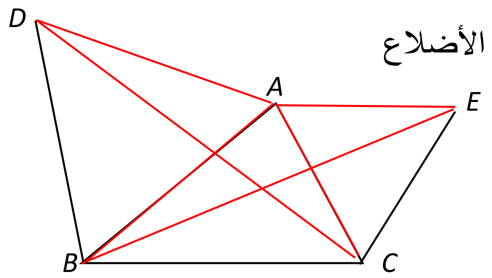
تمارين الهندسة المستوية

التمرين 01

ABC مثلث ، أنشئ على ضلعيه [AB] و [AC] مثلثين ABD و ACE على الترتيب ، حيث كل منهما متقايس الأضلاع.

1. بين أن المثلثين ACD و ABE متقايسان واستنتج أن : BE = CD .

حل التمرين 01



لدينا : $CAE = BAD = 60°$ لأن كل من المثلثين ABD و ACE متقايس الأضلاع

ومنه : $CAE + CAB = BAD + CAB$ إذن : $BAE = CAD$

ولدينا كذلك : AB = AD و AE = AC

إذن المثلثان ACD و ABE متقايسان

ومنه نستنتج : BE = CD .

التمرين 02

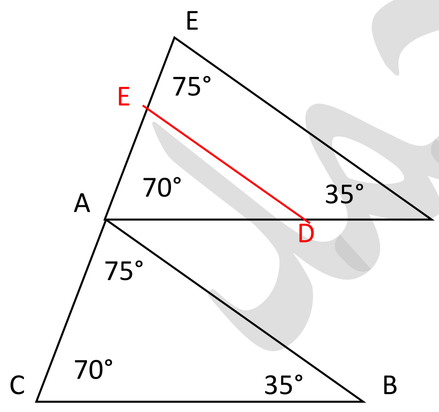
المطلوب التحقق فيما إذا كان المثلثان ABC و ADE متشابهين أم لا ،

وفي حالة الإجابة بنعم عين نسبة التشابه إن أمكن.

المثلث ABC فيه $ABC = 35°$ ، $ACB = 70°$.

المثلث ADE فيه $ADE = 35°$ ، $AED = 75°$.

حل التمرين02



مجموع زوايا المثلث هو 180° وبالتالي :

$BAC = 75°$ و $EAD = 70°$ ومنه يمكن اعتبار (AD) // (BC) و (ED) // (AB)

والنقط C ، A ، E في استقامية كما هو في الشكل المقابل.

لدينا : $ACB = EAD = 70°$ و $ABC = ADE = 35°$

و $BAC = DEA = 75°$ وبالتالي المثلثان ABC و ADE متشابهان.

المثلثان ABC و ADE يمكن أن يكونا متقايسين وفي هذه الحالة

نسبة التشابه هي 1 ويمكن أن يكونا غير متقايسان وفي هذه الحالة

لا يمكن أن نحدد نسبة تشابههما.

التمرين 03

المطلوب التحقق فيما إذا كان المثلثان ABC و ADE متشابهين أم لا ،

وفي حالة الإجابة بنعم عين نسبة التشابه إن أمكن. وحدة الطول هي السنتيمتر.

حل التمرين 03

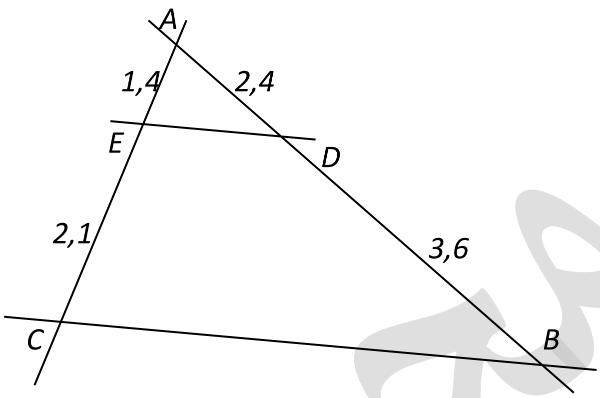
لدينا : $CAB = EAD$ متقابلتان بالرأس

$\frac{AB}{AD} = \frac{4}{1,5} = \frac{8}{3}$ و $\frac{AC}{AE} = \frac{3,2}{1,2} = \frac{8}{3}$ ومنه : $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} = \frac{8}{3}$ إذن المثلثان ABC و ADE متشابهان ونسبة التشابه (التكبير) هي $\frac{8}{3}$

التمرين 04

المطلوب التحقق فيما إذا كان المثلثان ABC و ADE متشابهين أم لا ،

وفي حالة الإجابة بنعم عين نسبة التشابه إن أمكن. وحدة الطول هي السنتيمتر.



حل التمرين 04

لدينا : $CAB = EAD$ نفس الزاوية

$$\frac{AB}{AD} = \frac{2,4+3,6}{2,4} = \frac{6}{2,4} = \frac{5}{2}$$

و $$\frac{AC}{AE} = \frac{1,4+2,1}{1,4} = \frac{3,5}{1,4} = \frac{5}{2}$$

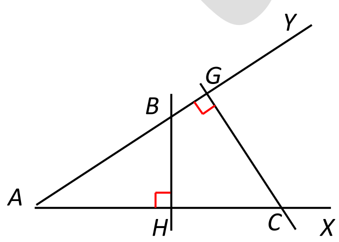
ومنه : $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} = \frac{5}{2}$ إذن المثلثان ABC و ADE متشابهان ونسبة التشابه (التكبير) هي $\frac{5}{2}$.

التمرين 05

XAY زاوية، (BH) عمودي على [AX] ، و(CG) عمودي على [AY].

أ) بين أن AB × AG = AH × AC .

ب) كيف تصبح العلاقة السابقة عندما تنطبق النقطة G على النقطة B.



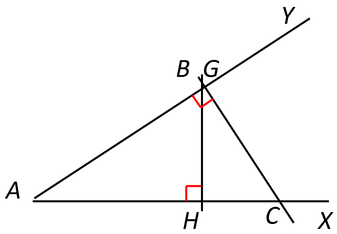
حل التمرين 05

أ) لدينا $BAH = GAC$ نفس الزاوية و $AHB = AGC = 90°$
ومنه المثلثان ABH و ACG متشابهان

الرؤوس المتماثلة : A ، H ، B

A ، G ، C

ومنه : $\frac{BH}{CG} = \frac{AB}{AC} = \frac{AH}{AG}$ إذن : $\frac{AB}{AC} = \frac{AH}{AG}$



معناه AB × AG = AH × AC (جداء الطرفين يساوي جداء الوسطين).

ب) عندما تنطبق النقطة G على النقطة B فإن AB = AG
ومنه $AB^2 = AH \times AC$ أو $AG^2 = AH \times AC$.

التمرين 06

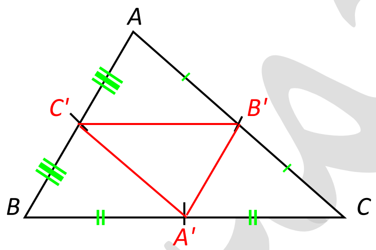
ABC مثلث ، 'A' ، B' ، C منتصفات أضلاعه [BC] ، [AC] ، [AB] على الترتيب.

أ) بين أن المثلثين ABC و 'A'B'C متشابهان ، وعين نسبة التشابه.

ب) أحسب النسبة $\frac{S(ABC)}{S(A'B'C')}$.

حل التمرين06

تبيان أن المثلثين ABC و 'A'B'C متشابهان ، وتعيين نسبة التشابه.



لدينا : 'A' ، B' ، C منتصفات أضلاعه [BC] ، [AC] ، [AB] على الترتيب.

إذن حسب نتيجة مبرهنة طاليس فإن : (A'B') // (AB) و 'A'B' = AC' = BC

ومنه : الربعان 'AB'A'C و 'BA'B'C متوازيا أضلاع

إذن كل زاويتان متقابلتان هما متقايستان أي : $C'AB' = C'A'B'$

و $C'BA' = C'B'A'$ ومنه : $CAB = C'A'B'$ و $CBA = C'B'A'$

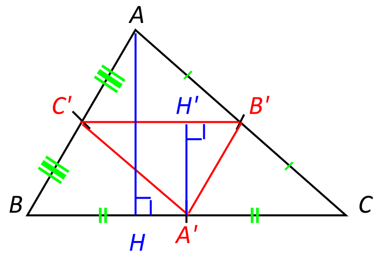
إذن المثلثان ABC و 'A'B'C متشابهان.

النقط المتماثلة : A ، B ، C

'A' ، B' ، C

$\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{BC}{B'C'}=2$ ومنه نسبة التشابه (التكبير) هي 2 .

أ) حساب النسبة $\frac{S(ABC)}{S(A'B'C')}$.



H هي المسقط العمودي للنقطة A على (BC)

و'H هي المسقط العمودي للنقطة 'A على ('B'C).

المثلثان القائمان AHB و 'A'H'B متشابهان لأن لهما زاويتان قائمتان

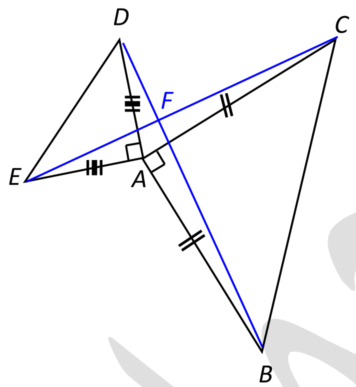
و $CBA=C'B'A'$ أي : $HBA=H'B'A'$

$2=\frac{BH}{B'H'}=\frac{AH}{A'H'}=\frac{AB}{A'B'}$ ومنه : AH = 2 A'H' .

مساحة(ABC) = 2 AH × BC = 2 (2A'H')(2B'C') = 4(2A'H'×B'C') = 4×(A'B'C')مساحة

إذن : $\frac{S(ABC)}{S(A'B'C')}=4$.

التمرين 07



ABC و ADE مثلثان كل منهما قائم ومتساوي الساقين كما هو مبين في الشكل ،

[CE] و [BD] متقاطعان في النقطة F.

أ) بين أن المثلثين ACE و ABD متقايسان.

ب) بين أن النقط A ، B ، C ، F تنتمي إلى دائرة وحيدة ، وعين مركزها.

ج) نفس السؤال السابق بالنسبة إلى النقط A ، E ، D ، F.

حل التمرين 07

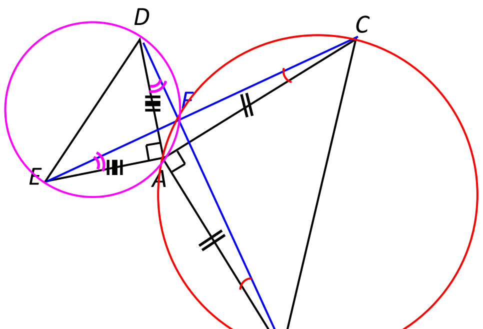
أ) تبيان أن المثلثين ACE و ABD متقايسان.

لدينا : $EAD=BAC=90°$ ومنه : $EAD+DAC=BAC+DAC$ وبالتالي : $EAC=BAD$

في المثلث ACE الضلعين المجاورين للزاوية EAC هما [AE] و [AC]

في المثلث ABD الضلعين المجاورين للزاوية BAD هما [AD] و [AB]

ولدينا AE = AD و AC = AB إذن المثلثان ACE و ABD متقايسان.



ب) تبيان أن النقط A ، B ، C ، F تنتمي إلى دائرة وحيدة ، وتعيين مركزها.

من نتائج تقايس المثلثين ACE و ABD لدينا : $ACE = ABD$

ومنه : $ACF = ABF$ إذن الرباعي ABCF دائري ،

المثلث ABC قائم في A إذن قطر الدائرة المحيطة به هو [BC]

وبالتالي النقط A ، B ، C ، F تنتمي إلى دائرة وحيدة مركزها منتصف [BC].

ج) تبيان أن النقط A ، E ، D ، F تنتمي إلى دائرة وحيدة ، وتعيين مركزها.
كذلك من نتائج تقايس المثلثين ACE و ABD لدينا : $AEC = ADB$

ومنه : $AEF = ADF$ إذن الرباعي AEDF دائري ،

المثلث AED قائم في A إذن قطر الدائرة المحيطة به هو [DE]

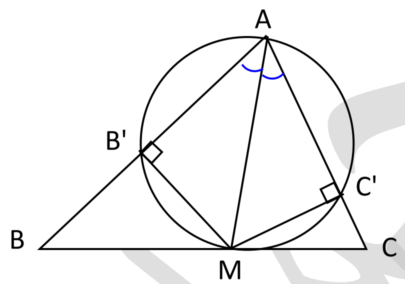
وبالتالي النقط A ، E ، D ، F تنتمي إلى دائرة وحيدة مركزها منتصف [DE].

التمرين 08

ABC مثلث ، M نقطة تقاطع منصف زاوية الرأس A و [BC] ، 'C' ، B المسقطان العموديان للنقطة M على [AB] و [AC] على الترتيب.

أ) بين أن المثلثين AB'M ، AC'M متقايسان.
ب) بين أن النقط A ، 'B ، M ، 'C تنتمي إلى دائرة واحدة يطلب تعيين عناصرها.
ج) ما نوع الرباعي 'AB'MC عندما يكون المثلث ABC قائما في A .

حل التمرين 08



أ) بين أن المثلثين AB'M ، AC'M متقايسان.
لدينا : المثلثان AB'M ، AC'M قائمان ولهما وتر مشترك [AM]

و $B'AM = C'AM$ إذن هما متقايسان.

ب) بين أن النقط A ، 'B ، M ، 'C تنتمي إلى دائرة واحدة يطلب تعيين عناصرها.
لدينا $AB'M$ و $AC'M$ متقابلتان ومتكاملتان في الرباعي 'AB'MC إذن هو دائري في الدائرة ذات القطر [AM] ومركزها منتصف [AM].

ج) ما نوع الرباعي 'AB'MC عندما يكون المثلث ABC قائما في A .
إذا كان المثلث ABC قائما في A فإن للرباعي 'AB'MC ثلاث زوايا قائمة وبالتالي هو مستطيل

وبما أن القطر [AM] هو منصف الزاوية ذات الرأس A فإن الرباعي 'AB'MC هو مربع.

التمرين 09

في الشكل المرفق ABCD ، BEFC ، EGHF ثلاثة مربعات متماثلة طول ضلع كل منها a.

نريد إثبات أن $GCF + GDC = 45°$.

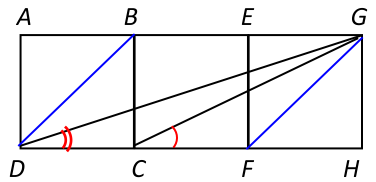
أ) أحسب أطوال أضلاع كل من المثلثين GBD و GFC ، ثم بين أنهما متشابهان.

ب) عين الزوايا المتقايسة في المثلثين GBD و GFC ، واستنتج أن $GCF + GDC = 45°$

حل التمرين 09

أ) حساب أطوال أضلاع كل من المثلثين GBD و GFC :

لدينا : GB = 2 a



و $BD = a\sqrt{2}$ لأنه وتر المثلث القائم والمتساوي الساقين ABD.

$GD^2 = AG^2 + AD^2$ ومنه : $GD^2 = 10\ a^2$ إذن $GD = a\sqrt{10}$

إذن أطوال أضلاع المثلث GBD هي : GB = 2 a ، $BD = a\sqrt{2}$ ، $GD = a\sqrt{10}$

لدينا : CF = a و $GF = BD = a\sqrt{2}$ و $GC^2 = CH^2 + GH^2$ أي $GC^2 = 5\ a^2$ ومنه : $GC = a\sqrt{5}$

إذن أطوال أضلاع المثلث GFC هي: CF = a ، $GF = a\sqrt{2}$ ، $GC = a\sqrt{5}$

- تبيان GBD و GFC متشابهان:

$$\frac{GB}{GF} = \frac{2a}{a\sqrt{2}} = \sqrt{2} \text{ و } \frac{BD}{CF} = \frac{a\sqrt{2}}{a} = \sqrt{2} \text{ و } \frac{GD}{GC} = \frac{a\sqrt{10}}{a\sqrt{5}} = \sqrt{2}$$

ومنه : $\frac{GB}{GF} = \frac{BD}{CF} = \frac{GD}{GC} = \sqrt{2}$ وبالتالي : المثلثان GBD و GFC متشابهان:

ب)تعيين الزوايا المتقايسة في المثلثين GBD و GFC :

لدينا : $BDG = GCF$ و $BGD = CGF$ و $DBG = GFC$

- استنتاج أن $GCF + GDC = 45°$

لدينا : $GCF + GDC = BDG + GDC = BDC$

وبما أن ABCD مربع فإن القطر [BD] هو منصف كل من الزاويتين ADC و ABC

وبالتالي : $BDC = \frac{1}{2}ADC = \frac{1}{2} \times 90° = 45°$ إذن : $GCF + GDC = 45°$

التمرين 10

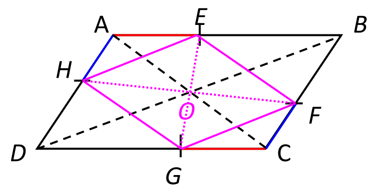
ABCD متوازي أضلاع. E ، F ، G ، H نقط من [AB] ، [BC] ، [CD] ، [AD] على الترتيب حيث :

AE = CG و AH = CF.

أ) ما هو التحويل النقطي الذي يحول A إلى C ويحول B إلى D ؟

ب) ما هي طبيعة الرباعي EFGH ؟

حل التمرين 10



أ) تعيين التحويل النقطي الذي يحول A إلى C ويحول B إلى D :

ABCD متوازي أضلاع إذن قطراه [AC] ، [BD] متناصفان في النقطة O.

إذن C هي صورة A و D هي صورة B بالتناظر المركزي الذي مركزه O.

ب) طبيعة الرباعي EFGH

(GC) // (AE) و AE = GC إذن الرباعي AECG متوازي أضلاع ومنه قطراه [AC] ، [EG] متناصفان في النقطة O.
وبالتالي : G هي صورة E بالتناظر المركزي الذي مركزه O.

(FC) // (AH) و AH = FC إذن الرباعي AFCH متوازي أضلاع ومنه قطراه [AC] ، [HF] متناصفان في النقطة O.
وبالتالي : H هي صورة F بالتناظر المركزي الذي مركزه O.

لدينا G هي صورة E بالتناظر المركزي الذي مركزه O و H هي صورة F بالتناظر المركزي الذي مركزه O

إذن [HG] هي صورة [EF] بالتناظر المركزي الذي مركزه O ومنه : (EF) // (HG)

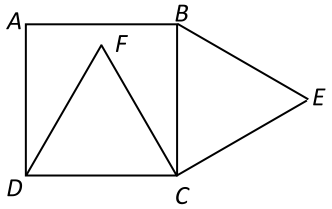
والتناظر المركزي يحافظ على المسافات أي : HG = EF وبالتالي الرباعي EFGH هو متوازي أضلاع.

الطريقة 2 :

نقارن بين المثلثين AEH و CFG ثم بين BEF و DGH.

ونحصل على النتيجتين : EH = FG و HG = EF.

التمرين 11



يمثل الشكل مربعا ABCD ، ومثلثين BCE ، CDF كل منهما متقايس الأضلاع.

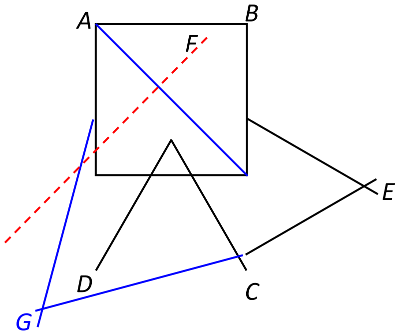
لإثبات أن النقط A ، F ، E في استقامية باستعمال دوران.

أ) علم النقطة G بحيث يكون المثلث ACG متقايس الأضلاع و G ، B من جهتين مختلفتين بالنسبة إلى (AC).

ب) بين أن النقط B ، D ، G في استقامية.

ج)بين أنه يوجد دوران يحول النقط B ، D ، G إلى النقط A ، F ، E ، ثم استنتج.

حل التمرين 11



أ) علم النقطة G بحيث يكون المثلث ACG متقايس الأضلاع و G ، B من جهتين مختلفتين بالنسبة إلى (AC).

ب) بين أن النقط B ، D ، G في استقامية.
لدينا ABCD مربع إذن (DB) يعامد (AC)

نقارن بين المثلثين ADG و CDG لدينا : AD = CD و AG = CG و DG مشترك

ومنه $A\hat{G}D = D\hat{G}C$ وبالتالي : (DG) هو منصف الزاوية $A\hat{G}C$ وبما أن المثلث ACG متقايس الأضلاع

فإن (DG) هو محور [AC] أي (DG) يعامد (AC) وبالتالي : (DB) // (DG)

ومنه : النقط B ، D ، G في استقامية.

ج)بين أنه يوجد دوران يحول النقط B ، D ، G إلى النقط A ، F ، E ، ثم استنتج.
لدينا : CE = CB ، CF = CD ، CG = CA .

ولدينا : $B\hat{C}E = D\hat{C}F = G\hat{C}A = 60°$

بتوجيه المستوي في الاتجاه غير المباشر (اتجاه دوران عقارب الساعة)

لدينا : صورة B هي E ، صورة D هي F و صورة G هي A بالدوران الذي مركزه C و زاويته 60°

وبما أن النقط B ، D ، G في استقامية فإن النقط E ، F ، A في استقامية.

التمرين 12

(تركيب تناظرين بالنسبة إلى نقطتين متمايزتين)

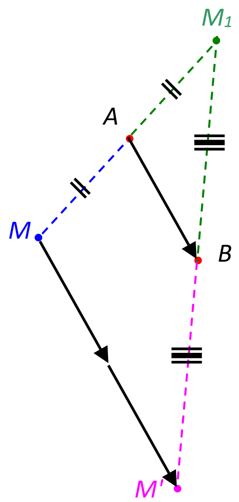
A ، B نقطتان ثابتتان ومتمايزتين ، علم نقطة M ، ثم أنشئ M_1 نظيرتها بالنسبة إلى A ، و 'M نظيرة M_1 بالنسبة إلى B.

نقول أن النقطة 'M هي صورة M بمركب التناظر بالنسبة إلى A و التناظر بالنسبة إلى B.

أ) عبر عن $\overrightarrow{MM'}$ بدلالة $\overrightarrow{AB}$.

ب) استنتج نوع التحويل الناتج عن مركب تناظرين مركزيين.

حل التمرين 12



أ) عبر عن $\overrightarrow{MM'}$ بدلالة $\overrightarrow{AB}$.

لدينا A منتصف $[MM_1]$ و B منتصف $[M_1M']$ إذن حسب نتائج مبرهنة طاليس

نجد : $(MM') // (AB)$ و $MM' = 2\ AB$

بما أن

$\overrightarrow{MM'}$ و $\overrightarrow{AB}$ لهما نفس الاتجاه فإن : $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{AB}$

ب) استنتج نوع التحويل الناتج عن مركب تناظرين مركزيين.

لدينا : $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{AB}$ ومنه 'M هي صورة M بالانسحاب الذي شعاعه $2\overrightarrow{AB}$

وبالتالي : مركب التناظر المركزي بالنسبة إلى A و التناظر المركزي بالنسبة إلى B بهذا الترتيب هو انسحاب شعاعه $2\overrightarrow{AB}$