0	$-$

❷ استنتاج الوضع النسبي لـ (C_f) مع (T)

x	0	1	$+\infty$
$f(x)-y_{(T)}$	$+$	0	$-$
الوضع النسبي	(C_f) فوق (T)	(C_f) يخترق (T) في $A\left(1;\frac{5}{2}\right)$	(C_f) تحت (T)

- التفسير الهندسي:

بما أنّ: (C_f) يخترق (T) في $A\left(1;\frac{5}{2}\right)$

فإنّ (C_f) يقبل نقطة إنعطاف عند A

❸ تبيين أنّ $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α :

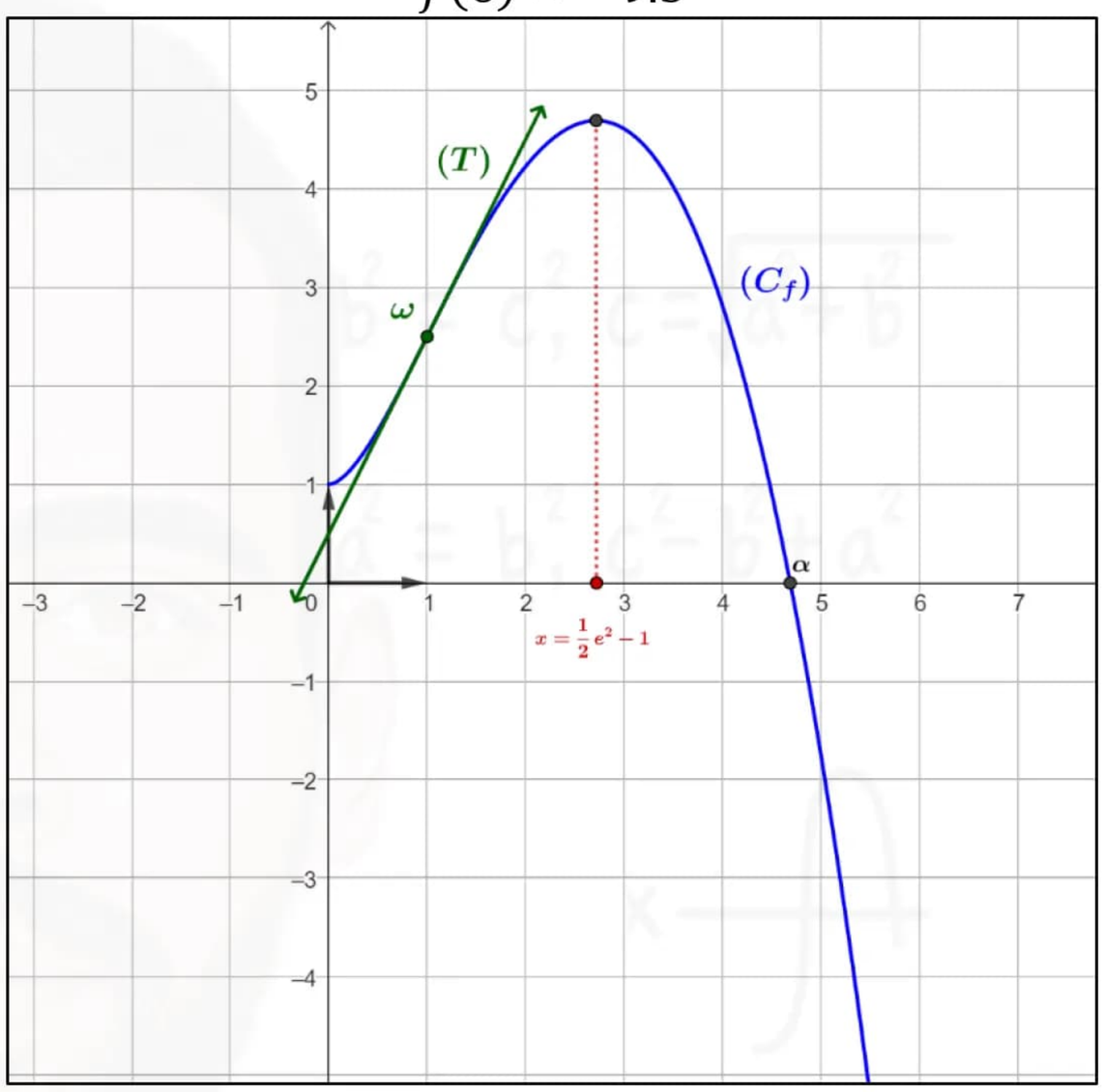
لدينا: f مستمرة ورتيبة على $]e; +\infty[$

ولدينا: $f(4.6) \times f(4.7) < 0$ أي: $\begin{cases} f(4.6) \approx 0.45 \\ f(4.7) \approx -0.05 \end{cases}$

إذن: حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $4.6 < f < 4.7$

❹ التمثيل البياني لـ (T) و (C_f):

$f(6) \approx -9.5$



(III

❶ إيجاد الدالة الأصلية للدالة $x \longmapsto x^2 \ln x$ والتي تنعدم من أجل $x = 1$:

نضع: $I(x) = \int_1^x t^2 \ln t \, dt$

ونضع: $u(t) = \ln t$ ومنه: $u'(t) = \frac{1}{t}$

$v'(t) = t^2$ $v(t) = \frac{t^3}{3}$

ومنه:

$$I(x) = \int_1^x t^2 \ln t \, dt$$
$$= \left[\frac{t^3 \ln t}{3}\right]_1^x - \int_1^x \frac{1}{t}\frac{t^3}{3} dt = \left[\frac{t^3 \ln t}{3}\right]_1^x - \int_1^x \frac{1}{3} t^2 dt$$
$$= \left[\frac{t^3 \ln t}{3} - \frac{t^3}{9}\right]_1^x = \frac{1}{9}[t^3(3 \ln t - 1)]_1^x$$
$$= \frac{1}{9}[x^3(3 \ln x - 1) + 1]$$

❷ حساب $A(\alpha)$، وتفسير النتيجة هندسيا:

$$A(\alpha) = \int_1^\alpha f(t)dt$$
$$= \int_1^\alpha \left(\frac{3}{2}t^2 - t^2 \ln t + 1\right) dt$$
$$= \left[\frac{1}{2}t^3 - I(t) + t\right]_1^\alpha$$
$$= \frac{1}{2}\alpha^3 - I(\alpha) + \alpha - \frac{1}{2} + I(1) - 1$$
$$= \frac{1}{18}(11\alpha^3 - 6\alpha^3 \ln \alpha + 18\alpha - 29)u.a$$

- التفسير الهندسي:

$A(\alpha)$ هي مساحة الحيز المستوي المحدد بـ (C_f) والمستقيمات ذات المعادلات: $y = 0$ ، $x = 1$ و $x = \alpha$

❸ تبيين أنّ $A(\alpha) = \frac{2\alpha^3 + 12\alpha - 29}{18} u.a$:

لدينا: $f(\alpha) = 0$ ومنه: $\alpha^2 \ln \alpha = \frac{3}{2}\alpha^2 + 1$

وعليه:

$$A(\alpha) = \frac{1}{18}(11\alpha^3 - 6\alpha^3 \ln \alpha + 18\alpha - 29)$$
$$= \frac{1}{18}\left(11\alpha^3 - 6\alpha\left(\frac{3}{2}\alpha^2 + 1\right) + 18\alpha - 29\right)$$
$$= \frac{1}{18}(2\alpha^3 + 12\alpha - 29)u.a$$

إعداد قويسم الخليل

﴿بالتوفيق والنجاح لجموع التلاميذ الشرفاء﴾

التمرين الأول 04.00 نقطة

I)

❶ حساب احتمال الحوادث A ، B و C:

لدينا الصندوقان U و V متماثلان ومنه: $p(U)=p(V)=\frac{1}{2}$

عدد حالات السحب من الصندوق U هو $A_8^2=56$

عدد حالات السحب من الصندوق V هو $5^2=25$

إذن:

$$p(A)=\left(\frac{1}{2}\times\frac{A_5^2+A_3^2}{A_8^2}\right)+\left(\frac{1}{2}\times\frac{3^2+2^2}{5^2}\right)=\boxed{\frac{689}{1400}}$$

$$p(B)=\left(\frac{1}{2}\times\frac{A_5^2+A_2^2}{A_8^2}\right)+\left(\frac{1}{2}\times\frac{1^2+3^2+1^2}{5^2}\right)$$

$$=\boxed{\frac{583}{1400}}$$

$$p(C)=\left(\frac{1}{2}\frac{2A_5^1A_3^1+A_5^2}{A_8^2}\right)+\left(\frac{1}{2}\frac{2(3^1)(2^1)+(3^2)}{5^2}\right)$$

$$=\boxed{\frac{1213}{1400}}$$

❷ هل الحادثتان A و B مستقلتان؟

لدينا: $p(A)\times p(B)\approx 0.205$

ولدينا:

$$p(A\cap B)=\left(\frac{1}{2}.\frac{A_3^2+A_2^2}{A_8^2}\right)+\left(\frac{1}{2}.\frac{1^2+2^2+1^2+1^2}{5^2}\right)$$

$$=\frac{37}{175}\approx 0.21$$

لدينا: $p(A)\times p(B)\neq p(A\cap B)$

إذن: الحادثتان A و B غير مستقلتان

❸ حساب احتمال أن تكون الكرتان المسحوبتان من الصندوق U، علما أنهما من لونين مختلفين

$$p_{\overline{A}}(U)=\frac{p(\overline{A}\cap U)}{p(\overline{A})}=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{2\times A_5^1\times A_3^1}{A_8^2}}{1-p(A)}$$

$$=\frac{\frac{15}{56}}{\frac{711}{1400}}=\boxed{\frac{125}{137}}$$

II) تعيين قانون احتمال X :

لدينا: $X(\Omega)=\{0;1;2;3;4\}$ حيث:

$$p(X=0)=\frac{C_3^2}{C_{13}^2}=\boxed{\frac{3}{78}}$$

$$p(X=1)=\frac{C_8^1\times C_3^1}{C_{13}^2}=\boxed{\frac{24}{78}}$$

$$p(X=2)=\frac{C_8^2+C_3^1\times C_2^1}{C_{13}^2}=\boxed{\frac{34}{78}}$$

$$p(X=3)=\frac{C_8^1\times C_2^1}{C_{13}^2}=\boxed{\frac{16}{78}}$$

$$p(X=4)=\frac{C_2^2}{C_{13}^2}=\boxed{\frac{1}{78}}$$

إذن:

x_i	0	1	2	3	4
$p(X=x_i)$	$\frac{3}{78}$	$\frac{24}{78}$	$\frac{34}{78}$	$\frac{16}{78}$	$\frac{1}{78}$

- حساب $E(X)$:

$$E(X)=\sum_0^5 x_ip_i=0\frac{3}{78}+1\frac{24}{78}+2\frac{34}{78}+3\frac{16}{78}+4\frac{1}{78}$$

$$=\frac{144}{78}=\boxed{\frac{24}{13}}$$

الموضوع الثاني

التمرين الأول 04.50 نقطة

❶ أ/ دراسة اتجاه تغير الدالة f وتشكيل جدول تغيراتها:

لدينا: الدالة f قابلة للاشتقاق على $]1;+\infty[$، حيث:

$$f'(x)=\frac{2x(2x-1)-2x^2}{(2x-1)^2}=\frac{2x(x-1)}{(2x-1)^2}>0$$

إذن الدالة f متزايدة تماما على $]1;+\infty[$

x	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	1 ↗	$+\infty$

ب/ تبيين أنه من أجل كل $x\geq 1$ فإنّ: $f(x)\geq 1$:

من جدول تغيرات الدالة f نجد أنّ $f(x)\geq 1$

❷ أ/ برهان بالتراجع أنه من أجل كل n طبيعي فإنّ: $u_n\geq 1$:

نضع $P(n)\ldots u_n\geq 1$

- لدينا: $u_0\geq 1$ ومنه: $2\geq 1$، إذن $P(0)$ صحيحة
- ليكن $n\in\mathbb{N}$: نفرض صحة $P(n)$ ونثبت صحة $P(n+1)$
- لدينا: $u_n\geq 1$

وبما أنّ الدالة f متزايدة على $]1;+\infty[$ فإنّ: $f(u_n)\geq f(1)$

ومنه: $u_{n+1}\geq 1$

ومنه: $P(n+1)$ صحيحة

حسب البرهان بالتراجع $P(n)$ صحيحة من أجل كل $n\in\mathbb{N}$

ب/ تبيين أنّ (u_n) متناقصة تماما، واستنتاج أنها متقاربة:

من أجل كل $n \in \mathbb{N}$، لدينا:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(u_n)^2}{2u_n - 1} - u_n = \frac{-(u_n)^2 + u_n}{2u_n - 1}$$
$$= \frac{u_n(1-u_n)}{2u_n - 1}$$

لدينا: $u_n \geq 1$ ومنه: $\begin{cases} 1 - u_n \leq 0 \\ 2u_n - 1 \geq 1 \end{cases}$

إذن: $u_{n+1} - u_n < 0$ وعليه (u_n) متناقصة تماما

■ وبما أن (u_n) متناقصة تماما ومحدودة من الأسفل بـ 1 فهي متقاربة

❸ أ/ تبيين أن (w_n) هندسية أساسها 2 وحساب w_0:

من أجل كل $n \in \mathbb{N}$، لدينا:

$$w_{n+1} = \ln(v_{n+1}) = \ln\left(\frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1}}\right)$$
$$= \ln\left(\frac{\frac{(u_n)^2}{2u_n - 1} - 1}{\frac{(u_n)^2}{2u_n - 1}}\right) = \ln\left(\frac{(u_n)^2 - 2u_n + 1}{(u_n)^2}\right)$$
$$= \ln\left(\frac{(u_n - 1)^2}{(u_n)^2}\right) = 2\ln\left(\frac{u_n - 1}{u_n}\right)$$
$$= 2\ln(v_n) = 2w_n$$

ولدينا: $w_0 = \ln v_0 = \ln\left(\frac{u_0 - 1}{u_0}\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$

إذن (v_n) هندسية أساسها 2 وحدها الأول $-\ln 2$

ب/ كتابة بدلالة n عبارة w_n:

من أجل كل $n \in \mathbb{N}$، لدينا:

$$w_n = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \times (2)^n = \boxed{\ln\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}\right)}$$

- استنتاج بدلالة n عبارة v_n:

لدينا: $w_n = \ln(v_n)$ ومنه: $e^{w_n} = v_n$

ومنه: $v_n = e^{\ln\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}\right)}$

ومنه: $\boxed{v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}}$

- استنتاج عبارة u_n بدلالة n:

لدينا: $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n}$ ومنه: $v_n u_n = u_n - 1$

ومنه: $u_n = \frac{1}{1 - v_n}$

وعليه: $\boxed{u_n = \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}}}$

- حساب نهاية (u_n):

$$\lim_{n \to +\infty} (u_n) = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}}\right) = \boxed{1}$$

لأن: $\lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n} = 0$، $\left(-1 < \frac{1}{2} < 1\right)$

❹ أ/ كتابة بدلالة n المجموع S_n:

$$S_n = w_0 + w_1 + \cdots + w_n = \ln\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2}\right)$$
$$= \boxed{\ln(2)\,(1 - 2^{n+1})}$$

ب/ كتابة بدلالة n الجداء P_n:

$$P_n = v_0 \times v_1 \times \ldots \times v_n = e^{w_0} \times e^{w_1} \times \ldots \times e^{w_n}$$
$$= e^{w_0 + w_1 + \cdots + w_n}$$
$$= e^{S_n} = e^{\ln(2)(1 - 2^{n+1})} = \boxed{2^{(1 - 2^{n+1})}}$$

التمرين الثالث — 04.50 نقطة

(I) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة: $z^2 = -2 - 2i\sqrt{3}$:

- طريقة 01:

نضع: $w = x + iy$ و $w^2 = z$

ومنه: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ x^2 - y^2 = -2 \\ xy = -\sqrt{3} \end{cases}$ ومنه: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ x^2 - y^2 = -2 \\ 2xy = -2\sqrt{3} \end{cases}$

بجمع المعادلتين $(*)$ و $(**)$ نجد: $2x^2 = 2$

ومنه: $x^2 = 1$ ومنه: $\begin{cases} x = 1 \\ \text{أو} \\ x = -1 \end{cases}$

نعوض قيمة $x^2 = 1$ في $(*)$ نجد: $1 + y^2 = 4$

ومنه: $y^2 = 3$ ومنه: $\begin{cases} y = \sqrt{3} \\ \text{أو} \\ y = -\sqrt{3} \end{cases}$

إذن: $(x; y) \in \{(1; -\sqrt{3}); (-1; \sqrt{3})\}$

إذن: $S = \{(1 - i\sqrt{3}); (-1 + i\sqrt{3})\}$

- طريقة 02:

لدينا:

$$z^2 = -2 - 2i\sqrt{3} = 1 - 2i\sqrt{3} - 3 = \left(1 - i\sqrt{3}\right)^2$$

ومنه: $\begin{cases} z = 1 - i\sqrt{3} \\ \text{أو} \\ z = -(1 - i\sqrt{3}) \end{cases}$ ومنه: $\begin{cases} z = \sqrt{(1 - i\sqrt{3})^2} \\ \text{أو} \\ z = -\sqrt{(1 - i\sqrt{3})^2} \end{cases}$

أي: $\begin{cases} z = 1 - i\sqrt{3} \\ \text{أو} \\ z = -1 + i\sqrt{3} \end{cases}$

(II)

❶

أ/ تعليم النقط A، B و C:

(الرسم في آخر الحل)

❷ تبيين أنّ $\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}=e^{i\frac{\pi}{3}}$:

$$\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}=\frac{-1-i\sqrt{3}-2}{-1+i\sqrt{3}-2}=\frac{-3-i\sqrt{3}}{-3+i\sqrt{3}}\times\frac{-3-i\sqrt{3}}{-3-i\sqrt{3}}$$
$$=\frac{\left(-3-i\sqrt{3}\right)^2}{9+3}=\frac{6+6i\sqrt{3}}{12}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

نضع:

$$L=\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

و $\theta_L=\arg(L)$

لدينا:

$$\begin{cases}|L|=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=1\\ \cos(\theta_L)=\frac{1}{2}\\ \sin(\theta_L)=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$$

ومنه:

$$\theta_L\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]\ ;\ k\in\mathbb{Z}$$

إذن : $L=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=e^{i\frac{\pi}{3}}$

- استنتاج طبيعة المثلث ABC:

$$\begin{cases}|L|=\frac{BC}{AC}=1\\ \theta_L=\left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}\right)=\frac{\pi}{3}+2k\pi\end{cases}$$

لدينا:

إذن: المثلث ABC متقايس الأضلاع

أ/ تعيين المركز ونصف القطر للدائرة $(\mathcal{C})$:

لدينا: $|z_A|=2$ و $|z_B|=2$ و $|z_C|=2$

إذن: $OA=OB=OC=2$

إذن: الدائرة $(\mathcal{C})$ المحيطة بالمثلث ABC هي الدائرة ذات المركز O ونصف القطر O

❸

أ/ تبيين أنّ (Γ) هي دائرة:

$$z=2\left(-1+e^{i\theta}\right)\Longrightarrow z=-2+2e^{i\theta}$$
$$\Longrightarrow z+2=2e^{i\theta}$$
$$\Longrightarrow|z-(-2)|=\left|2e^{i\theta}\right|$$
$$\Longrightarrow|z-z_D|=2\quad\left(z_D=-2=-z_C\ \text{حيث}\right)$$

إذن: (Γ) هي دائرة مركزها D ونصف قطرها

ب/ التحقق أنّ A و B من (Γ):

لدينا: $|z_A-z_D|=\left|-1+i\sqrt{3}-(-2)\right|=\left|1+i\sqrt{3}\right|=2$ ومنه: $A\in(\Gamma)$

لدينا: $|z_B-z_D|=\left|-1-i\sqrt{3}-(-2)\right|=\left|1-i\sqrt{3}\right|=2$ ومنه: $B\in(\Gamma)$

ج/ تبيين أنّ $(\mathcal{C})$ هي صورة (Γ) بالدوران R :

لدينا: $R:z'-z_A=e^{i\theta}(z-z_A)$

لدينا: $R(B)=C$

ومنه: $z_C-z_A=e^{i\theta}(z_B-z_A)$

ومنه: $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=e^{i\theta}$

ومنه: $\frac{2+1-i\sqrt{3}}{-1-i\sqrt{3}+1-i\sqrt{3}}=e^{i\theta}$

ومنه: $\frac{3-i\sqrt{3}}{-2i\sqrt{3}}=e^{i\theta}$

ومنه: $\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=e^{i\theta}$

ومنه: $e^{i\frac{\pi}{3}}=e^{i\theta}$

إذن: $R:z'-z_A=e^{i\frac{\pi}{3}}(z-z_A)$

أي: $R:z'=e^{i\frac{\pi}{3}}(z-z_A)+z_A$

بما أنّ: $e^{i\frac{\pi}{3}}(z_D-z_A)+z_A=\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(-2+1-i\sqrt{3})-1+i\sqrt{3}=0=z_O$

فإنّ O هي صورة D

وعليه: $(\mathcal{C})$ هي صورة (Γ) بالدوران $R\left(A;\frac{\pi}{3}\right)$

❹

أ/ تعيين الكتابة المركبة للتشابه المباشر S:

لدينا:

$$S:z'-z_O=\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}}(z-z_O)$$
$$\Longrightarrow S:z'=\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)z$$
$$\Longrightarrow S:z'=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)z$$
$$\Longrightarrow S:z'=(1-i)z$$

ب/ تبيين أنّ: $z_D=\left(\sqrt{3}-1\right)+i\left(\sqrt{3}+1\right)$:

$$z_D=(1-i)z_A$$
$$=(1-i)\left(-1+i\sqrt{3}\right)$$
$$=-1+i\sqrt{3}+i+\sqrt{3}$$
$$=\left(\sqrt{3}-1\right)+i\left(\sqrt{3}+1\right)$$

ج/ كتابة كل من z_A و z_D على الشكل الأسي:

نضع: $\theta_A=\arg(z_A)$

لدينا : $\begin{cases}|z_A|=2\\ \cos(\theta_A)=-\frac{1}{2}\\ \sin(\theta_A)=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$

ومنه: $\theta_L\equiv\pi-\frac{\pi}{3}[2\pi]\ ;\ k\in\mathbb{Z}$

أي: $\theta_L\equiv\frac{2\pi}{3}[2\pi]$

إذن: $z_A = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$

ولدينا:

$$\begin{aligned} z_E &= (1-i)z_A \\ &= \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} \times 2e^{i\frac{2\pi}{3}} \\ &= 2\sqrt{2}e^{i\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)} \\ &= 2\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{12}} \end{aligned}$$

- استنتاج القيمة المضبوطة لـ $tan\left(\frac{5\pi}{12}\right)$:

لدينا:

$$\begin{cases} z_D = (\sqrt{3}-1)+i(\sqrt{3}+1) \\ z_D = 2\sqrt{2}\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)+i2\sqrt{2}\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) \end{cases}$$

ومنه:

$$\begin{cases} 2\sqrt{2}\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \sqrt{3}-1 \\ 2\sqrt{2}\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \sqrt{3}+1 \end{cases}$$

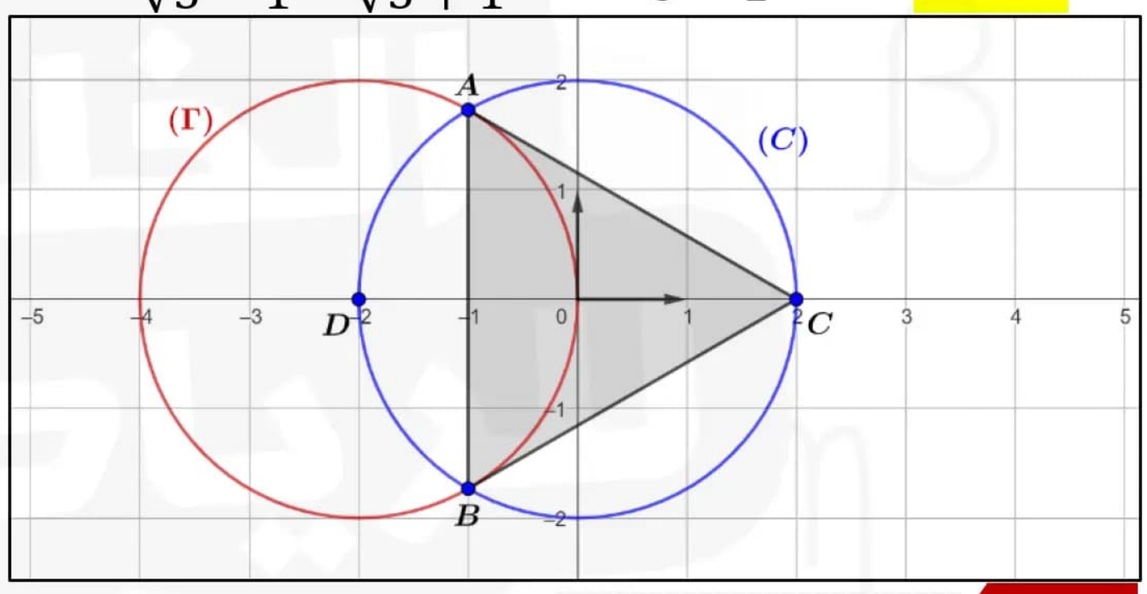
ومنه:

$$\begin{cases} \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} \\ \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} \end{cases}$$

وعليه:

$$\tan\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)}{\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)} = \frac{\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}}{\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$$

$$= \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} \times \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1} = \frac{3+1+2\sqrt{3}}{3-1} = 2+\sqrt{3}$$



التمرين الرابع 07.00 نقطة

(I

❶ دراسة تغيرات الدالة g وتشكيل جدول تغيراتها:

- النهايات:

- $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ >}} g(x) = +\infty$

- دراسة إشارة $g'(x)$:

لدينا الدالة g قابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$، ودالتها المشتقة هي:

$$g'(x) = -e - \frac{1}{x} = -\frac{ex+1}{x}$$

لدينا: $x > 0$ على المجال $]0;+\infty[$

ولدينا: $-(ex+1) = 0$ معناه: $x = -e^{-1}$

إذن: $-(ex+1) < 0$ على المجال $]0;+\infty[$

ومنه:

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	
$g(x)$	$+\infty$ ↘	$-\infty$

❷

أ/ تبيين أنّ $g(x) = 0$ تقبل $]0;+\infty[$ حلا وحيدا α

لدينا الدالة g مستمرة ورتيبة على المجال $]0;+\infty[$

ولدينا: $\begin{cases} g(0.66) \approx 0.04 \\ g(0.67) \approx -0.02 \end{cases}$ أي: $g(0.66) \times g(0.67) < 0$

إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0.66 < \alpha < 0.67$

ب/ استنتاج إشارة $g(x)$ في المجال $]0;+\infty[$:

x	0	α	$+\infty$
$g(x)$	$+$	0	$-$

(II

❶ حساب $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ >}} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$:

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{ex}{x^2}+\frac{\ln x}{x^2}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{e}{x^2}+\frac{\ln x}{x^2}\right)$
$= 0$

لأنّ: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x^2}\right) = 0$

- $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ >}} g(x) = -\infty$

- تفسير النتائج هندسيا:

(C_f) يقبل مستقيمان مقاربان معادلتاهما $y = 0$ و $x = 0$

❷

أ/ تبيين أنه من أجل كل $x > 0$، $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$:

لدينا الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$، ودالتها المشتقة هي:

$$f'(x) = \frac{\left(e+\frac{1}{x}\right)x^2 - 2x(ex+\ln x)}{x^4}$$

$$= \frac{\left(e+\frac{1}{x}\right)x - 2(ex+\ln x)}{x^3} = \frac{-ex+1-2\ln x}{x^3}$$

$= \dfrac{g(x)}{x^3}$

ب/ استنتاج اتجاه تغير الدالة f وتشكيل جدول تغيراتها:

لدينا: $x^3 > 0$ على المجال $]0;+\infty[$ ، ومنه:

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$	$f(\alpha)$	0

❸ تبيين أنّ $f(\alpha) = \frac{1+e\alpha}{2\alpha^2}$:

لدينا: $g(\alpha) = 0$

ومنه: $1 - \alpha e - 2\ln\alpha = 0$

ومنه: $\ln\alpha = \frac{1-\alpha e}{2}$

ومنه:

$$f(a) = \frac{e\alpha + \ln\alpha}{\alpha^2} = \frac{e\alpha + \frac{1-\alpha e}{2}}{\alpha^2} = \frac{e\alpha + 1}{2\alpha^2}$$

- إعطاء حصرا للعدد $f(\alpha)$:

لدينا: $0.66 < \alpha < 0.67$

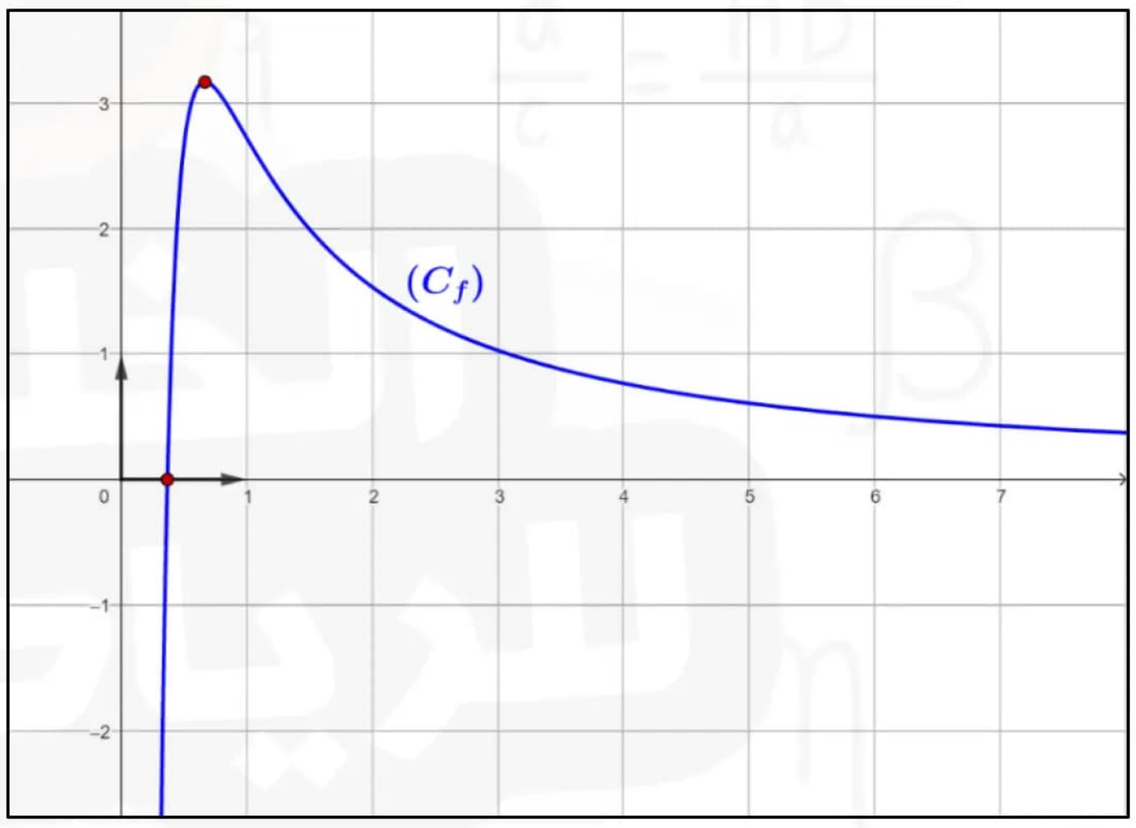
ومنه: $\begin{cases} 2.79 < e\alpha + 1 < 2.82 \\ 1.11 < \frac{1}{2\alpha^2} < 1.14 \end{cases}$

ومنه: $3.1 < \frac{e\alpha+1}{2\alpha^2} < 3.21$

❹ حساب $f(e^{-1})$، وإنشاء (C_f):

لدينا: $f(e^{-1}) = 0$

- الإنشاء:



❺

أ/ تبيين، أنّ $B_n = \frac{n+1}{e^n} - \frac{n+2}{e^{n+1}}$:

لدينا: $\int \frac{\ln t}{t^2} dt = \int \frac{1}{t^2} \ln t dt$

نضع: $u(t) = \ln t$	ومنه: $u'(t) = \frac{1}{t}$
$v'(t) = \frac{1}{t^2}$	$v(t) = -\frac{1}{t}$

$$B_n = \int_{e^n}^{e^{n+1}} \frac{\ln t}{t^2} dt$$

$$= \left[-\frac{\ln t}{t}\right]_{e^n}^{e^{n+1}} - \int_{e^n}^{e^{n+1}} -\frac{1}{t^2} dt$$

$$= \left[-\frac{\ln t}{t} - \frac{1}{t}\right]_{e^n}^{e^{n+1}}$$

$$= -\frac{\ln e^{n+1}}{e^{n+1}} - \frac{1}{e^{n+1}} + \frac{\ln e^n}{e^n} + \frac{1}{e^n}$$

$$= \frac{n+1}{e^n} - \frac{n+2}{e^{n+1}}$$

ب/ اثبات أنّ $A_n = B_n + e$:

$$A_n = \int_{e^n}^{e^{n+1}} f(t)dt$$

$$= \int_{e^n}^{e^{n+1}} \left(\frac{et + \ln t}{t^2}\right) dt$$

$$= \int_{e^n}^{e^{n+1}} \left(\frac{e}{t} + \frac{\ln t}{t^2}\right) dt$$

$$= \int_{e^n}^{e^{n+1}} \left(\frac{\ln t}{t^2}\right) dt + \int_{e^n}^{e^{n+1}} \left(\frac{e}{t}\right) dt$$

$$= B_n + \int_{e^n}^{e^{n+1}} \left(\frac{e}{t}\right) dt$$

$$= B_n + [e\ln t]_{e^n}^{e^{n+1}}$$

$$= B_n + e\ln e^{n+1} - e\ln e^n$$

$$= B_n + e$$

ج/ حساب A_0:

$$A_0 = B_0 + e$$

$$= \frac{0+1}{e^0} - \frac{0+2}{e^{0+1}} + e$$

$$= 1 - \frac{2}{e} + e$$

$$= \frac{e^2 + e - 2}{e}$$

- تفسير النتيجة بيانيا:

A_0 هي مساحة الحيز المستوي المحدد بـ (C_f) والمسقيمات ذات المعادلات: $\begin{cases} y = 0 \\ x = e^n \\ x = e^{n+1} \end{cases}$