السنة الثالثة تقني رياضي هندسة كهربائية المدة : 4 ساعات و نصف	اختبار بكالوريا تجريبي في الرياضيات	ثانوية مليكة قايد – سطيف- 2021 - 2022

على التلميذ الإجابة على أحد الموضوعين على الخيار

الموضوع الأول:

التمرين الأول(4 ن):

(u_n) المتتالية العددية المعرفة كما يلي: $u_0 = \frac{1}{8}$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = u_n(2-u_n)$

1) f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = x(2-x)$

أ) ادرس اتجاه تغير الدالة f

ب) بين أنه إذا كان $x \in]0;1[$ فإن $f(x) \in]0;1[$

2) أ) أحسب كلا من u_1 و u_2

ب) برهن بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_n < 1$

جـ) بين أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما ، ثم استنتج أنها متقاربة

3) (v_n) المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n = 1 - u_n$

أ) عبر عن v_{n+1} بدلالة v_n

ب) برهن بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = \left(\frac{7}{8}\right)^{2^n}$

جـ) استنتج عبارة u_n بدلالة n ، ثم استنتج $\lim_{n \to +\infty} u_n$

د) عين أصغر عدد طبيعي n يحقق : $u_n > 1 - 10^{-20}$

و) احسب بدلالة n الجداء $p(n)$ حيث : $p(n) = v_0 \times v_1 \times ..... \times v_n$ ، ثم عين $\lim_{n \to +\infty} p(n)$

التمرين الثاني(4 ن):

1) عين حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الاقليدية للعدد 5^n على 7

2) استنتج باقي قسمة العدد $2020^{1441} + 1962^{1954} + 1954^{1962}$ على 7

3) بين أن من أجل كل عدد طبيعي n : $2020^{3n+1} + 1962^{3n+1} + 1954^{3n+1} \equiv 0[7]$

4) من أجل كل عدد طبيعي n ، نضع : $S_n = 1 + 5 + 5^2 + ... + 5^n$

أ) بين أن من أجل كل عدد طبيعي n، $4S_n = 5^{n+1} - 1$

ب) نعتبر العدد الطبيعي a ، بين أن $4S_n \equiv a[7]$ إذا و فقط إذا كان $S_n \equiv 2a[7]$

جـ) استنتج باقي قسمة S_{2020} على 7

التمرين الثالث(4ن):

يحتوي كيس على ست كرات بيضاء تحمل الأرقام: 0 ؛ 0 ؛ 0 ؛ 1 ؛ 1 ؛ 2

و كرتين سوداوين تحملان الرقمين : 0 ؛ 1 . (الكرات لا نميز بينها باللمس)

1) نسحب من الكيس عشوائيا كرتين على التوالي دون إرجاع

احسب احتمال كلا من الحدثين التاليين

A : الحصول على كرتين من نفس اللون

B : جداء العددين المسجلين على الكرتين المسحوبتين معدوم

2) نسحب الآن كرتين في آن واحد

أ) احسب احتمال الحادثة C : مجموع العددين الذين تحملها الكرتان المسحوبتان عدد أولي

ب) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة عملية سحب ، مجموع الرقمين المسجلين على الكرتين المسحوبتين

*) عين قانون احتمال X ، واحسب أمله الرياضياتي

*) احسب $E\left(X^2\right)$

التمرين الرابع(8 ن):

I) g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بالعبارة : $g(x) = 2x^2 + 1 - \ln|x|$

1) ادرس تغيرات الدالة g

2) استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}^*$

II) f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بالعبارة: $f(x) = 2x - 2 + \dfrac{\ln|x|}{x}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$. الوحدة $2\,cm$

1) أحسب نهايات الدالة f عند حدود مجموعة التعريف

2) بين أن من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$: $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f

3) بين أن المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y = 2x - 2$ مقارب للمنحني (C_f) عند $-\infty$ و عند $+\infty$

- أدرس الوضعية النسبية للمنحني (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ)

4) أحسب $f(-x) + f(x)$. ماذا تستنتج بالنسبة للنقطة $\Omega(0,-2)$ ؟

5) بين أن (C_f) يقبل مماسا (T) يمر من النقطة Ω و يمس (C_f) في نقطتين A و B يطلب تعيينهما

- أكتب معادلة ديكارتية للمماس (T)

6) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين أحدهما 1 و الآخر α حيث $-0{,}37 < \alpha < -0{,}36$

7) أنشئ كلا من (Δ) ؛ (T) و (C_f)

8) (Δ_m) المستقيمات التي معادلاتها : $y = mx - 2$ حيث m وسيط حقيقي

أ- بين أن جميع المستقيمات (Δ_m) تمر من نقطة ثابتة يطلب تعيينها

ب- ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة $f(x) = mx - 2$

9) λ عدد حقيقي حيث $\lambda > 1$

أ- احسب بدلالة λ و بـ cm^2 المساحة $A(\lambda)$ للحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) و المستقيم (Δ)

و المستقيمين اللذين معادلتاهما : $x = 1$ و $x = \lambda$

ب- عين قيمة العدد الحقيقي λ بحيث يكون : $A(\lambda) = \dfrac{1}{2}cm^2$

ثانوية مليكة قايد – سطيف- 2021- 2022	اختبار بكالوريا تجريبي في الرياضيات	السنة الثالثة تقني رياضي هندسة كهربائية المدة : 4 ساعات و نصف

الموضوع الثاني

التمرين الأول(4,5 ن):

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ $u_1=\sqrt{e}$ و من أجل كل عدد طبيعي $n\geq 1$: $u_{n+1}=\frac{2}{3}u_n+\frac{1}{3}n+1$

1) أحسب كلا من u_2 ، u_3 و u_4 (تدور النتائج إلى 10^{-2}) ثم ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n)

2) أ) برهن بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي $n\geq 1$ يكون $u_n\leq n+3$

ب) بين أن من أجل كل عدد طبيعي $n\geq 1$: $u_{n+1}-u_n=\frac{1}{3}(n+3-u_n)$ ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n)

3) (v_n) المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي $n\geq 1$: $v_n=u_n-n$

بين أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول ، ثم بين أن من أجل كل عدد طبيعي $n\geq 1$:

$$u_n=n+\left(\sqrt{e}-1\right)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

4) نضع من أجل كل عدد طبيعي $n\geq 1$: $S_n=\left(\frac{2}{3}\right)v_1+\left(\frac{2}{3}\right)^2v_2+......+\left(\frac{2}{3}\right)^n v_n$ ؛ $S'_n=u_1+u_2+.....+u_n$ و $T_n=\frac{S'_n}{n^2}$

عبر عن S_n و S'_n بدلالة n ثم عين $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n$

التمرين الثاني(4,5 ن):

1) نعتبر في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ المعادلة : $(E)............7x-3y=1$

أ- بين أن المعادلة (E) تقبل على الأقل حلا

ب- حل المعادلة (E)

ج- برهن أنه إذا كانت الثنائية (x,y) حلا للمعادلة (E) فإن العددين : x و y أوليين فيما بينهما

2) ليكن a و b عددين صحيحين يحققان العلاقة : $(E')......7a-3b=29$

أ- ليكن d القاسم المشترك الأكبر للعددين : a و b

ما هي القيم الممكنة للعدد d ؟

ب- عين الثنائيات $(a;b)$ من الأعداد الصحيحة حلول الجملة : $\begin{cases}7a-3b=29\\ d=29\end{cases}$

ج- ليكن m المضاعف المشترك الأصغر للعددين : a و b

حل الجملة : $\begin{cases}7a-3b=29\\ d=29\\ m=1044\end{cases}$

3) حل في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ الجملة : $\begin{cases}7a-3b=29\\ pgcd(a;b)=1\end{cases}$

التمرين الثالث(4 ن):

عين في كل حالة مما يلي الإجابة الوحيدة الصحيحة مع التبرير :

1) المتتالية العددية (U_n) المعرفة بـ: $U_0 = 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $U_{n+1} = 2U_n - n$ حدها العام على $\mathbb{N}$ هو :

أ) $U_n = 2^n + n + 1$ ب) $U_n = 2^n + n + 2$ جـ) $U_n = 2^n - n + 1$

2) (U_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $2U_{n+1} = U_n + 2000$

نعرف على $\mathbb{N}$ المتتالية العددية (V_n) كما يلي : $V_n = \frac{1}{2}U_n - \alpha$ حيث α عدد حقيقي

إن قيمة العدد الحقيقي α حتى تكون المتتالية (V_n) هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$ هي :

أ) $\alpha = 1000$ ب) $\alpha = 500$ جـ) $\alpha = -500$

3) إن مجموعة حلول المعادلة $ln(2e^x - 1) = 2x$ في $\mathbb{R}$ هي :

أ) $S = \{0\}$ ب) $S = \{0,1\}$ جـ) $S = \phi$

4) إن $\lim\limits_{x\to+\infty} ln\left(\frac{e^x - 3}{e^{2x} + 7}\right) + x$ تساوي

أ) e ب) 1 جـ) 0

التمرين الرابع (7ن):

I) g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة : $g(x) = 1 + (1-x)e^x$

1) ادرس تغيرات الدالة g و شكل جدول تغيراتها

2) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $[0;+\infty[$

3) تحقق أن : $1,27 < \alpha < 1,28$ ، ثم استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$

II) f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة : $f(x) = \frac{e^x + x + 1}{e^x + 1}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ الوحدة $2\,cm$

1) بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$ ثم فسر النتيجة بيانيا

2) أ- احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

ب- بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x + 1$ مستقيم مقارب للمنحني (C_f)

3) ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى كل من (Δ) و (Δ') حيث $y = 1$ معادلة لـ (Δ')

4) أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = \frac{g(x)}{(e^x+1)^2}$ ، ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f

ب- بين أن $f(\alpha) = \alpha$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f

5) أ- أثبت أن (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في النقطة ذات الفاصلة $-\alpha$

ب- أثبت أن (C_f) يقبل مماسا (T) في النقطة $M(-\alpha,0)$ موازيا للمستقيم (Δ)

جـ- اكتب معادلة لـ (T)

6) أنشئ (Δ) ، (Δ') ، (T) و (C_f)

7) m وسيط حقيقي ، ناقش حسب قيم m عدد حلول المعادلة : $f(x) = x + f(m)$

تصحيح باك تجريبي في الرياضيات
3 ت ر
الموضوع الأول

التمرين الأول (04 ن)

$u_{n+1}=u_n(2-u_n)$ و $u_0=\frac{1}{8}$

1) $D=\mathbb{R}$; $f(x)=x(2-x)$

أ) من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)=-2x+2$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$-2x+2$	$+$	0	$-$

f متزايدة تماما على $]0,1[$

ب) من أجل $x\in]0,1[$

f متزايدة تماما على $]0,1[$ و $0<x<1$

أي $f(0)<f(x)<f(1)$ أي $0<f(x)<1$

أي $f(x)\in]0,1[$

2) أ) $u_1=u_0(2-u_0)=f(u_0)=\frac{15}{64}$

$u_2=u_1(2-u_1)=f(u_1)=\frac{1655}{4096}$

ب) نبرهن بالتراجع أن $0<u_n<1$

$n=0$: $0<u_0=\frac{1}{8}<1$

$P(0)$ صحيحة.

نفرض $P(n)$ صحيحة: $0<u_n<1$

نبرهن صحة $P(n+1)$: $0<u_{n+1}<1$ ؟

$0<u_n<1$ و f متزايدة تماما على $]0,1[$

فإن $f(0)<f(u_n)<f(1)$ أي

$0<u_{n+1}<1$ وهو المطلوب

من أجل كل عدد طبيعي n: $0<u_n<1$

نقول إن (u_n) محدودة

جـ) من أجل كل عدد طبيعي n:

$u_{n+1}-u_n=u_n-u_n^2=u_n(1-u_n)$

$0<u_n<1$ ومنه $-1<-u_n<0$

ومنه $0<1-u_n<1$ اذن

$u_n(1-u_n)>0$ أي $u_{n+1}-u_n>0$

(u_n) متزايدة تماما.

*) (u_n) متزايدة تماما ومحدودة من الأعلى بالعدد 1 فهي متقاربة.

3) $v_n=1-u_n$

أ) لدينا

$v_{n+1}=1-u_{n+1}$

$=1-u_n(2-u_n)$

أي $v_{n+1}=1-2u_n+u_n^2$

$=(1-u_n)^2=v_n^2$

ب) البرهان بالتراجع: $v_n=\left(\frac{7}{8}\right)^{2^n}$

$n=0$: $v_0=1-u_0=1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$

و $v_0=\left(\frac{7}{8}\right)^{2^0}=\left(\frac{7}{8}\right)^1=\frac{7}{8}$ أي $P(0)$ صحيحة

نفرض $P(n)$ صحيحة: $v_n=\left(\frac{7}{8}\right)^{2^n}$

نبرهن صحة $P(n+1)$: $v_{n+1}=\left(\frac{7}{8}\right)^{2^{n+1}}$ ؟

لدينا $v_n=\left(\frac{7}{8}\right)^{2^n}$ ومنه $v_n^2=\left(\left(\frac{7}{8}\right)^{2^n}\right)^2$

أي $v_n^2=\left(\frac{7}{8}\right)^{2^n\times 2}$ أي $v_n^2=\left(\frac{7}{8}\right)^{2^{n+1}}$

أي $v_{n+1}=\left(\frac{7}{8}\right)^{2^{n+1}}$ لأن $v_{n+1}=v_n^2$

من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n=\left(\frac{7}{8}\right)^{2^n}$

جـ) استنتاج عبارة u_n بدلالة n

$v_n=1-u_n$ تعني $u_n=1-v_n$

$=1-\left(\frac{7}{8}\right)^{2^n}$

$\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}1-\left(\frac{7}{8}\right)^{2^n}=\boxed{1}$; $\begin{cases}\lim\limits_{n\to+\infty}2^n=+\infty\\ \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{7}{8}\right)^{2^n}=0\end{cases}$ $\left(-1<\frac{7}{8}<1\right)$

د) أصغر عدد طبيعي n يحقق: $u_n>1-10^{-20}$

$1-\left(\frac{7}{8}\right)^{2^n}>1-10^{-20}$ تعني $\left(\frac{7}{8}\right)^{2^n}<10^{-20}$

تعني $\ln\left(\frac{7}{8}\right)^{2^n}<\ln 10^{-20}$ تعني

تعني $2^n\ln\left(\frac{7}{8}\right)<-20\ln10$ تعني $2^n>\frac{-20\ln10}{\ln\frac{7}{8}}$

تعني $\ln 2^n>\ln\left(\frac{-20\ln10}{\ln\frac{7}{8}}\right)$ تعني

أي $n\ln2>\ln\left(\frac{-20\ln10}{\ln\frac{7}{8}}\right)$ ، $n>\frac{\ln\left(\frac{-20\ln10}{\ln\frac{7}{8}}\right)}{\ln2}$

$n>5{,}11$ ومنه أصغر عدد طبيعي $n=6$

هـ) $P(n)=v_0\times v_1\times\dots\times v_n$

$=\left(\frac{7}{8}\right)^{2^0}\times\left(\frac{7}{8}\right)^{2^1}\times\dots\times\left(\frac{7}{8}\right)^{2^n}$

$=\left(\frac{7}{8}\right)^{2^0+2^1+\dots+2^n}$ مجموع $n+1$ حد من متتالية هندسية

$=\left(\frac{7}{8}\right)^{1\left(\frac{2^{n+1}-1}{2-1}\right)}$

$P(n)=\left(\frac{7}{8}\right)^{2^{n+1}-1}$

$\lim\limits_{n\to+\infty}P(n)=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{7}{8}\right)^{2^{n+1}-1}=0$; $\begin{cases}\lim\limits_{n\to+\infty}2^{n+1}-1=+\infty\\ -1<\frac{7}{8}<1\end{cases}$

التمرين 2 (04 ن)

1) بواقي قسمة 5^n على 7

$5^0\equiv1[7]$ $5^1\equiv5[7]$ $5^2\equiv4[7]$

$5^3\equiv6[7]$ $5^4\equiv2[7]$ $5^5\equiv3[7]$

$5^6\equiv1[7]$ البواقي دورية ودورها 6

$n=$	$6k$	$6k+1$	$6k+2$	$6k+3$	$6k+4$	$6k+5$	
$5^n\equiv$	1	5	4	6	2	3	[7]

2) استنتاج باقي قسمة $A=2020^{1441}+1962^{1954}+1954^{1962}$ على 7 لدينا

لدينا $2020\equiv4[7]$ ولدينا من (1) $5^2\equiv4[7]$

والخاصية إذا كان $a\equiv b[n]$ فإن $b\equiv a[n]$

منه $4\equiv5^2[7]$ اذن $2020\equiv5^2[7]$

ومنه $2020^{1441}\equiv(5^2)^{1441}[7]$

$\equiv5^{2882}[7]$

و $2882=6(480)+2$ الشكل $6k+2$

اذن $2020^{1441}\equiv4[7]$

ولدينا $1962\equiv2[7]$ ولدينا من (1) $5^4\equiv2[7]$

ومنه $2\equiv5^4[7]$ اذن $1962\equiv5^4[7]$

اذن $1962^{1954}\equiv(5^4)^{1954}[7]$

$\equiv5^{7816}[7]$

و $7816=6(1302)+4$ الشكل $6k+4$

اذن $1962^{1954}\equiv2[7]$

$1954\equiv1[7]$ منه $1954^{1962}\equiv1[7]$

اذن $A\equiv4+2+1[7]$

$\equiv0[7]$

الباقي هو 0

3) من أجل كل عدد طبيعي n:

$2020^{3n+1}+1962^{3n+1}+1954^{3n+1}\equiv0[7]$ ؟

$2020^{3n+1}\equiv(5^2)^{3n+1}[7]$ منه $2020\equiv5^2[7]$

$\equiv5^{6n+2}[7]$

$\equiv\boxed{4[7]}$

$1962^{3n+1}\equiv(5^4)^{3n+1}[7]$ منه $1962\equiv5^4[7]$

$\equiv5^{12n+4}[7]$

$\equiv(5^{6n+2})^2[7]$

$\equiv4^2[7]$

$\equiv2[7]$

$1954^{3n+1}\equiv1[7]$ منه $1954\equiv1[7]$

② إشارة $g(x)$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g(x)$	$+$	‖	$+$

III) $f(x)=2x-2+\frac{\ln|x|}{x}$

$D=]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$

① $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} 2x-2-\frac{\ln(-x)}{(-x)}=-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} 2x-2+\frac{\ln x}{x}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=-\infty$

$x=0$ معادلة مستقيم مقارب موازي لمحور التراتيب

② من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$

$f'(x)=2+\frac{\frac{1}{x}x-\ln|x|}{x^2}$

$=2+\frac{1-\ln|x|}{x^2}=\frac{2x^2+1-\ln|x|}{x^2}$

$f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$ إذن إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$

f متزايدة تماما على $]-\infty,0[$ و $]0,+\infty[$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

③ (Δ) معادلة $y=2x-2$

$\lim\limits_{|x|\to+\infty} f(x)-(2x-2)=\lim\limits_{|x|\to+\infty}\frac{\ln|x|}{x}=0$

(Δ) ذو المعادلة $y=2x-2$ م م م مائل لـ (C_f)

الوضعية النسبية لـ (C_f) و (Δ)

$f(x)-(2x-2)=\frac{\ln|x|}{x}$

$|x|=1$ تعني $\ln|x|=0$ تعني $x=1$ أو $x=-1$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$\ln\|x\|$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{\ln\|x\|}{x}$		$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	
الوضع النسبي		(C_f) تحت (Δ)		(C_f) فوق (Δ)		(C_f) تحت (Δ)		(C_f) فوق (Δ)	

نقطتا التقاطع لـ $(C_f),(\Delta)$ هما

$M_2(1,0)$ $M_1(-1,-4)$

ب) X يرفق بكل نتيجة سحب مجموع العددين

قيم X هي $\{3,2,1,0\}$

قانون احتمال X

x_i	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	$3/14$	$3/7$	$1/4$	$3/28$

$P(X=0)=\frac{C_4^2}{28}=\frac{6}{28}=\frac{3}{14}$ $0+0=0$

$P(X=1)=\frac{C_4^1\times C_3^1}{28}=\frac{12}{28}=\frac{3}{7}$ $0+1=1$

$P(X=2)=\frac{C_4^1\times C_1^1+C_3^2}{28}=\frac{7}{28}=\frac{1}{4}$ $\begin{cases}0+2=2\\1+1=2\end{cases}$

$P(X=3)=\frac{C_3^1\times C_1^1}{28}=\frac{3}{28}$ $1+2=3$

الأمل الرياضي

$E(X)=\sum_{i=1}^{n}p_ix_i=\frac{5}{4}$

$E(X^2)=\sum_{i=1}^{n}p_ix_i^2$

$=(0^2\times\frac{3}{4})+(1^2\times\frac{3}{7})+(2^2\times\frac{1}{4})+(3^2\times\frac{3}{28})$

$E(X^2)=\frac{67}{28}$

التمرين الرابع 08ن

I) $g(x)=2x^2+1-\ln|x|$

$D=]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$

① دراسة تغيرات g

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} x^2\left[2+\frac{1}{x^2}-\frac{\ln(-x)}{(-x)^2}\right]=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left[2+\frac{1}{x^2}-\frac{\ln x}{x^2}\right]=+\infty$

$\lim\limits_{x\to0^<} g(x)=\lim\limits_{x\to0^<} 2x^2+1-\ln(x)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to0^>} g(x)=+\infty$

من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$

$g'(x)=4x-\frac{1}{x}=\frac{4x^2-1}{x}=\frac{(2x-1)(2x+1)}{x}$

g متناقصة تماما على $]-\infty,-\frac{1}{2}]$ و $]0,\frac{1}{2}]$

x	$-\infty$		$-1/2$		0		$1/2$		$+\infty$
$4x^2-1$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
x		$-$		$-$	‖	$+$		$+$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	

و متزايدة تماما على $[-\frac{1}{2},0[$ و $[\frac{1}{2},+\infty[$

x	$-\infty$		$-1/2$		0		$1/2$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	$2{,}19$	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$2{,}19$	↗	$+\infty$

إذن $2020^{3n+1}+1962^{3n+1}+1954^{3n+1}\equiv4+2+1\,[7]$

$\equiv0\,[7]$

④ من أجل كل عدد طبيعي n:

$S_n=1+5+5^2+\dots+5^n$ مجموع $n+1$ حد من متتالية هندسية

$=1\,\frac{5^{n+1}-1}{5-1}$

$S_n=\frac{5^{n+1}-1}{4}$

ومنه $4S_n=5^{n+1}-1$

ب) a عدد صحيح:

$S_n\equiv2a\,[7]$ إذا وفقط إذا $4S_n\equiv a\,[7]$

① إذا كان $4S_n\equiv a\,[7]$ فإن $8S_n\equiv2a\,[7]$

و $8\equiv1\,[7]$ فإن $S_n\equiv2a\,[7]$

② إذا كان $S_n\equiv2a\,[7]$ فإن $4S_n\equiv8a\,[7]$

و $8\equiv1\,[7]$ فإن $4S_n\equiv a\,[7]$

نستنتج أن $S_n\equiv2a\,[7]$ إذا وفقط إذا $4S_n\equiv a\,[7]$

ج) استنتاج باقي قسمة S_{2020} على 7.

لدينا $4S_n=5^{n+1}-1$

ومنه $4S_{2020}=5^{2021}-1$

كما $2021=6(336)+5$ الشكل $6k+5$

إذن $4S_{2020}\equiv3-1\,[7]$

$\equiv2\,[7]$

$4S_{2020}\equiv2\,[7]$ يكافئ $S_{2020}\equiv4\,[7]$

حسب (ب) و الباقي هو: 4

التمرين الثالث 04ن

6 بيضاء ← $2,1,1,0,0,0$

2 سوداء ← $1,0$

8

① نسحب كرتين على التوالي دون إرجاع

عدد الحالات $A_8^2=56$

حساب الاحتمال

A: نفس اللون

$P(A)=\frac{A_6^2+A_2^2}{56}=\frac{4}{7}$

B: جداء العددين المسجلين معدوم

$P(B)=\frac{A_4^2+A_4^1\times A_4^1\times2}{56}$ $\begin{cases}0\times0=0\\0\times \text{عدد}=0\end{cases}$

$=\frac{11}{14}$

② نسحب كرتين في آن واحد

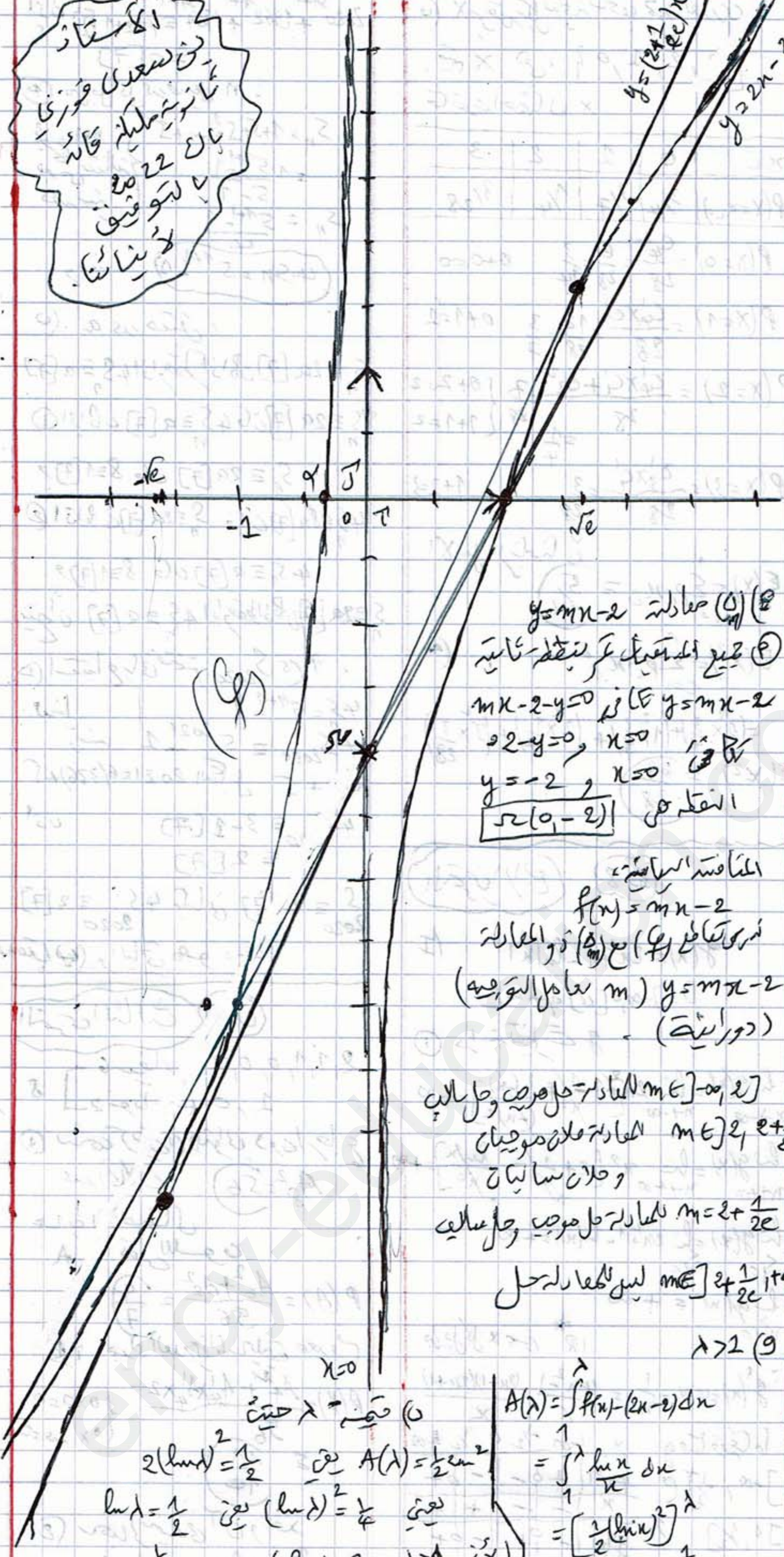
عدد الحالات $C_8^2=28$

C: مجموع العددين يكون أوليا

$P(C)=\frac{C_4^1\times C_1^1+C_3^2+C_3^1\times C_1^1}{28}$ $\begin{cases}0+2=2\\1+1=2\\1+2=3\end{cases}$

$=\frac{5}{14}$

الأستاذ بن سعدي فوزي
ثانوية مليكة قايد
باب 22 مع
التوفيق
لأبنائنا



4) من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$،

$f(-x)+f(x)=\cancel{-2x}-2-\frac{\ln|x|}{x}+\cancel{2x}-2+\frac{\ln|x|}{x}$

$=-4$

إذن النقطة $(0,-2)$ مركز تناظر (C_f)

5) (C_f) يقبل مماسا يمر بالنقطة Ω

$y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

$-2=f'(x_0)(0-x_0)+f(x_0)$

لدينا

$f(x_0)=2x_0-2+\frac{\ln|x_0|}{x_0}$

$f'(x_0)=\frac{2x_0^2+1-\ln|x_0|}{x_0^2}$

$-2=\frac{2x_0^2+1-\ln|x_0|}{x_0^2}(-x_0)+2x_0-2+\frac{\ln|x_0|}{x_0}$

$\cancel{-2}=\frac{-2x_0^2-1+\ln|x_0|}{x_0}+2x_0-\cancel{2}+\frac{\ln|x_0|}{x_0}$

$0=\frac{\cancel{-2x_0^2}-1+\ln|x_0|+\cancel{2x_0^2}+\ln|x_0|}{x_0}$

$\frac{2\ln|x_0|-1}{x_0}=0$

يعني $2\ln|x_0|-1=0$ يعني $\ln|x_0|=\frac{1}{2}$

أي $|x_0|=e^{\frac{1}{2}}$ يعني $\begin{cases} x_0=\sqrt{e} \\ x_0=-\sqrt{e} \end{cases}$

النقطتان هما

$M_1(\sqrt{e}, 2\sqrt{e}-2+\frac{\sqrt{e}}{2e})$ $M_2(-\sqrt{e}, -2\sqrt{e}-2+\frac{\sqrt{e}}{2e})$

المعادلة (T): $f'(\sqrt{e})=2+\frac{1}{2e}$

$y=(2+\frac{1}{2e})(x-\sqrt{e})+2\sqrt{e}-2+\frac{\sqrt{e}}{2e}$

$\boxed{y=(2+\frac{1}{2e})x-2}$

x	0	$\sqrt{e}$
y	-2	$1,6$

6) $f(x)=0$ تقبل حلين.

(*) f مستمرة ومتزايدة تماما على $]0,+\infty[$

$f(1)=0$ إذن 1 حل وحيد على $]0,+\infty[$

(*) f مستمرة ومتزايدة تماما على $[-0,37;-0,36]$

$f(-0,36)=0,1179$ $f(-0,37)=-0,052$

$f(-0,37)\times f(-0,36)<0$

حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ لها حل وحيد $-0,37<\alpha<-0,36$ يحقق $f(\alpha)=0$

7) الرسم

نقط مساعدة.

x	-3	-2	-1	1	2	3
$f(x)$	$-8,4$	$-6,3$	-4	0	$2,35$	$4,37$

8) (Δ_m) معادلة $y=mx-2$

أ) جميع المستقيمات تمر بنقطة ثابتة

$y=mx-2$ أي $mx-2-y=0$

تكافئ $x=0$ و $-2-y=0$

$x=0$ و $y=-2$

النقطة هي $\boxed{\Omega(0,-2)}$

المناقشة البيانية:

$f(x)=mx-2$

ندرس تقاطع (C_f) مع (Δ_m) ذو المعادلة $y=mx-2$ (m معامل التوجيه) (دورانية).

$m\in]-\infty,2]$ المعادلة حل موجب وحل سالب

$m\in]2, 2+\frac{1}{2e}[$ المعادلة حلان موجبان وحلان سالبان

$m=2+\frac{1}{2e}$ المعادلة حل موجب وحل سالب

$m\in]2+\frac{1}{2e},+\infty[$ ليس للمعادلة حل

9) $\lambda>1$

$A(\lambda)=\int_1^\lambda f(x)-(2x-2)\,dx$

$=\int_1^\lambda \frac{\ln x}{x}\,dx$

$=\left[\frac{1}{2}(\ln x)^2\right]_1^\lambda$

$=\frac{1}{2}(\ln\lambda)^2-\frac{1}{2}(\ln 1)^2$

$A(\lambda)=\frac{1}{2}(\ln\lambda)^2\ u.a$

و بـ cm^2 نجد

$A(\lambda)=4\times\frac{1}{2}(\ln\lambda)^2=2(\ln\lambda)^2cm^2$

ب) تعيين λ حيث

$A(\lambda)=\frac{1}{2}cm^2$ يعني $2(\ln\lambda)^2=\frac{1}{2}$

يعني $(\ln\lambda)^2=\frac{1}{4}$ يعني $\ln\lambda=\frac{1}{2}$

(لأن $\lambda>1$, $\ln\lambda>0$) يعني $\lambda=e^{\frac{1}{2}}$

$\boxed{\lambda=\sqrt{e}}$

تصحيح الاختبار التجريبي في الرياضيات
3 ت ر
الموضوع الثاني.

التمرين الأول (04,5)

$u_1=\sqrt{e}$ و $u_{n+1}=\frac{2}{3}u_n+\frac{1}{3}n+1$

① $u_2=\frac{2}{3}u_1+\frac{1}{3}+1=2,43$

$u_3=\frac{2}{3}u_2+\frac{2}{3}+1=3,29$

$u_4=\frac{2}{3}u_3+\frac{3}{3}+1=4,19$

التخمين: (u_n) متزايدة

② أ) البرهان بالتراجع: $n\geq 1$: $u_n\leq n+3$

$n=1$: $u_1=\sqrt{e}$

$1+3=4$

$\sqrt{e}\leq 4$ و $P(1)$ صحيحة

نفرض $P(n)$ صحيحة: $u_n\leq n+3$

نبرهن صحة $P(n+1)$: $u_{n+1}\leq n+4$ ؟

لدينا $u_n\leq n+3$ ومنه $\frac{2}{3}u_n\leq\frac{2}{3}n+2$

منه $\frac{2}{3}u_n+\frac{1}{3}n+1\leq\frac{2}{3}n+2+\frac{1}{3}n+1$

منه $u_{n+1}\leq n+3$

و $n+3<n+4$

إذن $u_{n+1}\leq n+4$

من أجل كل عدد طبيعي $n\geq 1$; $u_n\leq n+3$

ب) من أجل كل $n\geq 1$

$u_{n+1}-u_n=\frac{2}{3}u_n+\frac{1}{3}n+1-u_n$

$=-\frac{1}{3}u_n+\frac{1}{3}n+1$

$=\frac{1}{3}(n+3-u_n)$

لدينا $u_n\leq n+3$ يعني $n+3-u_n\geq 0$

ومنه $u_{n+1}\geq u_n$ أي (u_n) متزايدة

③ من أجل كل $n\geq 1$: $v_n=u_n-n$

(v_n) هندسية يعني $v_{n+1}=v_n\times q$

$v_{n+1}=u_{n+1}-(n+1)$

$=\frac{2}{3}u_n+\frac{1}{3}n+\cancel{1}-n-\cancel{1}$

$=\frac{2}{3}u_n-\frac{2}{3}n$

$=\frac{2}{3}(u_n-n)=\frac{2}{3}v_n$

(v_n) هندسية أساسها $q=\frac{2}{3}$, حدها الأول $v_1=u_1-1=\sqrt{e}-1$

تبيان أن $u_n=n+(\sqrt{e}-1)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ ؟

لدينا أن $v_n=v_1\times q^{n-1}$

$=(\sqrt{e}-1)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

أي $v_n=u_n-n$ ومنه $u_n=v_n+n$

$u_n=n+(\sqrt{e}-1)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

④ $S_n=\frac{2}{3}v_1+\left(\frac{2}{3}\right)^2v_2+\dots+\left(\frac{2}{3}\right)^n v_n$

نضع $w_n=\left(\frac{2}{3}\right)^n v_n$

لدينا $w_{n+1}=\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}v_{n+1}$

$=\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\times\frac{2}{3}v_n$

$=\left(\frac{2}{3}\right)^{n}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}v_n$

$=\frac{4}{9}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^n v_n\right]=\frac{4}{9}w_n$

(w_n) هندسية أساسها $q'=\frac{4}{9}$ حدها الأول $w_1=\frac{2}{3}v_1=\frac{2}{3}(\sqrt{e}-1)$

$S_n=w_1+w_2+\dots+w_n$

$=w_1\left[\frac{1-q'^n}{1-q'}\right]$

$=\frac{2}{3}(\sqrt{e}-1)\left[\frac{1-\left(\frac{4}{9}\right)^n}{1-\frac{4}{9}}\right]$

$S_n=\frac{6}{5}(\sqrt{e}-1)\left(1-\left(\frac{4}{9}\right)^n\right)$

$S'_n=u_1+u_2+\dots+u_n$ $[u_n=v_n+n]$

$=(v_1+1)+(v_2+2)+\dots+(v_n+n)$

$=(v_1+v_2+\dots+v_n)+(1+2+\dots+n)$ حسابية

$=v_1\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right)+\frac{n(n+1)}{2}$

$=(\sqrt{e}-1)\left(\frac{1-(2/3)^n}{1-2/3}\right)+\frac{n(n+1)}{2}$

$S'_n=3(\sqrt{e}-1)\left(1-(2/3)^n\right)+\frac{n(n+1)}{2}$

$\lim_{n\to+\infty}T_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{S'_n}{n^2}$

$=\lim_{n\to+\infty}\frac{3(\sqrt{e}-1)\left(1-(2/3)^n\right)}{n^2}+\frac{n(n+1)}{2n^2}$

$=0+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

التمرين الثاني (04,5)

① (E) : $7y-3x=1$

أ) لدينا $PGCD(7,3)=1$, $1|1$

فإن المعادلة (E) تقبل حلولا في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$

ب) حل المعادلة (E)

لدينا $(1,2)$ حل لـ (E) لأن $7(1)-3(2)=1$ ومنه

$\begin{cases}7x-3y=1\\7(1)-3(2)=1\end{cases}$ أي $7x-3y=7(1)-3(2)$

نجد $7(x-1)=3(y-2)$

$7|3(y-2)$ و $PGCD(7,3)=1$

حسب غوص $7|y-2$ أي $y-2=7k$

ومنه $y=7k+2$

و $7(x-1)=3(7k)$ أي

$x-1=3k$ ومنه $x=3k+2$

$S=\{(3k+1,7k+2),k\in\mathbb{Z}\}$

ج) إذا كان (x,y) حلا لـ (E) هذا يعني $7x-3y=1$, حسب نظرية بيزو x و y أوليين فيما بينهما

② a,b عددان صحيحان تحققان (E') : $7a-3b=29$

أ) $PGCD(a,b)=d$

$\begin{cases}d|a\\d|b\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}d|7a\\d|3b\end{cases}$

ومنه $d|7a-3b$ أي $d|29$

منه $d\in\{1,29\}$

ب) الثنائيات الصحيحة (a,b) حيث

$\begin{cases}7a-3b=29\\d=29\end{cases}$

لدينا $d=29$ يعني يوجد a' و b' حيث $a=29a'$ و $b=29b'$ حيث $PGCD(a',b')=1$ و

$7(29a')-3(29b')=29$

أي $7a'-3b'=1$

ومن السؤال 1) ب) نجد

$a'=3k+1$, $b'=7k+2$

إذن $a=87k+29$

$b=203k+58$

$S=\{(87k+29,203k+58)/k\in\mathbb{Z}\}$

ج) $PPCM(a,b)=m$

$m=\frac{a\times b}{d}=\frac{29a'\times 29b'}{29}=29a'b'$

لدينا الجملة $\begin{cases}7a-3b=29\\ d=29\\ m=1044\end{cases}$ ومنه

$a'\times b'\times 29=1044$ يعني $\boxed{a'\times b'=36}$

$7a-3b=29$ يكافئ $\boxed{7a'-3b'=1}$

$a'\times b'=36$ يكافئ $a'=\frac{36}{b'}$ ومنه

$7\left(\frac{36}{b'}\right)-3b'=1$

يكافئ $\frac{-3b'^2+252}{b'}=1$

تكافئ $-3b'^2-b'+252=0$

$\Delta=3025$ ، $b'_1=9$ مقبول ، $b'_2=\frac{-28}{3}$ مرفوض

و $b'=9$ يكافئ $a'=4$ ومنه

$b=261$, $a=116$

$S=\{(116,261)\}$

③ حل في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ $\begin{cases}7a-3b=29\\ PGCD(a,b)=1\end{cases}$

$7a-3b=29$ يكافئ $7a=29+3b$

$7a\equiv 29[3]$ يكافئ $a\equiv 2[3]$

أي $\boxed{a=3\alpha+2}$ ومنه

أي $7(3\alpha+2)=29+3b$

أي $7(3\alpha)-15=3b$

$7\alpha-5=b$

$\boxed{b=7\alpha-5}$ $(\alpha\in\mathbb{Z})$

لدينا $PGCD(a,b)=1$

باستعمال خوارزمية اقليدس لدينا

$PGCD(a,b)=PGCD(b,r)$

$7\alpha-5=2(3\alpha+2)+\alpha-9$

$3\alpha+2=3(\alpha-9)+29$

$PGCD(7\alpha-5,3\alpha+2)=PGCD(\alpha-9,29)$

ولدينا $PGCD(a,b)=1$

معناه $PGCD(\alpha-9,29)=1$

أي $\alpha-9\not\equiv 0[29]$ أي $\alpha\not\equiv 9[29]$

$S=\{(3\alpha+2,7\alpha-5);\ \alpha\in\mathbb{Z},\ \alpha\not\equiv 9[29]\}$

التمرين ③ (4ن)

① $u_0=2$ و $u_{n+1}=2u_n-n$

برهان ... هو ⓟ: $u_n=2^n+n+1$

$u_{n+1}-2u_n=2^{n+1}+n+1+1-2(2^n+n+1)$

$=\cancel{2^{n+1}}+n+\cancel{2}-\cancel{2^{n+1}}-2n-\cancel{2}$

$=\boxed{-n}$

② $2u_{n+1}=u_n+2000$ و $v_n=\frac{1}{2}u_n-\alpha$

تعيين α حتى (P: $\alpha=1000$)

$v_{n+1}=\frac{1}{2}u_{n+1}-\alpha$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}u_n+1000\right)-\alpha$

$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}u_n+1000-2\alpha\right]$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}u_n-\alpha+1000-\alpha\right)$

$=\frac{1}{2}v_n+\frac{1000-\alpha}{2}$

(v_n) هندسية اساسها $q=\frac{1}{2}$ بشرط

$1000-\alpha=0$ ومنه $\alpha=1000$

③ تحديد حلول المعادلة

$\ln(2e^x-1)=2x$ هي (P) $S=\{0\}$

لدينا المعادلة معرفة حيث $2e^x-1>0$

أي $2e^x>1$ أي $e^x>\frac{1}{2}$

أي $x>\ln\frac{1}{2}$ ، $D=]\ln\frac{1}{2};+\infty[$

$\ln(2e^x-1)=2x$ تكافئ $2e^x-1=e^{2x}$

تكافئ $e^{2x}-2e^x+1=0$ أي

$(e^x-1)^2=0$ تكافئ $e^x-1=0$

أي $e^x=1$ أي $\boxed{x=0}$

④ $\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{e^x-3}{e^{2x}+7}\right)+x$

تساوي $\boxed{0 \mid 2}$ هي

$\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{e^x-3}{e^{2x}+7}\right)+x=$

$=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{e^x-3}{e^{2x}+7}\right)+\ln(e^x)$

$=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{e^x-3}{e^{2x}+7}\times e^x\right)$

$=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{e^{2x}-3e^x}{e^{2x}+7}\right)$

$=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{e^{2x}(1-3e^{-x})}{e^{2x}(1+7e^{-2x})}\right)$

$=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{1-3e^{-x}}{1+7e^{-2x}}\right)$

$=\ln 1=0$

التمرين الرابع (7ن)

I $g(x)=1+(1-x)e^x$ $D=]-\infty;+\infty[$

① دراسة تغيرات g

$\lim_{x\to-\infty}g(x)=\lim_{x\to-\infty}1+e^x-xe^x=1$

$\lim_{x\to+\infty}g(x)=-\infty$

من اجل كل x من $\mathbb{R}$

$g'(x)=-e^x+(1-x)e^x=-xe^x$

اشارة $g'(x)$ من اشارة $-x$

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$			
$g(x)$	1	↗	2	↘	0	↘	$-\infty$

② لدينا g مستمرة ومتناقصة تماما على $[0;+\infty[$ و $2\times\lim_{x\to+\infty}g(x)<0$

حسب مبرهنة القيم المتوسطة

$g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في $[0;+\infty[$

③ لدينا $g(1{,}27)=0{,}038$

$g(1{,}28)=-0{,}007$

إذن $g(1{,}27)\times g(1{,}28)<0$

$g(\alpha)=0$ تحقق $1{,}27<\alpha<1{,}28$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

II $f(x)=\frac{e^x+x+1}{e^x+1}$

$D=]-\infty;+\infty[$

① $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x\left(1+\frac{x}{e^x}+\frac{1}{e^x}\right)}{e^x\left(1+\frac{1}{e^x}\right)}$

$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+xe^{-x}+\frac{1}{e^x}}{1+\frac{1}{e^x}}$

$=\boxed{1}$

$y=1$ معادلة م.م. أفقي

② $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x+x+1}{e^x+1}=-\infty$

$\lim_{x\to-\infty}f(x)-(x+1)=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x+x+1}{e^x+1}-(x+1)$

$=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x+\cancel{x}+\cancel{1}-xe^x-e^x-\cancel{x}-\cancel{1}}{e^x+1}$

$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-xe^x}{e^x+1}=0$

إذن (Δ) معادلته $y=x+1$ م.م. مائل لـ (C_f) عند $-\infty$

③ الوضع النسبي لـ (C_f) و (Δ)

$f(x)-(x+1)=\frac{-xe^x}{e^x+1}$

اشارتها من اشارة $-x$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$-x$	$+$	0	$-$
الوضع النسبي	(Cf) فوق (Δ)		(Cf) تحت (Δ)

(Cf) يقطع (Δ) في $A(0,1)$

الوضع النسبي لـ (Cf) و (Δ') ذو المعادلة $y=1$

$f(x)-1=\dfrac{x}{e^x+1}$ اشارته من اشارة x

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x	$-$	0	$+$
الوضع النسبي	(Cf) تحت (Δ')		(Cf) فوق (Δ')

(Cf) يقطع (Δ') في $A(0,1)$

4) أ) من أجل كل x من $\mathbb{R}$:

$$f'(x)=\frac{(e^x+1)(e^x+1)-e^x(e^x+x+1)}{(e^x+1)^2}$$

$$=\frac{e^{2x}+2e^x+1-e^{2x}-xe^x-e^x}{(e^x+1)^2}$$

$$=\frac{1+(1-x)e^x}{(e^x+1)^2}=\frac{g(x)}{(e^x+1)^2}$$

اشارة $f'(x)$ من اشارة $g(x)$

f متزايدة تماما على $]-\infty,\alpha]$

f متناقصة تماما على $[\alpha,+\infty[$

ب) $f(\alpha)=\alpha$ ؟

لدينا $f(\alpha)=\dfrac{e^\alpha+\alpha+1}{e^\alpha+1}$ و $g(\alpha)=0$

يعني $1+(1-\alpha)e^\alpha=0$ أي $(1-\alpha)e^\alpha=-1$

أي $e^\alpha=\dfrac{-1}{1-\alpha}=\dfrac{1}{\alpha-1}$

$$f(\alpha)=\frac{\frac{1}{\alpha-1}+\alpha+1}{\frac{1}{\alpha-1}+1}=\frac{\frac{\alpha^2}{\alpha-1}}{\frac{\alpha}{\alpha-1}}=\frac{\alpha^2}{\alpha}=\boxed{\alpha}$$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty \nearrow$	α	$\searrow 1$

5) أ) (Cf) يقطع حامل محور الفواصل في النقطة ذات الفاصلة $-\alpha$

$$f(-\alpha)=\frac{e^{-\alpha}-\alpha+1}{e^{-\alpha}+1}=\frac{\alpha-1-\alpha+1}{\alpha-1+1}=0$$

و $e^\alpha=\dfrac{1}{\alpha-1}$ يعني $\dfrac{1}{e^\alpha}=\alpha-1$ يعني $e^{-\alpha}=\alpha-1$

اذن (Cf) يقطع حامل محور الفواصل في النقطة $M(-\alpha,0)$

ب) (Cf) يقبل مماسا (T) في $M(-\alpha,0)$ يوازي (Δ)

$$f'(-\alpha)=\frac{g(-\alpha)}{(e^{-\alpha}+1)^2}=\frac{1+(1+\alpha)e^{-\alpha}}{(e^{-\alpha}+1)^2}=\frac{1+(1+\alpha)(\alpha-1)}{(e^{-\alpha}+1)^2}$$

$$f'(-\alpha)=\frac{\alpha^2}{(\alpha-1+1)^2}=\frac{\alpha^2}{\alpha^2}=\boxed{1}$$

(T) مماس (Cf) في $M(-\alpha,0)$ يوازي (Δ) لأن لهما نفس معامل التوجيه : 1

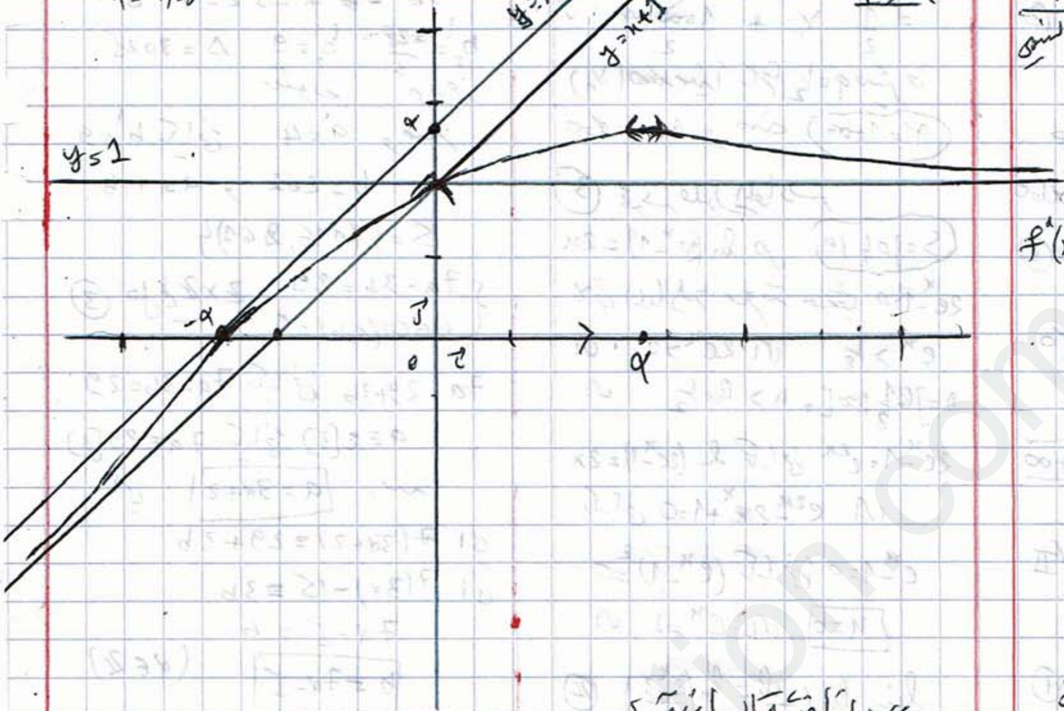
جـ) معادلة لـ (T)

x	$-\alpha$	0
y	0	α

$y=f'(-\alpha)(x+\alpha)+f(-\alpha)=\boxed{x+\alpha}$

$\alpha\simeq 1,28$

6) أ) الرسم



6) المناقشة البيانية :

$f(x)=x+f(m)$

ندرس تقاطع (Cf) مع المستقيم ذو المعادلة $y=x+f(m)$ الموازي لكل من (Δ) و (T)

* $f(m)<1$ يعني $m<0$ للمعادلة حل واحد موجب
* $f(m)=1$ يعني $m=0$ للمعادلة حل واحد معدوم
* $1<f(m)<\alpha$ أي $m\in]0,\alpha[\cup]\alpha,+\infty[$ للمعادلة حلين سالبين
* $f(m)=\alpha$ أي $m=\alpha$ للمعادلة حل مضاعف $x=-\alpha$

الأستاذ : بن لسعدي فوزي
ثانوية ملكية قايد - سكيكدة
سنة 2022م
بالتوفيق لأبنائنا

على المترشح ان يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأول

<u>التمرين الأول:</u> (4 0نقاط)

نعتبر في المجموعة z^2 المعادلة : $(E):5x-6y=3$

1– أ) أثبت أنه إذا كانت الثنائية (x,y)حلا للمعادلة (E) فإن x مضاعف للعدد 3.

ب) استنتج حلا خاصا للمعادلة (E) ثم حل في ^{2} المعادلة (E).

ج) استنتج حلول الجملة (S) : $\begin{cases} x \equiv -1[6] \\ x \equiv -4[5] \end{cases}$

2– a و b عددان طبيعيان حيث :

$a=\overline{1\alpha0\alpha00}$في النظام ذو الأساس 3 و $b=\overline{\alpha\beta0\alpha}$ في النظام ذو الأساس 5.

- عين α و β حتى تكون الثنائية $(a;b)$ حلا للمعادلة (E)

<u>التمرين الثاني:</u>(4 0نقاط)

يحتوي صندوق على ثلاث كريات بيضاء مرقمة من 1 إلى 3 ، و خمس كريات سوداء مرقمة من 1 إلى 5 لانفرق بينها عند اللمس. نسحب كريتين على التوالي و بدون إعادة الكرية المسحوبة إلى الصندوق.

1) نعتبر الحوادث التالية: A" سحب كريتين من نفس اللون "

B " سحب كريتين تحملان نفس الرقم " ، C " سحب كريتين مجموع رقميهما يساوي 7 "

أ ـ بين أن $p(A)=\frac{13}{28}$ ثم احسب: $p(B)$ و $p(C)$.

2) نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل سحب عدد الأرقام الزوجية المسحوبة.

أ ـ عرف قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X .

ب ـ احسب الأمل الرياضياتي $E(X)$ ثم التباين $v(X)$.

اقلب الصفحة

التمرين الثالث:(4.5 نقاط)

(u_n) متتالية معرفة على Nبـ: $u_0=\frac{3}{2}$ ومن أجل كل n من N : $u_{n+1}=\frac{6u_n-2}{u_n+3}$

1) أ ـ بين أنه من أجل كل n من N : $u_{n+1}=6-\frac{20}{u_n+3}$

ب ـ برهن بالتراجع أنه من أجل كل n من N : $\frac{3}{2}\le u_n\le 2$

ج ـ بين أن المتتالية (u_n)متزايدة تماما ثم استنتج أنها متقاربة.

2) أ ـ بين أنه من أجل كل n من N : $0\le 2-u_{n+1}\le\frac{8}{9}(2-u_n)$

ب ـ استنتج أنه من أجل كل n من N : $0\le 2-u_n\le\frac{1}{2}\times\left(\frac{8}{9}\right)^n$ ثم استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

التمرين الرابع: (7.50 نقاط)

I. لتكن g الدالة العددية المعرفة على $]-1;+\infty[$ بـ: $g(x)=\frac{x}{2}+(x+1)\ln(x+1)$.

1) ادرس تغيرات الدالة gعلى $]-1;+\infty[$ ثم شكل جدول تغيراتها.

2) احسب $g(0)$ و استنتج إشارة $g(x)$ تبعا لقيم x .

II. نعتبر الدالة f المعرفة على $]-1;+\infty[$ بـ: $f(x)=x^2\ln(x+1)$. و (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\>}}f(x)$ ثم فسر النتيجة بيانيا.

2) بين انه من اجل كل عدد حقيقي x من $]-1;+\infty[$: $f'(x)=\frac{2xg(x)}{x+1}$.

3) ادرس تغيرات الدالة ثم شكل جدول تغيراتها.

4) عين معادلة ل (T)مماس المنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0.

5) بين أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تحديدها.

6) احسب $f(1)$, $f(2)$ و أنشئ كلا من (C_f) و (T) .

I. hالدالة المعرفة على $\mathbb{R}^*$ ب : $h(x)=(x^2-2|x|+1)\ln|x|$.

1) احسب $h(-x)-h(x)$ ماذا تستنتج؟

2) بين انه من اجل كل عدد حقيقي xمن $\mathbb{R}^*$: $h(x)=f(|x|-1)$.

3) اشرح طريقة إنشاء التمثيل البياني (C_h)للدالة hانطلاقا من التمثيل البياني (C_f) ثم ارسمه.

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (4 نقاط)

1) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n، بواقي قسمة 3^n على 5 ثم بواقي قسمة 3^n على 11 .

2) حل في مجموعة الأعداد الصحيحة المعادلة : $11x-5y=2....(E)$.

3) حل في مجموعة الأعداد الطبيعية المعادلة : $6+3^{11n+1}\equiv 0[11]$.

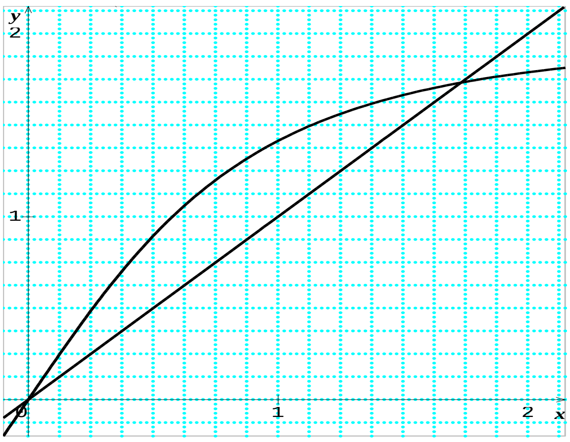
4) عين باقي قسمة 58^{145} على 55 .

5) بفرض $(x;y)$ هو حل من حلول المعادلة (E) حيث : $y>0$ و $x+2>0$.

عين الثنائيات $(x;y)$ التي من أجلها يكون : $PGCD(y\,;x+2)=12$.

التمرين الثاني: (4.50 نقاط)

الشكل المقابل هو التمثيل البياني (C) للدالة f المعرفة على المجال $[0,+\infty[$ بـ : $f(x)=\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$.



و (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y=x$ في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ) بقراءة بيانية عين اتجاه تغير الدالة f على المجال $[0,+\infty[$.

ب) بين أنه إذا كان $x\in[1,\sqrt{3}]$ فإن $f(x)\in[1,\sqrt{3}]$.

2) نعرف المتتالية (u_n) كما يلي : $u_0=1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=f(u_n)$.

أ) باستعمال التمثيل البياني (C) والمستقيم (Δ) مثل الحدود u_0 ، u_1 و u_2 على محور الفواصل دون حسابها مبرزا خطوط التمثيل ، ثم ضع تخمينا حول اتجاه تغير وتقارب المتتالية (u_n).

ب) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1<u_n<\sqrt{3}$.

ج) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}-u_n=\dfrac{u_n\left(2-\sqrt{u_n^2+1}\right)}{\sqrt{u_n^2+1}}$، ثم استنتج اتجاه تغير وتقارب المتتالية (u_n) .

3) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n=\dfrac{u_n^2}{3-u_n^2}$.

أ) برهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .

اقلب الصفحة

ب) أكتب عبارة v_n بدلالة n، ثم استنتج u_n بدلالة n. و أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

4)أحسب p_n بدلالة nحيث : $p_n=\dfrac{(u_0\times u_1\times.........u_n)^2}{(3-u_0^2)(3-u_1^2)........(3-u_n^2)}$.

التمرين الثالث: (04 نقاط)

كيس يحوي 10 كريات لا نفرق بينها عند اللمس موزعة كما يلي: خمس كريات حمراء مرقمة ب:1 ، 1 ،0، 2 ، 2 و خمس كريات خضراء مرقمة ب:0 ، 0 ، 1 ، 2،2. نسحب عشوائيا 4 كريات في آن واحد.

1)أحسب احتمال الأحداث التالية:

A " الحصول على أربع كريات من نفس اللون. "B " الحصول على أربع كريات أرقاما يمكن أن تشكل العدد 2020".

C " الحصول على أربع كريات مجموع أرقامها 4 ".

2) المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل نتيجة سحب الرقم الأصغر من بين الأربع أرقام التي تحملها الكرات المسحوبة

أ)عين قيم المتغير العشوائي X ،ثم عرّف قانون احتماله.

ب) أحسب الأمل الرياضياتي$E(X)$للمتغير العشوائي X .

ج) أحسب احتمال الحدث " $|X-1|\leq 1$"

التمرين الرابع: (7.50نقاط)

نعتبر الدالة f المعرفة على $R-\{0\}$ ب : $f(x)=2x+\dfrac{1}{e^x-1}$

(C_f)تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس$(O,\vec{i},\vec{j})$

1) حل في R المعادلة: $2e^{2x}-5e^x+2=0$ ثم ادرس إشارة $2e^{2x}-5e^x+2$

2) أ ـ احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)$ مع التفسير البياني.

ب ـ بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=2x$ مقارب مائل لـ(C_f)بجوار $+\infty$

ج ـ بين أن: $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-2x]=-1$ ثم استنتج معادلة للمستقيم(Δ') المقارب المائل الثاني لـ(C_f) .

د ـ ادرس وضعية (C_f) بالنسبة لكل من (Δ) و (Δ') .

3) أ ـ بين أنه من أجل كل x من $R-\{0\}$: $f'(x)=\dfrac{2e^{2x}-5e^x+2}{(e^x-1)^2}$

ب ـ حدد اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

4) بين أن النقطة $A\left(0;-\dfrac{1}{2}\right)$ مركز تناظر للمنحنى (C_f) .

5) أنشئ (Δ)،(Δ')و المنحنى (C_f) .

6) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي عدد حلول المعادلة: $f(x)=2x+m$. انتهى الموضوع الثاني.

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية

الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات

امتحان بكالوريا التعليم الثانوي

دورة: 2021

الشعبة: تقني رياضي

اختبار في مادة: الرياضيات

المدة: 04 سا و30 د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

المتتالية العددية (u_n) معرّفة بحدّها الأوّل u_0 حيث: $u_0=3$ ومن أجل كلّ عدد طبيعي n، $u_{n+1}=\frac{7}{9}u_n+1$

1) أ . برهن بالتراجع أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n ، $u_n<\frac{9}{2}$

ب. بيّن أنّ المتتالية (u_n) متزايدة تماما ثمّ استنتج أنّها متقاربة.

2) المتتالية العددية (v_n) معرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n=\frac{1}{3}u_n-\frac{3}{2}$

أ . بيّن أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{7}{9}$ ثمّ احسب حدّها الأوّل.

ب. اكتب عبارة الحدّ العام v_n بدلالة n

جـ. استنتج أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n ، $u_n=-\frac{3}{2}\left(\frac{7}{9}\right)^n+\frac{9}{2}$ ثمّ احسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

3) احسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S_n حيث: $S_n=\frac{1}{3}u_0+\frac{1}{3}u_1+\cdots+\frac{1}{3}u_n$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

لكلّ سؤال جواب واحد فقط صحيح من بين الأجوبة الثلاثة المقترحة، عيّنه مع التبريـر.

1) من أجل كلّ عدد طبيعي n نضع: $a=3n+2$ ، $b=5n+1$ و نضع: $d=PGCD(a;b)$

مجموعة القيم الممكنة لِ d هي: أ) $\{1;3\}$ ب) $\{1;7\}$ جـ) $\{1;5\}$

2) نضع: $A(\alpha)=\ln(e^{3\alpha}+e^{\alpha})+\ln(e^{4\alpha}+e^{2\alpha})+\ln(e^{5\alpha}+e^{3\alpha})$ ، حيث α عدد حقيقي.

من أجل كلّ عدد حقيقي α العبارة المبسطة لِ $A(\alpha)$ هي:

أ) $6\alpha+\ln(e^{2\alpha}+1)$ ب) $6+3\ln(e^{2\alpha}+1)$ جـ) $6\alpha+3\ln(e^{2\alpha}+1)$

3) حلّ المعادلة التفاضلية $y'=-2y+4$ الذي يحقق $y(0)=2021$ هو الدّالة h المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ:

أ) $h(x)=2019e^{-2x}+2$ ب) $h(x)=2019e^{2x}+2$ جـ) $h(x)=2021e^{-2x}-2$

4) المتتالية العددية (v_n) معرّفة من أجل كلّ عدد طبيعي n بـ: $v_n = \ln(n+2) - \ln(n+1)$

من أجل كلّ عدد طبيعي n ، المجموع $v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ يساوي:

أ) $-\ln(n+1)$ ب) $\ln(n+2)$ جـ) $1 - \ln(n+1)$

التمرين الثالث: (05 نقاط)

1) ادرس تبعا لقيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 5^n على 9

2) عيّن باقي القسمة الإقليدية للعدد 2021^{1442} على 9

3) بيّن أنّ العدد $2021^{1442} + 1691^{1954} - 8$ مضاعف للعدد 9

4) برهن أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n ، العدد $5^{6n} + 2021^{6n+1} + 1443$ مضاعف للعدد 9

5) من أجل كلّ عدد طبيعي n نضع: $A_n = 2021^{1442} + 1691^{1954} + 5n$

عيّن الأعداد الطبيعية n التي من أجلها يكون: $A_n \equiv 0[9]$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I) الدّالة العددية g معرّفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ: $g(x) = x^2 - 5 + e^{x-1}$

1) بيّن أنّ الدّالة g متزايدة تماما على $[0;+\infty[$

2) أ . بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاّ وحيدا α حيث: $1,71 < \alpha < 1,72$

ب. استنتج حسب قيم العدد الحقيقي الموجب x إشارة $g(x)$

II) الدّالة العددية f معرّفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ : $f(x) = x + 1 + (-x^2 - 2x + 3)e^{1-x}$

(C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1) أ . بيّن أنّه من أجل كلّ عدد حقيقي x من المجال $[0;+\infty[$: $f'(x) = g(x)e^{1-x}$

ب. استنتج أنّ الدّالة f متزايدة تماما على $[\alpha;+\infty[$ ومتناقصة تماما على $[0;\alpha]$

جـ. بيّن أنّ: $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ ثمّ شكّل جدول تغيّرات الدّالة f

2) بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x + 1$ مقارب مائل لـ (C) ثمّ ادرس وضعية (C) بالنسبة إلى (Δ)

3) بيّن أنّ (C) يقبل مماسا (T) موازيا لـ (Δ) في نقطة A يُطلب تعيين فاصلتها **(لا يطلب كتابة معادلة (T))**

4) أ . بين أنّ (C) يقبل نقطة انعطاف وحيدة فاصلتها $(1+\sqrt{6})$

ب. ارسم (Δ) ، (T) و (C) (نأخذ: $f(\alpha) \simeq 1,1$ ، $f(\sqrt{5}) \simeq 1,4$ و $f(1+\sqrt{6}) \simeq 3,1$)

5) الدّالة العددية h معرّفة على المجال $]-\infty;0]$ بـ: $h(x) = -x + 1 + (-x^2 + 2x + 3)e^{1+x}$

(C_h) تمثيلها البياني في المعلم السابق.

أ . تَحقّق أنّه من أجل كلّ عدد حقيقي x من المجال $]-\infty;0]$: $h(x) = f(-x)$

ب. اشرح كيفية رسم (C_h) انطلاقا من (C) ثمّ ارسمه.

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

نعتبر المعادلة: $(E) \cdots 13x-9y=1$ ، ذات المجهول $(x;y)$ حيث x و y عددان صحيحان.

1) أ . تحقّق أنّه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حلاً للمعادلة (E) فإن: $x \equiv 7[9]$

ب. استنتج حلول المعادلة (E)

2) أ . ادرس تبعا لقيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 5

ب. نضع: $A_n = 3^{4n} + 3^{4n+1} + 3^{4n+2} - 3$ حيث n عدد طبيعي.

بيّن أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n ، A_n يقبل القسمة على 5

3) بفرض أنّ $(x;y)$ حلّ للمعادلة (E) حيث x و y عددان طبيعيان.

عيّن قيم العدد الطبيعي n حتى يقبل العدد $n+3^{y-x}+2023^{2022}$ القسمة على 5

التمرين الثاني: (04 نقاط)

لكلّ سؤال جواب واحد فقط صحيح من بين الأجوبة الثلاثة المقترحة، عيّنه مع التبرير.

السؤال	الإجابة أ)	الإجابة ب)	الإجابة جـ)
1) الدّالة العددية f معرّفة على $\mathbb{R}$ بِـ : $f(x)=3x+\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$ هي دالة:	زوجية.	لا زوجية ولا فردية.	فردية.
2) الدّالة العددية g معرّفة على $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=\dfrac{(x-1)e^x-x+1}{e^x+1}$ و (C) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم. تكون: $y=x+a$ معادلة للمستقيم المقارب المائل لِـ (C) من أجل:	$a=1$	$a=-1$	$a=0$
3) العدد الطبيعي N يُكتب $\overline{3745}$ في نظام تعداد أساسه 8 ويُكتب $\overline{5\alpha15}$ في نظام تعداد أساسه 7 من أجل:	$\alpha=6$	$\alpha=5$	$\alpha=4$
4) β عدد حقيقي، تكون الأعداد: $e^\beta+1$ ، $e^\beta+2$ ، $2e^\beta$ بهذا الترتيب حدودا متتابعة لمتتالية هندسية من أجل β يساوي:	$\ln(\sqrt{5}-1)$	0	$\ln(1+\sqrt{5})$

التمرين الثالث: (05 نقاط)

المتتالية العددية (u_n) معرّفة بِـ: $u_0=3+e^{-2}$ ومن أجل كلّ عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=u_n^2-6u_n+12$

1) أ . تحقّق أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=(u_n-3)^2+3$

ب. برهن بالتراجع أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n ، $3<u_n<4$

2) أ . ادرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n)

ب. استنتج أنّ (u_n) متقاربة.

3) المتتالية العددية (v_n) معرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = \ln(u_n - 3)$

أ . بيّن أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها 2 يُطلب حساب حدّها الأوّل.

ب. اكتب v_n بدلالة n ثمّ استنتج أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n ، $u_n = 3 + e^{(-2^{n+1})}$

جـ. احسب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

4) نضع من أجل كلّ عدد طبيعي n: $P_n = (u_0 - 3)(u_1 - 3) \times \cdots \times (u_n - 3)$

احسب P_n بدلالة n

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I) الدّالة العددية g معرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $g(x) = 2\ln x - 1 - \dfrac{1}{x^2}$

1) بيّن أنّ الدّالة g متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$

2) أ . بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $1,89 < \alpha < 1,90$

ب. استنتج حسب قيم العدد الحقيقي الموجب تماما x إشارة $g(x)$

II) الدّالة العددية f معرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $f(x) = -x - 2 + \dfrac{3 + 2\ln x}{x}$

(C) التمثيل البياني للدّالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ (وحدة الطول $2cm$)

1) أ . احسب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)$ ثمّ فسّر النتيجة هندسيا.

ب. احسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

2) أ . بيّن أنّه من أجل كلّ x من $]0;+\infty[$: $f'(x) = \dfrac{1}{x^2} g\left(\dfrac{1}{x}\right)$

ب. بيّن أنّ الدّالة f متزايدة تماما على المجال $]0;\dfrac{1}{\alpha}]$ و متناقصة تماما على المجال $[\dfrac{1}{\alpha};+\infty[$

جـ. شكّل جدول تغيّرات الدّالة f

3) أ . احسب $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (-x-2)]$ ثمّ استنتج أنّ (C) يقبل مستقيما مقاربا (Δ) يُطلب كتابة معادلة له.

ب. ادرس وضعية المنحنى (C) بالنسبة إلى (Δ)

4) بيّن أنّ (C) يقبل نقطة انعطاف A فاصلتها 1 ثمّ اكتب معادلة لـ (T) مماس (C) عند A

5) ارسم (T)، (Δ) و (C) (نأخذ: $\dfrac{1}{\alpha} \simeq 0,53$ و $f(\dfrac{1}{\alpha}) \simeq 0,73$)

6) الدّالة h معرّفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $h(x) = |x| + 2 - \dfrac{3 + \ln(x^2)}{|x|}$ و (C_h) تمثيلها البياني في المعلم السابق.

أ . بيّن أنّ الدّالة h زوجية.

ب. تحقق أنّه من أجل كلّ عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$: $h(x) = -f(x)$

جـ. اشرح كيفية رسم (C_h) انطلاقا من (C) ثمّ ارسمه.

انتهى الموضوع الثاني

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية

مديرية التربية لولاية ميلة — ثانوية شهداء أحداث براق– قرارم قوقة

امتحان البكالوريا التجريبي للتعليم الثانوي — دورة ماي: 2021

الشعبة: رياضيات – تقني رياضي

اختبار في مادة :الرياضيات — المدة: 04 سا و 30 د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين :

الموضوع الأول

التمرين الأول :

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ :$u_1 = 3$ و $3u_{n+1} - u_n = 12$

1) أثبث بالتراجع أن من كل عدد طبيعي غير معدوم n : $u_n < 6$

2) استنتج أن المتتالية (u_n) متزايدة .

3) نعتبر المتتالية (V_n) المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ : $V_n = u_n - 6$

أ) بين أن (V_n) متتالية هندسية ،يطلب تعيين أساسها و حدها الأول ، ثم اكتب u_n بدلالة n.

ب) بين أن (u_n) متتالية متقاربة نحو عدد حقيقي يطلب تعيينه .

ج) احسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$

د) احسب قيمة الجداء P حيث : $P = v_1 \times v_2 \times \ldots \ldots \times v_{100}$

التمرين الثاني :

1) أ- حل في المجموعة $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ المعادلة (E) التالية : $8x - 5y = 3$

ب- ليكن m عددا صحيحا ولتكن الثنائية $(p\,;q)$ من الأعداد الصحيحة حيث : $m = 5q + 4$ و $m = 5p + 1$

- بين أن الثنائية $(\boldsymbol{p}\,;\boldsymbol{q})$ حل للمعادلة (E) و استنتج أن : $m \equiv 0[9]$

جـ - أوجد أصغر عدد صحيح m أكبر من أو يساوي 2000.

2) أ- برهن أن من أجل كل عدد طبيعي k فإن : $2^{3k} \equiv 1[7]$

ب- أوجد باقي قسمة العدد 2^{2021} على 7.

3) ليكن a و b عددان طبيعيان كلا منهما أقل أو يساوي9 حيث $a \neq 0$ ، نعتبر العدد الطبيعي N المكتوب بالشكل : $N = \overline{a00b}$ في النظام العشري .

أ) تحقق أن $10^3 \equiv -1[7]$

ب) استنتج كل الأعداد الطبيعية N التي تقبل القسمة على 7.

التمرين الثالث :

كيس يحتوي على 9 كريات لا نفرق بينها باللمس موزعة كما يلي :

خمس كريات حمراء مرقمة بـ : 2,2,2,1,1 وثلاث كريات خضراء مرقمة بـ : -3 ,3,2 وكرية بيضاء مرقمة بـ : -1

نسحب عشوائيا 4 كريات في آن واحد .

1) أحسب احتمال الحوادث التالية : A : " الحصول على أربع كريات من نفس اللون " .
B: " الحصول على كرية بيضاء على الأكثر " ، C : " الحصول على أربع كريات مجموع أرقامها معدوم ".

2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب عدد الكريات الخضراء المتبقية في الكيس .
أ. عين قيم المتغير العشوائي X ، ثم عرف قانون احتماله .
ب. احسب الأمل الرياضي $E(X)$ للمتغير X و التباين $V(X)$.
ت. احسب احتمال الحادثة : $\ll X^2 - X > 0 \gg$.

التمرين الرابع :

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بالعبارة : $f(x) = x - \frac{1}{e^{x}-1}$ و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(o, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1) أ- أحسب $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$
ب- أحسب $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ وفسر هندسيا النتيجة .

2) ادرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها .

3) أ- بين أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين مائلين (Δ) و (Δ') معادلتيهما على الترتيب : $y = x$ و $y = x + 1$
ب- أدرس وضعية (C_f) بالنسبة الى كل من (Δ) و (Δ').

4) أثبت أن النقطة $w\left(0،\frac{1}{2}\right)$ مركز تناظر للمنحنى (C_f) .

5) أ- بين أن (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين فاصلتيهما على الترتيب α و β حيث: $ln2 < \alpha < 1$ و $-1{,}4 < \beta < -1{,}3$
ب- هل توجد مماسات لـ : (C_f) توازي المستقيم (Δ) ؟
جـ - ارسم كل من (Δ) و (Δ') و المنحنى (C_f) ؟
د- ناقش بيانيا حسب قيمة الوسيط الحقيقي m عدد و اشارة حلول المعادلة : $(m-1)e^{-x} = m$

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول :

1) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد 3^n على 5.

2) u_0 و r عددان طبيعيان غير معدومين ، (u_n) متتالية حسابية حدها الأول u_0 و أساسها r.

أ. عين u_0 و r علما أن : u_0 و r أوليان فيما بينهما و $u_0^2 = u_{10} - u_1$

3) نفرض أن : $u_0 = 3$ و $r = 1$: نضع $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$ و $P_n = u_0 \times u_1 \times \ldots \times u_n$

أ. أحسب كلا من S_n و P_n بدلالة n .

ب. عين العدد الطبيعي q حيث : $2P_q = (2010)!$ ، ثم تحقق أن : $3^q \equiv 2[5]$

ت. عين العدد الطبيعي n بحيث : $2S_n + 2 \equiv 3^q[5]$

التمرين الثاني :

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_0 = 5$ و $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$

1) أ- أنشئ في معلم متعامد و متجانس $(o , \vec{i}, \vec{j})$ كل من المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ و المنحنى (C) الممثل للدالة f ، المعرفة على المجال $]-2; +\infty[$ بالعبارة : $f(x) = \sqrt{x+2}$

ب- أنشئ على محور الفواصل الحدود : $u_0 . u_1 . u_2 . u_3$ و u_4 دون حسابها، مع ابراز خطوط الرسم .

جـ - ما تخمينك حول اتجاه تغير وتقارب المتتالية (u_n)؟.

2) أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \geq 2$

ب- بين أن (u_n) متناقصة ، ثم استنتج أنها متقاربة .

جـ - بين أن النهاية ℓ للمتتالية (u_n) تحقق : $\ell \geq 2$ و $\ell = \sqrt{\ell + 2}$

د- استنتج قيمة ℓ .

التمرين الثالث :

I. C_1 و C_2 حجرا نرد متوازنان تحمل أوجه المكعب C_1 الأعداد :

0،0، $\frac{\pi}{3}$، $\frac{\pi}{3}$، $\frac{4\pi}{3}$، $\frac{4\pi}{3}$ وتحمل أوجه المكعب C_2 الأعداد : 0،0، $\frac{\pi}{6}$، $\frac{\pi}{6}$، $\frac{\pi}{2}$، $\frac{\pi}{2}$

نرمي الحجرين في آن واحد و نسجل العددين الظاهرين على الوجهين العلويين لـ : C_1 و C_2 حيث نرمز لهذين العددين بـ α و β.

ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل رمية العدد $\sin(\alpha + \beta)$

1) ما هي القيم الممكنة للمتغير X ، (يمكن تنظيم النتائج في جدول) .

2) عرف قانون احتمال المتغير X ، ثم احسب الأمل الرياضي $E(X)$ و الإنحراف المعياري $\sigma(X)$

.II نجري الآن اللعبة الآتية : يربح شخص $100\ DA$ عندما نرمي حجري النرد ويتحصل على$1 = \sin(\alpha+\beta)$
أو $\sin(\alpha+\beta) = -1$ ، و يخسر $50\ DA$ في باقي الحالات .
وليكن y المتغير العشوائي الذي يرفق بكل رمية الربح أو الخسارة .
1) عين قانون احتمال المتغير y .
2) نرمي حجري النرد 5 مرات ، ما احتمال أن يربح اللاعب ثلاث مرات ؟ .

التمرين الرابع :

لتكن f الدالة المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بالعبارة : $f(x) = x - \frac{2}{\sqrt{x+1}}$ و (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(o\ ,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1) أ- أحسب نهايات الدالة f
ب- أدرس اتجاه تغيرات الدالة f ، وشكل جدول تغيراتها .
2) أ- أثبث أن (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين أحدهما $(D): y = x$
ب- أدرس الوضعية النسبية للمنحنى (C_f) و المستقيم (D) .
3) أ- بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا x_0 حيث $1,3 < x_0 < 1,4$ ، ثم استنتج اشارة $f(x)$ على المجال $]-1, +\infty[$.
ب-عين معادلة المماس (Δ) للمنحنى (C_f) في نقطة تقاطعه مع محور التراتيب .

جـ - أنشئ (Δ) و (C_f).

4) نعرف على المجال $]-1, +\infty[$ الدالة g بـ : $g(x) = |f(x)|$ و (C_g) بيانها في المعلم السابق .
- اشرح كيفية انشاء المنحنى (C_g) ثم أرسمه في المعلم السابق.
5) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد واشارة حلول المعادلة $g(x) = m^2$.

أستاذ المادة يتمنى لكم التوفيق والسداد في شهادة البكالوريا

انتهى الموضوع الثاني

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين :

الموضوع الأول

التمرين الأول (4,5ن):

لتكن المعادلة (E_n) ذات المجهولين الصحيحين x و y التالية: $645x-195y=13^n-54n-1$ حيث $n\in\mathbb{N}$

1)أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الاقليدية للعدد 13^n على 15

2)عين مجموعة قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها المعادلة (E_n) تقبل حلول في $\mathbb{Z}^2$.

3)جد الحل الخاص (x_0,y_0) للمعادلة (E_2) بحيث : $x_0+y_0=4$ ثم حل المعادلة (E_2) في $\mathbb{Z}^2$.

4) N عدد طبيعي يكتب $\overline{\alpha\beta\alpha\beta\alpha}$ في النظام ذي الاساس6 ويكتب $\overline{\beta0444}$ في النظام ذي الاساس 5

عين قيمة العددين الطبيعيين α و β ثم أكتب N في النظام العشري.

التمرين الثاني (04 ن)

(u_n) و (v_n) متتاليتان معرفتان على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_0=\dfrac{1}{4}$

و من اجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}=3-\dfrac{10}{u_n+4}$ و $v_n=\dfrac{u_n+2}{1-u_n}$

1) أ) برهن بالتراجع على أنه من اجل كل عدد طبيعي n : $0<u_n<1$.

ب) أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم استنتج أنها متقاربة.

2) أ) بين أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\dfrac{5}{2}$.

ب) عبر عن v_n بدلالة n.

ج) اوجد عبارة u_n بدلالة n ثم أحسب $\lim u_n$.

3)أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n=\dfrac{3}{1-u_{2021}}+\dfrac{3}{1-u_{2022}}+\ldots\ldots\ldots\ldots+\dfrac{3}{1-u_{2021+n}}$

التمرين الثالث:(4,5 ن)

يحتوي كيس على 9 كريات لا نفرق بينها عند اللمس منها ثلاثة حمراء تحمل الارقام $1,0,1-$ وأربعة بيضاء تحمل الأرقام $1,1,0,1-$ وكرتين خضراء تحمل الأرقام $0,-1$ نسحب على التوالي وبدون ارجاع ثلاث كرات من الكيس.

1) أحسب احتمال الحوادث التالية:

A : سحب ثلاث كرات من نفس اللون.

B : سحب ثلاث كرات مجموع أرقامها معدوم.

2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب العدد الأصغر من بين الأعداد المسحوبة.

أ) عين قيم المتغير العشوائي X

ب) عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X .

ج)أحسب الأمل الرياضياتي $E(X)$.

التمرين الرابع (07 ن)

I. نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ ب : $g(x)=(-x^2-x+1)e^{-x}-1$

1) أدرس تغيرات الدالة g .

2) بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل على $\mathbb{R}$ حلين أحدهما معدوم والاخر α جيث $-1{;}6 \prec \alpha \prec -1{;}5$

3) حدد اشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II. نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=-x+(x^2+3x+2)e^{-x}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) أحسب نهاية الدالة f عند $+\infty$ و $-\infty$.

2) تحقق أنه من أجل $x\in\mathbb{R}$: $f'(x)=g(x)$ واستنتج اتجاه تغير f ثم شكل جدول تغيراتها.

3) بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=-x$ هو مقارب مائل للمنحنى (C_f) .

ثم أدرس الوضع النسبي بين (C_f) و (Δ) .

4) بين أن المنحني (C_f) يقبل نقطتي انعطاف يطلب تعيين احداثيتهما.

5) أنشئ على المجال $]-2{,}5;+\infty[$ كل من (Δ) و (C_f) (تعطى $f(\alpha)=0{;}3$)

6)نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h(x)=|x|+(x^2-3|x|+2)e^{|x|}$ وليكن (C_h) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

أ) برهن أن h دالة زوجية.

ب)اشرح كيفية انشاء المنحني (C_h) انطلاقا من (C_f) ثم ارسمه في نفس المعلم السابق.

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الاول (05 ن):

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ بحدها الأول $u_0 = 2$

و من اجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 3u_n + 4n - 4$

1)هل المتتالية (u_n) حسابية ؟أم هندسية؟ برر اجابتك

2) لتكن المتتالية (v_n) المعرفة على مجموعة الاعداد الطبيعية ب: $v_n = u_n + \alpha n + \beta$ حيث α و β عددين حقيقين

عين العددين الحقيقين α و β حتى تكون المتتالية (v_n) هندسية أساسها 3 يطلب تعيين حدها الأول.

3)نأخذ $\alpha = 2$ و $\beta = -1$ أحسب بدلالة n المجموع : $S_n = u_0 + u_1 + ...+ u_n$.

4)أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الاقليدية للعدد 3^n على 13 ثم استنتج باقي القسمة الاقليدية للعدد S_{2029} على 13.

5)عين باقي القسمة الاقليدية للعدد: $A = 2014^{2018} + 2015^{1919} + 2016^{2020} + 2018^{2021}$ على 13

التمرين الثاني:(4ن):

توجد اجابة صحيحة واحدة من بين الأجوبة المقترحة في كل حالة من الحالات التالية, اختر الاجابة الصحيحة مبررا اختيارك .

1)يحتوي كيس على n كرة حمراء و4 كرات بيضاء الكرات لا نفرق بينها عند اللمس نسحب من الكيس n كرة على التوالي مع اعادة الكرة المسحوبة الي الكيس بعد كل سحبة احتمال الحصول على كرة حمراء على الاقل هو:

أ) $1-\left(\frac{4}{4+n}\right)^n$ ب) $\left(\frac{4}{4+n}\right)^n$ ج) $\left(\frac{n}{n+4}\right)^n$

2) Z عدد مركب حيث : $Z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ العدد المركب Z^{2021} يساوي:

أ) $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ب) $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ج) $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

3) نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ ، النقط A ، B ، C

التي لواحقها على الترتيب : $z_A = 3 - 2i$ ، $z_B = 3 + 2i$ ، $z_C = 4i$ طبيعة الرباعي $OABC$ هي:

أ) مستطيل ب) معين ج) متوازي أضلاع.

4)حلول المتراجحة : $2\ln(-x+1) - 2 \leq 0$ في المجال $]-\infty;1[$ هي:

أ) $[e-1;1[$ ب) $]-\infty;-e+1]$ ج) $]-\infty;1[$

التمرين الثالث(4ن):

يحتوي كيس على 10 كريات متماثلة لا نفرق بينها عند اللمس منها أربعة بيضاء تحمل الارقام $1,1,2,3$ وثلاثة حمراء تحمل الأرقام $3,2,1$ وثلاثة خضراء تحمل الأرقام $1,1,3$

نسحب عشوائيا وفي أن واحد ثلاث كرات من الكيس.

1) أحسب احتمال الحوادث التالية:

A : الحصول على ثلاث كرات من نفس اللون B : الحصول على ثلاث كرات تحمل رقم فردي

C : الحصول على ثلاث كرات تحمل ألوان العلم الوطني.

2) بين أن : $P(A\cap B)=\frac{1}{60}$ ثم احسب $P(A\cup B)$

3) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحبة عدد الكريات التي تحمل الرقم الفردي .

أ) عين قيم المتغير العشوائي X

ب) عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X .

ج)أحسب الأمل الرياضياتي $E(X)$.

التمرين الرابع (07 ن)

I. نعتبر الدالة g المعرفة على $]-1;+\infty[$ بـــ : $g(x)=(x+1)^2-1+\ln(x+1)$

1) ادرس اتجاه تغيرات الدالة g على $]-1;+\infty[$.

2) أحسب $g(0)$ ثم استنتج اشارة $g(x)$ على المجال $]-1;+\infty[$

II. نعتبر الدالة f المعرفة على $]-1;+\infty[$ بـــ : $f(x)=x-\frac{\ln(x+1)}{x+1}$ وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) أحسب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) بين أنه من أجل كل x من $]-1;+\infty[$: $f'(x)=\frac{g(x)}{(x+1)^2}$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f .

3) بين أن المنحني (C_f) يقبل مماسا (T) معامل توجيهه 1 يطلب كتابة معادلته.

4) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-x$ وماذا تستنتج بيانيا؟

5) (Δ) مستقيم معادلته $y=x$ أدرس وضعية المنحني (C_f) بالنسبة الى (Δ).

6) أرسم (Δ) و (T) و (C_f).

7) m وسيط حقيقي ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة : $m(x+1)+\ln(x+1)=0$

انتهى الموضوع الثاني

وزارة التربية الوطنية

مديريتي التربية لولايتي أدرار و تيميمون　　　　ثانويات المقاطعة الأولى

الشعبة : تقنــي رياضــي　　　　دورة مـاي 2022

امتحان البكالوريا التجريبي في مادة الرياضيات　　　　المدة : أربع ساعات ونصف

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين :

الموضوع الأوّل :

التمرين الأول: (03 نقاط)

أجب بصح أو خطأ مع التبرير في كل حالة من الحالات التالية:

1) (u_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عددطبيعي n بـ: $u_n = \int_n^{n+1} e^{1-x}dx$

المجموع $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$ يساوي $e - \left(\frac{1}{e}\right)^n$

2) من أجل كل عدد طبيعي n : $4^{2n} + (-1)^{n+1} \equiv 0[17]$

3) باستعمال المكاملة بالتجزئة نجد أن : $\int_1^e x\ln x dx = \frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{2}$

4) N عدد طبيعي يكتب في نظام التعداد ذو الأساس 7 على الشكل $\overline{5616}^7$.

كتابة العدد الطبيعي N في نظام التعداد ذو الأساس 5 هي: $\overline{31042}^5$

التمرين الثاني: (05 نقاط)

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $\begin{cases} u_0 = 11 \\ u_{n+1} = 2 + \sqrt{u_n - 2} \end{cases}$

1) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $3 \le u_n \le 11$

2) أ) تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n - 2}\left(1 - \sqrt{u_n - 2}\right)$

ب) بيّن أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما ، ثم استنتج تقاربها .

3) أ) بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \le u_{n+1} - 3 \le \frac{1}{2}(u_n - 3)$

ب) استنتج أنه من أجل طل عدد طبيعي n : $0 \le u_n - 3 \le 8\left(\frac{1}{2}\right)^n$ ثم استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

4) لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = \ln(u_n - 2)$

أ) بيّن أن المتتالية (v_n) هندسية اساسها $\frac{1}{2}$ يطلب تعيين حدها الأول v_0 .

ب) اكتب كلا من v_n و u_n بدلالة n ثم استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ مرة ثانية.

5) احسب المجموع S حيث $S = v_{1443} + v_{1444} + ... + v_{2022}$

ثم استنتج الجداء P حيث $P = (u_{1443} - 2) \times (u_{1444} - 2) \times ... \times (u_{2022} - 2)$.

التمرين الثالث: (04 نقاط)

نعتبر المعادلة ذات المجهولين الصحيحين x و y حيث : $11x - 5y = 2........(E)$

1) أ) أثبت أنه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ من $\mathbb{Z}^2$ حلا للمعادلة (E) فإن : $y \equiv 4[11]$

ب) استنتج حلول المعادلة (E) .

2) ليكن n عددا طبيعيا غير معدوم . نضع : $a=5n+2$ و $b=11n+4$

أ) عين القيم الممكنة للقاسم المشترك الأكبر للعددين a و b

ب) عين قيم n بحيث يكون $PGCD(a;b)=2$

ج) استنتج قيم n بحيث يكون العددان a و b أوليين فيما بينهما .

3) أ) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي غير المعدوم n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 10

ب) استنتج رقم أحاد العدد 2^{2016}

ج) عين كل الثنائيات $(x;y)$ من $\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*$ التي هي حلول للمعادلة (E) وتحقق : $2^{y-2x} \equiv 8[10]$

التمرين الرابع: (08 نقاط)

I) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كمايلي: $g(x)=x+2-e^x$

1) ادرس اتجاه تغير الدالة g على المجال $]0;+\infty[$.

2) أ) بيّن أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $]0;+\infty[$ ،وتحقق أن : $1,14<\alpha<1,15$.

ب) استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم العدد الحقيقي x من المجال $]0;+\infty[$

II) نعّرف على المجال $]0;+\infty[$ الدالة العددية f كمايلي : $f(x)=\dfrac{e^x-1}{xe^x+1}$

(C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ الوحدة $\|\vec{i}\|=4Cm$

1) أ) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$: $f(x)=\dfrac{1-e^{-x}}{x+e^{-x}}$

ب) استنتج النهاية $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2) أ) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{e^x \times g(x)}{(xe^x+1)^2}$

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f على $]0;+\infty[$ ،ثم شكل جدول تغيراتها على نفس المجال

ج) بيّن ان : $f(\alpha)=\dfrac{1}{\alpha+1}$ ،ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

3) اكتب معادلة المماس (T) للمنحني (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0 .

4) أ) تحقق أنه من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $f(x)-x=\dfrac{(x+1)\times u(x)}{xe^x+1}$ ، حيث $(u(x)=e^x-xe^x-1)$.

ب) ادرس اتجاه تغيّر الدالة u على المجال $]0;+\infty[$ ثم احسب $u(0)$ واستنتج إشارة $u(x)$.

ج) استنتج وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (T)

5) انشئ كلا من المستقيم (T) والمنحني (C_f) (الوحدة $4Cm$)

6) أ) عيّن دالة أصلية F للدالة f على المجال $]0;+\infty[$.

ب) احسب مساحة الحيز المحدد بالمنحنى (C_f) و المماس (T) و محور التراتيب و المستقيم ذا المعادلة $x=1$

الموضوع الثّاني :

التمرين الأول: (03 نقاط)

f و g دالتان معرفتان على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$ و $g(x)=\dfrac{x^3}{1+x^2}$ ، F و G دالتاهما الأصليتان على $\mathbb{R}$.

و نعتبر $I_1=\int_0^1 f(x)dx$ ، $I_2=\int_0^1 g(x)dx$

في كل حالة من الحالات التالية عين الإقتراح الصحيح الوحيد من بين الإجابات (أ) ، (ب) و (ج) مع التعليل:

1) (أ) $F(x)=\ln(1+x^2)$ (ب) $F(x)=\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)$ (ج) $F(x)=2\ln(1+x^2)$

2) (أ) $I_1=\ln(2)$ (ب) $I_1=\dfrac{1}{2}\ln(2)$ (ج) $I_1=2\ln(2)$

3) (أ) $I_1+I_2=\int_0^1 xdx$ (ب) $I_1+I_2=\dfrac{1}{2}\int_0^1 xdx$ (ج) $I_1+I_2=2\int_0^1 xdx$

4) (أ) $I_2=1-\ln(2)$ (ب) $I_2=1-\dfrac{1}{2}\ln(2)$ (ج) $I_2=\dfrac{1}{2}(1-\ln(2))$

التمرين الثاني: (05 نقاط)

I) (u_n) المتتالية العددية المعرفة بحدها الأول u_0 حيث $u_0=\alpha$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=\dfrac{u_n-1}{u_n+3}$

- عيّن قيمة العدد الحقيقي α بحيث تكون المتتالية (u_n) ثابتة على $\mathbb{N}$

II) في ما يلي نضع $u_0=0$

1) عيّن العدد الحقيقي b بحيث يكون من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=1+\dfrac{b}{u_n+3}$

2) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $-1<u_n\leqslant 0$

3) أ) بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}-u_n=\dfrac{-(u_n+1)^2}{u_n+3}$ ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

ب) استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة .

4) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ بـ: $v_n=\dfrac{1}{u_n+1}$

أ) بيّن أن المتتالية (v_n) حسابية أساسها $\dfrac{1}{2}$ و احسب حدها الأول v_0

ب) اكتب عبارة v_n بدلالة n ،ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n واحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

5) احسب المجموع S حيث $S=\dfrac{8}{u_0+1}+\dfrac{8}{u_1+1}+\dots+\dfrac{8}{u_{2022}+1}$

التمرين الثالث: (04 نقاط)

1) ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 10

2) بيّن انه من أجل كل عدد طبيعي n : $1443^{4n+2}-2\times 109^{2n+1}-11\equiv 0[10]$

3) عيّن قيم العدد الطبيعي n حيث $7\times 3^{n+1}-1\equiv 0[10]$ و $10<n\leq 25$

4) ليكن A كتابته $\overline{xx02102}$ في النظام ذي الأساس 3 و كتابته $\overline{y67y}$ في النظام ذي الأساس 9 .

(أ) عيّن x و y (ب) اكتب A في النظام العشري (ج) اكتب A في النظام ذي الأساس 7

التمرين الرابع: (08 نقاط)

I) h دالة عددية ذات المتغير الحقيقي x و المعرفة على $\mathbb{R}^*$ ب: $h(x)=x^2-\ln x^2$

• ادرس اتجاه تغير الدالة h ، ثم استنتج أنه من اجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}^*$: $h(x)>0$

II) نعّرف على $\mathbb{R}^*$ الدالة العددية f كمايلي : $f(x)=\dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{\ln(x^2)}{x}-x-\dfrac{2}{x}\right)$

وليكن (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1) أ) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

ب) احسب $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}f(x)$ و $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}0}f(x)$ ثم فسر النتيجتين بيانيا

2) أ) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم: $f'(x)=-\dfrac{h(x)}{2x^2}$

ب) ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

ج) بيّن أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة : $y=-\dfrac{1}{2}x$ مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) ثم ادرس وضعية (C_f) بالنسبة لـ (Δ) .

3) أ) تحقق أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$: $-x\in\mathbb{R}^*$ و $f(x)+f(-x)=0$ و تستنتج شفعية الدالة f .

ب) بيّن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلاوحيدا α في المجال $]0,3;0,4[$.

ج) استنتج أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا آخر β يطلب تعيين حصرا له .

4) أ) بيّن أن المنحنى (C_f) يقبل مماسين (T_1) و (T_2) يوازيان المستقيم (Δ) يطلب كتابة معادلتيهما.

ب) انشئ (Δ) ، (T_1) ، (T_2) و (C_f)

ج) ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة : $f(x)=-\dfrac{1}{2}x+m$

5) لتكن k دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ بـ: $k(x)=\dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{\ln(x+1)^2}{x+1}-(x+1)-\dfrac{2}{x+1}\right)+2$ ، (C_k) تمثيلها البياني

⊕ بيّن أنه يوجد تحويل بسيط يحول المنحنى (C_k) إلى المنحنى (C_f) (الإنشاء غير مطلوب)

6) أ) بيّن أن الدالة F المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $F(x)=\dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{4}\left[\ln(x^2)\right]^2-2\ln|x|\right)$ هي دالة أصلة لـ f على $\mathbb{R}^*$

ب) λ عدد حقيقي حيث $\lambda>1$.احسب التكامل التالي $A(\lambda)=-\int_1^{\lambda}f(x)dx$ و احسب $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}A(\lambda)$

إختبار في مادة الرياضيات — المدة : 04 سا و30د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين

الموضوع الأول

التمرين الأول : (4 نقاط)

I نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_0 = 2$ و $u_{n+1} = \sqrt{2u_n}$.

- برهن بالتراجع أن المتتالية (u_n) ثابتة .

II نعتبر الآن المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_0 = 1$ و $u_{n+1} = \sqrt{2u_n}$.

1) أملء الجدول التالي (تعطى النتائج مقربة إلى 10^{-3}) .

n	0	1	2	3	4
u_n					

أذكر تخمينا يتعلق باتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها .

2) أ- برهن بالتراجع، أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، فإن $0 \prec u_n \leq 2$.

ب - استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم استنتج أنها متقاربة.

3) نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي $v_n = \ln(u_n) - \ln 2$.

أ- برهن أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$.

ب- أكتب v_n ثم u_n بدلالة n ثم عين $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

4) أحسب، بدلالة n ، المجموع : $S_n = \ln(u_0) + \ln(u_1) + ... + \ln(u_n)$ ثم استنتج الجداء : $P_n = u_0 \times u_1 \times ... \times u_n$

التمرين الثاني : (4 نقاط)

كيس يحتوي على 9 كريات لا نفرق بينها عند اللمس موزعة كما يلي:

خمس كريات حمراء مرقمة بـ : 1،1،2،2،2 و ثلاث كريات خضراء مرقمة بـ: 3، 2، -3 و كرية بيضاء تحمل الرقم -1.

1) نسحب عشوائيا أربع كريات و في آن واحد. أحسب احتمال الأحداث التالية:

A : " الحصول على اربع كريات تحمل نفس اللون".

B : "الحصول على كرية بيضاء على الأكثر".

C : "الحصول على أربع كريات مجموع أرقامها معدوم".

2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة سحب عدد الكريات الخضراء المتبقية في الكيس.

أ) عين قيم المتغير العشوائي X ثم عرف قانون احتماله.

ب) أحسب $E(X)$ الأمل الرياضياتي للمتغير العشوائي X .

ج) أحسب احتمال الحدث: " $X^2 - X > 0$ "

التمرين الثالث : (5 نقاط)

1/ حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E)........ $3x-2y=1$

2/ ليكن n عددا طبيعيا غير معدوم.

أ/ بين ان الثنائية $(14n+3;21n+4)$ حل للمعادلة (E) .

ب/ استنتج ان العددين $14n+3$ و $21n+4$ اوليان فيما بينهما.

3/ ليكن d هو القاسم المشترك الاكبر للعددين $2n+1$ و $21n+4$.

أ/ عين قيم d .

ب/ بين ان $n\equiv 6[13]$ يكافئ $d=13$.

4/ من اجل كل عدد طبيعي n و $n\geq 2$ نضع $a=28n^3-8n^2-17n-3$ و $b=21n^2-17n-4$.

أ/ بين ان a و b مضاعفان للعدد $(n-1)$.

ب/ عين حسب قيم n القاسم المشترك الاكبر للعددين a و b .

التمرين الرابع : (7 نقاط)

❶ g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x)=1-xe^{1-x}$

1) ادرس اتجاه تغير الدالة g .

2) استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x اشارة $g(x)$.

❷ نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=x+(x+1)e^{1-x}$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) أ / بين ان $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ ، ثم احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

ب / بين انه من اجل كل x من $\mathbb{R}$ $f'(x)=g(x)$ ، ثم ادرس اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها.

ج / إستنتج ان للمنحنى (C_f) نقطة انعطاف يطلب تعيين احداثييها.

2) أ / بين ان المستقيم (Δ) المعرف بالمعادلة $y=x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f).

ب / ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة الى المستقيم (Δ).

3) (T) المستقيم الذي معادلته $y=x+e$. بين ان (T) مماس للمنحنى (C_f) في نقطة يطلب تعيين احداثييها.

4) أ / بين ان المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث $-0.9\prec\alpha\prec-0.8$.

ب / أنشئ (Δ) و (T) ثم (C_f) .

ج / ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد واشارة حلول المعادلة $|m|=(x+1)e^{1-x}$.

الموضوع الثاني

التمرين الأول : (4 نقاط)

1) نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ كثير الحدود $P(z)=z^3-12z^2+48z-128$

أ) بين أن $P(z)$ يكتب على الشكل $P(z)=(z-8)(\alpha z^2+\beta z+\gamma)$ ، حيث α ، β ، γ أعداد حقيقية يطلب تعيينها.

ب) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z)=0$.

2) في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس ، نعتبر النقط A ، B ، C التي لواحقها على الترتيب هي :

$z_A=2-2\sqrt{3}i$ ، $z_B=2+2\sqrt{3}i$ ، $z_C=8$

أ) أحسب طويلة وعمدة العدد المركب $z_A=2-2\sqrt{3}i$ ، علم النقط A ، B ، C .

ب) أحسب $Z=\dfrac{z_A-z_C}{z_B-z_C}$ ثم عين طويلة وعمدة Z ، واستنتج طبيعة المثلث ABC .

التمرين الثاني : (5 نقاط)

يحتوي صندوق على 4 كرات خضراء ثلاثة منها تحمل العدد **1** و واحدة تحمل العدد **2** وكرتين حمراوين تحملان العددين **0** و **1−** .
كل الكرات متماثلة لا نفرق بينها في اللمس .

1/ نسحب عشوائيا من الصندوق كرتين على التوالي بالارجاع.

أ/ ما احتمال A " الحصول على كرتين جداء رقميهما سالب تماما ".

ب/ ما احتمال B " الحصول على كرة حمراء في السحب الثاني ".

2/ نقوم باستبدال الكرات الحمراء بـ n كرة بيضاء تحمل العدد **2** حيث $n \succ 1$ و نسحب من الصندوق عشوائيا كرتين على التوالي بدون ارجاع.

ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب مجموع العددين المسجلين على الكرتين .

أ/ عين قيم المتغير العشوائي ثم عرف قانون احتماله.

ب/ بين ان الامل الرياضياتي $E(X)=\dfrac{4n+10}{n+4}$.

ج/ عين اصغر قيمة للعدد الطبيعي n حيث يكون $E(X)\succ\dfrac{39}{10}$.

التمرين الثالث : (4 نقاط)

نعتبر في المجموعة Z^2 المعادلة : $(E)\ldots\ldots 5x-6y=3$

1) أ- أثبت أنه إذا كانت الثنائية (x,y) حلا للمعادلة (E) فإن : x مضاعف للعدد 3 .

ب- استنتج حلا خاصا للمعادلة (E) ، ثم حل في Z^2 المعادلة (E).

ج- استنتج حلول الجملة (S) : $\begin{cases} x \equiv -1[6] \\ x \equiv -4[5] \end{cases}$

د- حل الجملة (S) بطريقة أخرى ليست استنتاجية.

2) عين كل الثنائيات (x,y) حلول المعادلة (E) التي تحقق : $x^2 - y^2 \leq 56$

3) a و b عددان طبيعيان حيث : $a = \overline{1\alpha 0\alpha 00}$ في النظام ذو الأساس 3 و $b = \overline{\alpha\beta 0\alpha}$ في النظام ذو الأساس 5 .

- عين α و β حتى تكـون الثنائية (a,b) حلا للمعادلة (E).

التمرين الرابع : (7 نقاط)

I. g الدالة المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ : $g(x) = \dfrac{2x}{x+1} - \ln(x+1)$.

1) بين أن : $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} g(x) = -\infty$ ، ثم أحسب $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$.

2) أدرس تغيرات الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

3) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين أحدهما معدوم والآخر α يحقق : $3.9 \prec \alpha \prec 4$.

4) عين اشارة $g(x)$ حسب قيم x .

II. f الدالة المعرفة بـ $f(0) = 0$ ومن أجل كل عدد حقيقي x على المجال $]-1;+\infty[$ بـ $f(x) = \dfrac{(\ln(x+1))^2}{x}$ وليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) أ- بين أن : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x} = 1$ ثم فسر النتيجة هندسيا.

ب- بين أن : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ ثم فسر النتيجة هندسيا.

ج- أحسب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} f(x)$ وفسر النتيجة هندسيا.

2) بين أنه من أجل كل x على المجال $]-1;+\infty[$ فإن : $f'(x) = \dfrac{\ln(x+1)}{x^2} g(x)$

أ- عين اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

ب- بين أن : $f(\alpha) = \dfrac{4\alpha}{(\alpha+1)^2}$ ثم عين حصرا لـ $f(\alpha)$.

ج) أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند مبدأ المعلم.

د) أرسم المنحنى (C_f) و المماس (T).

بالتوفيق في شهادة البكالوريا 2021

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية

الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات

امتحان بكالوريا التعليم الثانوي التجريبي — دورة: **2021**

الشعبة: تقني رياضي — ثانوية مرسى الحجاج (وهران)

تصحيح اختبار مادة: الرياضيات — إعداد: الأستاذ قوعيش

الموضوع الأول

التمرين الأول : (04 نقاط)

1) نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E) ذات المجهول $(x;y)$ التالية : $(E)...2011x-1432y=31$

أ) بين أن العدد 2011 أولي .

لدينا $\sqrt{2011}\approx 44{,}8$ والعدد 2011 لا يقبل القسمة على أي عدد أولي من بين الأعداد الأولية الأصغر من 44

ب) باستعمال خوارزمية إقليدس عين حلا خاصا $(x_0;y_0)$ للمعادلة (E) ، ثم حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E).

لدينا :

$$579=2011-1\times 1432$$
$$274=1432-2\times 579$$
$$31=579-2\times 274$$

ومنه :
$$\begin{cases}31=579-2\times(1432-2\times 579)\\ =-2\times 1432+5\times 579\\ =-2\times 1432+5\times(2011-1\times 1432)\\ =5\times 2011-7\times 1432\end{cases}$$

بالمطابقة نجد $(x_0;y_0)=(5;7)$

لدينا : $\begin{cases}2011x-1432y=31\\ 2011x_0-1432y_0=31\end{cases}$ بالطرح نجد : $2011(x-x_0)=1432(y-y_0)$ أي : $2011(x-5)=1432(y-7)$.

لدينا $1432/2011(x-5)$ و 1432 أولي مع 2011 إذن حسب مبرهنة غوص $1432/x-5$

ومنه $x=1432k+5$ حيث $k\in\mathbb{Z}$ ، وبالتعويض في المعادلة (E) نجد : $y=2011k+7$

ومنه : $(x;y)=(1432k+5;2011k+7)$ حيث $k\in\mathbb{Z}$.

2) **أ)** عين حسب قيم العدد الطبيعي n باقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 7 ، ثم جد باقي القسمة الإقليدية للعدد $2011^{1432^{2012}}$ على 7 .

$2^0\equiv 1[7]$ ، $2^1\equiv 2[7]$ ، $2^2\equiv 4[7]$ ، $2^3\equiv 1[7]$ ومنه البواقي دورية ودورها 3 إذن من أجل كل عدد طبيعي k لدينا : $2^{3k}\equiv 1[7]$ ، $2^{3k+1}\equiv 2[7]$ ، $2^{3k+2}\equiv 4[7]$.

لدينا $2011\equiv 2[7]$ ومنه $2011^{1432^{2012}}\equiv 2^{1432^{2012}}[7]$

من جهة أخرى $1432 \equiv 1[3]$ ومنه $1432^{2012} \equiv 1^{2012}[3]$ أي $1432^{2012} \equiv 1^{2012}[3]$ ومنه $1432^{2012} = 3k' + 1$ حيث $k' \in \mathbb{N}$ إذن $2^{1432^{2012}} \equiv 2[7]$ ومنه $2011^{1432^{2012}} \equiv 2\ [7]$ إذن باقي القسمة الإقليدية للعدد $2011^{1432^{2012}}$ على 7 هو 2 .

ب) عين قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون : $2010^n + 2011^n + 1432^n \equiv 0[7]$.

لدينا $2010 \equiv 1[7] \Leftrightarrow 2010^n \equiv 1^n[7] \Leftrightarrow 2010^n \equiv 1[7]$

$2011 \equiv 2[7] \Leftrightarrow 2011^n \equiv 2^n[7]$

$1432 \equiv 4[7] \Leftrightarrow 1432^n \equiv 2^{2n}[7]$

ومنه $2010^n + 2011^n + 1432^n \equiv 1 + 2^n + 2^{2n}[7]$ إذن :

$$2010^n + 2011^n + 1432^n \equiv 0[7] \Leftrightarrow 1 + 2^n + 2^{2n} \equiv 0[7]$$
$$\Leftrightarrow 2^n + 2^{2n} \equiv -1[7]$$
$$\Leftrightarrow 2^n + 2^{2n} \equiv 6[7]$$

ليكن $k \in \mathbb{N}$

من أجل $n = 3k$: $2^n + 2^{2n} = 2^{3k} + 2^{3(2k)} \equiv 2[7]$ (مرفوض)

من أجل $n = 3k+1$: $2^n + 2^{2n} = 2^{3k+1} + 2^{2(3k+1)} = 2^{3k+1} + 2^{3(2k)+2} \equiv 6[7]$ (مقبول)

من أجل $n = 3k+2$: $2^n + 2^{2n} = 2^{3k+2} + 2^{2(3k+2)} = 2^{3k+2} + 2^{3(2k+1)+1} \equiv 6[7]$ (مقبول)

إذن قيم n هي : $n = 3k+1$ أو $n = 3k+2$ حيث $k \in \mathbb{N}$.

3) N عدد طبيعي يكتب $\overline{2\gamma\alpha\beta}$ في نظام التعداد ذي الأساس 9 حيث α ، β و γ تشكل حدودا متتابعة بهذا الترتيب لمتتالية حسابية متزايدة تماما و الثنائية $(\beta;\gamma)$ حل للمعادلة (E) .

أ) عين α ، β و γ .

$N = \overline{2\gamma\alpha\beta}^9 = \beta + \alpha\times 9 + \gamma\times 9^2 + 2\times 9^3 = \beta + 9\alpha + 81\gamma + 54$ مع الشروط : $\begin{cases} 0 \le \alpha < 9 \\ 0 \le \beta < 9 \\ 0 \le \gamma < 9 \end{cases}$

الثنائية $(\beta;\gamma)$ حل للمعادلة (E) معناه يوجد $k \in \mathbb{Z}$ بحيث : $\beta = 1432k + 5$ و $\gamma = 2011k + 7$

$$0 \le \beta < 9 \Leftrightarrow 0 \le 1432k + 5 < 9 \Leftrightarrow -\frac{5}{1432} \le k < \frac{4}{1432} \Leftrightarrow -0{,}0035 \le k < 0{,}0028$$

وبما أن $k \in \mathbb{Z}$ فإن $k = 0$ بالتعويض نجد $\beta = 5$ و $\gamma = 7$.

α ، β و γ تشكل حدودا متتابعة بهذا الترتيب لمتتالية حسابية متزايدة تماما معناه $\alpha + \gamma = 2\beta$ ومنه $\alpha = 2\beta - \gamma = 3$.

ب) أكتب N في النظام العشري .

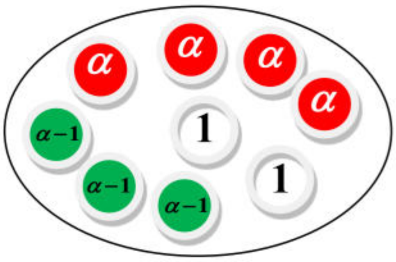
$$N = \beta + 9\alpha + 81\gamma + 54 = 2057$$

التمرين الثاني : (05 نقاط)

يحوي كيس على أربع كريات حمراء تحمل الرقم α و ثلاث كريات خضراء تحمل الرقم $\alpha - 1$ و كريتين بيضاوين تحملان الرقم 1 ، حيث α عدد طبيعي غير معدوم . الكريات متماثلة ولا نميز بينها عند اللمس .

نسحب عشوائيا من الكيس ثلاث كريات في آن واحد .

نعتبر الحوادث التالية : A " الحصول على كرية بيضاء على الأكثر" ، B "الحصول على ثلاث كريات تحمل نفس العدد" و C " الحصول على كريتين بالضبط تحملان الرقم $\alpha - 1$ " .



1) أ) أحسب إحتمال كل من الحوادث A ، B و C .

A " الحصول على كرية بيضاء على الأكثر"

نميز حالتين :

سحب 3 كريات من بينها واحدة بيضاء

سحب 3 كريات ولا توجد من بينها أي كرية بيضاء .

ومنه $P(A)=\dfrac{C_2^1\times C_7^2+C_7^3}{C_9^3}=\dfrac{11}{12}$

B "الحصول على ثلاث كريات تحمل نفس العدد"

نميز حالتين :

سحب 3 كريات لها نفس الرقم α .

سحب 3 كريات لها نفس الرقم $\alpha-1$.

ومنه $P(B)=\dfrac{C_4^3+C_3^3}{C_9^3}=\dfrac{5}{84}$

C " الحصول على كريتين بالضبط تحملان الرقم $\alpha-1$"

معناه سحب 3 كريات من بينها كريتين تحملان الرقم $\alpha-1$ أما الكرية الثالثة تحمل إما الرقم 1 أو الرقم α

ومنه $P(C)=\dfrac{C_3^2\times C_6^1}{C_9^3}=\dfrac{3}{14}$

ب) ما هو احتمال الحصول على ثلاث كريات تحمل ألوان العلم الوطني ؟

معناه سحب 3 كريات من 3 ألوان مختلفة مثنى مثنى ومنه :

$$P(D)=\frac{C_3^1\times C_2^1\times C_4^1}{C_9^3}=\frac{2}{7}$$

2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب مجموع الأرقام الظاهرة على الكريات الحمراء المسحوبة والذي يأخذ القيمة 0 إذا لم يتم سحب أي كرية حمراء .

أ) برر أن القيم الممكنة لـ X هي $\{0,\alpha,2\alpha,3\alpha\}$ ثم عرف قانون احتماله .

إذا لم يتم سحب أي كرية حمراء فإن $X=0$

إذا سحبنا كرية حمراء واحدة فإن $X=\alpha$

إذا سحبنا كريتين حمراوين فإن $X=\alpha+\alpha=2\alpha$

إذا كانت كل الكريات الثلاث حمراء فإن $X=\alpha+\alpha+\alpha=3\alpha$

ومنه $X\in\{0,\alpha,2\alpha,3\alpha\}$

$$P(X=0)=\frac{C_5^3}{C_9^3}=\frac{10}{84}$$

$$P(X=\alpha)=\frac{C_4^1\times C_5^2}{C_9^3}=\frac{40}{84}$$

$$P(X=2\alpha)=\frac{C_4^2\times C_5^1}{C_9^3}=\frac{30}{84}$$

$$P(X=3\alpha)=\frac{C_4^3}{C_9^3}=\frac{4}{84}$$

$X=X_i$	0	α	2α	3α
$P(X=X_i)$	$\frac{10}{84}$	$\frac{40}{84}$	$\frac{30}{84}$	$\frac{4}{84}$

ب) أحسب بدلالة α الأمل الرياضياتي $E(X)$ للمتغير العشوائي X ، ثم عين قيمة α من أجل $\left|E(X)-1\right|\leq 2$.

$$E(X)=0\times\frac{10}{84}+\alpha\times\frac{40}{84}+2\alpha\times\frac{30}{84}+3\alpha\times\frac{4}{84}=\frac{4}{3}\alpha$$

$$\left|E(X)-1\right|\leq 2\Leftrightarrow -2\leq E(X)-1\leq 2\Leftrightarrow -1\leq E(X)\leq 3\Leftrightarrow -1\leq\frac{4}{3}\alpha\leq 3\Leftrightarrow -\frac{3}{4}\leq\alpha\leq\frac{9}{4}\Leftrightarrow -0,75\leq\alpha\leq 1,25$$

بما أن α عدد طبيعي غير معدوم فإن $\alpha\in\{1;2\}$

التمرين الثالث : (04 نقاط)

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بحدها الأول $u_1=-2$ ، و من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n :

$u_{n+1}=\dfrac{3(n+1)u_n-(8n+12)}{n}$.

1) أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $u_n<0$.

من أجل $n=1$ لدينا $u_1=-2<0$ ومنه الخاصية صحيحة من أجل $n=1$.

نفرض أن $u_n<0$ ونبرهن أن $u_{n+1}<0$.

لدينا $u_n<0\Leftrightarrow 3(n+1)u_n<0$ لأنه $\forall n\in\mathbb{N}^*,3(n+1)>0$

كذلك $\forall n\in\mathbb{N}^*,8n+12>0$ ومنه $\forall n\in\mathbb{N}^*,-(8n+12)<0$

بالجمع نجد $3(n+1)u_n-(8n+12)<0$ وبما أن $n>0$ فإن $\dfrac{3(n+1)u_n-(8n+12)}{n}<0$ ومنه $u_{n+1}<0$

إذن الخاصية صحيحة من أجل $n+1$. ومنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $u_n<0$

ب) أثبت أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما .

لدينا $u_{n+1}-u_n=\dfrac{3(n+1)u_n-(8n+12)}{n}-u_n=\dfrac{3(n+1)u_n-(8n+12)-nu_n}{n}=\dfrac{(2n+3)(u_n-4)}{n}$

بما أنه $\forall n\in\mathbb{N}^*,u_n<0$ فإن $u_n<4$ ومنه $u_n-4<0$ وبما أن $n>0$ و $2n+3>0$ فإن $\dfrac{(2n+3)(u_n-4)}{n}<0$ ومنه $\forall n\in\mathbb{N}^*,u_{n+1}-u_n<0$ إذن (u_n) متناقصة تماما .

2) لتكن المتتالية العددية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n كما يلي : $v_n=\dfrac{4-u_n}{n}$.

أ) بين أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها 3 يطلب تعيين حدها الأول ، ثم عبر عن v_n بدلالة n .

$$v_{n+1}=\frac{4-u_{n+1}}{n}=\frac{4-\dfrac{3(n+1)u_n-(8n+12)}{n}}{n}=\frac{4n-3(n+1)u_n+8n+12}{n(n+1)}=\frac{-3(n+1)u_n+12(n+1)}{n(n+1)}$$

ومنه $v_{n+1}=\dfrac{-3u_n+12}{n}=3\left(\dfrac{4-u_n}{n}\right)=3v_n$ إذن المتتالية (v_n) هندسية أساسها 3 .

حدها الأول : $v_1=6$.

ب) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن : $u_n = 4-2n\times 3^n$ ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

لدينا $v_n = v_1\times q^{n-1} = 6\times 3^{n-1} = 2\times 3^n$ ومن جهة أخرى لدينا :

$$v_n = \frac{4-u_n}{n} \Leftrightarrow 4-u_n = nv_n \Leftrightarrow u_n = 4-nv_n = 4-2n\times 3^n$$

$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty} 3^n = +\infty \end{cases}$ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} 4-2n\times 3^n = -\infty$ ، لاحظ أن (u_n) متباعدة .

ج) أحسب بدلالة n الجداء : $P_n = (4-u_1)(4-u_2)...(4-u_n)$.

لدينا $\forall n\in\mathbb{N}^*, nv_n = 4-u_n$ ومنه :

$$P_n = (4-u_1)(4-u_2)...(4-u_n) = (1\times v_1)(2\times v_2)...(n\times v_n) = (1\times 2\times ...\times n)(v_1\times v_2\times ...\times v_n)$$

نعلم أن : $1\times 2\times ...\times n = n!$

$$v_1\times v_2\times ...\times v_n = 2.3^1\times 2.3^2\times ...\times 2.3^n = 2^n.3^{1+2+...+n} = 2^n.3^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

ومنه $P_n = n!2^n.3^{\frac{n(n+1)}{2}}$

3) لتكن المتتالية العددية (w_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n كما يلي : $w_n = \ln\left(\frac{n}{4-u_n}\right)$.

- عبر عن w_n بدلالة n ثم أحسب بدلالة n المجموع : $S_n = w_1+w_2+...+w_n$.

$$w_n = \ln\left(\frac{n}{4-u_n}\right) = \ln\frac{1}{v_n} = -\ln\left(2.3^n\right)$$

$$S_n = w_1+w_2+...+w_n = -\ln\left(2.3^1\right)-\ln\left(2.3^2\right)-...-\ln\left(2.3^n\right) = -\ln\left(2.3^1\times 2.3^2\times ...\times 2.3^n\right) = -\ln\left(2^n.3^{\frac{n(n+1)}{2}}\right)$$

التمرين الرابع : (07 نقاط)

I) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجموعة $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x) = (x+2)e^{x-2}-2$.

1) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{e^2}xe^x + \frac{2}{e^2}e^x - 2 = -2 \quad \begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty \quad \begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} x+2 = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^{x-2} = +\infty \end{cases}$$

2) أدرس إتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها .

$g'(x) = (x+3)e^{x-2}$ وإشارة $g'(x)$ من إشارة $x+3$ لأنه : $\forall x\in\mathbb{R}, e^{x-2} > 0$

ومنه الدالة g متناقصة تماما على المجال $]-\infty;-3]$ ومتزايدة تماما على المجال $[-3;+\infty[$

جدول التغيرات:

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
$g'(x)$		-	0	+	
$g(x)$	-2	↘	$-\frac{1}{e^5}-2$	↗	$+\infty$

3) أ) بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$ ، ثم تحقق من أن $1,45<\alpha<1,46$.

الدالة g لا تنعدم على المجال $]-\infty;-3]$ لأن $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-2<0$ و $g(-3)\approx-2,006<0$

بينما الدالة g مستمرة ورتيبة تماما على المجال $]-3;+\infty[$ ولدينا $g(-3)<0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-3;+\infty[$.

لدينا $g(1,45)\times g(1,46)\approx-0,0095\times0,0163<0$ ومنه $\alpha\in]1,45;1,46[$

ب) استنتج إشارة $g(x)$ تبعا لقيم العدد الحقيقي x .

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		-	0	+	

II) f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=x^2-x^2e^{x-2}$

نسمي (C_f) التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $f(x)=0$.

$$f(x)=0 \Leftrightarrow x^2\left(1-e^{x-2}\right)=0 \Leftrightarrow x^2=0 \text{ ou } 1-e^{x-2}=0$$

$$x^2=0 \Leftrightarrow x=0$$

$$1-e^{x-2}=0 \Leftrightarrow e^{x-2}=1 \Leftrightarrow x=2$$

ومنه حلول المعادلة هي $\{0;2\}$ ونستنتج أن المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين فاصلتاهما 0 و 2 .

2) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} x^2-\frac{1}{e^2}x^2e^x=+\infty \quad \begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty} x^2=+\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty} x^2e^x=0\end{cases}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x^2\left(1-e^{x-2}\right)=-\infty \quad \begin{Bmatrix}\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^{x-2}=+\infty\end{Bmatrix}$$

3) أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x)=-x.g(x)$. (f' هي الدالة المشتقة الأولى للدالة f)

$$f'(x)=2x\left(1-e^{x-2}\right)+x^2\left(-e^{x-2}\right)=x\left(2-2e^{x-2}-xe^{x-2}\right)=-x\left(xe^{x-2}+2e^{x-2}-2\right)=-x\left[(x+2)e^{x-2}-2\right]=-xg(x)$$

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها .

إشارة $f'(x)$ من إشارة الجداء $-x.g(x)$

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$-x$		+	0	-		-	
$g(x)$		-		-	0	+	
$f'(x)$		-	0	+	0	-	

الدالة f متناقصة تماما على المجالين $]-\infty;0]$ و $[\alpha;+\infty[$ ومتزايدة تماما على المجال $]0;\alpha[$

جدول التغيرات :

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$f(\alpha)$	↘	$-\infty$

ج) بين أن $f(\alpha)=\dfrac{\alpha^3}{\alpha+2}$ ، ثم أعط حصرا لـ $f(\alpha)$ حيث α هو العدد الحقيقي المعرف في الجزء I) .

$$g(\alpha)=0 \Leftrightarrow (\alpha+2)e^{\alpha-2}-2=0 \Leftrightarrow e^{\alpha-2}=\frac{2}{\alpha+2}$$

$$f(\alpha)=\alpha^2-\alpha^2e^{\alpha-2}=\alpha^2-\alpha^2.\frac{2}{\alpha+2}=\frac{\alpha^3}{\alpha+2}$$

$$1,45<\alpha<1,46 \Leftrightarrow 3,45<\alpha+2<3,46 \Leftrightarrow \frac{1}{3,46}<\frac{1}{\alpha+2}<\frac{1}{3,45}$$

$$1,45<\alpha<1,46 \Leftrightarrow 3,0486<\alpha^3<3,1121$$

ومنه $\dfrac{3,1121}{3,45}<\dfrac{\alpha^3}{\alpha+2}<\dfrac{3,0486}{3,46}$ أي $0,8811<f(\alpha)<0,9021$

4) ليكن (Γ) المنحنى الممثل للدالة $x\mapsto x^2$ على $\mathbb{R}$:

أ) بين أن $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-x^2\right]=0$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا .

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-x^2\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}-x^2e^{x-2}=\lim\limits_{x\to-\infty}-\dfrac{1}{e^2}x^2e^x=0$ ، ومنه (Γ) منحنى مقارب لـ (C_f) بجوار $-\infty$

ب) أدرس الوضعية النسبية للمنحنيين (C_f) و (Γ) .

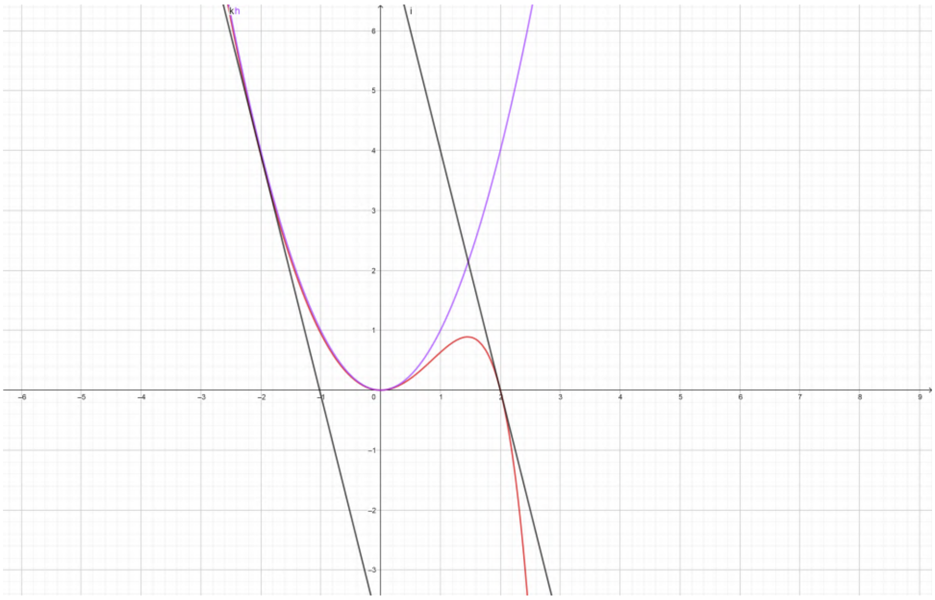
يكفي دراسة إشارة الفرق $f(x)-x^2$ أي $-x^2e^{x-2}$ وبما أن $\forall x\in\mathbb{R},e^{x-2}>0$ فإن إشارة $-x^2e^{x-2}$ من إشارة $-x^2$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$-x^2$		-	0	-	
الوضعية النسبية		(C_f) تحت (Γ)	تقاطع	(C_f) تحت (Γ)	

5) عين معادلة لكل من المماسين (T) و (T') لـ (C_f) عند النقطتين ذات الفاصلتين 2 و -2 على الترتيب .

$(T): y=-4x+8$ ، $(T'): y=-4x-4\left(1+\dfrac{1}{e^4}\right)$

6) أنشيء (T) ، (T') ، (Γ) و (C_f) .



7) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي الموجب تماما m عدد حلول المعادلة : $f(x)=-4x+\ln(m)$.

يكفي مناقشة عدد نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم $(d_m): y=-4x+\ln(m)$

الذي يوازي كلا من (T) و (T') ومنه :

من أجل $\ln(m)<-4\left(1+\dfrac{1}{e^4}\right)$ أي $0<m<e^{-4\left(1+\frac{1}{e^4}\right)}$ المعادلة تقبل حلا وحيدا في $\mathbb{R}$.

من أجل $\ln(m)=-4\left(1+\dfrac{1}{e^4}\right)$ أي $m=e^{-4\left(1+\frac{1}{e^4}\right)}$ المعادلة تقبل حلا مضاعفا وحلا بسيطا .

من أجل $-4\left(1+\dfrac{1}{e^4}\right)<\ln(m)<8$ أي $e^{-4\left(1+\frac{1}{e^4}\right)}<m<e^8$ المعادلة تقبل 3 حلول بسيطة .

من أجل $\ln(m)=8$ أي $m=e^8$ المعادلة تقبل حلا مضاعفا وحلا بسيطا .

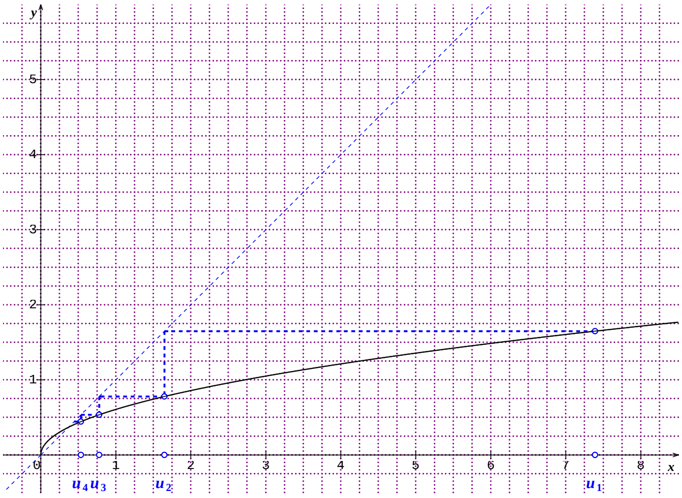
من أجل $\ln(m)>8$ أي $m>e^8$ المعادلة تقبل حلا وحيدا في $\mathbb{R}$.

انتهى تصحيح الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول : (05 نقاط)

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ : $f(x)=e^{-\frac{1}{2}}\sqrt{x}$.



(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ ، (الشكل المقابل) .

1) بين أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$

من البيان الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$

لدينا كذلك : $f'(x)=\dfrac{e^{-\frac{1}{2}}}{2\sqrt{x}}$ ومن أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$: $f'(x)>0$ إذن f متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$.

2) لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ : $u_1=e^2$ و من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n $u_{n+1}=f(u_n)$

أ) أنقل المنحنى المقابل ثم مثل الحدود الأربعة الأولى للمتتالية (u_n) على حامل محور الفواصل(دون حسابها) موضحا خطوط الإنشاء .

أنظر الشكل المقابل .

ب) أعط تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها .

لدينا من البيان $u_1>u_2>u_3>u_4$ ومنه (u_n) متناقصة تماما .

النقط M_1 ، M_2 ، M_3 و M_4 من المنحنى (C_f) ذات الفواصل u_1 ، u_2 ، u_3 و u_4 على الترتيب تتقارب نحو نقطة ثابتة A هي نقطة تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم ذي المعادلة $y=x$ ومنه (u_n) متقاربة نحو فاصلة النقطة A .

3) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $u_n>\dfrac{1}{e}$.

من أجل $n=1$ لدينا $u_1=e^2>\dfrac{1}{e}$ ومنه الخاصية صحيحة من أجل $n=1$

نفرض أن $u_n>\dfrac{1}{e}$ و نبرهن أن $u_{n+1}>\dfrac{1}{e}$

لاحظ أن : $u_{n+1}=e^{-\frac{1}{2}}\sqrt{u_n}=\dfrac{1}{\sqrt{e}}\sqrt{u_n}$

$u_n>\dfrac{1}{e}\Leftrightarrow\sqrt{u_n}>\sqrt{\dfrac{1}{e}}\Leftrightarrow\dfrac{1}{\sqrt{e}}\sqrt{u_n}>\dfrac{1}{\sqrt{e}}\sqrt{\dfrac{1}{e}}\Leftrightarrow u_{n+1}>\dfrac{1}{e}$ ومنه الخاصية صحيحة من أجل $n+1$

إذن من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $u_n>\dfrac{1}{e}$ ونستنتج أن (u_n) محدودة من الأسفل .

4) أ) أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

$$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{\sqrt{e}}\sqrt{u_n}-u_n=\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\sqrt{u_n}\right)^2-u_n^{\,2}}{\frac{1}{\sqrt{e}}\sqrt{u_n}+u_n}=\frac{u_n\left(\frac{1}{e}-u_n\right)}{\frac{1}{\sqrt{e}}\sqrt{u_n}+u_n}$$

بما أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $u_n > \frac{1}{e}$ فإن $u_n > 0$ ومنه $\sqrt{u_n} > 0$ إذن $\frac{1}{\sqrt{e}}\sqrt{u_n} + u_n > 0$

كذلك من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $\frac{1}{e} - u_n < 0$ ومنه $u_n\left(\frac{1}{e} - u_n\right) < 0$ إذن

$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} - u_n < 0$ ومنه (u_n) متناقصة تماما .

ب) برر تقارب المتتالية (u_n) ثم أوجد نهايتها .

بما أن (u_n) محدودة من الأسفل ومتناقصة تماما فهي متقاربة ، لإيجاد نهايتها نحل المعادلة $f(x) = x$

$f(x) = x \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{e}}\sqrt{x} = x \Leftrightarrow \frac{1}{e}x = x^2 \Leftrightarrow x\left(\frac{1}{e} - x\right) = 0$ ومنه $x = 0$ أو $x = \frac{1}{e}$ وبما أنه $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n > 0$

فإن $x = \frac{1}{e}$ ومنه $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \frac{1}{e}$

5) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ : $v_n = \frac{1}{2} + \ln\sqrt{u_n}$.

أ) برهن أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ ، يطلب تعيين حدها الأول .

$$v_{n+1} = \frac{1}{2} + \ln\sqrt{u_{n+1}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln u_{n+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln\left(e^{-\frac{1}{2}}\sqrt{u_n}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\ln e^{-\frac{1}{2}} + \ln\sqrt{u_n}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\ln\sqrt{u_n}$$

ومنه $v_{n+1} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\ln\sqrt{u_n} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \ln\sqrt{u_n}\right) = \frac{1}{2}v_n$ ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$.

حدها الأول : $v_1 = \frac{1}{2} + \ln\sqrt{u_1} = \frac{1}{2} + \ln\sqrt{e^2} = \frac{3}{2}$

ب) أكتب عبارتي v_n و u_n بدلالة n ثم أحسب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

$$v_n = v_1 . q^{n-1} = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 3\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$v_n = \frac{1}{2} + \ln\sqrt{u_n} \Leftrightarrow \ln\sqrt{u_n} = v_n - \frac{1}{2} \Leftrightarrow u_n = \left(e^{v_n - \frac{1}{2}}\right)^2 = e^{2v_n - 1} = e^{6\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}$$

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} e^{6\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1} = \frac{1}{e} \quad \begin{cases} \lim\limits_{n \to +\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0 \\ -1 < \frac{1}{2} < 1 \end{cases}$$

6) أحسب بدلالة n المجموع التالي : $S_n = \frac{1}{1 + \ln u_1} + \frac{1}{1 + \ln u_2} + ... + \frac{1}{1 + \ln u_n}$.

لدينا $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = e^{6\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}$ ومنه $\forall n \in \mathbb{N}^*, 1 + \ln u_n = 6\left(\frac{1}{2}\right)^n \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{1 + \ln u_n} = \frac{2^n}{6}$

إذن : $S_n = \frac{1}{1 + \ln u_1} + \frac{1}{1 + \ln u_2} + ... + \frac{1}{1 + \ln u_n} = \frac{2^1}{6} + \frac{2^2}{6} + ... + \frac{2^n}{6} = \frac{1}{6}\left(2^1 + 2^2 + ... + 2^n\right) = \frac{1}{6}.2\left(\frac{2^n - 1}{2 - 1}\right)$

ومنه $S_n = \frac{1}{3}\left(2^n - 1\right)$

التمرين الثاني : (04 نقاط)

1) أ) أنشر العبارة $(n+2)(3n^2 - 6n + 16)$ مع $n \in \mathbb{N}$.

$$(n+2)(3n^2 - 6n + 16) = 3n^3 + 4n + 32$$

ب) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، يكون العدد $3n^3+4n+32$ قابلا للقسمة على $n+2$.

بما أن $3n^3+4n+32=(n+2)k$ حيث $k=3n^2-6n+16$ و $k\in\mathbb{Z}$ فإن $n+2/3n^3+4n+32$

2) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $3n^2-6n+16$ هو عدد طبيعي غير معدوم .

لدينا $\Delta=-156<0$ ومنه $\forall n\in\mathbb{N},3n^2-6n+16>0$ وبما أن $3n^2-6n+16\in\mathbb{Z}$ فإن $3n^2-6n+16$ عدد طبيعي غير معدوم .

3) **أ)** بين أنه من أجل كل الأعداد الطبيعية غير المعدومة α ، β و γ ، تكون المساواة التالية صحيحة :

$PGCD(\alpha;\beta)=PGCD(\beta\gamma-\alpha;\beta)$.

نضع $PGCD(\alpha;\beta)=d$ و $PGCD(\beta\gamma-\alpha;\beta)=d'$

لدينا $\begin{cases} d/\alpha \\ d/\beta \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} d/\alpha \\ d/\beta\gamma \end{cases}$ بالطرح نجد $d/\beta\gamma-\alpha$

$\begin{cases} d/\beta \\ d/\beta\gamma-\alpha \end{cases}$ ومنه d قاسم مشترك للعددين β و $\beta\gamma-\alpha$ ومنه فهو يقسم القاسم المشترك الأكبر لهما أي d/d'

من جهة أخرى لدينا : $\begin{cases} d'/\beta \\ d'/\beta\gamma-\alpha \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} d'/\beta\gamma \\ d'/\beta\gamma-\alpha \end{cases}$ بالطرح نجد : d'/α

$\begin{cases} d'/\beta \\ d'/\alpha \end{cases}$ ومنه d' قاسم مشترك للعددين β و α ومنه فهو يقسم القاسم المشترك الأكبر لهما أي d'/d

d/d' و d'/d إذن $d=d'$ أي $PGCD(\alpha;\beta)=PGCD(\beta\gamma-\alpha;\beta)$

ب) استنتج أنه من أجل عدد طبيعي n ، $PGCD(3n^3+4n;n+2)=PGCD(32;n+2)$.

بوضع : $\alpha=3n^3+4n$ ، $\beta=n+2$ و $\gamma=3n^2-6n+16\in\mathbb{N}^*$ نجد :

$$\beta\gamma-\alpha=(n+2)(3n^2-6n+16)-3n^3-4n=32$$

ومنه حسب ما سبق : $PGCD(3n^3+4n;n+2)=PGCD(32;n+2)$

4) **أ)** عين مجموعة القواسم الطبيعية للعدد 32 .

$\{1;2;4;8;16;32$

ب) استنتج مجموعة قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها العدد $A=\dfrac{3n^3+4n}{n+2}$ طبيعيا .

لدينا من أجل عدد طبيعي n ، $3n^3+4n$ و $n+2$ عددان طبيعيان مع $n+2\neq 0$

حتى يكون العدد $A=\dfrac{3n^3+4n}{n+2}$ يكفي : $n+2/3n^3+4n$ ومنه $PGCD(3n^3+4n;n+2)=n+2$

معناه كذلك : $PGCD(32;n+2)=n+2$ ومنه $n+2/32$ أي $n+2\in D_{32}^{+}$

$n+2$	1	2	4	8	16	32
n	-1 مرفوض	0	2	6	14	30

ومنه $n\in\{0;2;6;14;30\}$

التمرين الثالث : (04 نقاط)

يحوي كيس على خمس كرات حمراء و ثلاث كرات بيضاء ، كل الكرات متماثلة ولا نميز بينها باللمس .

نسحب عشوائيا من الكيس ثلاث كرات في آن واحد .

1) أحسب احتمال كل من الحدثين التاليين :

A " الحصول على ثلاث كرات من نفس اللون" ، B " الحصول على كرة بيضاء على الأقل "

$$P(A)=\frac{C_5^3+C_3^3}{C_8^3}=\frac{11}{56}$$

$$P(B)=\frac{C_3^1\times C_5^2+C_3^2\times C_5^1+C_3^3}{C_8^3}=\frac{23}{28}$$

2) ننزع من الكيس الكرات البيضاء ونضع مكانها n كرة سوداء حيث $n\geq 2$ ، ثم يسحب لاعب كرتين على التوالي دون إرجاع الكرة المسحوبة الأولى .

إذا سحب اللاعب كرة سوداء يتحصل على 5 نقاط وإذا سحب كرة حمراء يخسر 10 نقاط . وليكن المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل سحب مجموع النقاط المحصل عليها .

أ) عرف قانون الاحتمال لـ X ، ثم بين أن أمله الرياضياتي هو $E(X)=\dfrac{10n^2-60n-400}{(n+4)(n+5)}$.

تعيين القيم الممكنة لـ X :

كرتين حمراوين فإنه يخسر 20 نقطة وإذا سحب كرة حمراء وكرة سوداء فإنه يخسر 5 نقاط أما إذا سحب كرتين سوداوين فإنه يربح 10 نقاط ، ومنه $X\in\{-20;-5;10\}$.

عدد الكرات الإجمالي في الكيس هو $n+5$ ومنه عدد الحالات الممكنة للسحب هو A_{n+5}^2

$$P(X=-20)=\frac{A_5^2}{A_{n+5}^2}=\frac{\frac{5!}{2!}}{\frac{(n+5)!}{(n+3)!}}=\frac{20(n+3)!}{(n+5)!}=\frac{20(n+3)!}{(n+5)(n+4)(n+3)!}=\frac{20}{(n+5)(n+4)}$$

$$P(X=-5)=\frac{\Gamma_2^{1,1}\times A_5^1\times A_n^1}{A_{n+5}^2}=\frac{2\times\frac{5!}{4!}\times\frac{n!}{(n-1)!}}{\frac{(n+5)!}{(n+3)!}}=\frac{10n}{(n+5)(n+4)}$$

$$P(X=10)=\frac{A_n^2}{A_{n+5}^2}=\frac{\frac{n!}{(n-2)!}}{\frac{(n+5)!}{(n+4)!}}=\frac{n(n-1)}{(n+5)(n+4)}$$

$X=X_i$	-20	-5	10
$P(X=X_i)$	$\frac{20}{(n+5)(n+4)}$	$\frac{10n}{(n+5)(n+4)}$	$\frac{n(n-1)}{(n+5)(n+4)}$

ومنه : $\begin{cases} E(X)=(-20)\frac{20}{(n+5)(n+4)}+(-5)\frac{10n}{(n+5)(n+4)}+10\times\frac{n(n-1)}{(n+5)(n+4)} \\ =\frac{-400-50n+10n(n-1)}{(n+5)(n+4)}=\frac{10n^2-60n-400}{(n+4)(n+5)} \end{cases}$

ب) ما هو أصغر عدد ممكن للكرات السوداء حتى تكون اللعبة مربحة .

حتى تكون اللعبة مربحة يكفي : $E(X)>0$

$E(X)>0 \Leftrightarrow \frac{10n^2-60n-400}{(n+4)(n+5)}>0 \Rightarrow 10n^2-60n-400>0$ لأن $(n+4)(n+5)>0$

يكفي حل المتراجحة $10x^2-60x-400>0$ نجد $x\in]-\infty;-4[\cup]10;+\infty[$

وبما أن $n\in\mathbb{N}$ فإن $n>10$ ومنه أصغر عدد ممكن للكرات السوداء حتى تكون اللعبة مربحة هو 11 .

التمرين الرابع : (07 نقاط)

I) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $g(x)=x^2+2-2\ln x$.

1) أحسب $\lim_{x\overset{>}{\to}0} g(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} g(x)$.

$\begin{cases} \lim_{x\overset{>}{\to}0} \ln x=-\infty \\ \lim_{x\overset{>}{\to}0} x^2+2=2 \end{cases}$ $\lim_{x\overset{>}{\to}0} g(x)=+\infty$

$\begin{cases} \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x}=0 \\ \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x}=0 \end{cases}$ $\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty} x\left(x+\frac{2}{x}-2\frac{\ln x}{x}\right)=+\infty$

2) أدرس اتجاه تغير الدالة g على المجال $]0;+\infty[$ ، ثم شكل جدول تغيراتها .

$g'(x)=\frac{2(x^2-1)}{x}$ وإشارتها من إشارة x^2-1 لأن $x\in]0;+\infty[$.

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	||	-	0	+	

الدالة g متناقصة تماما على المجال $]0;1[$ ومتزايدة تماما على المجال $]1;+\infty[$.

جدول التغيرات :

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	-	0	+	
$g(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

3) حدد إشارة $g(x)$ حسب قيم x من المجال $]0;+\infty[$.

الدالة g تقبل قيمة حدية صغرى هي 3 ومنه : $\forall x \in]0;+\infty[, g(x) \geq 3$ ومنه $\forall x \in]0;+\infty[, g(x) > 0$

x	0	$+\infty$
$g(x)$	‖	+

II) لتكن الدالة العددية f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $f(x) = -x + e - \frac{2\ln x}{x}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) أحسب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)$ وفسر النتيجة هندسيا ، ثم أحسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

$$\lim_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) = \lim_{x \xrightarrow{>} 0} -x + e - \frac{2}{x}.\ln x = +\infty \quad \begin{cases} \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{2}{x} = +\infty \\ \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \ln x = -\infty \end{cases}$$

ومنه المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مطابقا لحامل محور التراتيب بجوار $+\infty$.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

2) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$: $f'(x) = \frac{-g(x)}{x^2}$.

$$f'(x) = -1 - \left(\frac{\frac{2}{x} \times x - 2\ln x}{x^2} \right) = \frac{-x^2 - 2 + 2\ln x}{x^2} = \frac{-g(x)}{x^2}$$

3) استنتج إشارة $f'(x)$ ، ثم أدرس إتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها .

إشارة $f'(x)$ من إشارة $-g(x)$ لأنه $\forall x \in]0;+\infty[, x^2 > 0$

x	0 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	-

الدالة f متناقصة تماما على المجال $]0;+\infty[$

جدول التغيرات :

x	0 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	-
$f(x)$	$+\infty \searrow -\infty$

4) أ) بين أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=-x+e$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) .

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(-x+e)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}-\frac{2\ln x}{x}=0$ ومنه (Δ) الذي معادلته $y=-x+e$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.

ب) أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .

يكفي دراسة إشارة الفرق $f(x)-(-x+e)$ أي $-\frac{2\ln x}{x}$

إشارة $-\frac{2\ln x}{x}$ من إشارة $-2\ln x$ لأن $x>0$

x	0		1		$+\infty$
$-2\ln x$		**+**	0	**-**	
الوضعية النسبية		(C_f) **فوق** (Δ)	**تقاطع**	(C_f) **تحت** (Δ)	

5) بين أن المنحنى (C_f) يقبل مماسا وحيدا (T) يوازي المستقيم (Δ) ، ثم جد معادلة له .

يكفي حل المعادلة $f'(x)=-1$

$\frac{-x^2-2+2\ln x}{x^2}=-1 \Leftrightarrow f'(x)=-1$ نجد $-2+2\ln x=0$ ومنه $x=e$

ومنه (C_f) يقبل مماسا وحيدا (T) يوازي المستقيم (Δ) حيث : $(T): y=f'(e)(x-e)+f(e)$

ومنه $(T): y=-x+e-\frac{2}{e}$

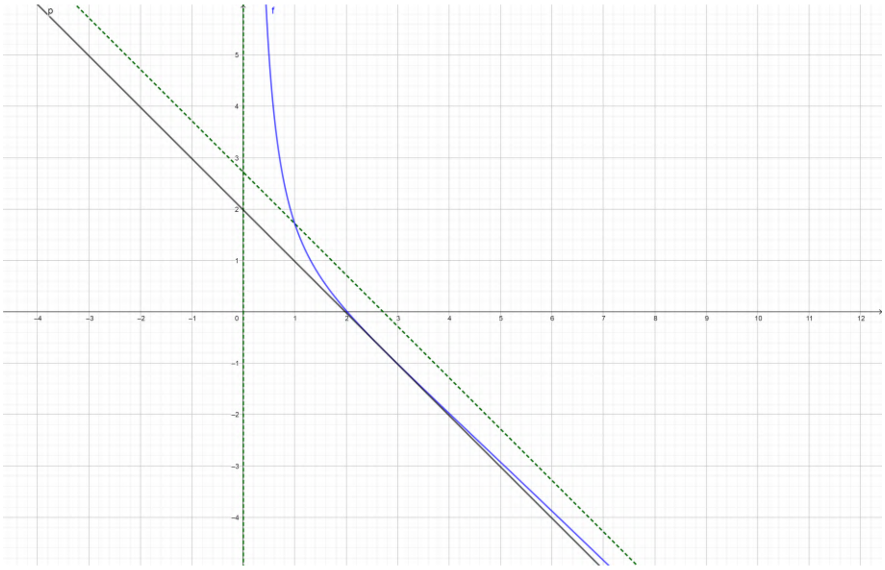
6) بين أن (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث $2<\alpha<2{,}1$.

يكفي أن نبين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $2<\alpha<2{,}1$

الدالة f مستمرة ورتيبة تماما على المجال $]0;+\infty[$ وبالأخص على المجال $]2;2{,}1[$ ولدينا :

$f(2)\times f(2{,}1)\approx 0{,}025\times(-0{,}08)<0$ ، إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $2<\alpha<2{,}1$ ومنه (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث $2<\alpha<2{,}1$.

7) أرسم كلا من (Δ) ، (T) و (C_f) .



8) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة : $x(e-m)=\ln(x^2)$.

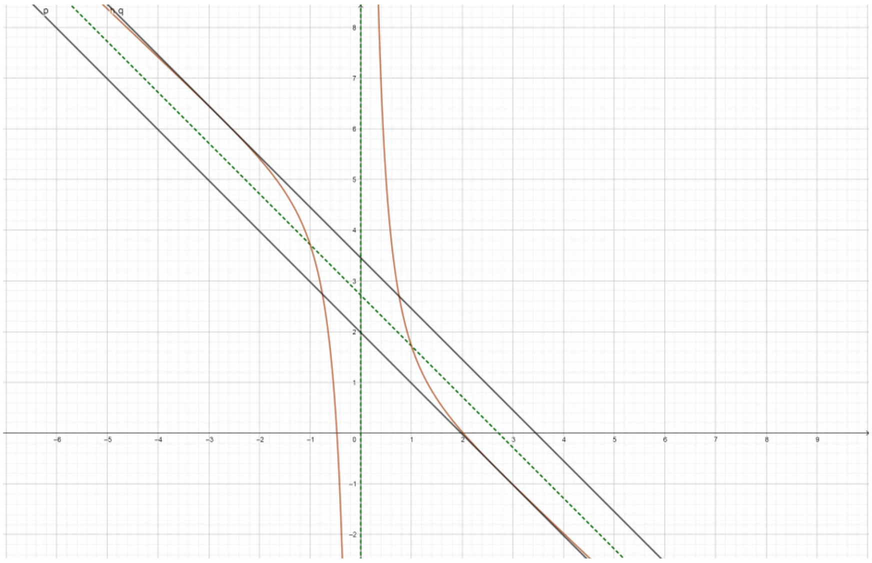
المعادلة معرفة من أجل $x\neq 0$ ولدينا :

$$x(e-m)=\ln(x^2)\Leftrightarrow e-m=\frac{2\ln|x|}{x}\Leftrightarrow m-e=-\frac{2\ln|x|}{x}\Leftrightarrow -x+e+m-e=-x+e-\frac{2\ln|x|}{x}$$
$$\Leftrightarrow h(x)=-x+m$$

حيث h هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ : $h(x)=-x+e-\frac{2\ln|x|}{x}$

من أجل $x>0$: $h(x)=-x+e-\frac{2\ln x}{x}=f(x)$

ولدينا $h(x)+h(-x)=-x+e-\frac{2\ln|x|}{x}+x+e+\frac{2\ln|-x|}{x}=2e$ لأن $|-x|=|x|$ ومنه منحنى الدالة h متناظر بالنسبة إلى النقطة $\omega(0;e)$ ويطابق (C_f) من أجل $x>0$.



المناقشة مناقشة بيانية وسيطية مائلة وتؤول إلى دراسة عدد نقط تقاطع منحنى الدالة h مع المستقيم $(d_m): y=-x+m$ والذي يوازي كلا من (Δ) ، (T) و (T') حيث $(T'): y=-x+e+\frac{2}{e}$ نظير (T) بالنسبة إلى النقطة ω ومنه :

من أجل $m \in \left]-\infty; e-\frac{2}{e}\right[$ المعادلة تقبل حلا وحيدا

من أجل $m = e-\frac{2}{e}$ المعادلة تقبل حلا مضاعفا وحلا بسيطا

من أجل $m \in \left]e-\frac{2}{e}; e\right[$ المعادلة تقبل 3 حلول

من أجل $m=e$ المعادلة تقبل حلين متمايزين

من أجل $m \in \left]e; e+\frac{2}{e}\right[$ المعادلة تقبل 3 حلول

من أجل $m = e+\frac{2}{e}$ المعادلة تقبل حلا مضاعفا وحلا بسيطا

من أجل $m \in \left]e+\frac{2}{e}; +\infty\right[$ المعادلة تقبل حلا وحيد

انتهى تصحيح الموضوع الثاني

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية

مديرية التربية لولاية وهران

المقاطعة الأولى (وهران شرق) الامتحان التجريبي لبكالوريا 2022في مادة الرياضيات

الشعبة :تقني رياضي	المدة : أربع ساعات و نصف

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين فقط

الموضوع الأول

التمرين الأول(04ن) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $a_n = 2\times 5^n + 7$

1) أ- بيّـن أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون a_n فردي.

ب- عيّـ ن حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد 5^n على 8.

جـ- استنتج أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$ يكون $a_n \equiv 1[8]$.

2) أ- برهن أنه إذا كان: $\begin{cases} x\equiv 1[8] \\ x\equiv 7[125] \end{cases}$ فإن: $x\equiv 257[1000]$.

ب- بيّـن أنه من أجل $n\geq 3$ يكون: $a_n \equiv 257[1000]$.

جـ- ما هي الأرقام الثلاث الأخيرة للعدد $(2\times 5^{2021}+7)(2\times 5^{2022}+7)$ ؟

3) أ- تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون: $5a_{2n} - a_{2n+1} = 28$

ب- نعتبر $PGCD(a_{2n};a_{2n+1}) = d$ ، بيّـن أن d يختلف عن 7 ثم عيّـ ن قيمته.

التمرين الثاني(04ن) يوجد جواب صحيح واحد بين الأجوبة المقترحة في كل حالة من الحالات التالية، عينه مع التبرير.

1) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = \left(\frac{2}{3}\alpha\right)^n$ حيث α عدد حقيقي موجب تماما، قيم

مجموعة قم α التي تكون من أجلها (v_n) متتالية متقاربة هي:

أ) $\left]0;\frac{3}{2}\right[$ ب) $]-1;1[$ جـ) $\left]0;\frac{2}{3}\right[$

2) الحل الخاص للمعادلة التفاضلية $3y'-2y+6=0$ والذي يحقق الشرط $f(0)=4$ هو:

أ) $f(x)=3e^{\frac{2}{3}x}+1$ ب) $f(x)=e^{\frac{2}{3}x}+3$ جـ) $f(x)=2e^{\frac{2}{3}x}+2$

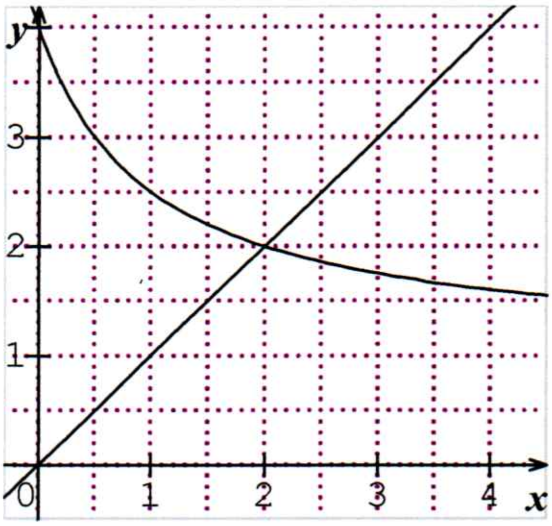
3) f الدالة المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ $f(x)=\frac{x+1}{x}$،الدالة الأصلية F للدالة f والتي تحقق $F(1)=0$ هي الدالة المعرفة بـ:

أ) $F(x)=x-1+\ln x$ ب) $F(x)=1-x+\ln x$ جـ) $F(x)=\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$.

4) N عدد طبيعي، يكتب في النظام ذي الأساس 6 على الشكل $N=\overline{01355}^6$ ، كتابته في النظام العشري هي:

أ) $N=2022$ ب) $N=1439$ جـ) $N=1962$

التمرين الثالث (05ن) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\frac{x+4}{x+1}$. (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$، (أنظر الشكل).



1) بيّن أن الدالة f متناقصة تماما على المجال $]0;+\infty[$.

2) (u_n) المتتالية العددية المعرفة على N بـ: $u_0 = 1$

و من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} = f(u_n)$.

أ) انقل الشكل ثم مثّل الحدود الأربعة الأولى للمتتالية (u_n) على حامل محور الفواصل (دون حسابها) موضحا خطوط الإنشاء،

ثم أعط تخمينا حول اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) و تقاربها.

ب) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $1 \le u_n \le \frac{5}{2}$.

3) نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = \frac{12}{u_n + 2} - 3$

أ) برهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها q و حدها الأول v_0.

ب) أوجد بدلالة n عبارة الحد العام v_n ثم استنتج عبارة u_n ثم أحسب $\lim_{n\to+\infty} u_n$

4) أحسب بدلالة n المجموع S_n بحيث: $S_n = v_n + v_{n+1} + v_{n+2} + \ldots + v_{n+2022}$

أحسب بدلالة n المجموع P_n بحيث: $P_n = \frac{1}{u_n + 2} + \frac{1}{u_{n+1} + 2} + \frac{1}{u_{n+2} + 2} + \cdots + \frac{1}{u_{n+2022} + 2}$

التمرين الرابع(07ن) g دالة عددية معرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $g(x) = -x - \ln x$

1) أ) أدرس تغيرات الدالة g .

ب) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0,56 < \alpha < 0,57$ ثم استنتج إشارة g على $]0;+\infty[$

2) لتكن f دالة عددية معرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{-1 + (x-1)\ln x}{x}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

أ) أحسب $\lim_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)$ و أحسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ ثمّ فسر النتيجتين هندسيا .

ب) بيّن أن من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$، $f'(x) = \frac{-g(x)}{x^2}$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f.

3) بيّن أن المنحنى (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطتين فاصلتيهما x_0 و x_1 حيث $0,2 < x_0 < 0,3$ و $2,2 < x_1 < 2,3$.

4) بيّن أن $f(\alpha) = -\alpha + 1 - \frac{1}{\alpha}$ ، ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

5) (γ) هو المنحنى الممثل للدالة ln في المعلم السابق .

أحسب $\lim_{x\to+\infty}[f(x) - \ln x]$ ثمّ فسّر النتيجة بيانيا ثم أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (γ) .

6) أ) احسب $f(1)$، $f(2)$ و $f(e)$ ثم ارسم (γ) و (C_f) .

ب) ناقش بيانيا ، حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد حلول المعادلة: $f(x) = m$.

7) A هي مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنيين (γ) و (C_f) والمستقيمين الذين معادلتيهما: $x = \alpha$ و $x = e$.

- احسب A بدلالة α ثم تحقق أن : $A = \frac{(1+\alpha)(3-\alpha)}{2}$ مستنتجا حصرا لـ A

الموضوع الثاني

التمرين الأول(05ن) لكل سؤال جواب واحد صحيح فقط من بين الأجوبة الثلاثة المقترحة، عينه مع التبرير:

1. حل المعادلة التفاضلية $3y'-2y+6=0$ و الدي يحقق $f(0)=4$ هو الدالة f المعرفة على R بـ:

أ) $f(x)=e^{\frac{2}{3}x}-3$ ب) $f(x)=e^{\frac{2}{3}x}+3$ ج) $f(x)=2e^{\frac{2}{3}x}+3$.

2. مجموعة حلول المتراجحة $\ln(x-1)+\ln(x+2)\leq 2\ln 2$ في $\mathbb{R}$ هي:

أ) $S=[-2;2]$ ب) $S=]1;2]$ ج) $S=[-2;1]$

3. لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f, f(x)=x2^{-x}$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة f' هي:

أ/ $f'(x)=(1-x\ln 2)e^{-x\ln 2}$ ب/ $f'(x)=(1-x)2^{-x}$ ج/ $f'(x)=(2+x\ln 2)2^{-x}$

4. x عدد حقيقي موجب تماما ، التكامل $\int_1^x \frac{\ln t}{t^2}dt$ يساوي:

أ) $\frac{-2\ln x-1}{x}$ ب) $\frac{-\ln x}{x}-\frac{1}{x}$ ج) $\frac{-\ln x-1+x}{x}$

5. f الدالة المعرفة على R بـ : $f(x)=\ln(x^2+2x+3)$ من أجل كل عدد حقيقي x يكون:

أ) $f(-2-x)=f(x)$ ب) $f(2-x)=f(x)$ ج) $f(-x)=f(x)$

التمرين الثاني(04ن) α ، β عددان طبيعيان كل منهما أصغر من 7؛ وليكن A العدد الطبيعي المضاعف لـ 7 والذي يكتب في نظام التعداد ذو الأساس 9 و 7 على الترتيب بـ: $\overline{2\alpha 8\beta}$ و $\overline{5\alpha 1\beta}$

1) جد α ، β ثم أكتب العدد A في النظام العشري.

2) أحسب $PGCD(2016,2268,2772)$

3) نعتبر في مجموعة الأعداد الصحيحة النسبية Z المعادلة ذات المجهولين x ، y

$$2772x-2268y=2016............(E)$$

أ. بيّن انه من اجل كل عددين حقيقيين x، y المعادلة (E) تكافئ $11x-9y=8$

ب. جـد (x_0,y_0) حل للمعادلة (E) والتي تحقق $x_0+y_0=8$

ت. استنتج في Z^2 مجموعة حلول المعادلة (E).

4) بفرض x و y موجبان و أن $(x\ ,\ y)$ حلل المعادلة (E) وبوضع $PGCD(x,y)=d$

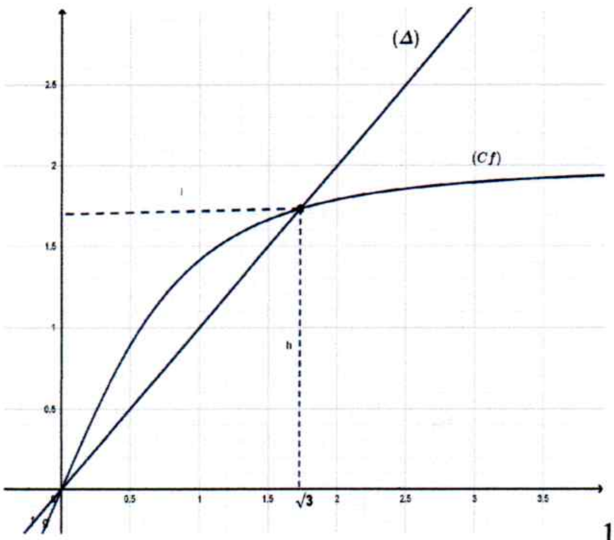
أ. أوجد القيم الممكنة لـ d

ب) استنتج كل الثنائيات (x,y) حلول المعادلة (E) التي تحقق : $PGCD(x,y)=2$

التمرين الثالث(04ن)

1)الشكل المقابل هو التمثيل البياني $\left(C_f\right)$للدالة f المعرفة على $\left]0,+\infty\right[$ب : $f(x)=\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$

والمستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x$ في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$



أ) أدرس اتجاه تغير الدالة f على $\left]0,+\infty\right[$

ب)بيّن أنه إذا كان $x\in\left[0,\sqrt{3}\right]$ فإن $f(x)\in\left[0,\sqrt{3}\right]$

2) نعّرف المتتالية $\left(u_n\right)$كما يلي :

$u_0=1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=f(u_n)$

أ) باستعمال التمثيل البياني $\left(C_f\right)$والمستقيم (Δ)

مثّل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 على محور الفواصل دون حسابها مبرزا خطوط التمثيل

ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية $\left(u_n\right)$وتقاربها.

ب) برهن بالتراجع من أجل كل عدد طبيعي n : $1\le u_n\le\sqrt{3}$

ج) بيّن من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}-u_n=\dfrac{u_n\left(2-\sqrt{u_n+1}\right)}{\sqrt{u_n^2+1}}$ ،ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية $\left(u_n\right)$

د)استنتج أن المتتالية $\left(u_n\right)$متقاربة

3) نعتبر المتتالية $\left(v_n\right)$ المعرفة من أجل كل عدد طبيعي nب: $v_n=\dfrac{u_n^2}{3-u_n^2}$

أ)برهن أن $\left(v_n\right)$متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول

ب)أكتب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n

ج)أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n$

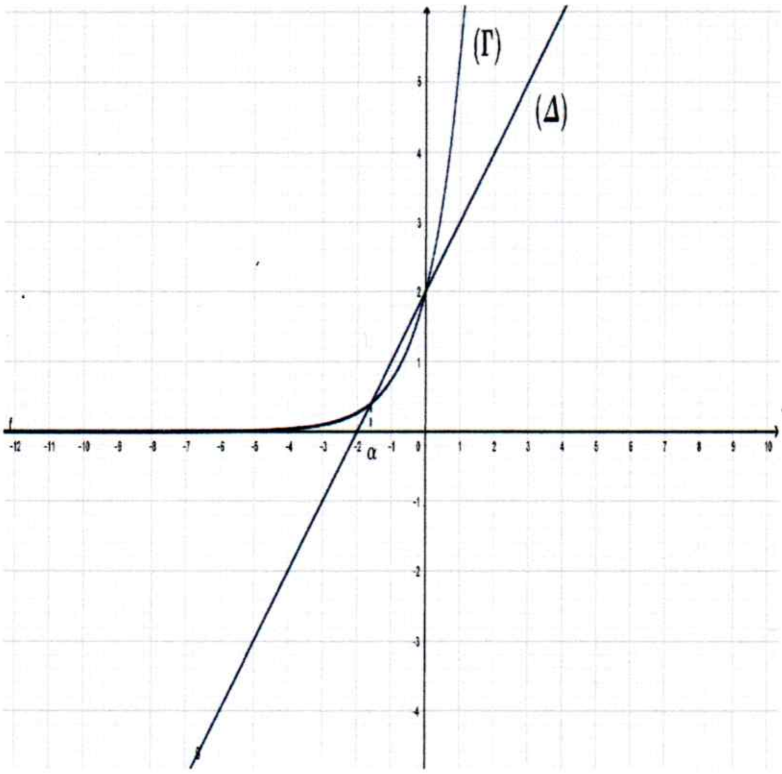
4) أحسب p_n بدلالة n حيث: $p_n=\dfrac{\left(u_0\times u_1\times\cdots\times u_n\right)^2}{\left(3-u_0^{\,2}\right)\left(3-u_1^{\,2}\right)\cdots\left(3-u_n^{\,2}\right)}$

التمرين الرابع(07ن)

I) المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ ، الشكل أدناه يتضمن (Γ)التمثيل البياني للدالة: $x\to 2e^x$ ، (Δ)المستقيم ذو المعادلة : $y=x+2$ ، 0و α هما فاصلتا نقطتي تقاطع (Γ)و (Δ)

حيث : $-1,6\prec\alpha\prec-1,5$

1) بقراءة بيانية حدّد وضعية المنحني (Γ)بالنسبة إلى (Δ)على R



2) g لدالة العددية للمتغير الحقيقي x والمعرفة على R

بـ : $g(x)=-2e^{x}+x+2$

حدّد إشارة $g(x)$ حسب قيم العدد الحقيقي x.

II) f الدالة العددية المعرفة على R بـ :

$f(x)=2(ex-3)+(x+3)e^{-x+1}$ ،

(C_f) هو تمثيلها البياني في المعلم السابق.

1) أ – أحسب كلا من : $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

ب) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي xمن R

: $f'(x)=-g(x)e^{-x+1}$.

ج) عيّن دون حساب: $\lim_{h\to 0}\dfrac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h}$،

ثم فسّر النتيجة هندسيا.

المستقيم (D) ذو المعادلة : $y=2(ex-3)$ هو

مستقيم مقارب ل (C_f)عند $+\infty$ثم أدرس وضعية (C_f)بالنسبة إلى (D)

ب) بيّن أن المنحني (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين إحداثيتيها .

ج) بيّن أن المنحني (C_f) يقبل محور الفواصل في نقطة واحدة فاصلتها β حيث: $-2,4\prec\beta\prec-2,3$.

3) أنشئ كل من (D)و (C_f) . نأخذ $f(-3)\approx-22.31$ و$f(\alpha)\approx 4.15$

4-أ) جد العددين الحقيقيين a,bحتى تكون الدالة $x\to(ax+b)e^{-x+1}$أصلية للدالة $x\to(x+3)e^{-x+1}$ على R

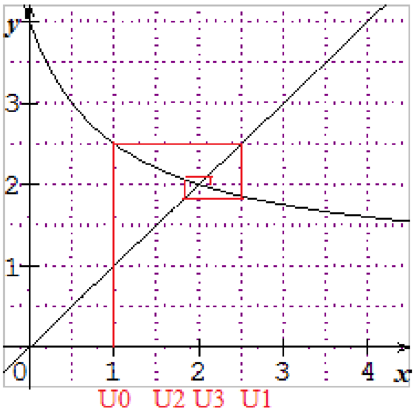
ب)أحسب I_n مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f)والمستقيم (D)و المستقيمين الذين معادلتيها: $x=1$ و $x=n$

حيث n عدد طبيعي $(n\succ 1)$، ثم أحسب $\lim_{n\to+\infty} I_n$.

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية الوطنية
وزارة التربية الوطنية

الإجابة النموذجية للموضوع اختبار مادة الرياضيات / الشعبة: تقني رياضي / بكالوريا تجريبي 2022

	عناصر الإجابة (الموضوع الأول)	العلامة	
التمرين الأول	لدينا من أجل كل عدد طبيعي n : $a_n = 2\times5^n + 7$ 1) أ- بما أن a_n هو مجموع عددين أحدهما فردي والأخر زوجي إذا هو عدد فردي............ ب- n بواقي قسمة العدد 5^n على 8: من أجل $n=2k$: $5^n\equiv1[8]$ و من أجل $n=2k+1$: $5^n\equiv5[8]$ .... جـ- بما أن $2\times1+7\equiv1[8]$ و $2\times5+7\equiv1[8]$ فإنه من أجل كل عدد طبيعي n : $a_n\equiv1[8]$	0.5 0.5 0.5	04
	2) أ- إذا كان: $\begin{cases}x\equiv1[8]\\x\equiv7[125]\end{cases}$ فإن: $\begin{cases}125x\equiv125[1000]\\8x\equiv56[1000]\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}125x\equiv125[1000]\\128x\equiv896[1000]\end{cases}$ بالطرح نجد $3x\equiv771[1000]$ أي $9x\equiv313[1000]$ اذا نجد $\begin{cases}8x\equiv56[1000]\\9x\equiv313[1000]\end{cases}$. ومنه $x\equiv257[1000]$ .... ب- من أجل $n\geq3$ يكون : 5^n مضاعف لـ125 ومنه نجد $a_n\equiv7[125]$ ولدينا $a_n\equiv1[8]$ إذا نستنتج أن $a_n\equiv257[1000]$ .... جـ- بما أن $a_{2021}\equiv257[1000]$ و $a_{2022}\equiv257[1000]$ فإن $a_{2021}\times a_{2022}\equiv257^2[1000]$ أي $a_{2021}\times a_{2022}\equiv49[1000]$ اذا الأرقام الثلاث الأخيرة للعدد $(2\times5^{2021}+7)(2\times5^{2022}+7)$ هي 049	0.75 0.5 0.25 0.25	
	3) أ- من أجل كل عدد طبيعي n لدينا: $5a_{2n}-a_{2n+1}=28$ ب- إذا كان $PGCD(a_{2n};a_{2n+1})=d$ ، فإن d يقسم a_n وبما أن 2×5^n ليس مضاعف لـ 7 فإن d يختلف عن 7 .... d يقسم 28 ويختلف عن 7 و a_n فردي اذا $d=1$	0.25 0.25 0.25	
التمرين الثاني	1) قيم α التي تكون من أجلها (v_n) متقاربة هي: أ) $\left]0;\frac{3}{2}\right[$ + التبرير... 2) الحل الخاص للمعادلة التفاضلية $3y'-2y+6=0$ والذي يحقق الشرط $f(0)=4$ هو: ب) $f(x)=e^{\frac{2}{3}x}+3$ + التبرير.. 3) الدالة الأصلية F والتي تحقق $F(1)=0$ للدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ $f(x)=\frac{x+1}{x}$ هي الدالة: أ) $F(x)=x-1+\ln x$ + التبرير.. 4) N عدد طبيعي، يكتب في النظام ذي الأساس 6 على الشكل $N=\overline{01355}^{6}$ ، كتابته في النظام العشري هي: ب) $N=1439$ + التبرير...	01 01 01 01	04

التمرين	الحل	العلامة	المجموع
التمرين الثالث	f دالة معرفة على $[0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\frac{x+4}{x+1}$. 1) بما أن $f'(x)=\frac{-3}{(x+1)^2}$ فإن f متناقصة تماما على المجال $[0;+\infty[$.	0.5	05
	2) أ- تمثيل الحدود الأربعة الأولى:  التخمين: المتتالية (u_n) غير رتيبة ومتقاربة نحو 2	0.75 0.5	
	ب - البرهان أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $1\le u_n\le\frac{5}{2}$: لدينا $1\le u_0\le\frac{5}{2}$ و نفرض أن $1\le u_n\le\frac{5}{2}$ فنجد $1\le u_{n+1}\le\frac{5}{2}$ ومنه $1\le u_n\le\frac{5}{2}$	0.75	
	3) نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n=\frac{12}{u_n+2}-3$ أ - بما أن $v_n=\frac{6-3u_n}{u_n+2}$ ولدينا $v_{n+1}=-\frac{1}{3}\left(\frac{6-3u_n}{u_n+2}\right)$ اذا (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=-\frac{1}{3}$ و حدها الأول $v_0=1$ .... ب -عبارة الحد العام: $v_n=\left(-\frac{1}{3}\right)^n$ و $u_n=\frac{12}{3+v_n}-2=\frac{12}{3+\left(-\frac{1}{3}\right)^n}-2$ حساب النهاية: $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=2$	0.75 0.5 0.25	
	ت - حساب S_n: $S_n=1\left(\frac{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^{2023}}{1+\frac{1}{3}}\right)=\frac{3}{4}\left(1-\left(-\frac{1}{3}\right)^{2023}\right)$ حساب P_n:	0.5 0.5	

ومنه $P_n=\frac{1}{12}\left(v_n+3+v_{n+1}+3+v_{n+2}+3...+v_{n+2022}+3\right)$

$P_n=\frac{1}{12}\left(S_n+3\times 2023\right)$.

التمرين الرابع — المجموع: 07

I. الدالة g معرفة على المجال $]0,+\infty[$ بـ: $g(x)=-x-\ln x$ — 0.5

1) أ- $g'(x)\prec 0$ ومنه الدالة g متناقصة.

ب- بما أن الدالة g رتيبة و $g(0.56)\times g(0.57)\prec 0$ — 0.25

فإن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0,56<\alpha<0,57$

إشارة $g(x)$: — 0.25

x	0		α		$+\infty$
g(x)	‖	+	0	−	

2) أ- من اجل كل x من المجال $]0,+\infty[$ نجد: $f(x)=\frac{-1+(x-1)\ln x}{x}$ — 0.5

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to 0} f(x)=+\infty$ — 0.25

$x=0$ معادلة المستقيم المقارب للمنحنى (C)

ب -من اجل كل x من المجال $]0,+\infty[$ نجد: $f'(x)=\frac{-g(x)}{x^2}$ — 0.5

إشارة $f'(x)$ عكس إشارة $g(x)$

جدول تغيرات الدالة f على المجال $]0,+\infty[$: — 0.75

x	0		α		$+\infty$
f'(x)	‖	−	0	+	
f (x)	‖ $+\infty$	↘	f(α)	↗	$+\infty$

3) حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين x_0 و x_1 حيث $0,2<x_0<0,3$ و $2,2<x_1<2,3$ إذا المنحنى $\left(C_f\right)$ يقطع محور الفواصل في نقطتين — 0.5

4) **من** $g(\alpha)=0$ لدينا $\ln\alpha=-\alpha$ وبالتعويض نجد: $f(\alpha)=-\alpha+1-\frac{1}{\alpha}$ — 0.25

حصر $f(\alpha)$ — 0.25

$-1.35\leq f(\alpha)\leq -1.31$

5) **لدينا** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-\ln x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{-1-\ln x}{x}\right]=0$

ومنه المنحنى (γ) هو منحنى مقارب للمنحنى (C_f) — **0.5**

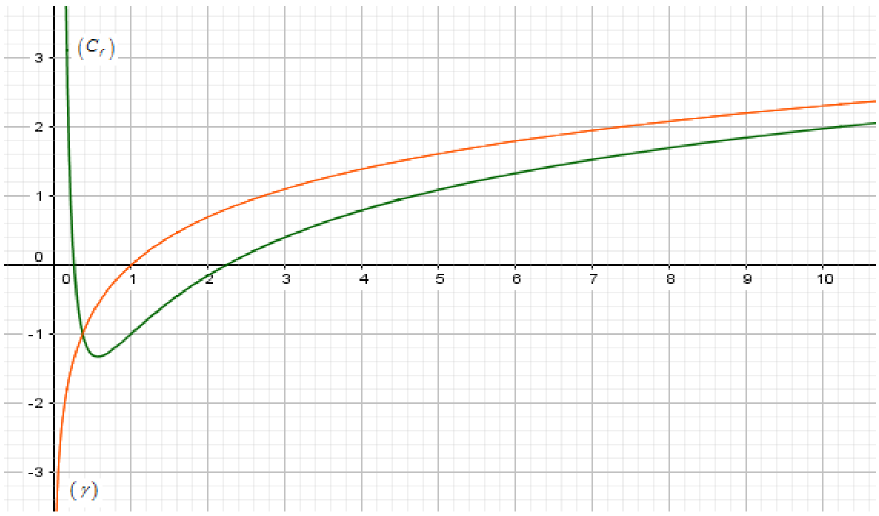
– وضعية (C_f) بالنسبة إلى (γ) :

x	0		e^{-1}		$+\infty$
f(x)-lnx		+	0	−	
الوضع النسبي		(C_f) فوق (γ)	تقاطع	(C_f) تحت (γ)	

0.5

6) أ– حساب $f(1)$ ، $f(2)$ و $f(e)$

ارسم (γ) و (C_f)



0.5

ب) المناقشة البيانية لعدد حلول المعادلة: $f(x)=m$

$m \prec f(\alpha)$ لا يوجد حلول

$m = f(\alpha)$ يوجد حل وحيد

$m \succ f(\alpha)$ يوجد حلين مختلفين

0.5

7) حساب المساحة A :

$$A=\left[\ln x+\frac{1}{2}(\ln x)^2\right]_\alpha^e=\frac{3}{2}-\ln\alpha-\frac{1}{2}(\ln\alpha)^2$$

0.5

– التحقق أن: $A=\dfrac{(1+\alpha)(3-\alpha)}{2}$ بتعويض $\ln\alpha=-\alpha$

0.25

حصر A :

$1.89 \prec A \prec 1.91$

0.25

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية الوطنية
وزارة التربية الوطنية

الحل النموذجي لبكالوريا التجريبي دورة ماي 2022 — الشعبة : تقني رياضي

الموضوع الثاني التصحيح النموذجي للبكالوريا التجريبي مادة الرياضيات

محاور الموضوع	عناصر الإجابة	العلامة مجزأة	العلامة كاملة
التمرين الأول	حل التمرين الأول: 1-الإجابة الصحيحة هي : (ب) التبرير : $3y'-2y+6=0$ يكافئ $y'=\frac{2}{3}y-2$ $y=ce^{\frac{2}{3}x}+3$ ومنه $f(x)=ce^{\frac{2}{3}x}+3$	ن01	ن 05
	2-الإجابة الصحيحة هي: (ب) التبرير : $D=]1;+\infty[$ $\ln(x-1)+\ln(x+2)\le 2\ln 2.........(1)$ (1) يكافئ $\ln[(x-1)(x+2)]\le \ln 4$ تكافئ $x^2+2x-x-2\le 4$ $x^2+x-6\le 0$ ومنه $S=]1;2]$	ن01	
	3--الإجابة الصحيحة هي: (أ) التبرير : $f(x)=xe^{-x}$ $f'(x)=xe^{-x\ln 2}$ يكافئ $f'(x)=e^{-x\ln 2}+(-\ln 2)e^{-x\ln 2}.x$ $f'(x)=e^{-x\ln 2}(1-x\ln 2)$ ومنه $f'(x)=(1-x\ln 2)e^{-x\ln 2}$	ن01	
	4---الإجابة الصحيحة هي: (ج)	ن01	

التبرير:
$$\int_1^x \frac{\ln t}{t^2}\,dt = \left[\frac{-\ln t}{t}\right]_1^x - \int_1^x \frac{-1}{t^2}\,dt$$

$$= \frac{-\ln x}{x} - \left[\frac{1}{t} + c\right]_1^x$$

$$= \frac{-\ln x}{x} - \left(\frac{1}{x} + c - 1 - c\right)$$

$$= \frac{-\ln x - 1 + x}{x}$$

01ن

5-الإجابة الصحيحة هي: (أ)

التبرير:
$$f(x) = \ln(x^2 + 2x + 3)$$

$$f(-2-x) = \ln[(-2-x)^2 + 2(-2-x) + 3]$$

$$= \ln(4 + x^2 + 4x - 4 - 2x + 3)$$

$$= \ln(x^2 + 2x + 3)$$

$$= f(x)$$

التمرين الثالث:

04ن

1-أ) تحديد اتجاه تغير الدالة f على المجال $[0,+\infty[$

الدالة f قابلة للإشتقاق على المجال $]0,+\infty[$ و $f'(x) = \dfrac{2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} \succ 0$ هذا يعني

الدالة f متزايد تماماعلى المجال $[0,+\infty[$

0.5ن

1-ب) نبين إذا كان $1 \le x \le \sqrt{3}$ فإن $1 \le f(x) \le \sqrt{3}$

لدينا من أجل $1 \le x \le \sqrt{3}$ فإن $f(1) \le f(x) \le f(\sqrt{3})$ (لأن الدالة f متزايدة تماما على المجال $\left[1,\sqrt{3}\right]$)ومنه
$\sqrt{2} \le f(x) \le \sqrt{3}$ ومنه $1 \le \sqrt{2} \le f(x) \le \sqrt{3}$ ومنه $1 \le f(x) \le \sqrt{3}$ وهو المطلوب

0.25ن

2-أ) تمثيل الحدود u_0, u_1 و u_2 على محور الفواصل

نسقط النقطة $M_0(u_0 = 1, u_1)$ على (Δ) وفق (ox) ثم نسقط نقطة المحصل عليها على (C_f) وفق (oy) نحصل على النقطة
$M_1(u_1, u_2)$ وهكذا نكرر العملية نحصل على M_2

0.25ن

ب)يبدو من خلا ل الرسم المتتالية $\left(u_n\right)$ متزايدة على $\mathbb{N}$ ومتقاربة نحو العدد $\sqrt{3}$

2-ب) لنبرهن بالتراجع من أجل كل عدد طبيعي n : $1 \le u_n \le \sqrt{3}$.

لنتحقق من أجل $n=0$ أي : $1 \le u_0 = 1 \le \sqrt{3}$ (محققة)

نفرض أن : $1 \le u_n \le \sqrt{3}$ و لنثبت : $1 \le u_{n+1} \le \sqrt{3}$

لدينا فرضا : $1 \le u_n \le \sqrt{3}$ ومنه : $f\left(1\right) \le f\left(u_n\right) \le f\left(\sqrt{3}\right)$ (حسب سؤال رقم 1-ب) ومنه $1 \le u_{n+1} \le \sqrt{3}$ صحيحة

0.5ن

وبالتالي $1 \le u_n \le \sqrt{3}$ صحيحة

ج) نبين من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{u_n(2-\sqrt{u_n^2+1})}{\sqrt{u_n^2+1}}$

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} - u_n = \dfrac{2u_n}{\sqrt{u_n^2+1}} - u_n = \dfrac{2u_n - u_n\sqrt{u_n^2+1}}{\sqrt{u_n^2+1}} = \dfrac{u_n(2-\sqrt{u_n^2+1})}{\sqrt{u_n^2+1}}$ لدينا من أجل كل عدد طبيعي n: $1 \le u_n \le \sqrt{3}$ ومنه $1 \le u_n^2 \le 3$ ومنه $2 \le u_n^2 + 1 \le 4$

ومنه $\sqrt{2} \le \sqrt{u_n^2+1} \le 2$ ومنه $-2 \le -\sqrt{u_n^2+1} \le -\sqrt{2}$ ومنه $0 \le 2 - \sqrt{u_n^2+1} \le 2 - \sqrt{2}$ وبالتالي:

$u_{n+1} - u_n = \dfrac{u_n(2-\sqrt{u_n^2+1})}{\sqrt{u_n^2+1}} \ge 0$ وعليه المتتالية $\left(u_n\right)$ متزايدة على $\mathbb{N}$

0.25ن

بما ان المتتالية $\left(u_n\right)$ متزايدة ومحدودة من الاعلى فهي متقاربة

3)نبين $\left(v_n\right)$ متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n:

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}^2}{3-u_{n+1}^2} = \frac{\dfrac{4u_n^2}{u_n^2+1}}{3-\dfrac{4u_n^2}{u_n^2+1}} = \frac{4u_n^2}{u_n^2+1} \times \frac{u_n^2+1}{-u_n^2+3} = 4\left(\frac{u_n^2}{3-u_n^2}\right) = 4v_n$$

0.25ن

ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=4$ وحدها الاول $v_0=\frac{1}{2}$

عبارة الحد العام v_n **بدلالة** n : $v_n=\frac{1}{2}(4)^n$ أي $v_n=2^{2n-1}$ 0.25ن

عبارة الحد العام u_n **بدلالة** n : بوضع $v_n=y$ و $u_n=x$ المساواة $v_n=\frac{u_n^2}{3-u_n^2}$ تكافيء

$y=\frac{x^2}{3-x^2}$ أي $y\left(3-x^2\right)=x^2$ أي $3y-yx^2=x^2$ أي $3y=yx^2+x^2=x^2(y+1)$ أي

$x^2=\frac{3y}{1+y}$ هذا يعني: $u_n^2=\frac{3v_n}{1+v_n}$ هذا يعني $u_n=\sqrt{\frac{3v_n}{1+v_n}}$ أو $u_n=-\sqrt{\frac{3v_n}{1+v_n}}$ بماأن

05ن

المتتالية (u_n) موجبة فإن: $u_n=\sqrt{\frac{3v_n}{1+v_n}}$ أي $u_n=\sqrt{\frac{3(2^{2n-1})}{1+(2^{2n-1})}}$

حساب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$:لدينا $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{3(2^{2n-1})}{1+(2^{2n-1})}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{3(2^{2n-1})}{(2^{2n-1})}=3$ لأن: $\lim\limits_{n\to+\infty}2^{2n-1}=+\infty$ ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\sqrt{3}$ 0.25ن

حساب بدلالة n الجداء: $p_n=\frac{\left(u_0\times u_1\times\cdots\times u_n\right)^2}{\left(3-u_0{}^2\right)\left(3-u_1{}^2\right)\cdots(3-u_n{}^2)}$ 0.25ن

$$\begin{aligned}p_n&=v_0\times v_1\times v_2\cdots\times v_n=v_0\times v_0\times q\cdots\times v_0\times q^n\\&=v_0{}^{n+1}\times q^{1+2+\cdots+n}\\&=v_0^{n+1}\times q^{1+2+\cdots+n}\\&=\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\times q^{\frac{n(n+1)}{2}}\\&=2^{-n-1}\times 2^{n^2+n}\\&=2^{n^2-1}\end{aligned}$$ 0.25ن

<u>حل التمرين الثاني:</u>

الجزءالاول:

تحديد وضعية المنحني (Γ) **بالنسبة إلى** (Δ)

لدينا من أجل $x\in]-\infty,\alpha[\cup]0,+\infty[$ أعلى (Δ) 0.25ن

ومن أجل $x\in]\alpha,0[$ (Γ) أسفل (Δ)

ومن أجل $x=\alpha$ أو $x=0$ لدينا $(\Gamma)\cap(\Delta)=\{(\alpha,\alpha+2),(0,2)\}$ 0.25ن

تحديد إشارة $g(x)$:

لدينا $g(x)=0$ من أجل $x=\alpha$ أو $x=0$

$g(x)\succ 0$ من أجل $x\in\left]\alpha,0\right[$ و $g(x)\prec 0$ من أجل $x\in\left]-\infty,\alpha\right[\cup\left]0,+\infty\right[$

الجزء الثاني: f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ ب: $f(x)=2(ex-3)+(x+3)e^{-x+1}$

حساب النهايات: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to-\infty} 2(ex-3)=-\infty$ و

$\lim\limits_{x\to-\infty}(x+3)e^{-x+1}=-\infty$

07ن

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty+\infty$ (حالة عدم التعيين) إزالتها

0.25ن

لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} 2(ex-3)+e\left(\dfrac{x}{e^{x}}+\dfrac{3}{e^{x}}\right)=+\infty$

لأن: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^{x}}+\dfrac{3}{e^{x}}=0$

نبين من أجل كل عدد حقيقي: $f'(x)=-g(x)e^{-x+1}$

الدالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و عبارة دالتها المشتقة هي :

$f'(x)=2e+e^{-x+1}-(x+3)e^{-x+1}=2e\left(e^{-x+1}\right)\left(e^{+x-1}\right)+e^{-x+1}-(x+3)e^{-x+1}$.ومنه

0.50ن

$$f'(x)=\left(e^{-x+1}\right)\left[2e\times e^{x-1}+1-x-3\right]=e^{-x+1}(2e^{x}-x-2)=-e^{-x+1}(-2e^{x}+x+2)$$

ومنه : $f'(x)=-g(x)e^{-x+1}$

حساب $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h}$

0.25ن

لدينا $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h}=f'(\alpha)=0$

التفسيير الهندسي: (C_f) يقبل مماس عند نقطة ذات الفاصلة α موازي لحامل محور فواصل

دراسة اتجاه تغير الدالة f : إشارة $f'(x)$ من إشارة $-g(x)$

0.25ن

$f'(x)=0$ من أجل $x=0$ أو $x=\alpha$

$f'(x)\succ 0$ من أجل $x\in\left]-\infty,\alpha\right[\cup\left]0,+\infty\right[$ معناه الدالة f متزايدة تماما على كل من المجاليين $\left]0,+\infty\right[$ و $\left]-\infty,\alpha\right[$

$f'(x) \prec 0$ من أجل $x \in]0,\alpha[$ معناه الدالة f متناقصة تماما على المجال $]0,\alpha[$.

جدول تغيرات الدالة f

0.75ن

2-أ)نبين أن المستقيم (D) ذو المع

لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-y = \lim\limits_{x\to+\infty}(x+3)e^{-x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{e^x}+\frac{3}{e^x}\right)e = 0$

دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى (D) : لدينا $f(x)-y=(x+3)e^{-x+1}$

إشارة $f(x)-y$ من إشارة العدد $x+3$ ومنه على المجال $]-\infty,-3[$ (C_f) أسفل (D)

0.5ن

وعلى المجال $]-3,+\infty[$ (C_f) أعلى (D) ومن أجل $x=-3$ (C_f) يقطع (D) في نقطة $(-3,2(-3e-3))$

نبين أن المنحني (C_f) يقبل نقطة انعطاف: لدينا f' قابلة للإشتقاق على ℝ و

$f''(x)=(x+1)e^{-x+1}$

0.25ن

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$

$f''(x)$ تنعدم عند قيمة $x_0=-1$ مغيرة إشارتها وعليه النقطة $A(1, f(1)=2e-2)$ نقطة انعطاف للمحني البياني (C_f)

نبين أن (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة فا صلتها β بحيث: $-2,4<\beta<-2,3$

0.5ن

لدينا الدالة f معرفة و مستمرة و رتيبة تماما على المجال $]-\infty,\alpha]$ و بالخصوص على المجال $[-2,4,-2,3]$ ومن جهة أخرى

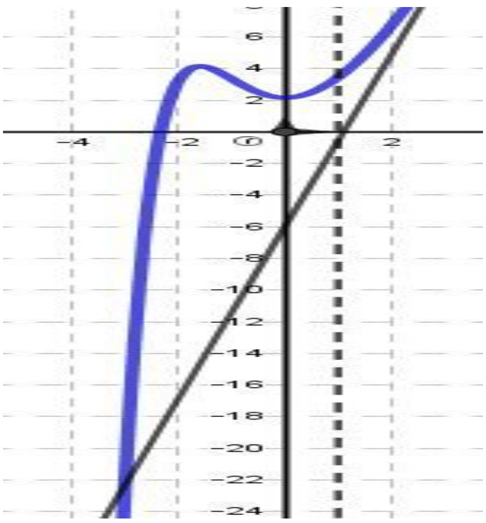
لدينا $f(-2,3)\times f(-2,4)<0$ إذن حسب مبرهنة القيم

المتوسطة فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا β حيث : $-2,4<\beta<-2,3$ أي (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة

فا صلتها β بحيث: $-2,4<\beta<-2,3$

0.25ن

رسم المنحني (C_f) و (D)



إيجاد العددين الحقيقيين a و b بحيث

حتى تكون الدالة $x \to (ax+b)e^{-x+1}$ هي دالة أصلية لدالة

0.50ن

$x \to (x+3)e^{-x+1}$ على ℝ

تكون الدالة $x \to (ax+b)e^{-x+1}$ هي دالة أصلية

للدالة $x \to (x+3)e^{-x+1}$ إذا وفقط تحقق ما يلي من أجل كل

	0.5ن	عدد حقيقي x لدينا: $ae^{-x+1}-(ax+b)e^{-x+1}=(x+3)e^{-x+1}$ أي $(-ax-b+a)e^{-x+1}=(x+3)e^{-x+1}$ بالمطابقة نجد : $-a=1$ و $-b+a=3$ ومنه نجد $a=-1$ و $b=-4$	
	0.5ن	حساب مساحة الحيز المحددة بين المستقيمين: $x=1$ و $x=n$ بحيث $n\succ 1$ والمستقيم (D) $I_n=\int_1^n[f(x)-y]dx=\left[-(x+4)e^{-x+1}\right]_1^n=-(n+4)e^{-n+1}+5$	
	0.5ن	ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n=\lim\limits_{n\to+\infty}-(n+4)e^{-n+1}+5=+5$ لأن: $\lim\limits_{n\to+\infty}-(n+4)e^{-n+1}=\lim\limits_{n\to+\infty}-(\frac{n}{e^n}+\frac{4}{e^n})e=0$ ***حل التمرين الرابع:***) إيجاد α و β :	
	0.5ن	لدينا $\begin{cases}A=\beta+8.9^1+\alpha.9^2+2.9^3\\A=\beta+7+\alpha.7^2+5.7^3\end{cases}$ أي $\begin{cases}A=\beta+81\alpha+1530\\A=\beta+49\alpha+1722\end{cases}$ ومنه $32\alpha-192=0$	
	0.5ن	وبالتالي $\alpha=\frac{192}{32}=6$ نعوض α في الجملة نجد: $\begin{cases}A=\beta+2016\\A=\beta+2016\end{cases}$ لدينا $A\equiv 0[7]$ أي $\beta+2016\equiv 0[7]$	

$\beta \equiv 0[7]$

$\beta = 7k \quad ; \quad k \in \mathbb{Z}$

0.25ن بماأن $0 \le \beta < 7$

فإن $\beta = 0$

0.25ن ومنه $\alpha = 6$ و $\beta = 0$

•كتابة العدد A في النظام العشري:

لدينا $\alpha = 6$ و $\beta = 0$

$A = \beta + 81\alpha + 1530$

$A = 0 + 81(6) + 1530$

0.4ن ومنه $A = 2016$

2) حساب PGCD :

$PGCD(2016;2268;2772) = 252$

0.7ن

3) لدينا المعادلة (E) $2772x - 2268y = 2016$ تكافئ $11x - 9y = 8$ .....(*)

إيجاد $(x_0;y_0)$:

لدينا $x_0 + y_0 = 8$ تكافئ $x_0 = 8 - y_0$

بالتعويض في (*) نجد: $11(8 - y_0) - 9y_0 = 8$ تكافئ $88 - 11y_0 - 9y_0 = 8$

تكافئ $88 - 20y_0 = 8$

تكافئ $y_0 = 4$

ومنه $(x_0;y_0) = (4;4)$

• استنتاج مجموعة حلول المعادلة(E):

$$\begin{cases} 11x - 9y = 8.......(*) \\ 11(4) - 9(4) = 8 \end{cases}$$

ومنه $11(x-4) - 9(y-4) = 0$ تكافئ $11(x-4) = 9(y-4)$

أي $11/9(y-4)$

و $\text{PGCD}(11;9) = 1$

حسب مبرهنة غوص : $11/y-4$

أي $y - 4 = 11k \quad ; \quad k \in \mathbb{Z}$

	ومنه $y=11k+4$	0.25ن	
	بالتعويض في (*) نجد $11x-9(11k+4)=8$ تكافئ $11x-99k-36=8$ تكافئ $11x=99k+44$ تكافئ $x=9k+4$ ومنه: $S=\{(9k+4;11k+4)/k\in\mathbb{Z}\}$	0.50ن	
	❖) إيجاد قيم d: $\begin{cases} d/x \\ d/y \end{cases}$ هذا يعني $d/11x-9y$	0.25ن	
	أي $d/8$ و منه $d\in\{1;2;4;8\}$	0.25ن	
	2) استنتاج الثنائية $(x;y)$: لدينا $PGCD(x;y)=2$ يكافئ $\begin{cases} 2/(11k+4) \\ 2/(9k+4) \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} 11k+4\equiv 0[2] \\ 9k+4\equiv 0[2] \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} k\equiv 0[2] \\ k\equiv 0[2] \end{cases}$ أي $k=2k'$; $k'\in\mathbb{Z}$ ومنه $\begin{cases} x=11(2k')+4 \\ y=9(2k')+4 \end{cases}$ إذن $S=\{(22k'+4;18k'+4)\}$	01ن	
		0.5ن	

			0.5ن	

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

مديرية التربية لولاية سطيف — الأستـاذ : عجيسـي نـواري

المستوى: الثالثة ثانوي — دورة : جـــــوان 2022

الشعب:علوم تجريبية - تقني رياضي — التاريخ: 05 جـــوان 2022

امتحان بكالوريا تجريبي في مادة: الرياضيات — المدة: 3سا(ع.ت) 4سا (ت.ر)

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأول

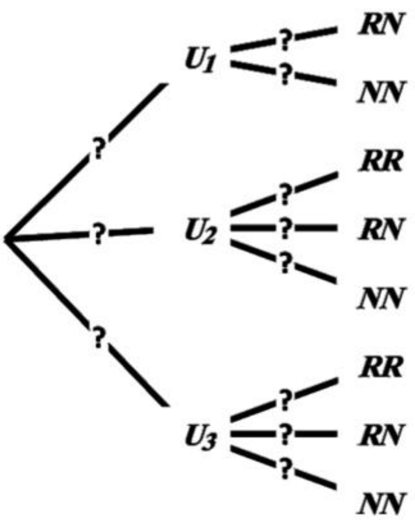
التمرين الأول: (04 نقاط) (خاص بشعبة علوم تجريبية)

لدينا 3 صناديق U_3,U_2,U_1 يحتوي الصندوق U_1 على كرة حمراء واحدة و 9 كرات سوداء، الصندوق U_2 يحتوي على كرتين حمراوين و 8 كرات سوداء، أما الصندوق U_3 يحتوي على ثلاث كرات حمراء و 7 كرات سوداء .

نختار عشوائيا صندوقا من الصناديق الثلاثة و نسحب في آن واحد كرتين من الصندوق المختار

لتكن الأحداث : RR " الحصول على كرتين حمراوين " و NN : "الحصول على كرتين سوداوين " ,

و NR " الحصول على كرتين مختلفتين في اللون "



1) انقل ثم اتمم شجرة الاحتمالات

2) ليكن المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل سحب عدد الكرات الحمراء المسحوبة .

أ) حدد قيم المتغير العشوائي X , ثم بين أن $p\left(X=2\right)=\dfrac{4}{135}$

ب) عين قانون احتمال المتغير العشوائي X , ثم احسب أمله الرياضياتي $E\left(X\right)$

3) علما أننا حصلنا على كرتين حمراوين، ما احتمال أن يكون السحب من الصندوق U_3

التمرين الأول : (04 نقاط) (خاص بشعبة تقني رياضي)

1) نعتبر المعادلة$\left(E\right)$ ذات المجهولين الصحيحين x و y حيث : $11x-5y=2$

أ) اثبت انه إذا كانت الثنائية $\left(x,y\right)$ من $\mathbb{Z}^2$ حلا للمعادلة $\left(E\right)$ فإن : $y\equiv 4\left[11\right]$

ب) استنتج حلول المعادلة $\left(E\right)$

2) ليكن n عددا طبيعيا غير معدوم، نضع $a=5n+2$ و $b=11n+4$

أ) عين القيم الممكنة للقاسم المشترك الأكبر للعددين a و b

ب) عين قيم العدد الطبيعي غير المعدوم n بحيث يكون : $PGCD(a;b)=2$

ج) استنتج قيم العدد الطبيعي غير المعدوم n بحيث يكون العددان a و b أوليان فيما بينهما

3) من أجل كل عدد طبيعي n ، نضع $A=5n^2+7n+2$ و $B=11n^2+15n+4$

أ) بين أن العدد $(n+1)$ يقسم كل من العددين A و B

ب) استنتج حسب قيم n القاسم المشترك الأكبر للعددين A و B

التمرين الثاني: (05 نقاط)

لتكن المعادلة التفاضلية $y'-3y=0.......(1)$

1) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة التفاضلية (1) ثم عين الحل الخاص f الذي يأخذ القيمة 1 من أجل $x=\frac{-2}{3}$

2) نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بحدها العام : $u_n=e^{3n+2}$

أ) بين أن (u_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول، هل هي متقاربة ؟

ب) ادرس اتجاه تغير (u_n)

3) نعرف المتتالية (v_n) بما يلي : $v_n=\ln(u_n)$

أ) بين أن (v_n) معرفة من أجل كل عدد طبيعي n

ب) اثبت أن (v_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول

ج) احسب المجموع : $S_n=v_0+v_1+.....+v_{n-1}$ ثم الجداء $T_n=u_0\times u_1\times.......\times u_{n-1}$

التمرين الثالث: (04 نقاط)

من بين الاقتراحات التالية لكل سؤال جواب واحد صحيح حدده مع التعليل

1) منحنى الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ : $f(x)=3x+\frac{e^{-x}-2}{e^{-x}-1}$ يقبل مستقيم مقارب مائل بجوار $+\infty$ معادلته :

أ) $y=3x$ ب) $y=3x+1$ ج) $y=3x+2$

2) نعتبر العدد الحقيقي $A(\lambda)=\int_1^{\lambda}x\ln x dx$ حيث $\lambda>1$: علما أن الدالة $x\mapsto\frac{x^2}{2}\left[\ln x-\frac{1}{2}\right]$ دالة أصلية للدالة $x\mapsto x\ln x$, قيمة λ التي من أجلها $A(\lambda)=\frac{1}{4}$ هي :

أ) $\lambda=e^{-1}$ ب) $\lambda=\sqrt{e}$ ج) $\lambda=2e$

3) المعادلة $\log(11x^2-6x+5)=\log(x^2)+1$ تقبل حلان في $\mathbb{R}$ هما :

أ) $S=\{1;-5\}$ ب) $S=\{1;5\}$ ج) $S=\{-1;-5\}$

4) المتتالية العددية (U_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ $U_n=2-3\left(\frac{1}{4}\right)^n$ هي متتالية

أ) متزايدة تماما ب) متناقصة تماما ج) ليست رتيبة

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I) نعتبر الدالة f المعرفة على المجموعة $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=x-(x^2+1)e^{-x+1}$

نسمي $\left(C_f\right)$ المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $\left(o,\vec{i};\vec{j}\right)$

1) أ) احسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و بين أن: $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

ب) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x , $f'(x)=1+\left(x-1\right)^2 e^{-x+1}$

ج) استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها

2) بين أن المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y=x$ مقارب مائل للمنحنى $\left(C_f\right)$ عند $+\infty$ ثم ادرس الوضع النسبي للمنحنى $\left(Cf\right)$ بالنسبة إلى (Δ)

3) بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث، $1{,}8<\alpha<1{,}9$

4) اكتب معادلة ديكارتية للمماس (T) للمنحنى $\left(C_f\right)$ عند النقطة ذات الفاصلة 1

5) بين انه من أجل كل عدد حقيقي x , $f''(x)=-(x-1)\left(x-3\right)e^{-x+1}$ ثم استنتج أن $\left(C_f\right)$ يقبل نقطتي انعطاف يطلب تعيينهما .

6) احسب : $f(3), f(0)$ ثم ارسم $(\Delta),(T)$ و $\left(C_f\right)$

7) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة ذات المجهول الحقيقي x التالية : $f(x)=x+m$

II) نضع من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n: $I_n=\int_0^1 x^n e^{-x+1}dx$

1) أ) بين أن الدالة G المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $G(x)=-(x+1)e^{-x+1}$ هي دالة أصلية للدالة $x\mapsto xe^{-x+1}$

ب) احسب I_1

2) أ) باستعمال المكاملة بالتجزئة بين أن : $I_{n+1}=-1+\left(n+1\right)I_n$ لكل عدد طبيعي غير معدوم n

ب) احسب I_2 .

3) احسب بـ cm^2 مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى $\left(C_f\right)$ و المستقيم (Δ) و المستقيمين الذين معادلتيهما: $x=0$ و $x=1$

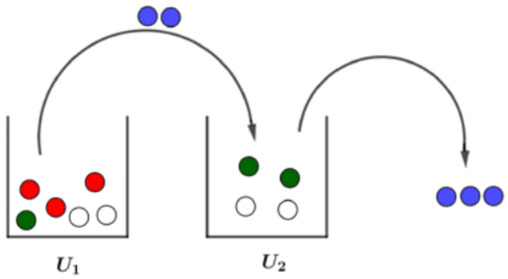
انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط) (خاص بشعبة علوم تجريبية)

يحتوي صندوق U_1 على ست كرات منها ثلاثة كرات حمراء وكرتين لونهما أبيض وكرة لونها أخضر، ويحتوي صندوق U_2 على أربع كرات منها كرتين خضراوين وكرتين لونهما أبيض . الكرات في صندوقين كلها متماثلة لا نفرق بينها باللمس.

نقوم بإجراء عملية السحب العشوائي الاتية: نسحب عشوائيا وفي ان واحد كرتين من الصندوق U_1 ونضعها في الصندوق U_2 ثم نسحب عشوائيا وفي ان واحد ثلاث كرات من الصندوق U_2



نعتبر الحدثين التاليين :

A: " سحب ثلاث كرات من نفس اللون "

B: " سحب ثلاث كرات مختلفة الألوان مثنى مثنى "

1) أ) بين أن : $P(A)=\dfrac{17}{300}$

ب) أحسب: $P(B)$

2) X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب عدد الألوان التي تظهر بعد نهاية عملية السحب العشوائي

أ) أوجد القيم الممكنة للمتغير العشوائي X

ب) أوجد قانون احتمال المتغير العشوائي X ثم احسب امله الرياضياتي

3) أحسب احتمال سحب ثلاث كرات من نفس اللون من U_2 علما أن الكرتين المسحوبتين من U_1 من نفس اللون

التمرين الأول : (04 نقاط) (خاص بالتقني رياضي)

نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة: $(E): 5x-6y=3$

1) أ) أثبت أنه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حل للمعادلة (E) فإن x مضاعفا للعدد 3

ب) استنتج حلا خاصا للمعادلة (E) ثم حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E)

ج) استنتج حلول للجملة (S) : $\begin{cases} x\equiv -1[6] \\ x\equiv -4[5] \end{cases}$

2) a و b عددان طبيعيان حيث:

$a=\overline{1\alpha0\alpha00}$ في النظام ذو الأساس 3 و $b=\overline{\alpha\beta0\alpha}$ في النظام ذو الأساس 5

عين α و β حتى تكون الثنائية $(a;b)$ حلا للمعادلة (E)

التمرين الثاني: (05 نقاط)

نعتبر المتتالية $\left(u_n\right)$ المعرفة على $\mathbb{N}$ بالعلاقة: $u_0=2$ و $u_{n+1}=\frac{2}{3}u_n+\frac{1}{3}n+1$

1) أحسب الحدود u_1 ، u_2 و u_3 ثم ضع تخمينا حول إتجاه تغير المتتالية $\left(u_n\right)$

2) أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $u_n\le n+3$

ب) ادرس اتجاه تغير المتتالية $\left(u_n\right)$

ج) استنتج أن $\left(u_n\right)$ محدودة من الأسفل. هل يمكن القول أن $\left(u_n\right)$ متقاربة؟

3) نعتبر المتتالية $\left(v_n\right)$ المعرفة على $\mathbb{N}$ بالعلاقة $v_n=u_n-n$

أ) برهن أن المتتالية $\left(v_n\right)$ هي متتالية هندسية يطلب تعيين حدها الأول وأساسها

ب) عبر عن v_n ثم u_n بدلالة n ثم احسب نهاية $\left(u_n\right)$ عند $+\infty$

ج) أحسب بدلالة n المجموع $S_n=u_0+u_1+u_2+...+u_n$

4) لتكن المتتالية $\left(t_n\right)$ المعرفة على $\mathbb{N}$ بالعلاقة $t_n=\ln\left(v_n\right)$

أ) برهن أن المتتالية $\left(t_n\right)$ حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول

ب)أحسب بدلالة n المجموع : $A_n=t_0+t_1+t_2+...+t_n$

ج)استنتج بدلالة n الجداء : $P_n=v_0\times v_1\times v_2\times...\times v_n$

التمرين الثالث: (04 نقاط)

1) حل المعادلة التفاضلية $y''=-e^x+2$ والذي يحقق الشرطان $y(0)=1$; $y'(0)=1$ هو :

أ) $y=x^2-e^x+2x+2$ ب) $y=2e^x-x$ ج) $y=-2x+e^x$

2) يراد عشوائيا تشكيل لجنة تضم رئيسا ونائبا له من بين ثلاث رجال $H_1;H_2;H_3$ وأربع نساء $F_1;F_2;F_3;F_4$

احتمال أن هو H_1 الرئيس

أ) $\frac{6}{7}$ ب) $\frac{1}{7}$ ج) $\frac{4}{42}$

3) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ $f\left(x\right)=3x^2-\frac{1}{x+1}$:

القيمة المتوسطة m للدالة f على المجال $[0;2]$ هي

أ) $m=4-\ln\sqrt{3}$ ب) $m=4+\ln\sqrt{3}$ ج) $m=2-\ln\sqrt{3}$

4) $\left(u_n\right)$ متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ $u_n=\int_0^1\left(1+x^n\right)dx$:

أ) $\left(u_n\right)$ متتالية متناقصة ب) $\left(u_n\right)$متتالية متزايدة ج) $\left(u_n\right)$ متتالية غير رتيبة

التمرين الرابع: (07 نقاط)

المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ومجانس $\left(O,\vec{i};\vec{j}\right)$

$I)$ لتكن الدالة العددية g المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=x-\frac{1}{x}-2\ln(x)$

1) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x>0$ ، $g'(x)=\frac{(x-1)^2}{x^2}$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة g

2) أدرس إشارة $g(x)$ (لاحظ أن: $g(1)=0$)

$II)$ نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=x+\frac{1}{x}-(\ln x)^2-2$ وليكن (C) منحناها البياني في المستوي السابق

1) بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x}=0$ ثم أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

2) تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]0;+\infty[$ ، $f\left(\frac{1}{x}\right)=f(x)$ ثم احسب $\lim\limits_{x\overset{>}{\longrightarrow}0}f(x)$ وفسر النتيجة هندسيا

3) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]0;+\infty[$ ، $f'(x)=\frac{g(x)}{x}$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f

4) انشئ المنحنى (C)

5) بين أن الدالة $h:x\to x\ln x-x$ هي دالة أصلية للدالة $x\to\ln x$ على $]0;+\infty[$ ثم باستعمال التكامل بالتجزئة بين أن: $\int_1^e(\ln x)^2dx=e-2$

6) أحسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C) ومحور الفواصل والمستقيمين الذين معادلتيهما $x=1$ و $x=e$

انتهى الموضوع الثاني

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

مديرية التربية لولاية سطيف — الأستـاذ : عجيسـي نـواري

المستوى: الثالثة ثانوي — دورة : جـــــــوان 2022

الشعب:علوم تجريبية - تقني رياضي — التاريخ: 05 جـــوان 2022

التصحيح المفصل لامتحان البكالوريا التجريبي في مادة: الرياضيات

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

(1 $P(U_1)=P(U_2)=P(U_3)=\frac{1}{3}$

$P_{U_1}(NN)=\frac{C_9^2}{C_{10}^2}$ ، $P_{U_1}(RN)=\frac{C_1^1\times C_9^1}{C_{10}^2}$

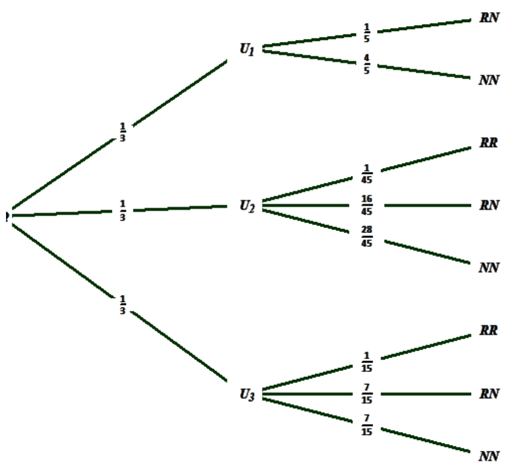
$P_{U_2}(RN)=\frac{C_2^1\times C_8^1}{C_{10}^2}$ ، $P_{U_2}(RR)=\frac{C_2^2}{C_{10}^2}$

$P_{U_2}(NN)=\frac{C_8^2}{C_{10}^2}$

$P_{U_3}(NN)=\frac{C_7^2}{C_{10}^2}$ ، $P_{U_3}(RR)=\frac{C_3^2}{C_{10}^2}$ ،

$P_{U_3}(NN)=\frac{C_7^2}{C_{10}^2}$

(2.25)



استعمل شجرة الإحتمالات

(2 أ) $X(\Omega)=\{0;1;2\}$ ، $P(X=2)=\frac{4}{135}$ — 0.25+0.25

x_i	0	1	2
$P(X=x_i)$	$\frac{17}{27}$	$\frac{46}{135}$	$\frac{4}{135}$

0.5+0.25

ب) $E(X)=\frac{2}{5}$

(3 $P_{RR}(U_3)=\frac{3}{4}$ — 0.5

التمرين الثاني : (04 نقاط) (خاص بالتقني رياضي)

1)أ*/إثبات أن: $y\equiv 4[11]$ ، $(E)...11x-5y=2$

$11x-5y=2$ يكافئ $5y=11x+2$ ومنه $5y\equiv -2[11]$ أي

أي $5y\equiv 20[11]$ ومنه : $y\equiv 4[11]$ (0.5)

ب*/استنتاج حلول المعادلة (E):

$y\equiv 4[11]$ معناه $y=11k+4$ مع $k\in\mathbb{Z}$ ،نعوض قيمة

y في المعادلة (E) نجد: $x=5k+2$ (0.5)

ومنه: $S=\{(11k+4;5k+5)/k\in\mathbb{Z}\}$

2)أ*/تعيين القيم الممكنة لـ $d=PGCD(a;b)$ **:**

$a=5n+2$ و $b=11n+4$ ، $n\in\mathbb{N}^*$ (0.5)

$11a-5b=11(5n+2)-5(11n+4)=55n+22-55n-20=2$

ومنه : $d/2$ إذن : $d\in D_2=\{1;2\}$.

ب*/تعيين قيم العدد الطبيعي غير المعدوم n بحيث يكون: $PGCD(a;b)=2$

لدينا $PGCD(a;b)=2$

معناه 2 يقسم a و2 يقسم b معناه 2 يقسم $b-2a$ (0.5)

أي 2 يقسم $11n+4-2(5n+2)$ وبالتالي 2 يقسم n .

ومنه n عدد زوجي يكتب من الشكل: $n=2\alpha\ /\alpha\in\mathbb{N}^*$

ج*/ استنتاج قيم العدد الطبيعي غير المعدوم n بحيث يكون العددان a و b أوليان فيما بينهما: من السؤال السابق (0.5)

من أجل $PGCD(a;b)=2$ قيم n: $n=2\alpha\ /\alpha\in\mathbb{N}^*$

ومنه : قيم n حيث $PGCD(a;b)=1$ هي : $n=2\alpha+1/\alpha\in\mathbb{N}$

3) أ*/نبين أن العدد $(n+1)$ يقسم كل من العددين A و B

$A=5n^2+7n+2$ و $B=11n^2+15n+4$ ، $n\in\mathbb{N}$ (0.5)

$A=(n+1)(5n+2)=a(n+1)$ ، $B=(n+1)(11n+4)=b(n+1)$

ومنه : $(n+1)$ يقسم كل من العددين A و B

ب*/ استنتاج حسب قيم n القاسم المشترك الأكبر للعددين A و B:

$PGCD(A;B)=PGCD(a(n+1);b(n+1))=(n+1)PGCD(a;b)$ (0.5)

ومنه نميز حالتين :

الحالة 1: إذا كان $PGCD(a;b)=2$ معناه $n=2\alpha/\alpha\in\mathbb{N}^*$

نجد : $PGCD(A;B)=(2\alpha+1)2=4\alpha+2$ (0.5)

الحالة 2: إذا كان $PGCD(a;b)=1$ معناه $n=2\alpha+1/\alpha\in\mathbb{N}$

نجد : $PGCD(A;B)=(2\alpha+1+1)1=2\alpha+2$

التمرين الثاني: (05 نقاط)

لدينا : $(1): y'-3y=0$	
1) حل المعادلة التفاضلية (1): - لدينا : $y'-3y=0$ يكافئ $y'=3y$ حلول المعادلة هي الدوال f ' ‹¢¥ : $f(x)=ce^{3x}$ حيث $c\in\mathbb{R}$	0.5
- **تعيين الحل الخاص f الذي يحقق $f\left(-\frac{2}{3}\right)=1$:** $f\left(-\frac{2}{3}\right)=1$ يعني $ce^{3\left(-\frac{2}{3}\right)}=1$ ومنه $ce^{-2}=1$ ¤ $c=e^{2}$ ومنه $f(x)=e^{2}\times e^{3x}=e^{3x+2}$	0.25
2) لدينا : $u_n=e^{3n+2}$	
) تبيان أن المتتالية (u_n) هندسية : - لدينا : $u_{n+1}=e^{3(n+1)+2}=e^{3n+3+2}=e^{3}\times e^{3n+2}=e^{3}\times u_n$ **ومنه المتتالية (u_n) هندسية أساسها $q=e^{3}$ وحدها الأول $u_0=e^{2}$**	0.5 + 0.25 + 0.25
- **تقارب المتتالية (u_n) :** (u_n) هندسية أساسها $q=e^{3}$¤ $q>1$ ومنه (u_n) متباعدة	0.25
لدينا : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}e^{3n+2}=+\infty$	
•) دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n): - لدينا : $u_{n+1}-u_n=e^{3n+5}-e^{3n+2}=(e^{3}-1)e^{3n+2}$ ¤ $e^{3}-1>0$ » $u_{n+1}-u_n>0$ ومنه المتتالية (u_n) متزايدة تماما .	0.5
3) لدينا : $v_n=\ln(u_n)$	
) تبيان أن المتتالية (v_n) ' $\mathbb{N}$: من أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $u_n>0$ ومنه المتتالية (v_n) معرفة من أجل كل عدد طبيعي n. **ولدينا : $v_n=\ln e^{3n+2}=3n+2$**	0.5
•) تبيان أن المتتالية (v_n) حسابية : - لدينا : $v_{n+1}-v_n=3(n+1)+2-(3n+2)=3$ ومنه (v_n) حسابية أساسها $r=3$ وحدها الأول $v_0=2$	0.25+0.5 0.25+
¡) « · ¢ $:S_n$ $S_n=v_0+v_1+...+v_{n-1}=\frac{n}{2}(v_0+v_{n-1})=\frac{n}{2}(2+3(n-1)+2)$ ¤ $S_n=\frac{n}{2}(3n+1)$	0.5
- « · ¢ ƒ $:T_n=u_0\times u_1\times...\times u_{n-1}$ $T_n=u_0\times u_1\times...\times u_{n-1}=e^{v_0}\times e^{v_1}\times...\times e^{v_{n-1}}=e^{v_0+v_1+...+v_{n-1}}$ $T_n=e^{\frac{n}{2}(3n+1)}$	0.5

التمرين الثالث: (04 نقاط)

الاقتراح	الجواب	التبرير	التنقيط
1	الإجابة (ج) $y=3x+2$	$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-3x]=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{-x}-2}{e^{-x}-1}=2\ ;\ \lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(3x+2)]=0$	2×0.5
2	الإجابة (ب) $\lambda=\sqrt{e}$	$A(\lambda)=\int_1^{\lambda}x\ln x\,dx=\left[\frac{x^2}{2}\left(\ln x-\frac{1}{2}\right)\right]_1^{\lambda}=\frac{\lambda^2}{2}\left(\ln\lambda-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{4}$ $A(\lambda)=\frac{1}{4}\Rightarrow\frac{\lambda^2}{2}\left(\ln\lambda-\frac{1}{2}\right)=0$ ومنه $\lambda=\sqrt{e}$ أو $\lambda=0$ مرفوض لأن : $(\lambda>1)$	2×0.5
3	الإجابة (ب) $S=\{1,5\}$	$\log(11x^2-6x+5)=\log x^2+1$ $\frac{\ln(11x^2-6x+5)}{\ln10}=\frac{\ln x^2}{\ln10}+1$ $x^2-6x+5=0$ $x=1,x=5$	2×0.5
4	الإجابة (أ) متزايدة تماما	$u_{n+1}-u_n=\left(2-3\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right)-\left(2-3\left(\frac{1}{4}\right)^{n}\right)=-3\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}+3\left(\frac{1}{4}\right)^{n}=\frac{9}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^{n}>0$	2×0.5

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I. **لدينا :** $f(x)=x-(x^2+1)e^{-x+1}$ **(1** **أ) حساب** $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$: - $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[x-(x^2+1)e^{-x+1}\right]=-\infty$ لأنّ : $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-x+1}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty}-(x^2+1)e^{-x+1}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty\end{cases}$	0.25
• **تبيان أنّ :** $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$: **لدينا :** $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x-(x^2+1)e^{-x+1}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\frac{x^2+1}{e\times e^x}\right)$	0.25
أي $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\frac{x^2}{e^x}\times\frac{1}{e}+\frac{1}{e}\times\frac{1}{e^x}\right)=+\infty$ لأن $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}=0\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=0\end{cases}$	
ب) تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x)=1+(x-1)^2e^{-x+1}$: • **لدينا :** $f'(x)=1-\left[2xe^{-x+1}+(x^2+1)(-e^{-x+1})\right]=1-(2x-x^2-1)e^{-x+1}$ **وبالتالي :** $f'(x)=1+(x^2-2x+1)e^{-x+1}=1+(x-1)^2e^{-x+1}$	0.5
ج) استنتاج اتجاه تغير الدالة f : <table><tr><td>x</td><td>$-\infty$ $+\infty$</td></tr><tr><td>$(x-1)^2e^{-x+1}$</td><td>+</td></tr><tr><td>$f'(x)$</td><td>+</td></tr></table>	0.25

• **جدول التغيرات :**

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

0.5

2) **تبيان أنَ المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y=x$ مقارب مائل لـ (C_f) عند $+\infty$:**

• لدينا :

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left(x-(x^2+1)e^{-x+1}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(x^2e^{-x+1}+e^{-x+1}\right)=0$$

ومنه (Δ) مستقيم مقارب مائل للمنحني (C_f) عند $+\infty$

0.25

• **دراسة الوضعية النسبية للمنحني (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ):**

لدينا : $f(x)-x=x-(x^2+1)e^{-x+1}-x=-(x^2+1)e^{-x+1}$

إذن $f(x)-x<0$ ومنه (C_f) يقع تحت المستقيم (Δ) من أجل كل عدد حقيقي x

0.5

3) **تبيان أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1.8<\alpha<1.9$:**

• **لدينا** f مستمرة ورتيبة تماما على المجال $[1.8;1.9]$

ولدينا $f(1.8)=1.8-((1.8)^2+1)e^{-1.8+1}=-0.11$

$f(1.9)=1.9-((1.9)^2+1)e^{-1.9+1}=0.03$ وبالتالي $f(1.8)\times f(1.9)<0$

حسب مبرهنة ال قيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1.8<\alpha<1.9$.

0.5

4) **كتابة معادلة ديكارتية للمماس (T) للمنحني (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1:**

$y=f'(1)(x-1)+f(1)$

$y=1\times(x-1)-1=x-2$ أي $(T): y=x-2$

0.5

5) **تبيان أنَ $f''(x)=-(x-1)(x-3)e^{-x+1}$:**

• لدينا : $f''(x)=2(x-1)e^{-x+1}+(x-1)^2\times\left(-e^{-x+1}\right)=(x-1)e^{-x+1}(2-x+1)$

أي $f''(x)=-(x-1)(x-3)e^{-x+1}$.

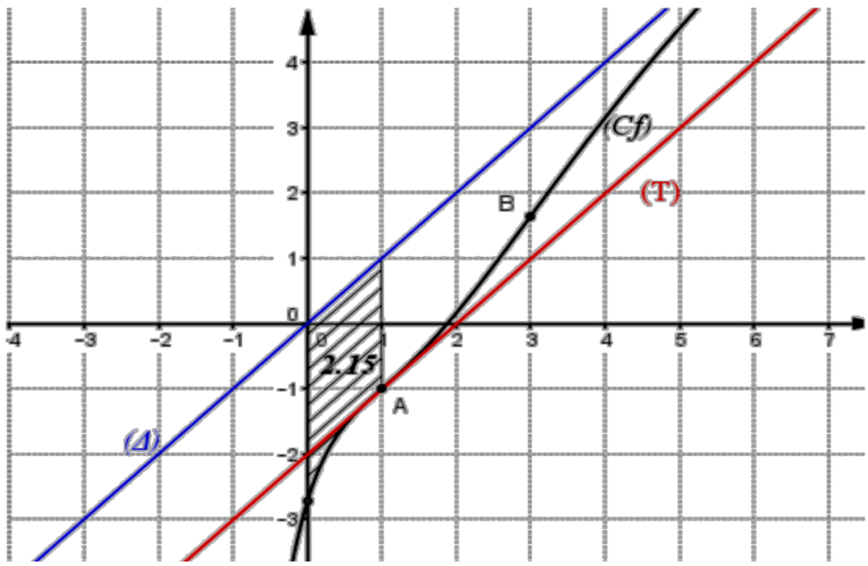
• **استنتاج أنَ (C_f) يقبل نقطتي انعطاف :**

- جدول إشارة $f''(x)$:

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	+	0	$-$	

• **المشتقة الثانية** $f''(x)$ تنعدم من أجل القيمتين $x=1$ و $x=3$ مغيرة إشارتها إذن النقطتين $A(1;f(1)),B(3;f(3))$ نقطتي انعطاف للمنحني (C_f)

01

الإجابة	العلامة
6) حساب $f(3),f(0)$: $f(3)=3-9e^{-2}=1.65, f(0)=-e=-2.71$ الرسم :  	0.75
7) المناقشة البيانية لحلول المعادلة : $f(x)=x+m$ • هي فواصل نقط تقاطع المنحني (C_f) مع المستقيم ذي المعادلة $y=x+m$ الموازي لكل من (T) و(Δ) . • إذا كان $m\in]-\infty;-e[$ المعادلة تقبل حلا وحيدا سالبا . • إذا كان $m=-e$ المعادلة تقبل حلا وحيدا معدوما . • إذا كان $m\in]-e;0[$ المعادلة تقبل حلا وحيدا موجبا . • إذا كان $m\in[0;+\infty[$ المعادلة ليس لها حلا .	0.5
II. من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n نضع : $I_n=\int_0^1 x^n e^{-x+1}dx$ 1- أ) تبيان أنَ الدالة G المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $G(x)=-(x+1)e^{-x+1}$ هي دالة أصلية للدالة g حيث $g(x)=xe^{-x+1}$ على المجموعة $\mathbb{R}$: • لدينا : $G'(x)=-[e^{-x+1}-(x+1)e^{-x+1}]=-(e^{-x+1}-xe^{-x+1}-e^{-x+1})=xe^{-x+1}=g(x)$ ومنه G دالة أصلية للدالة g على $\mathbb{R}$.	0.25
ب) حساب I_1 : • لدينا : $I_1=\int_0^1 xe^{-x+1}dx=[-(x+1)e^{-x+1}]_0^1=-2e^0+e=e-2$	0.25
2- أ) تبيان أنَ $I_{n+1}=-1+(n+1)I_n$ • لدينا : $I_{n+1}=\int_0^1 x^{n+1}e^{-x+1}dx$ نضع : $u(x)=x^{n+1}$ ومنه $u'(x)=(n+1)x^n$ ونضع : $v'(x)=e^{-x+1}$ ومنه $v(x)=-e^{-x+1}$ وبالتالي : $I_{n+1}=\int_0^1 x^{n+1}e^{-x+1}dx=[-x^{n+1}e^{-x+1}]_0^1-\int_0^1(n+1)x^n(-e^{-x+1})dx$ ومنه : $I_{n+1}=-1+(n+1)\int_0^1 x^n e^{-x+1}dx=-1+(n+1)I_n$	0.25
ب) حساب I_2: $I_2=-1+(1+1)I_1=-1+2(e-2)=2e-5$	0.25
3- حساب المساحة للحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) والمستقيم (Δ) والمستقيمين الذين معادلتيهما $x=1,x=0$: $S=\int_0^1[y-f(x)]dx=\int_0^1 x-x+(x^2+1)e^{-x+1}dx=\int_0^1(x^2+1)e^{-x+1}dx$ أي $S=\int_0^1 x^2e^{-x+1}dx+\int_0 e^{-x+1}dx=I_2+[-e^{-x+1}]_0^1$ $S=(2e-5-1+e)us=(3e-6)cm^2=2.15cm^2$	0.25

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

1) أ) تبيين أن : $p(A)=\dfrac{17}{300}$

$$p(A)=\left(\frac{C_2^2}{C_6^2}\times\frac{C_4^3}{C_6^3}\right)+\left(\frac{C_1^1C_2^1}{C_6^2}\times\frac{C_3^3+C_3^3}{C_6^3}\right)+\left(\frac{C_3^1C_1^1}{C_6^2}\times\frac{C_3^3}{C_6^3}\right)+\left(\frac{C_3^1C_2^1}{C_6^2}\times\frac{C_3^3}{C_6^3}\right)=\frac{17}{300}$$ (0.5).............

ب) حساب $p(B)$:

$$p(B)=\left(\frac{C_3^2}{C_6^2}\times\frac{C_2^1C_2^1C_2^1}{C_6^3}\right)+\left(\frac{C_3^1C_1^1}{C_6^2}\times\frac{C_3^1C_2^1C_1^1}{C_6^3}\right)+\left(\frac{C_3^1C_2^1}{C_6^2}\times\frac{C_3^1C_2^1C_1^1}{C_6^3}\right)=\frac{13}{50}$$ (0.5).............

2) أ) تحديد القيم الممكنة للمتغير العشوائي X هي : $\{1;2;3\}$ (0.25).............

$$P(X=2)=1-\left(P(X=1)+P(X=3)\right)\ ;\ P(X=3)=P(B)\ ;\ P(X=1)=P(A)$$

X	1	2	3
$P(X)$	$\dfrac{17}{300}$	$\dfrac{205}{300}$	$\dfrac{78}{300}$

(1.5).............

ب)الأمل الرياضياتي $E(X)$ للمتغير العشوائي X هو : $E(X)=\dfrac{661}{300}$ (0.5).............

1) حساب احتمال سحب ثلاث كرات من نفس اللون من U_2 علما أن الكرتين المسحوبتين من U_1من نفس اللون

نسمي C:" سحب كرتين من U_1من نفس اللون " ، D:" سحب ثلاث كرات من نفس اللون من U_2 "

$$P_C(D)=\frac{P(C\cap D)}{P(C)}=\frac{\dfrac{C_2^2}{C_6^2}\times\dfrac{C_4^3}{C_6^3}}{\dfrac{C_3^2+C_2^2}{C_6^2}}=\frac{1}{20}$$ (0.75).............

التمرين الثاني : (04 نقاط) (خاص بالتقني رياضي)

$(E): 5x-6y=3$: ا **1) أ) اثبات أنه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حل للمعادلة (E) فإن x مضاعف للعدد 3:** • لدينا : $5x-6y=3$ تكافئ $5x=3+6y$ أي $5x=3(1+2y)$ • لدينا : $3/5x$ و $3\wedge5=1$ فإن $3/x$ حسب مبرهنة غوص أي x مضاعف للعدد 3	(0.5)
ب) تعيين حل خاص للمعادلة (E) : • نفرض $x=3$ وبالتالي : $y=\dfrac{5\times3-3}{6}=\dfrac{12}{6}=2$ أي الثنائية $(3;2)$ حل للمعادلة (E)	0.5

$\dfrac{13}{50}$

(0.75)	• حل المعادلة (E): لدينا : $5x-6y=5\times3-6\times2$ يكافئ $5x-5\times3=6y-6\times2$ أي $(*):5(x-3)=6(y-2)$ • لدينا : $6/5(x-3)$ و $6\wedge5=1$ فإن $6/(x-3)$ حسب مبرهنة غوص . أي $x-3=6k(k\in\mathbb{Z})$ وبالتالي $x=6k+3(k\in\mathbb{Z})$ • من أجل $x=6k+3$ نعوض في المعادلة $(*)$نجد : $5(6k+3-3)=6(y-2)$ ومنه $y-2=5k(k\in\mathbb{Z})$ أي $y=5k+2(k\in\mathbb{Z})$ - مجموعة حلول المعادلة : $S=\{(6k+3;5k+2),k\in\mathbb{Z}\}$
0.75	ج) استنتاج حلول الجملة : $(S):\begin{cases}x\equiv-1[6]\\x\equiv-4[5]\end{cases}$ • $\begin{cases}x\equiv-1[6]\\x\equiv-4[5]\end{cases}$ تكافئ $\begin{cases}x=6m-1\\x=5n-4\end{cases}$ أي $6m-1=5n-4$ ومنه $5n-6m=3$ ومنه : $n=6k+3$ وبالتالي $x=5(6k+3)-4=30k+11(k\in\mathbb{Z})$
0.75 0.75	**-2** لدينا : $a=\overline{1\alpha0\alpha00}^3$ و $b=\overline{\alpha\beta0\alpha}^5$ • تعيين $(\alpha;\beta)$ بحيث تكون $(a;b)$ حل للمعادلة (E): - لدينا : $a=1\times3^5+\alpha\times3^4+\alpha\times3^2=243+81\alpha+9\alpha=243+90\alpha$ ولدينا : $b=\alpha\times5^3+\beta\times5^2+\alpha\times5^0=125\alpha+25\beta+\alpha=126\alpha+25\beta$ مع $\alpha\le2$ و $\beta\le4$ • الثنائية $(a;b)$حل للمعادلة (E) معناه $5a-6b=3$ ومنه $5(243+90\alpha)-6(126\alpha+25\beta)=3$ أي $1215+450\alpha-756\alpha-150\beta=3$ ومنه $-306\alpha-150\beta=-1212$ بعد تقسيم الطرفين على العدد -3 نجد : $102\alpha+50\beta=404$ وبالتالي $(\alpha;\beta)=(2;4)$حل للمعادلة

التمرين الثالث: (05 نقاط)

نعتبر المتتالية (u_n)المعرفة على $\mathbb{N}$ بالعلاقة : $u_0=2$ و $u_{n+1}=\frac{2}{3}u_n+\frac{1}{3}n+1$

(0.75)............. **-1** حساب الحدود u_1, u_2, u_3 :

$u_1=\frac{7}{3}$ ، $u_2=\frac{26}{9}$ ، $u_3=\frac{97}{27}$

(0.25)............. • **تخمين حول اتجاه تغيرات المتتالية** (u_n): متتالية متزايدة

-2 أ- **البرهان بالتّراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n فإن** $u_n\le n+3$

لتكن فرضية التراجع $P(n):u_n\le n+3$

* المرحلة 1: الخاصية $P(0)$ صحيحة من أجل $n=0$ لأن $u_0=2$ أي $P(n):u_0\le3$

* المرحلة 2: نفرض صحة الخاصية $P(n)$ من أجل عدد طبيعي n حيث $n\ge0$ أي $u_n\le n+3$ و

(0.5)............. نبرهن صحتها من أجل $n+1$ أي $u_{n+1}\le n+1+3$ أي $u_{n+1}\le n+4$

لدينا $u_n\le n+3$ و منه $\frac{2}{3}u_n+\frac{1}{3}n+1\le\frac{2}{3}n+3\times\frac{2}{3}+\frac{1}{3}n+1$ و بالتالي $u_{n+1}\le n+3$

ولدينا $n+3\le n+4$ و منه $u_{n+1}\le n+4$ إذن الخاصية صحيحة من أجل $n+1$.

* الخلاصة: نستنتج، حسب مبدأ البرهان بالتراجع، أن الخاصية صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n.

إذن $u_n\le n+3$.

ب- دراسة اتجاه تغيرات المتتالية (u_n):

(0.5)............. $u_{n+1}-u_n=\frac{2}{3}u_n+\frac{1}{3}n+1-u_n=-\frac{1}{3}u_n+\frac{1}{3}n+1$ و لدينا $u_n\le n+3$ أي

$-\frac{1}{3}u_n\ge-\frac{1}{3}n-1$ و منه $-\frac{1}{3}u_n+\frac{1}{3}n+1\ge 0$ و بالتالي $u_{n+1}-u_n\ge 0$ و منه متزايدة

ج- استنتاج أن (u_n) محدودة من الأسفل .هل يمكن القول أن (u_n)متقاربة :

(0.25)............. لدينا (u_n) متزايدة معناه $u_n\ge u_0$ أي $u_n\ge 2$ نستنتج أن (u_n) محدودة من الأسفل بالعدد 2.

لا يمكن القول أن (u_n)متقاربة : لأنها متزايدة و ليست محدودة من الأعلى

3- نعتبر المتتالية (v_n)المعرفة على $\mathbb{N}$ بالعلاقة $v_n=u_n-n$.

أ- برهن أنّ المتتالية (v_n) هي متتالية هندسية يطلب تعيين حدها الأوّل وأساسها:

(0.5)............. (v_n) هي متتالية هندسية معناه $v_{n+1}=v_n\times q$

لدينا $v_n=u_n-n$ و منه $v_{n+1}=u_{n+1}-n-1$ و بالتالي $v_{n+1}=\frac{2}{3}u_n+\frac{1}{3}n+1-n-1$

أي $v_{n+1}=\frac{2}{3}u_n-\frac{2}{3}n=\frac{2}{3}(u_n-n)$ و منه $v_{n+1}=\frac{2}{3}v_n$ وبالتالي :

(v_n) هي متتالية هندسية أساسها $q=\frac{2}{3}$ و حدّها الأوّل $v_0=u_0-0=2$

ب- التعبير عن v_n ثمّ u_n بدلالة n ثم حساب نهاية (u_n) عند $+\infty$

(0.5)............. $v_n=v_0\times q^n$ أي $v_n=2\times(\frac{2}{3})^n$ ، $u_n=v_n+n$ و منه $u_n=2\times(\frac{2}{3})^n+n$: $\lim u_n=+\infty$

ج- حساب بدلالة n المجموع $S_n=u_0+u_1+u_2+\ldots+u_n$

$$S_n=(v_0+1)+(v_1+1)+\ldots+(v_n+n)=v_0+v_1+\ldots+v_n+1+2+\ldots n$$

(0.5).............

$$=2\frac{1-(\frac{2}{3})^{n+1}}{1-\frac{2}{3}}+n(n+1)=6(1-(\frac{2}{3})^{n+1})+n(n+1)$$

4- لتكن المتتالية (t_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بالعلاقة $t_n=\ln(v_n)$

أ- البرهان أنّ المتتالية (t_n)حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الأوّل: (t_n)حسابية معناه $t_{n+1}=t_n+r$

لدينا $t_n=\ln(v_n)$ و منه $t_{n+1}=\ln(v_{n+1})$ أي $t_{n+1}=\ln(\frac{2}{3}v_n)=\ln(v_n)+\ln(\frac{2}{3})$

(0.5)............. لأنّ $v_{n+1}=\frac{2}{3}v_n$ و منه $t_{n+1}=t_n+\ln(\frac{2}{3})$ و منه (t_n)حسابية أساسها $r=\ln(\frac{2}{3})$ و وحدها الأوّل $t_0=\ln(v_0)=\ln(2)$

ب- حساب بدلالة n المجموع $A_n=t_0+t_1+t_2+\ldots+t_n$:

(0.5)............. $$A_n=\frac{n+1}{2}(\ln(2)+\ln(2)+n\ln(\frac{2}{3}))=\frac{n+1}{2}(2\ln(2)+n\ln(\frac{2}{3}))$$

- استنتاج بدلالة n الجداء $P_n=v_0\times v_1\times v_2\times\ldots\times v_n$

(0.25)............. $P_n=e^{t_0}\times e^{t_1}\times e^{t_2}\times\ldots\times e^{t_n}=e^{t_0+t_1+\ldots t_n}$ لأن : $v_n=e^{t_n}$ و منه $P_n=e^{S_n}$

التمرين الثالث : (04 نقاط)

التنقيط	التبرير	الجواب	الاقتراح
2×0.5	$y'=-e^{-x}+2x+c_1 \Rightarrow y'(0)=-1+c_1=1 ; c_1=2$ $y=-e^{-x}+2x+c_2 \Rightarrow y(0)=-1+c_2=1\ ; c_2=2$ $y=-e^{-x}+x^2+2x+2$	الإجابة (أ) $y=-e^{x}+x^2+2x+2$	1
2×0.5	$\frac{A_1^1.A_6^1}{A_7^2}=\frac{6}{42}=\frac{1}{7}$	الإجابة (ب) $\frac{1}{7}$	2
2×0.5	$m=\frac{1}{2}\int_0^2 3x^2-\frac{1}{x+1}dx=\frac{1}{2}\left[x^2-\ln(x+1)\right]_0^2$ $m=\frac{8}{2}-\frac{\ln(3)}{2}=4-\ln\sqrt{3}$	الإجابة (أ) $m=4-\ln\sqrt{3}$	3
2×0.5	$u_n=\left[x+\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right]_0^1=1+\frac{1}{n+1}$ $u_{n+1}-u_n=1+\frac{1}{n+2}-1-\frac{1}{n+1}=\frac{-1}{(n+2)(n+1)}<0$	الإجابة (أ) متناقصة تماما	4

التمرين الرابع: (07 نقاط)

المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$

I) لتكن الدالة العددية g المعرفة على $]0,+\infty[$ بـ : $g(x)=x-\frac{1}{x}-2\ln x$

1- تبيين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x>0$: $g'(x)=\frac{(x-1)^2}{x^2}$:

$g(x)=x-\frac{1}{x}-2\ln(x)$ و $g'(x)=1+\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}=\frac{x^2+1-2x}{x^2}=\frac{(x-1)^2}{x^2}$ (0.5).............

استنتاج اتجاه تغير الدالة g مما سبق نجد أن $g'(x)\geq 0$ و منه الدالة g متزايدة على $]0,+\infty[$. (0.5).............

2- دراسة إشارة $g(x)$ بما أن $g(1)=0$ و الدالة g متزايدة على $]0,+\infty[$ تتلخص الاشارة في الجدول الموالي

x	0		1		$+\infty$
إشارة $g'(x)$		$-$	0	$+$	

(0.5).............

II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]0,+\infty[$ بـ: $f(x)=x+\frac{1}{x}-(\ln x)^2-2$. وليكن (C) منحناها البياني في المستوي السابق .

1- اثبات أن $\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x}=0$ نضع $t=\sqrt{x}$ و منه $\lim(t)=+\infty$ و منه

$\lim_{x\to+\infty}\frac{[\ln(x)]^2}{x}=\lim_{t\to+\infty}\frac{[\ln(t^2)]^2}{t^2}=\lim_{t\to+\infty}\left[\frac{2\ln(t)}{t}\right]^2=0$ لان $\lim_{t\to+\infty}\left[\frac{\ln(t)}{t}\right]=0$ (التزايد المقارن). (0.5).............

حساب $\lim_{x\to+\infty}f(x)$: $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}x\left[1+\frac{1}{x^2}-\frac{(\ln x)^2}{x}-\frac{2}{x}\right]=+\infty$ لان (0.5).............

$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x^2}-\frac{(\ln x)^2}{x}-\frac{2}{x}\right]=0$.

التحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]0,+\infty[$ ؛ $f(\frac{1}{x})=f(x)$: لدينا

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x}+x-\left(\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)^2-2=x+\frac{1}{x}-(-\ln x)^2-2=x+\frac{1}{x}-(\ln x)^2-2=f(x)$$ (0.5).............

حساب $\lim_{x\to 0^+} f(x)$: $\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f\left(\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ و منه المنحني (C_f) يقبل مستقيما مقارب عموديا معادلته $x=0$. (0.75).............

-2 تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]0,+\infty[$ ؛ $f'(x)=\frac{g(x)}{x}$ بالحساب $f(x)=x+\frac{1}{x}-(\ln x)^2-2$ و منه

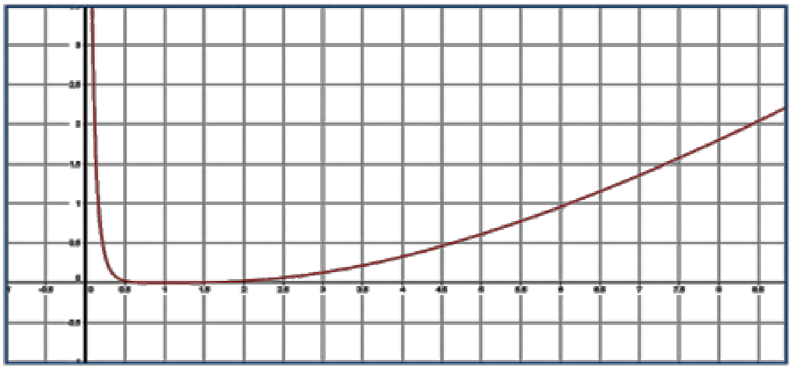
$$f'(x)=1-\frac{1}{x^2}-2\frac{1}{x}(\ln x)=\frac{x^2-1-2x\ln x}{x^2}=\frac{x-\frac{1}{x}-2\ln x}{x}=\frac{g(x)}{x}$$ (0.5).............

جدول تغيرات الدالة f :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

(0.5).............

-3 رسم المنحنى (C) : (0.5).............



-4 بين أن الدالة $h: x \mapsto x\ln x - x$ هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto \ln(x)$ على $]0,+\infty[$

(0.5).............

$h'(x)=\ln x + x\times\frac{1}{x}-1=\ln x$ محققة

باستعمال التكامل بالتجزئة (0.75).............

تبيين أن $\int_1^e (\ln x)^2 dx = e-2$ بوضع $u'(x)=1$ و $v(x)=(\ln x)^2$ و منه $u(x)=x$ و $v'(x)=\frac{2}{x}(\ln x)$

و منه $u'(x)=1$ و $\int_1^e u'(x)v(x)dx=\left[x\,(\ln(x))^2\right]_1^e-2\int_1^e \ln(x)dx=e-2\left[x\ln x-x\right]_1^e=e-2$

-5 حساب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C) و محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتيهما $x=1$ و $x=e$

$\int_1^e f(x)dx=\int_1^e\left[x+\frac{1}{x}-(\ln x)^2-2\right]dx$ و منه $\int_1^e f(x)dx=\left[\frac{1}{2}x^2+\ln(x)-2x\right]_1^e-e+2$

$$\int_1^e f(x)dx=\frac{e^2}{2}+1-2e+\frac{3}{2}-e+2=\left(\frac{e^2}{2}-3e+\frac{9}{2}\right)u.a$$. (0.5).............

انتهى الموضوع الثاني

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية — مديرية التربية لولاية وهران

امتحان بكالوريا تجريبية — ثانويات مقاطعة وهران 04

الشعبة: تقني رياضي — دورة: 2021

اختبار في مادة: الرياضيات — المدة: 4 سا ونصف

على المترشح ان يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأول

التمرين الأول:(4 نقاط)

تحتوي علبة على تسع بطاقات لا يمكن التمييز بينها. بطاقتان بيضاوان تحملان الرقم 1 و ثلاث بطاقات حمراء تحمل الأرقام 1، 1، 2 و أربع بطاقات سوداء تحمل الأرقام 1، 1، 2، 3 . نسحب عشوائيا من العلبة بطاقتين على التوالي و بدون إرجاع ، نعتبر الحادثتين التاليتين:

A " البطاقتان المسحوبتان من نفس اللون " ، B " البطاقتان المسحوبتان تحملان نفس الرقم "

1) بين أن: $p(A)=\frac{5}{18}$ ثم احسب $p(B)$.

2) أ ـ احسب احتمال سحب بطاقتين من نفس اللون وتحملان نفس الرقم.

ب ـ استنتج $p(A\cup B)$.

3) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب المضاعف المشترك الأصغر للرقمين المسحوبين.

أ ـ عرف قانون احتمال المتغير العشوائي X ثم احسب الأمل الرياضياتي $E(X)$.

ب ـ احسب التباين $V(X)$ ثم استنتج $V(-3X)$.

التمرين الثاني:(4 نقاط)

(u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ $u_0=-1$ ، $u_1=\frac{1}{2}$ و من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $u_{n+2}=u_{n+1}-\frac{1}{4}u_n$

و لتكن المتتالية (v_n) المعرفة على بـ: $v_n=u_{n+1}-\frac{1}{2}u_n$

1) أ ـ اثبت أن (v_n) هندسية يطلب تحديد أساسها و حدها الأول v_0 .

ب ـ اكتب بدلالة n عبارة الحد العام v_n .

ج ـ احسب بدلالة n الجداء: $p_n=v_0\times v_1\times\cdots\times v_n$ ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty}p_n$.

2) نضع من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $w_n=\frac{u_n}{v_n}$

أ ـ اثبت أن (w_n) متتالية حسابية أساسها 2 يطلب حساب حدها الأول w_0 .

ب ـ اكتب بدلالة n عبارة الحد العام w_n ثم عين أصغر عدد طبيعي n الذي يحقق: $10^{w_n}>2021$

ج ـ احسب بدلالة n المجموع s_n حيث: $s_n=u_0+2u_1+2^2u_2+\cdots+2^nu_n$

اقلب الصفحة

التمرين الثالث:(4 نقاط)

من بين الإجابات المقترحة اختر الإجابة الوحيدة الصحيحة مع التعليل.

1) باقي القسمة الإقليدية للعدد 1954^{2020} على 5 هو: أ ـ 1 ب ـ 2 ج ـ 3

2) في مجموعة الأعداد الصحيحة حلول المعادلة التالية $12x+17y=1$ هي الثنائيات $(x;y)$ حيث:

أ ـ $(17k-7;5-12k)$ ب ـ $(-7k;5k)$ ج ـ $(17k-5;7-12k)$. حيث $k\in\mathbb{Z}$

3) a عدد طبيعي حيث: $a=\overline{421}$ في النظام ذي الأساس 5. a يكتب في النظام ذي الأساس 6 على الشكل:

أ ـ $a=\overline{111}$ ب ـ $a=\overline{303}$ ج ـ $a=\overline{222}$

4) في مجموعة الأعداد الصحيحة، المعادلة ذات المجهول x التالية $x^2-4x-2\equiv 0[5]$:

أ ـ لا تقبل حلولا ب ـ حلولها تحقق: $x\equiv -3[5]$ ج ـ حلولها تحقق: $x\equiv 1[5]$ أو $x\equiv 3[5]$

التمرين الرابع:(8 نقاط)

f دالة عددية معرفة على $[-1;+\infty[$ بـ: $f(x)=1+xe^{-x}$

(C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثم فسر النتيجة بيانيا.

2) ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

3) أ ـ (T) هو المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة $J(0;1)$. اكتب معادلة للمماس (T) .

ب ـ اكتب معادلة للمستقيم (T') الموازي للمماس (T) ويشمل النقطة ذات الفاصلة $A(-1;1-e)$.

4) أ ـ برهن أن المنحنى (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث: $\alpha\geq -1$.

ب ـ بين أن: $e^{\alpha}=-\alpha$ ثم استنتج طريقة لإنشاء نقطة تقاطع المنحنى (C_f) مع محور الفواصل بدقة.

5) أنشئ المستقيم (T')، المماس (T) والمنحنى (C_f) .

6) m وسيط حقيقي. نعتبر المعادلة ذات المجهول الحقيقي x التالية: $\dfrac{1-m}{x}=1-e^{-x}$ .... (E)

أ ـ بين أن كل حل للمعادلة (E) هو فاصلة نقطة تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم: $(T_m): y=x+m$.

ب ـ ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة (E) .

7) لتكن المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ: $u_n=\ln\left[f(n)-1\right]$

ـ اكتب بدلالة n عبارة المجموع S_n المعرف بـ: $S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n$

8) لتكن الدالة k المعرفة على $[-1;1]$ بـ: $k(x)=f\left(x^2\right)$

أ ـ عين الدالة المشتقة k' بدلالة f' .

ب ـ ادرس اتجاه تغير الدالة k ثم شكل جدول تغيراتها.

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول:(4 نقاط)

يحتوي صندوق على ثماني كرات متمايزة لا نفرق بينها عند اللمس, منها كرتان حمراوان تحملان الرقم 0 و ثلاثة كرات بيضاء تحمل الرقم 2 و ثلاثة كرات خضراء تحمل الارقام 1, 2, 4.

I. نسحب عشوائيا و في أن واحد ثلاث كرات من الصندوق

1) احسب احتمال الحدثين التالين :

A : " الكرات المسحوبة لا تحمل الرقم 0". B : " جداء الأعداد الظاهرة على الكرات المسحوبة يساوي 8".

2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحبة جداء الأعداد الظاهرة على الكرات المسحوبة.

أ ـ عين قيم المتغير العشوائي X و حدد قانون احتماله.

ب ـ احسب الأمل الرياضياتي للمتغير العشوائي X و انحرافه المعياري.

II. في هذه المرحلة نعوض الكرات الثلاثة البيضاء ب n كرة بيضاء حيث n عدد طبيعي و $n>2$, ثم نسحب عشوائيا كرتين على التوالي مع إرجاع الكرة المسحوبة الأولى إلى الصندوق.

نعتبر الحدثين التاليين: E : " الكرتان المسحوبتان بيضاوان" F : " الكرتان المسحوبتان لهما نفس اللون".

أ ـ احسب $p(E)$ بدلالة n.

ب ـ بين أن $p(D)=\dfrac{n^2+13}{n^2+10n+25}$ ثم عين اصغر قيمة ل n حتى يكون $p(D)>\dfrac{1}{2}$.

التمرين الثاني:(4.5 نقاط)

(u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ $u_0=11$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=2+\sqrt{u_n-2}$.

1) برهن بالتراجع انه من اجل أجل كل عدد طبيعي n فان : $3\le u_n\le 11$.

2) ا− تحقق انه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $u_{n+1}-u_n=\sqrt{u_n-2}(1-\sqrt{u_n-2})$.

ب− اثبت أن المتتالية (u_n) متناقصة ثم استنتج أنها متقاربة.

3) ا− برهن انه من اجل كل عدد طبيعي n : $0\le u_{n+1}-3\le\frac{1}{2}(u_n-3)$.

ب− استنتج انه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $0\le u_n-3\le 8\left(\frac{1}{2}\right)^n$ و احسب نهاية المتتالية (u_n) .

4) لتكن (v_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ ب $v_n=ln(u_n-2)$.

ا− بين أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تحديد اساسها و حدها الاول.

ب− اكتب كلا من v_n و u_n بدلالة n ثم استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$ مرة ثانية.

5) احسب الجداء $P_n=(u_{1442}-2)\times(u_{1443}-2)\times...\times(u_{2021}-2)$

اقلب الصفحة

التمرين الثالث:(4 نقاط)

عين الاقتراح الصحيح الوحيد من بين الاقتراحات الثلاثة في كل حالة من الحالات التالية مع التبرير:

1) (u_n) متتالية حسابية حيث $u_3 = 25$ و $u_8 = 3$ ـ أساس المتتالية (u_n) هو:

أ ـ $\frac{-22}{5}$ ب ـ $\frac{22}{5}$ ج ـ $\frac{-3}{8}$

2) نعتبر المعادلة ذات المجهول x التالية $-2e^{2x}+4e^{x}-4=0$

ـ حلول هذه المعادلة هي S حيث: أ ـ $S=\{0;1\}$ ب ـ $S=\{0\}$ ج ـ $S=\phi$

3) ليكن X المتغير العشوائي وقانون احتماله معرف بالجدول المقابل:

$X=x_i$	1	2	3
$P(X=x_i)$	α	2α	3α

قيمة العدد الحقيقي α هي:

أ ـ $\frac{1}{9}$ ب ـ $\frac{1}{3}$ ج ـ $\frac{1}{6}$

4) قسم دراسي يتكون من 3 ذكور و 25 إناث، يراد تشكيل لجنة تتكون من: رئيس و نائب رئيس و عضوين

عدد الطرق الممكنة لتشكيل لجنة من نفس الجنس هو:

أ ـ 303600 ب ـ 390000 ج ـ 151800

التمرين الرابع:(7.5 نقاط)

I. لتكن g الدالة العددية المعرفة على $]-1;+\infty[$ بـ: $g(x)=\frac{x}{2}+(x+1)\ln(x+1)$.

1) ادرس تغيرات الدالة g على $]-1;+\infty[$ ثم شكل جدول تغيراتها.

2) احسب $g(0)$ و استنتج إشارة $g(x)$ تبعا لقيم x .

II. نعتبر الدالة f المعرفة على $]-1;+\infty[$ بـ: $f(x)=x^2\ln(x+1)$. و (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to-1 \\ >}} f(x)$ ثم فسر النتيجة بيانيا.

2) بين انه من اجل كل عدد حقيقي x من $]-1;+\infty[$: $f'(x)=\frac{2xg(x)}{x+1}$.

3) ادرس تغيرات الدالة ثم شكل جدول تغيراتها.

4) عين معادلة ل (T)مماس المنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0.

5) بين أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تحديدها.

6) احسب $f(1)$, $f(2)$ و أنشئ كلا من (C_f) و (T) .

III. hالدالة المعرفة على $\mathbb{R}^*$ ب : $h(x)=(x^2-2|x|+1)\ln|x|$.

1) احسب $h(-x)-h(x)$ ماذا تستنتج؟

2) بين انه من اجل كل عدد حقيقي xمن $\mathbb{R}^*$: $h(x)=f(|x|-1)$.

3) اشرح طريقة إنشاء التمثيل البياني (C_h)للدالة h انطلاقا من التمثيل البياني (C_f) ثم ارسمه.

انتهى الموضوع الثاني

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

مديرية التربية لولاية سـطيف — ثانوية : مولود قاسم – مـزلوق

أروع بـكالوريا تجريبية جزائرية — من فكر الأستاذ: عبد السّلام صلاح الدين

السنـة الدراسية : G_{101} — الشعبة: علوم تجريبية ، تقني ريـاضي

اختبار في مادة الريـاضيات — المـدة : 3 سا و 30 د + 1 سا لـ ت ر

اختر أحد الموضوعين الآتيين

الموضوع الأول

التمرين الأول : ﴿04 نقاط﴾

$n \in \mathbb{N}$ و $2 \le n \le 2019$ في ثانوية مولود قاسم - مزلوق - عين ارنات - يدرس 2021 تلميذ من بينهم n إناث والباقي ذكور ، يحوي قسم تقني رياضي (MT) على 101 تلميذ نريد تشكيل لجنة للثانوية تتكون من تلميذين

1) ما احتمال الحادثتين التاليتين: A "اللجنة تحوي على الأكثر ذكر"

B "إذا حضر تلميذ من (MT) في اللجنة لا يحضر آخر من نفس الشعبة "

2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل لجنة عدد الذكور فيها

أ) اكتب قانون احتمال X

ب) اكتب $E(X)$ بدلالة n وما هي قيمة n التي تجعل $E(X)$ أعظمي

3) ماهي أصغر قيمة للعدد n حتى يكون $P(A) \ge 0.918$

التمرين الثاني : ﴿04 نقاط﴾ (خاص بالعلمي)

u و v متتاليتان معرفتان على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0 = 0$ و $u_{n+1} = \frac{42}{43}u_n + 47$, $v_n = \ln(a - u_n)$ حيث $a \in \mathbb{R}$ و $u_n \le a$

1) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} - u_n = 47\left(\frac{42}{43}\right)^n$ ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية u

2) عين a حتى تكون v متتالية حسابية أساسها $\ln\frac{42}{43}$

3) في كل ما يأتي نضع $a = 2021$, اكتب v_n و u_n بدلالة n

4) اكتب بدلالة n العبارتين $s_n = \frac{1}{43}\left(e^{v_0} + e^{v_1} + ... + e^{v_{n-1}}\right)$; $s'_n = u_0 + u_1 + ... + u_{n-1}$ ثم احسب $\lim \frac{s'_n}{n}$

التمرين الثاني : ﴿04 نقاط﴾ (خاص بالتقني رياضي)

المستوي منسوب الى معلم م وم $(O;\vec{i};\vec{j})$ ، $M(x\,;y)$ نقطة من المستوي حيث $(x\,;y) \in \mathbb{R}^2$ نعتبر المستقيم $(D): 120x + 11y = 667$ والمستقيم $(D'): 2021x - y = 10098$ ، لتكن $P(u\,;v)$ نقطة من (D) حيث $(u\,;v) \in \mathbf{Z}^2$

1) عيّن احداثيتي Q نقطة تقاطع (D) مع (D') ثم عين مجموعة النقط P .

2) عيّن مجموعة النقط P التي تنتمي الى القرص الذي مركزه O و نصف قطره 128

3) $n \in \mathbb{N}$ ، ادرس بواقي قسمة 5^n على 9 ثم عين باقي قسمة العدد $2021^{1442} + 1442^{2021}$ على 9

4) n عدد طبيعي يكتب بالشّكل $\overline{1ab8}^{11}$ و بالشّكل $\overline{268a}^{9}$ ، جد a و b ثم اكتب n في النظام العشري

التمرين الثالث : (05 نقاط)

نعتبر النقط A,B,C,D,E حيث : $Z_A = i$; $Z_B = -7$; $Z_C = -2-5i$; $Z_D = 5-4i$; $Z_E = 1+2i$

1) قارن بين : $Z_A + Z_C$ و $Z_B + Z_D$ ، أكتب $\frac{Z_D - Z_B}{Z_C - Z_A}$ على الشّكل الأسّي ثمّ استنتج طبيعة الرباعي $ABCD$

2) (E_1) مجموعة النّقط $M(Z)$ حيث : $\overline{Z} + i - re^{-i\frac{\pi}{4}} = 0$ مع $r \in \mathbb{R}_+$ ، تحقّق أنّ $E \in (E_1)$ ثمّ عيّن (E_1)

3) لتكن G_α مرجح الجملة $\{(A;-6\alpha-1),(B;3\alpha),(C;2\alpha),(D;\alpha)\}$ حيث : $\alpha \in \mathbb{R}_+$

أ) عيّن لاحقة G_α بدلالة α ثمّ بيّن أنّ $G_\alpha \in (E_1)$

ب) عيّن (E_α) مجموعة النقط $M(Z)$ حيث : $\|(-6\alpha-1)\overrightarrow{MA} + 3\alpha\overrightarrow{MB} + 2\alpha\overrightarrow{MC} + \alpha\overrightarrow{MD}\| = \sqrt{2}$

ج) من أجل $\alpha = 101$ عيّن لاحقة G_{101} ثم عين $(E_1) \cap (E_{101})$

التمرين الرابع : (07 نقاط)

f الدّالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ كمايلي : $\boldsymbol{f(x) = x^4 e^{-x-1}}$

1) احسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ ثم فسر النتيجة الأخيرة بيانيا

2) احسب $f'(x)$ ثمّ شكّل جدول تغيرات f

3) احسب $f''(x)$ ثمّ عيّن إحداثيات نقط انعطاف المنحنى (C_f)

4) بيّن أنّ لـ (C_f) مماسين (T_1) و (T_2) يشملان المبدأ ثمّ اكتب معادلتين لهما (حيث (T_2) معامل توجيهه موجب تماما)

5) انشئ (T_2) ثمّ (C_f)

6) ناقش بيانيا حسب قيم العدد الحقيقي m عدد حلول المعادلة $f(x) = mx$

7) g دالة معرّفة بـ : $g = 0.2f^{-2021} - 1.2$ ، اكتب g' بدلالة f و f' ثم أكتب معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_g) عند $x = -1$

مهما كان مستواك من التحضيري إلى فلسفة الدكتوراه ستجد في

أروع بكالوريا تجريبية جزائرية

مالا عين رأت ولا أذن سمعت ولا يد نقّلت ولا خطر على قلب بشر

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول : (04 نقاط)

f دالة مستمرة و متزايدة تماما على المجال $]-3;+\infty[$ معرّفة بـ : $f(x)=\frac{2068\,x}{x+47}$

u و v متتاليتان معرّفتان على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0=47$ و $u_{n+1}=f(u_n)$ ، $v_n=1-\frac{2021}{u_n}$

1) برهن بالتّراجع أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n $47\le u_n<2021$ وادرس اتّجاه تغيّر u ثمّ استنتج أنّها متقاربة

2) بيّن أنّ v متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{44}$ ثمّ اكتب v_n و u_n بدلالة n و احسب $\lim u_n$

3) اكتب بدلالة n العبارة : $S_n=2021\left(\frac{1}{u_n}+\frac{1}{u_{n+1}}+\cdots+\frac{1}{u_{n+2020}}\right)$ و احسب $\lim S_n$

التمرين الثاني : (04 نقاط) (خاص بالعلمي)

كيس به 3 كريات بيضاء مرقمة بـ 2 ، 1 ، 1 و 4 حمراء مرقمة بـ 2 ، 2 ، 2 ، 1 نسحب عشوائيا في آن واحد كريتين

1) ما احتمال الحادثتين : A "الكريتان المسحوبتان تحملان رقم فردي" ، B "الكريتان المسحوبتان ذات لونين مختلفين"

2) احسب $p(A\cap B)$ و استنتج $p(A\cup B)$.

3) جد قانون احتمال X حيث X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب عدد الكريات البيضاء المسحوبة

4) $x\in\mathbb{N}^*$ ،في لعبة يقوم لاعب بسحب كريتين في آن واحد ,فإذا تحصل على كريتين بيضاوين يخسر $7x^2$ دينار، واذا تحصل على كريتين مختلفتين في اللون يربح $7070x$ دينار,واذا تحصل على كريتين حمراوين يخسر 14274326.5دينار

أ) عين قيم x حتى تكون اللعبة في صالح اللاعب

ب) ماهي قيمة x التي من اجلها يكون متوسط الربح أعظميا ، احسب قيمته عندئذ

التمرين الثاني : (04 نقاط) (خاص بالتقني رياضي)

1) لتكن المعادلة (E)....$2021\,x-1442\,y=11$ حيث $x\,;\,y$ عددان صحيحان

بالاستعانة بخوارزمية إقليدس عين $PGCD(2021;1442)$, جد حلا خاصا لـ (E) ثم حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E)

2) $n\in\mathbb{N}$ يكتب بالشكل $\overline{1abc}^{11}$ حيث تشكل الأعداد $a,b,c+1$ بهذا الترتيب حدود متتابعة من متتالية حسابية

و (a,b)حل لـ(E) ، جد الأعداد الطبيعية a,b,c ثم اكتب n في النظام العشري

3) $n\in\mathbb{N}$ ، ادرس بواقي قسمة 2^n على 3 ثم عين قيم n حيث $1442\,n+2021^n\equiv 2[3]$ و $1437<n<1443$

التمرين الثالث : (05 نقاط)

1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2+4=0$ ثم استنتج حلول المعادلة $z^4+4=0$

2) نعتبر النقط: F,E,D,C,B,A حيث: $z_A=2i$; $z_B=1+i$; $z_C=\overline{z_B}$; $z_D=\overline{z_A}$; $z_E=1$; $z_F=-z_B$

- اكتب على الشكل الآسي العددين z_A , z_B ثم اكتب على الشكل الجبري العدد $\left(8^{-0,5}z_A\,z_B\right)^{2020}$

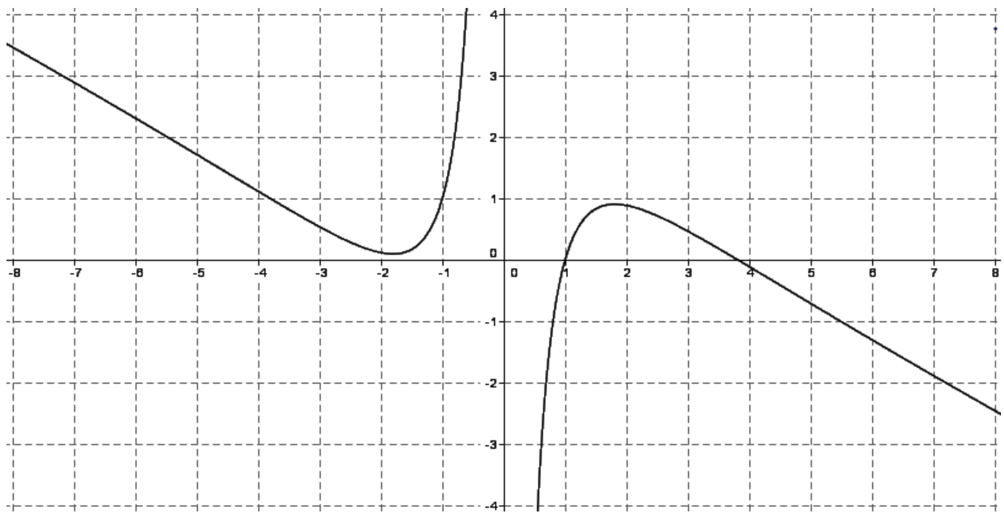
3) عيّن قيم العدد الطبيعي n التي من اجلها يكون $(z_A)^n=a\,i$ مع $a\in\mathbb{R}_+^*$ و $2017<n<2025$

4) احسب $\left|\dfrac{z_B-z_A}{z_C-z_D}\right|$, $\arg\left(\dfrac{z_C-z_B}{z_D-z_A}\right)$ و قارن بين z_A+z_C و z_B+z_D ثم استنتج طبيعة الرباعي $ABCD$

5) أ) عيّن (E_1) مجموعة النقط $M(Z)$ حيث $\overline{z}-1-2020\sqrt{2}\,e^{-i\theta}=0$ مع $\theta\in\mathbb{R}$

ب) عيّن (E_2) مجموعة النقط $M(Z)$ حيث $\left|\dfrac{z+2i}{\overline{z}-1-i}\right|=1$ ثمّ عين $(E_1)\cap(E_2)$

التمرين الرابع : (07 نقاط)



f دالة معرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي $\boldsymbol{f(x)=2(\ln|x|)^2-\frac{1}{4}(x-1)^2}$ يعطى $(\mathbf{C}_f)$ في الشكل أعلاه ويعطى

$f(c)\approx1.60$ $f(a)=f(d)=f'(c)=f'(1)=f''(b)=0$; حيث $a\approx-0.57$; $b\approx1.81$; $c\approx3.81$; $d\approx6.13$

I) بيّن أن $\boxed{f(-x)=f(x)-x}$ ثم استنتج العبارتين : $f'(-x)=1-f'(x)$; $f''(-x)=f''(x)$

II) **بقراءة بيانية واستغلال المعطيات والسؤال السابق : (لا يطلب حساب $f'(x)$ و $f''(x)$)**

1) احسب $\lim\limits_{|x|\to+\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to0}f(x)$ ثم شكّل جدولي تغيرات f و اشارة $f''(x)$ مستنتجا فواصل نقط انعطاف (C_f)

2) $\alpha\in\mathbb{R}^*$ ، بين أن (C_f) يقبل مماسين معامل توجيههما 1 عند نقطتين يطلب تعيين فاصلتيهما ثم اكتب بدلالة α، $f(\alpha)$ ، $f'(\alpha)$ معادلة للمماس $(T_{-\alpha})$ لـ (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة $-\alpha$ واستنتج معادلتي (T_{-C})، (T_{-1})

3) شكل جدول إشارة $f(x)$ على $\mathbb{R}^*$ ثم استنتج جدول اشارة $f(-x)$ على $\mathbb{R}^*$ والوضع النسبي لـ (C_f) مع (T_{-1})

4) انشئ $(T_{-1}),(T_{-C})$ ثم (C_f)

5) ناقش بيانيا حسب قيم العدد الحقيقي m عدد حلول المعادلة $f(x)=x+m$

6) g دالة معرفة بـ $g=f^{-2020}$ ، اكتب g' بدلالة f و f' ثم اكتب معادلة للمماس (T) للمنحني (C_g) عند $x=-1$

انتهى الموضوع الثاني