

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:
الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

I- (u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{u_n}{e^{2n+1}}$.

1- احسب الحدين u_1 و u_2 . هل يمكن اعتبار المتتالية (u_n) هندسية؟ علّل إجابتك.

2- برهن بالتراجع أنّ: من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n > 0$.

3- بيّن أنّ: من أجل كل عدد طبيعي n ، $e^{2n+1} > 1$ ، استنتج اتجاه تغيّر وتقارب المتتالية (u_n) .

II- (v_n) المتتالية العددية المعرفة على المجموعة $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = 1 + \ln u_n$.

1- احسب الحدود: v_0 ، v_1 و v_2 . هل يمكن اعتبار المتتالية (v_n) حسابية؟ علّل إجابتك.

2- بيّن أنّ: من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_{n+1} = v_n - 2n - 1$ ، استنتج اتجاه تغيّر المتتالية (v_n) .

3- برهن بالتراجع أنّ: من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = 1 - n^2$ ، استنتج عبارة u_n بدلالة n و $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

4- من أجل كل عدد طبيعي n نضع: $P_n = u_0 \times u_1 \times \dots \times u_n$ و $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$.

إذا علمت أنّ: $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. احسب الجداء P_n ثم المجموع S_n بدلالة n .

التمرين الثاني: (04 نقاط)

يحتوي كيس على 6 كريات بيضاء تحمل الأرقام 0، 0، 0، 1، 1، 1 و 4 كريات سوداء تحمل الأرقام 2، 2، 3، 3 (كل الكريات لا نفرق بينها عند اللمس). نسحب من هذا الكيس كرتين في آن واحد بطريقة عشوائية.

1- نسمي الحادثة A: "سحب كرتين من نفس اللون"، والحادثة C: "سحب كرتين تحملان رقمين فرديين".

احسب الاحتمالات: $p(A)$ ، $p(C)$ ، $p(A \cap C)$ والاحتمال الشرطي $p_C(A)$. هل الحدثان A و C مستقلان؟

2- نسمي a و b ترقيم الكرتين المسحوبتين، و X المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب العدد a^b

في الحالة التي يكون فيها $a < b$ ، والعدد $a \times b$ في الحالة التي يكون فيها $a = b$.

(أ) برّر أنّ مجموعة قيم X هي $\{0; 1; 4; 8; 9\}$ ، ثم بيّن أنّ $p(X = 1) = \frac{1}{3}$.

(ب) عيّّن قانون الاحتمال للمتغيّر العشوائي X، ثم احسب أمله الرياضي $E(X)$.

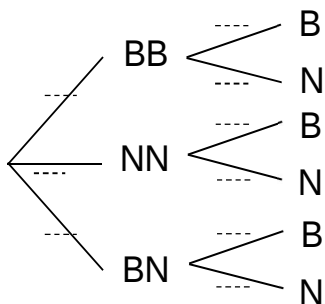
3- بعد السحب الأول لكرتين في آن واحد، نُرجع البيضاء المسحوبة

للكيس ونضع السوداء المسحوبة جانبا، ثم نسحب من جديد كرية واحدة.

نعتبر الحادثتين: N: سحب كرية سوداء. B: سحب كرية بيضاء.

(أ) بيّن أنّ: $p_{NN}(B) = \frac{3}{4}$ ، $p_{BB}(B) = \frac{3}{5}$ و $p_{BN}(B) = \frac{2}{3}$.

(ب) انقل واملأ شجرة الاحتمالات المقابلة لنمذجة هذه العملية ثم احسب $p(B)$ والاحتمال الشرطي $p_B(BB)$.



التمرين الثالث: (05 نقاط)

- I - 1 حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة التالية: $(z^2 - 6z + 12) = 0$ $(z + 2i\sqrt{3})$.
- 2- اكتب حلول هذه المعادلة على الشكل الأسّي.
- II - المستوي مزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$. لتكن النقط A, B, C و I لاحقاتها:
- $z_A = 3 + i\sqrt{3}$ ، $z_B = 3 - i\sqrt{3}$ ، $z_C = -2i\sqrt{3}$ و $z_I = 2$.
- 1- أنشئ النقط A, B, C و I . (وحدة الطول 1cm)
- 2- بيّن أنّ النقط A, C و I على استقامة واحدة.
- 3- بيّن أنّ النقط A, B و O تنتمي إلى دائرة $\mathcal{C}$ مركزها I ، يطلب تحديد نصف قطرها. ارسم الدائرة $\mathcal{C}$.
- 4- بيّن أنّ: $\frac{z_B}{z_B - z_A} = e^{i\frac{\pi}{3}}$. استنتج طبيعة المثلث OAB والرباعي $OABC$ ثم مثلّهما.
- 5- عيّن وأنشئ المجموعة Γ للنقط M من المستوي التي تحقق: $\|\vec{MO} + \vec{MA} + \vec{MB}\| = 2\|\vec{MA} - \vec{MC}\|$.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

- f الدالة العددية المعرفة على المجال $]-\infty; +\infty[$ بـ: $f(x) = (x^2 - 4x + 4)e^x$.
- وليكن $(\mathcal{C})$ تمثيلها البياني في المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
- 1- احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، وبيّن أنّ: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ ، ثم فسّر بيانيا هذه النتيجة.
- 2- (أ) أثبت أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ فإنّ: $f'(x) = (x^2 - 2x)e^x$ ، ثم شكّل جدول تغيرات الدالة f .
- (ب) بيّن أنّ المنحني $(\mathcal{C})$ يقبل نقطتي انعطاف يطلب تعيين فاصلة كل منهما.
- 3- (أ) اكتب معادلة L (Δ) مماس المنحني $(\mathcal{C})$ عند النقطة ذات الفاصلة 1.
- (ب) $(\mathcal{C}')$ المنحني الممثل للدالة $g: x \mapsto e^x$. احسب $g(2)$ و $f(2,7)$ ثم ارسم (Δ) ، $(\mathcal{C})$ و $(\mathcal{C}')$.
- (ج) عيّن بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m حتى تقبل المعادلة $e^{x-m} = 1$ $(x-2)^2$ ثلاثة حلول متميزة.
- 4- (أ) ادرس وضعية المنحني $(\mathcal{C})$ بالنسبة للمنحني $(\mathcal{C}')$ مع تحديد نقاط تقاطعهما.
- (ب) عيّن العدد الحقيقي a حتى تكون الدالة $h: x \mapsto (x+a)^2 e^x$ أصلية للدالة $(f - g)$ على $\mathbb{R}$.
- 5- λ عدد حقيقي سالب تماما. نعتبر $A(\lambda)$ مساحة الحيز من المستوي المحدّد بالمنحني $(\mathcal{C})$ ، المنحني $(\mathcal{C}')$ والمستقيمين اللذين معادلتهما: $x = 0$ و $x = \lambda$. احسب $A(\lambda)$ و $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} A(\lambda)$.
- 6- M نقطة من $(\mathcal{C})$ فاصلتها x_M و N نقطة من $(\mathcal{C}')$ فاصلتها x_N حيث $x_M > x_N > 1$ و $f(x_M) = g(x_N)$.
- (أ) باستعمال المسطرة، مثّل تقريبا على الرسم القطعة المستقيمة $[MN]$ إذا علمت أنّ المسافة $MN = 1$.
- (ب) اكتب عبارة المسافة MN بدلالة x_M و x_N ثم احسب x_M إذا علمت أنّ المسافة $MN = 1$.
- 7- (u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_n = \ln[f(n)]$ ، حيث n عدد طبيعي أكبر تماما من 2.
- بيّن أنّ $u_n = n + 2\ln(n-2)$ ، ثم احسب بدلالة n المجموع: $S_n = u_3 + u_4 + \dots + u_n$.

$$(a=b=1) \quad a \times b = 1 \text{ أو } (a=1; b=2;3) \quad a^b = 1 : X=1$$

$$(a=b=2) \quad a \times b = 4 : X=4$$

$$(a=2; b=3) \quad a^b = 8 : X=8$$

$$(a=b=3) \quad a \times b = 9 : X=9$$

$$P(X=1) = \frac{C_3^1 \times C_4^1 + C_3^2}{C_{10}^2} = \frac{1}{3}$$

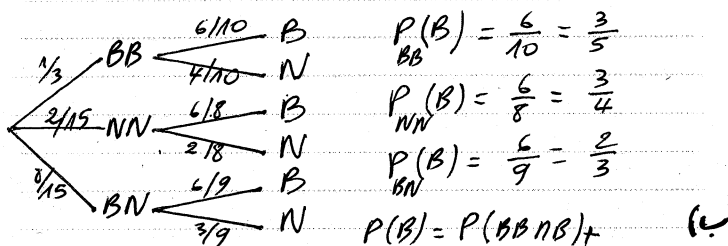
$$P(X=0) = \frac{C_3^1 \times C_7^1 + C_3^2}{C_{10}^2} = \frac{8}{15} \quad (ب)$$

$$P(X=8) = \frac{C_2^1 \times C_2^1}{C_{10}^2} = \frac{4}{45} \quad P(X=4) = P(X=9) = \frac{C_2^2}{C_{10}^2} = \frac{1}{45}$$

x_i	0	1	4	8	9
$P(X=x_i)$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{45}$	$\frac{4}{45}$	$\frac{1}{45}$

$$E(X) = \frac{1}{3} + \frac{4}{45} + \frac{32}{45} + \frac{9}{45} = \frac{4}{3}$$

(3) عند سحب BB يبقى 6B و 4N ، وعند سحب NN يبقى 6B و 3N ، وعند سحب BN يبقى 6B و 3N



$$P(B) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

$$P(B) = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

$$P(B) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

$$P(B) = P(BB \cap B) + P(BN \cap B) + P(BN \cap B)$$

$$P(B) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{5} + \frac{2}{15} \times \frac{3}{4} + \frac{8}{15} \times \frac{2}{3} = \frac{59}{90}$$

$$P(BB) = \frac{P(BB \cap B)}{P(B)} = \frac{18}{59}$$

تمرين 3:

$$Z_1 = -2i\sqrt{3} \quad (1-I) \quad Z + 2i\sqrt{3} = 0 \quad \Delta = -12 = (\pm 2i\sqrt{3})^2 : Z^2 - 6Z + 12 = 0$$

$$Z_3 = \frac{6+2i\sqrt{3}}{2} = 3+i\sqrt{3} \quad ; \quad Z_2 = \frac{6-2i\sqrt{3}}{2} = 3-i\sqrt{3}$$

$$Z_1 = 2\sqrt{3}e^{i(\frac{\pi}{2})} \quad \begin{cases} \cos \theta_1 = 0 \\ \sin \theta_1 = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} |Z_1| = 2\sqrt{3} \\ \theta_1 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases}$$

$$Z_2 = 2\sqrt{3}e^{i(\frac{\pi}{6})} \quad \begin{cases} \cos \theta_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \theta_2 = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} |Z_2| = 2\sqrt{3} \\ \theta_2 = \frac{\pi}{6} \end{cases}$$

$$Z_3 = 2\sqrt{3}e^{i(\frac{\pi}{6})} \quad \begin{cases} \cos \theta_3 = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \theta_3 = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} |Z_3| = 2\sqrt{3} \\ \theta_3 = \frac{\pi}{6} \end{cases}$$

(1-I) انشاء:

$$\frac{Z_C - Z_A}{Z_I - Z_A} = \frac{-3-3i\sqrt{3}}{-1-i\sqrt{3}} = 3 \quad (2)$$

$$Z_C - Z_A = 3(Z_I - Z_A)$$

$$\vec{AC} = 3\vec{AI} \quad (A, I, C \text{ على استقامة})$$

$$IA = |Z_A - Z_I| = 2 \quad (3)$$

$$IO = |Z_I| = 2 \quad \text{و} \quad IB = |Z_B - Z_I| = 2$$

و $IA = IB = IO = 2$ ، ومنه A, B, O تنتمي للدائرة (C) مركزها I و $r=2$

$$\frac{Z_B}{Z_C - Z_A} = \frac{3-i\sqrt{3}}{-2i\sqrt{3}} = \frac{(3-i\sqrt{3})2i\sqrt{3}}{(-2i\sqrt{3})2i\sqrt{3}} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = e^{i\frac{\pi}{3}} \quad (4)$$

تصحيح البكالوريا التجريبية 2025م

الموضوع الأول

تمرين 1: عبد المطلب

$$u_2 = \frac{u_1}{e^3} = \frac{1}{e^4} \quad , \quad u_1 = \frac{u_0}{e} = \frac{1}{e} \quad (1-I)$$

$$u_2 \neq \frac{u_1}{u_0} \quad \text{ومنه: } (u_n) \text{ ليست هندسية}$$

$$(2) \quad n=0 : u_0 > 0 \quad (u_0=1) \quad \text{محققة}$$

نفرض أن $u_n > 0$ ونبرهن صحة $u_{n+1} > 0$ (نكفي)

$$u_{n+1} > 0 \quad \text{ومنه: } e^{2n+1} > 0 \quad , \quad \frac{u_n}{e^{2n+1}} > 0 \quad \text{من أجل كل } n \in \mathbb{N}$$

$$(3) \quad e^{2n+1} > 1 : n=0 \quad \text{محققة كذا } n > 0$$

يمكن استعمال البرهان بالتراجع

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n}{e^{2n+1}} - u_n = \frac{u_n}{e^{2n+1}} (1 - e^{2n+1}) < 0$$

لأن $(e^{2n+1} > 1)$ ومنه: (u_n) متناقصة

(u_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل فهي متقاربة

$$V_2 = -3 \quad , \quad V_1 = 0 \quad , \quad V_0 = 1 + \ln u_0 = 1 \quad (1-II)$$

$$V_2 - V_1 \neq V_1 - V_0 \quad \text{ومنه: } (V_n) \text{ ليست حسابية}$$

$$V_{n+1} = 1 + \ln u_{n+1} = 1 + \ln \frac{u_n}{e^{2n+1}} = 1 + \ln u_n - (2n+1) \quad (2)$$

$$V_{n+1} - V_n = -2n-1 < 0 \quad \text{أي } (V_{n+1} = V_n - 2n-1)$$

ومنه (V_n) متناقصة

$$(3) \quad n=0 : V_0 = 1 \quad \text{محققة}$$

نفرض أن $V_n = 1 - n^2$ ونبرهن صحة $V_{n+1} = 1 - (n+1)^2$ (محققة)

$$V_{n+1} = V_n - 2n-1 = 1 - n^2 - 2n-1 = 1 - (n+1)^2$$

ومنه: $(V_n = 1 - n^2)$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}$

$$u_n = e^{-n^2} \quad \text{ومنه: } u_n = e^{V_n-1} \quad , \quad V_n = 1 + \ln u_n$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$$

$$P_n = u_0 \times u_1 \times \dots \times u_n = e^{0^2} \times e^{-1^2} \times \dots \times e^{-n^2} \quad (4)$$

$$P_n = e^{-(0^2+1^2+\dots+n^2)} = e^{-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

$$P_n = e^{V_0-1} \times e^{V_1-1} \times \dots \times e^{V_n-1} = e^{V_0+V_1+\dots+V_n-1(n+1)}$$

$$e^{V_0+V_1+\dots+V_n} = P_n \cdot e^{n+1} = e^{-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}} \cdot e^{n+1}$$

$$S_n = V_0 + V_1 + \dots + V_n = \frac{(n+1)(n+2)(-2n+3)}{6} \quad \text{ومنه:}$$

تمرين 2:

$$P(C) = \frac{C_5^2}{C_{10}^2} = \frac{2}{9} \quad ; \quad P(A) = \frac{C_6^2 + C_4^2}{C_{10}^2} = \frac{7}{15} \quad (1)$$

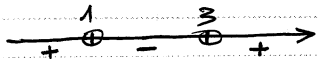
$$P(A) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} = \frac{2}{5} \quad P(A \cap C) = \frac{C_3^2 + C_2^2}{C_{10}^2} = \frac{4}{45}$$

$$P(A) \neq P(A) \times P(C) \quad \text{أو} \quad P(A \cap C) \neq P(A) \times P(C)$$

ومنه: A و C غير مستقلتان

$$(2) \quad (a=b=0) \quad a \times b = 0 \quad \text{أو} \quad (a=0; b=1;2;3) \quad a^b = 0 : X=0 \quad (P(2))$$

$$f(x) - e^x = (x^2 - 4x + 3)e^x \quad (P14)$$



(C) أسفل (C') : $x \in]1; 3[$

(C) أعلى (C') : $] -\infty; 1[\cup] 3; +\infty[$

(C) يقطع (C') عند : $A(1; e)$ و $B(3; e^3)$

(ب) $h(x) = (x+a)^2 e^x$ هي أصلية $(f(x) - g(x))$

$$h'(x) = f(x) - g(x)$$

$$h'(x) = 2(x+a)e^x + e^x(x+a)^2$$

$$h'(x) = (x^2 + (2a+2)x + a^2 + 2a)e^x$$

بالمطابقة مع : $(x^2 - 4x + 3)e^x$

هي فقط التي تحقق هذه الجملة $\begin{cases} 2a+2 = -4 \\ a^2+2a = 3 \end{cases} \Rightarrow a = -3$

$$h(x) = (x-3)^2 e^x \quad \text{ومن هنا}$$

$$A(\lambda) = \int_{\lambda}^0 (f(x) - g(x)) dx = [(x-3)^2 e^x]_{\lambda}^0 \quad (5)$$

$$A(\lambda) = 9 - (\lambda-3)^2 e^{\lambda} \quad \text{م.ا}$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} A(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow -\infty} (9 - \lambda^2 e^{\lambda} + 6\lambda e^{\lambda} - 9e^{\lambda}) = 9 \quad \text{م.ا}$$

(P6) تمثيل القطعة [MN] على الرسم .

$$MN = x_M - x_N \quad (ب)$$

$$x_M - x_N = 1 \quad \text{يعني } MN = 1$$

$$f(x_M) = g(x_N) \quad \text{و هنا } (x_N = x_M - 1)$$

$$f(x_M) = g(x_M - 1)$$

$$(x_M - 2)^2 = e^{-1} \quad (x_M - 2)^2 e^{x_M} = e^{x_M - 1}$$

$$x_M \approx 2,6 \quad (x_M = \frac{1}{\sqrt{e}} + 2) \quad \text{و هنا } |x_M - 2| = \frac{1}{\sqrt{e}} \quad (x_M > 2)$$

$$u_n = \ln(n-2)^2 e^n = \ln(n-2)^2 + \ln e^n \quad (7)$$

$$u_n = 2 \ln(n-2) + n \quad \text{و هنا}$$

$$S_n = u_3 + u_4 + \dots + u_n = 3 + 2 \ln 1 + 4 + 2 \ln 2 + \dots + n + 2 \ln(n-2)$$

$$S_n = 3 + 4 + \dots + n + 2(\ln 1 + \ln 2 + \dots + \ln(n-2))$$

$$S_n = \underbrace{3 + 4 + \dots + n}_{\text{متتالية حسابية}} + 2 \ln(1 \times 2 \times \dots \times (n-2))$$

$$S_n = \frac{n-2}{2} (3+n) + 2 \ln(n-2)!$$

و هنا :

$$S_n = \frac{(n+3)(n-2)}{2} + 2 \ln(n-2)!$$

عبد المطلب

$$\left. \begin{array}{l} \text{المثلث } OAB \\ \text{متقايست الزوايا} \end{array} \right\} \begin{array}{l} OB = AB \text{ أي } \left| \frac{z_B}{z_B - z_A} \right| = 1 \\ (\vec{AB}, \vec{OB}) = \frac{\pi}{3} \text{ أي } \arg \left(\frac{z_B}{z_B - z_A} \right) = \frac{\pi}{3} \end{array}$$

لدينا : $z_B - z_C = z_A$ أي $\vec{CB} = \vec{OA}$ و سابقا $OB = AB$
 لذا $OABC$ رباعي معين .

$$\|\vec{MI} + \vec{IO} + \vec{MI} + \vec{IA} + \vec{MI} + \vec{IB}\| = 2\|\vec{CM} + \vec{MA}\| \quad (5)$$

$$\|\vec{MI} + \vec{IO} + \vec{IA} + \vec{IB}\| = 2\|\vec{CA}\| \quad \text{مركز ثقل } I$$

$$r = 4 \text{ و } I \text{ دائرة } (r) \quad (MI = \frac{2}{3} AC = 4)$$

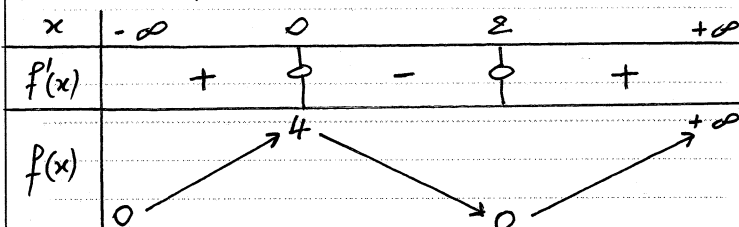
تمرين 4 :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [x(x-4)e^x + 4e^x] = +\infty \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2/e^x - 4x/e^x + 4/e^x) = 0$$

(C) يقبل مستقيم مقارب أفقي معادلته $y=0$

$$f'(x) = (2x-4)e^x + e^x(x^2-4x+4) = (x^2-2x)e^x \quad (P2)$$

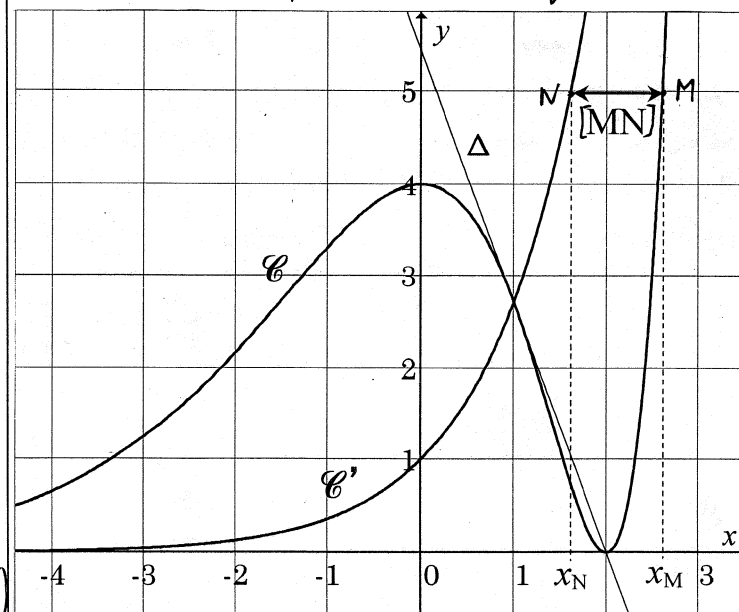


$$f''(x) = (2x-2)e^x + e^x(x^2-2x) = (x^2-2)e^x \quad (ب)$$

$$f'' \text{ تنعدم وتغير إشارتها عند } x_1 = -\sqrt{2} \text{ و } x_2 = \sqrt{2}$$

$$y = f'(1)(x-1) + f(1) = -e^x + 2e \quad (P3)$$

$$f(2,7) \approx 7,3 \text{ و } g(2) \approx 7,4 \quad (ب)$$



$$(x-2)^2 e^x = e^m \quad \text{يعني } (x-2)^2 e^x \cdot e^{-m} = 1$$

حل هذه المعادلة هي $f(x) = e^m$

فواصل نقاط تقاطع (C) مع المستقيم $y = e^m$. 3 حلول متمايزة :

$$0 < e^m < 4 \quad \text{أي } (m < \ln 4)$$

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (05 نقاط)

- I - 1- عيّن على الشكل الجبري الجذرين التربيعيين لكل من العددين المركبين $3-4i$ و $-3+4i$.
- 2- استنتج في مجموعة الأعداد المركبة حلول المعادلة: $(z+i)^4 = 16(3-4i)^2$.
- II - في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$. لتكن النقط A, B, C و D من هذا المستوي التي لاحقاتها: $z_A = 2+3i$ ، $z_B = -4+i$ ، $z_C = -2-5i$ و $z_D = 4-3i$.
- 1- أنشئ النقط A, B, C و D ، وبيّن أنّ الرباعي $ABCD$ متوازي الأضلاع ثم مثله.
- 2- بيّن أنّ: $\frac{z_B - z_D}{z_A - z_C} = e^{i\frac{\pi}{2}}$ ، ثم استنتج طبيعة الرباعي $ABCD$.
- 3- عيّن لاحقة النقطة I مركز ثقل الرباعي $ABCD$.
- 4- بيّن أنّ النقط A, B, C و D تنتمي إلى نفس الدائرة $\mathcal{C}$ يطلب حساب نصف قطرها ورسمها.
- 5- لتكن النقطة E نظيرة النقطة C بالنسبة لحامل محور الفواصل. بيّن أنّ المستقيم (AE) مماسي للدائرة $\mathcal{C}$.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

- زهرة نرد بيضاء D_1 مكعبة أوجهها تحمل الأرقام 1، 1، 2، 2، 3، 3. زهرة نرد خضراء D_2 مكعبة أوجهها تحمل الأرقام 1، 1، 2، 2، 3، 4. نرمي النردين في آن واحد ونسجل الرقمين الظاهرين على الوجهين العلويين، حيث a الرقم الظاهر للنرد الأبيض D_1 و b الرقم الظاهر للنرد الأخضر D_2 . جميع الأوجه لها نفس حظوظ الظهور.
- I - نسمي الحادثة $A: a+b=3$ ، الحادثة $B: a \times b=4$ ، والحادثة $C: a=1$. احسب الاحتمالات: $p(A)$ ، $p(B)$ ، $p(C)$ ، $p(B \cap C)$ و $p(A \cap C)$ ثم بيّن أنّ الحدثان B و C مستقلان.
- II - نعتبر اللعبة التالية: عند رمي النردين، إذا كان $a > b$ اللعبة مربحة وإذا كان $a < b$ اللعبة خاسرة، أما إذا كان $a = b$ فإنّ اللعبة متعادلة.

$D_1 \backslash D_2$	1	1	2	2	3	3
1						3
1						
2			0			
2						
3						
4						7

- ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل رمية جداء الرقمين الظاهرين عندما تكون اللعبة مربحة، ومجموع الرقمين الظاهرين عندما تكون اللعبة خاسرة، والفرق بين الرقمين الظاهرين عندما تكون اللعبة متعادلة.
- 1- برّر أنّ مجموعة قيم X هي $\{0; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$.
- 2- انقل واملأ الجدول المقابل ثم بيّن أنّ $p(X=3) = \frac{2}{9}$.
- 3- عيّن قانون الاحتمال واحسب الأمل الرياضياتي $E(X)$.
- 4- احسب $p_G(E)$ احتمال $a=2$ علماً أنّ اللعبة مربحة؟

(في كل التمرين، تُعطى النتائج على شكل كسور غير قابلة للاختزال)

التمرين الثالث: (04 نقاط)

I - (u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ $u_0 = 6$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{1}{4} \left(u_n + \frac{3}{2^n} \right)$.

- 1- برهن بالتراجع أن: من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n > 0$.
- 2- برهن بالتراجع أن: من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n > \frac{1}{2^n}$ ، استنتج اتجاه تغير وتقارب المتتالية (u_n) .
- II - (v_n) المتتالية العددية المعرفة على المجموعة $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = u_n - \frac{3}{2^n}$.
- 1- أثبت أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{4}$ ، يطلب حساب حدها الأول v_0 .
- 2- اكتب عبارة كل من u_n و v_n بدلالة n ثم واحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.
- 3- عيّن أكبر قيمة للعدد n الذي يحقق $v_n > 2025^{-24}$.
- 4- من أجل كل عدد طبيعي n نضع: $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$. بيّن أن: $S_n = 10 - 3 \times 2^{-n} - 2^{-2n}$.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I - نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $g(x) = x^2 - x - 3 + \ln x$.

- 1- احسب $g'(x)$ ، ثم بيّن أن الدالة g متزايدة تماما على المجال $]0; +\infty[$.
- 2- بيّن أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $2 < \alpha < 2,1$ ، ثم استنتج إشارة $g(x)$.
- II - نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = x - 2 + (2 - \ln x) \left(1 + \frac{1}{x} \right)$.
- ليكن $(\mathcal{C})$ تمثيلها البياني في المستوي المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
- 1- أثبت أنه من أجل كل $x > 0$ فإن: $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$. استنتج اتجاه تغير الدالة f .
- 2- احسب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ (أعط تفسيرا بيانيا) وبيّن أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ، ثم شكّل جدول تغيرات الدالة f .
- 3- أ) ادرس وضعية $(\mathcal{C})$ بالنسبة للمستقيم (Δ) ذي المعادلة $y = x - 2$ مع تحديد نقطة تقاطعهما.

ب) هل يمكن اعتبار (Δ) مستقيم مقارب مائل لـ $(\mathcal{C})$ ؟ علّل إجابتك.

ج) اكتب معادلة لـ (Δ') مماس المنحني $(\mathcal{C})$ عند النقطة ذات الفاصلة 1.

4- أ) بيّن أن $f(\alpha) + 3 = \frac{(\alpha-1)(\alpha+1)^2}{\alpha}$. استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

ب) ارسم (Δ) ، (Δ') و $(\mathcal{C})$ في المجال $]0; 13[$. نأخذ $f(\alpha) \simeq 2$ وسلم الرسم $1cm$.

5- أ) باستعمال التكامل بالتجزئة، بيّن أن: $\int_1^{e^2} \left(2 - \ln x \right) \left(1 + \frac{1}{x} \right) dx = e^2 - 1$ ، ثم استنتج حساب مساحة الحيز

المستوي $\mathcal{A}$ المحدّد بـ $(\mathcal{C})$ ، (Δ) والمستقيمين اللذين معادلتهما: $x = 1$ و $x = e^2$.

ب) عيّن a ارتفاع مستطيل قاعدته $e^2 - 1$ ومساحته تساوي المساحة $\mathcal{A}$.

ج) $\mathcal{A}'$ مساحة الحيز المحدّد بـ (Δ) والمستقيمتين: $y = 0$ ، $x = 0$ و $x = b$ ($b > 2$). عيّن b بحيث $\mathcal{A}' = \mathcal{A} + 3$.

انتهى الموضوع الثاني

$D_2 \backslash D_1$	1	1	2	2	3	3
1	0	0	2	2	3	3
1	0	0	2	2	3	3
2	3	3	0	0	6	6
2	3	3	0	0	6	6
3	4	4	5	5	0	0
4	5	5	6	6	7	7

(2) ملاء الجدول $P(X=3) = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$

x_i	0	2	3	4	5	6	7
$P(X=x_i)$	$\frac{10}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{2}{36}$

$E(X) = \frac{8}{36} + \frac{24}{36} + \frac{8}{36} + \frac{20}{36} + \frac{36}{36} + \frac{14}{36} = \frac{55}{18}$

$\frac{4}{12}$ أو مباشرة $P(E) = \frac{P(ENG)}{P(G)} = \frac{4/36}{12/36} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$

تمرين 3:

(1-I) $n=0$: $u_0=6$ ($u_0 > 0$) محققة
نفس أن $u_n > 0$ ونبرهن صحة $u_{n+1} > 0$ (كيفية)

لدينا: $u_n > 0$: $\frac{3}{2^n} > 0$: $\frac{1}{4}(u_n + \frac{3}{2^n}) > 0$ أي: $u_{n+1} > 0$ ومنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $u_n > 0$

(2) $n=0$: $\frac{1}{2^0} = 1$ و $u_0 > 1$ محققة

نفس أن $u_n > \frac{1}{2^n}$ ونبرهن صحة: $u_{n+1} > \frac{1}{2^{n+1}}$

لدينا: $u_n > \frac{1}{2^n}$: $u_n + \frac{3}{2^n} > \frac{1}{2^n} + \frac{3}{2^n}$: $u_{n+1} > \frac{1}{2^{n+1}}$

$u_{n+1} > \frac{1}{2^{n+1}} > \frac{1}{2 \cdot 2^n}$: $\frac{1}{4}(u_n + \frac{3}{2^n}) > \frac{1}{4} \times \frac{4}{2^n}$

$u_{n+1} > \frac{1}{2^{n+1}}$ ومنه: من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $u_n > \frac{1}{2^n}$

$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{4}u_n + \frac{3}{4 \cdot 2^n} - u_n = -\frac{3}{4}(u_n - \frac{1}{2^n}) < 0$
(u_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل فهي متقاربة.

(1-II) $V_{n+1} = u_{n+1} - \frac{3}{2^{n+1}} = \frac{1}{4}u_n + \frac{3}{4 \cdot 2^n} - \frac{3}{2^{n+1}}$

$V_{n+1} = \frac{1}{4}u_n - \frac{3}{4 \cdot 2^n} = \frac{1}{4}(u_n - \frac{3}{2^n}) = \frac{1}{4}V_n$

منه: (V_n) متسلسلة هندسية: $q = \frac{1}{4}$ و $V_0 = 6 - 3 = 3$

(2) $V_n = V_0 \cdot q^n = 3(\frac{1}{4})^n$ (الحدا العام لـ (V_n))

$u_n = V_n + \frac{3}{2^n} = 3(\frac{1}{4})^n + \frac{3}{2^n}$ (الحدا العام لـ (u_n))

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{2^n} = 0$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3(\frac{1}{4})^n = 0$ إذن $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

$\ln(\frac{3}{4^n}) > \ln 2025^{-24}$: $\frac{3}{4^n} > 2025^{-24}$ (3)

$\ln 4^n < 24 \ln 2025 + \ln 3$: $\ln 3 - \ln 4^n > -24 \ln 2025$
 $n = 132$: $n < 132,6$: $n < \frac{24 \ln 2025 + \ln 3}{\ln 4}$

$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = V_0 + \frac{3}{2^0} + V_1 + \frac{3}{2^1} + \dots + V_n + \frac{3}{2^n}$ (4)

$S_n = V_0 + V_1 + \dots + V_n + 3(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^n}) = 3(\frac{1 - (\frac{1}{4})^{n+1}}{1 - \frac{1}{4}}) + 3(\frac{1 - (\frac{1}{2})^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}})$

$S_n = 4(1 - \frac{1}{4^{n+1}}) + 6(1 - \frac{1}{2^{n+1}}) = 10 - \frac{1}{2^{2n}} - \frac{3}{2^n} = 10 - 3 \cdot 2^{-n} - 2^{-2n}$

تصحيح البكالوريا التجريبي 2025 م

الموضوع 2:

تمرين 1:

عبد المطلب

(1-I) لنحل المعادلة: $z^2 = 3 - 4i$

$x^2 - y^2 + 2xyi = 3 - 4i$ أي $(x+iy)^2 = 3 - 4i$
بجمع المعادلة الأولى والثانية: $x^2 - y^2 = 3$
 $x^2 + y^2 = 5$ نجد: $x^2 = 4$ أو $x = 2$ أو $x = -2$
 $2xy = -4$ نصوص في المعادلة الثالثة: $y = 1$ أو $y = -1$

ومنه الجذرين التربيعيين لـ $3 - 4i$: $(2-i)$ و $(-2+i)$
بالمثل الجذرين التربيعيين لـ $-3 + 4i$: $(1+2i)$ و $(-1-2i)$

(2) $(z+i)^4 = 16(3-4i)^2$ يعني:

$(z+i)^2 = 4(-3+4i)$ أو $(z+i)^2 = 4(3-4i)$
 $z+i = 2(-2+i)$ أو $z+i = 2(2-i)$
 $z_4+i = 2(-1-2i)$ أو $z_3+i = 2(1+2i)$

$z_4 = -2-5i$, $z_3 = 2+3i$, $z_2 = -4+i$, $z_1 = 4-3i$

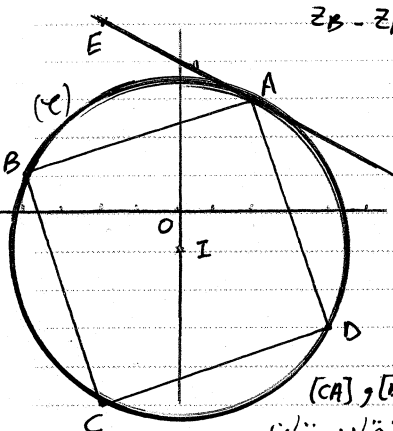
(1-II) $z_B - z_A = z_C - z_D = -6-2i$

$\overline{AB} = \overline{DC}$ ومنه $ABCD$ متوازي أضلاع.

(2) $\frac{z_B - z_D}{z_A - z_C} = \frac{-8+4i}{4+8i} = i$

$\cos \theta = 0$, $|i| = 1$
 $\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$: $\sin \theta = 1$

$\frac{z_B - z_D}{z_A - z_C} = 1 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}$



$\left| \frac{z_B - z_D}{z_A - z_C} \right| = \frac{DB}{CA} = 1$

$\arg \left(\frac{z_B - z_D}{z_A - z_C} \right) = (\vec{CA}, \vec{DB}) = \frac{\pi}{2}$

(3) $z_I = \frac{z_A + z_B + z_C + z_D}{4} = -i$

$IA = |z_A - z_I| = |2+4i| = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ (4)

$IB = |z_B - z_I| = |-4+2i| = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

$IC = |z_C - z_I| = |-2-4i| = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

$ID = |z_D - z_I| = |4-2i| = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

$r = 2\sqrt{5}$ (ننقي إلى الدائرة (C)) و D, C, B, A : $IA = IB = IC = ID$

$\frac{z_C - z_A}{z_E - z_A} = \frac{-4-8i}{-4+2i} = 2i = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$ و $z_E = -2+5i$ (5)

أي $\arg \left(\frac{z_C - z_A}{z_E - z_A} \right) = \frac{\pi}{2}$ (AE) مماسي لـ (C).

تمرين 2:

$P(C) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$: $P(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$: $P(A) = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$ (I)

$P(ANC) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$: $P(BNC) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$

$P(B \cap C) = P(B) \times P(C) = \frac{1}{18}$ مستقلة

$a-b = 1-1 = 2-2 = 3-3 = 0$: $X = 0$ (1-II)

$a \times b = 2 \times 1 = 2$: $X = 2$

$a+b = 1+2 = 3$ و $a \times b = 3 \times 1 = 3$: $X = 3$

$a+b = 1+3 = 4$: $X = 4$

$a+b = 1+4 = 2+3 = 5$: $X = 5$

$a+b = 2+4 = 6$ أو $a \times b = 3 \times 2 = 6$: $X = 6$

$a+b = 3+4 = 7$: $X = 7$

تمرين 4:

$$f(\alpha) = \alpha - 2 + (2 + \alpha^2 - \alpha - 3) \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)$$

$$f(\alpha) = \alpha^2 + \alpha - 4 - \frac{1}{\alpha} = \alpha^2 - 1 + \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha} - 3$$

$$3 + f(\alpha) = (\alpha^2 - 1) \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) = \frac{(\alpha^2 - 1)(\alpha + 1)}{\alpha} = \frac{(\alpha - 1)(\alpha + 1)^2}{\alpha}$$

$$(f(\alpha) + 3) = \frac{(\alpha - 1)(\alpha + 1)^2}{\alpha}$$

$$3 < \alpha + 1 < 3,1 \quad ; \quad 2 < \alpha < 2,1$$

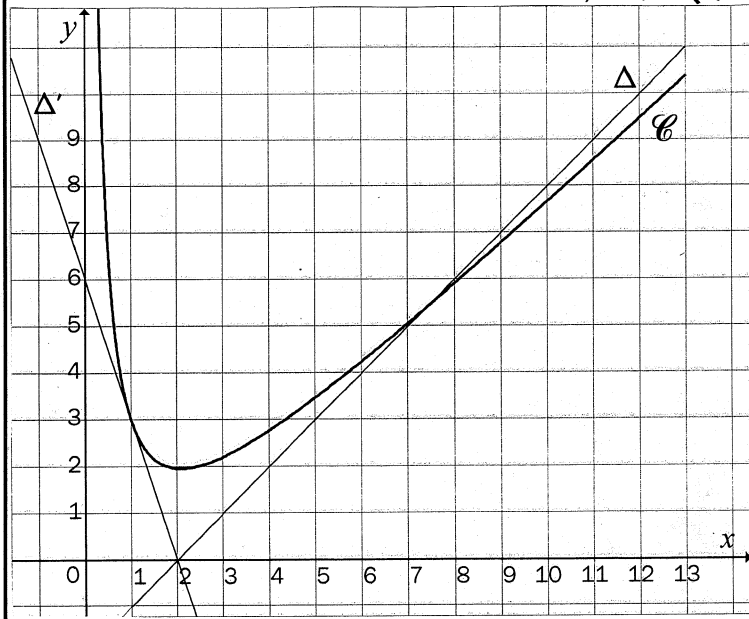
$$9 < (\alpha + 1)^2 < 9,61 \quad ; \quad 1 < \alpha - 1 < 1,1$$

$$\frac{1}{2,1} < \frac{1}{\alpha} < \frac{1}{2} \quad ; \quad 9 < (\alpha + 1)^2 (\alpha - 1) < 10,571$$

$$4,3 < \frac{(\alpha + 1)^2 (\alpha - 1)}{\alpha} < 5,3$$

$$1,3 < f(\alpha) < 2,3$$

(ب) رسم: (د)، (ع)، و (د')



$$g'(x) = 2x - 1 + \frac{1}{x} = \frac{2x^2 - x + 1}{x} > 0 \quad (1 - I)$$

ممير $2x^2 - x + 1$ سالب وإشارة من إشارة x
 g متزايدة تماماً على $]0; +\infty[$
 (2) g مستمرة ومتزايدة تماماً على $]2; 2,1[$
 $g(2) \approx -0,3 < 0$ و $g(2,1) \approx 0,05 > 0$
 حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً $2 < \alpha < 2,1$
 إشارة $g(x)$: $\xrightarrow{- \oplus +}$

$$f'(x) = 1 + \left(-\frac{1}{x}\right) \left(1 + \frac{1}{x}\right) + \left(-\frac{1}{x^2}\right) (2 - \ln x) \quad (1 - II)$$

$$f'(x) = 1 + \frac{-x-1}{x^2} + \frac{-2+\ln x}{x^2} = \frac{x^2 - x - 1 - 2 + \ln x}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{x^2 - x - 3 + \ln x}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$$

إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$
 f متزايدة تماماً لـ $x \geq \alpha$
 f متناقصة تماماً لـ $x < \alpha$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[1 - \frac{\ln x}{x} + \frac{2}{x^2} - \frac{\ln x}{x^2} \right] = +\infty$$

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
$f(x)$	$+\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$

$$f(x) - (x - 2) = (2 - \ln x) \left(1 + \frac{1}{x}\right) \quad (P(3))$$

$0 < x < e^2$ لـ $2 - \ln x > 0$ و $\left(1 + \frac{1}{x}\right) > 0$
 $\xrightarrow{+ \oplus -}$
 (د) يقطع (ع) $\left\{ \begin{array}{l} (د) \text{ أسفل } (ع) : x > e^2 \\ (ع) \text{ أعلى } (د) : 0 < x < e^2 \end{array} \right.$ عند $A(e^2, e^2 - 1)$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x - 2)] = -\infty$ (ب)
 لا يمكن اعتبار (د) مستقيم مقارب لـ (ع)
 $y = f'(1)(x - 1) + f(1) = -3x + 6$ (ج)
 $f(\alpha) = \alpha - 2 + (2 - \ln \alpha) \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) \quad (P(4))$
 لدينا $g(\alpha) = 0$ أي $-\ln \alpha = \alpha^2 - \alpha - 3$

(P(5))

$$\begin{cases} u'(x) = -\frac{1}{x} \\ v(x) = x + \ln x \end{cases} \quad \begin{cases} u(x) = 2 - \ln x \\ v'(x) = 1 + \frac{1}{x} \end{cases}$$

$$\int_1^{e^2} (2 - \ln x) \left(1 + \frac{1}{x}\right) dx = \left[(x + \ln x)(2 - \ln x) \right]_1^{e^2} - \int_1^{e^2} \left(-1 - \frac{\ln x}{x} \right) dx$$

$$= \left[(x + \ln x)(2 - \ln x) + x + \frac{(\ln x)^2}{2} \right]_1^{e^2} = e^2 - 1$$

$$A = \int_1^{e^2} f(x) - (x - 2) dx = \int_1^{e^2} (2 - \ln x) \left(1 + \frac{1}{x}\right) dx = (e^2 - 1) u(x)$$

(ب) $ax(e^2 - 1) = e^2 - 1$ و $a = 1$

$$A' = \int_0^2 (x - 2) dx + \int_2^b (x - 2) dx \quad (\Rightarrow)$$

$$A' = \left[\frac{x^2}{2} - 2x \right]_0^2 + \left[\frac{x^2}{2} - 2x \right]_2^b = \frac{b^2 - 4b + 8}{2}$$

$$\frac{b^2 - 4b + 8}{2} = e^2 - 1 + 3 \quad \text{يعني} \quad A' = A + 3$$

$$(b - 2)^2 = 2e^2 \quad ; \quad b^2 - 4b + 4 = 2e^2$$

$b > 2$ أي $b - 2 = \sqrt{2}e$
 ومنه: $b = \sqrt{2}e + 2 \approx 5,8$

عبد المطلب