الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية | **مديرية التربية لولاية**

امتحان بكالوريا تجريبية | **متقن حاسي القارة**

الشعبة: تقني رياضي | **دورة: 2021**

اختبار في مادة: الرياضيات | **المدة: 4 سا ونصف**

على المترشح ان يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأول

<u>التمرين الأول:</u> (04 نقاط)

نعتبر في المجموعة z^2 المعادلة : $(E): 5x-6y=3$

1- أ) أثبت أنه إذا كانت الثنائية (x,y) حلا للمعادلة (E) فإن x مضاعف للعدد 3.

ب) استنتج حلا خاصا للمعادلة (E) ثم حل في ^{2} المعادلة (E).

ج) استنتج حلول الجملة (S) : $\begin{cases} x \equiv -1[6] \\ x \equiv -4[5] \end{cases}$

2- a و b عددان طبيعيان حيث :

$a=\overline{1\alpha0\alpha00}$ في النظام ذو الأساس 3 و $b=\overline{\alpha\beta0\alpha}$ في النظام ذو الأساس 5.

- عين α و β حتى تكون الثنائية $(a;b)$ حلا للمعادلة (E)

<u>التمرين الثاني:</u>(04 نقاط)

يحتوي صندوق على ثلاث كريات بيضاء مرقمة من 1 إلى 3 ، و خمس كريات سوداء مرقمة من 1 إلى 5 لانفرق بينها عند اللمس. نسحب كريتين على التوالي و بدون إعادة الكرية المسحوبة إلى الصندوق.

1) نعتبر الحوادث التالية: A" سحب كريتين من نفس اللون "

B " سحب كريتين تحملان نفس الرقم " ، C " سحب كريتين مجموع رقميهما يساوي 7 "

أ ـ بين أن $p(A)=\frac{13}{28}$ ثم احسب: $p(B)$ و $p(C)$.

ب ـ ما احتمال سحب كريتين تحملان نفس الرقم علما أنهما من نفس اللون؟

2) نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل سحب عدد الأرقام الزوجية المسحوبة.

أ ـ عرف قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X .

ب ـ احسب الأمل الرياضياتي $E(X)$ ثم التباين $v(X)$.

اقلب الصفحة

التمرين الثالث:(4.5 نقاط)

(u_n) متتالية معرفة على Nبـ: $u_0 = \frac{3}{2}$ ومن أجل كل n من N: $u_{n+1} = \frac{6u_n - 2}{u_n + 3}$

1) أ ـ بين أنه من أجل كل n من N: $u_{n+1} = 6 - \frac{20}{u_n + 3}$

ب ـ برهن بالتراجع أنه من أجل كل n من N: $\frac{3}{2} \le u_n \le 2$

ج ـ بين أن المتتالية (u_n)متزايدة تماما ثم استنتج أنها متقاربة.

2) أ ـ بين أنه من أجل كل n من N: $0 \le 2 - u_{n+1} \le \frac{8}{9}(2 - u_n)$

ب ـ استنتج أنه من أجل كل n من N: $0 \le 2 - u_n \le \frac{1}{2} \times \left(\frac{8}{9}\right)^n$ ثم استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

التمرين الرابع: (7.50 نقاط)

I. لتكن g الدالة العددية المعرفة على $]-1;+\infty[$ بـ: $g(x) = \frac{x}{2} + (x+1)\ln(x+1)$.

1) ادرس تغيرات الدالة g على $]-1;+\infty[$ ثم شكل جدول تغيراتها.

2) احسب $g(0)$ و استنتج إشارة $g(x)$ تبعا لقيم x .

II. نعتبر الدالة f المعرفة على $]-1;+\infty[$ بـ: $f(x) = x^2\ln(x+1)$. و (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} f(x)$ ثم فسر النتيجة بيانيا.

2) بين انه من اجل كل عدد حقيقي x من $]-1;+\infty[$: $f'(x) = \frac{2xg(x)}{x+1}$.

3) ادرس تغيرات الدالة ثم شكل جدول تغيراتها.

4) عين معادلة ل (T)مماس المنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0.

5) بين أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تحديدها.

6) احسب $f(1)$, $f(2)$ و أنشئ كلا من (C_f) و (T) .

I. hالدالة المعرفة على $\mathbb{R}^*$ ب: $h(x) = (x^2 - 2|x| + 1)\ln|x|$.

1) احسب $h(-x) - h(x)$ ماذا تستنتج؟

2) بين انه من اجل كل عدد حقيقي xمن $\mathbb{R}^*$: $h(x) = f(|x| - 1)$.

3) اشرح طريقة إنشاء التمثيل البياني (C_h)للدالة hانطلاقا من التمثيل البياني (C_f) ثم ارسمه.

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (4 نقاط)

1) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n، بواقي قسمة 3^n على 5 ثم بواقي قسمة 3^n على 11 .

2) حل في مجموعة الأعداد الصحيحة المعادلة : . $11x - 5y = 2 \ldots. (E)$

3) حل في مجموعة الأعداد الطبيعية المعادلة : . $6 + 3^{11n+1} \equiv 0[11]$

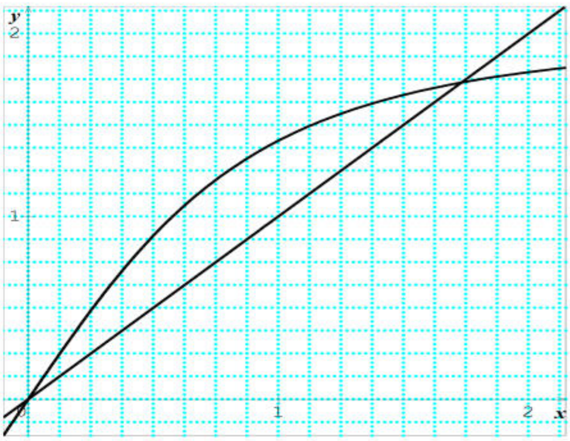
4) عين باقي قسمة 58^{145} على 55 .

5) بفرض $(x;y)$ هو حل من حلول المعادلة (E) حيث : . $y > 0$ و $x + 2 > 0$

عين الثنائيات $(x;y)$ التي من أجلها يكون : . $PGCD(y\,;x+2) = 12$

التمرين الثاني: (4.50 نقاط)

الشكل المقابل هو التمثيل البياني (C) للدالة f المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ بـ : $f(x)=\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$.



و (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y = x$ في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ) بقراءة بيانية عين اتجاه تغير الدالة f على المجال $]0,+\infty[$.

ب) بين أنه إذا كان $x \in [1,\sqrt{3}]$ فإن $f(x) \in [1,\sqrt{3}]$.

2) نعرف المتتالية (u_n) كما يلي : $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = f(u_n)$.

أ) باستعمال التمثيل البياني (C) والمستقيم (Δ) مثل الحدود u_0 ، u_1 و u_2 على محور الفواصل دون حسابها مبرزا خطوط التمثيل ، ثم ضع تخمينا حول اتجاه تغير وتقارب المتتالية (u_n).

ب) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1 < u_n < \sqrt{3}$.

ج) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} - u_n = \dfrac{u_n\left(2-\sqrt{u_n^2+1}\right)}{\sqrt{u_n^2+1}}$، ثم استنتج اتجاه تغير وتقارب المتتالية (u_n) .

3) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n = \dfrac{u_n^2}{3-u_n^2}$.

أ) برهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .

اقلب الصفحة

ب) أكتب عبارة v_n بدلالة n، ثم استنتج u_n بدلالة n. و أحسب $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

4)أحسب p_n بدلالة nحيث : $p_n = \frac{(u_0 \times u_1 \times ....u_n)^2}{(3-u_0^2)(3-u_1^2)........(3-u_n^2)}$.

<u>التمرين الثالث:</u> (04 نقاط)

كيس يحوي 10 كريات لا نفرق بينها عند اللمس موزعة كما يلي: خمس كريات حمراء مرقمة ب:1 ، 1 ،0، 2 ، 2 و خمس كريات خضراء مرقمة ب:0 ، 0 ، 1 ، 2،2. نسحب عشوائيا 4 كريات في آن واحد.

1)أحسب احتمال الأحداث التالية:

A " الحصول على أربع كريات من نفس اللون. "B " الحصول على أربع كريات أرقاما يمكن أن تشكل العدد 2020".

C " الحصول على أربع كريات مجموع أرقامها 4 ".

2) المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل نتيجة سحب الرقم الأصغر من بين الأربع أرقام التي تحملها الكرات المسحوبة

أ)عين قيم المتغير العشوائي X ،ثم عرّف قانون احتماله.

ب) أحسب الأمل الرياضياتي $E(X)$للمتغير العشوائي X.

جـ) أحسب احتمال الحدث " $|X-1| \le 1$"

<u>التمرين الرابع:</u> (7.50نقاط)

نعتبر الدالة f المعرفة على $R-\{0\}$ بـ : $f(x) = 2x + \frac{1}{e^x - 1}$

(C_f)تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس$(O, \vec{i}, \vec{j})$

1) حل في R المعادلة: $2e^{2x} - 5e^x + 2 = 0$ ثم ادرس إشارة $2e^{2x} - 5e^x + 2$

2) أ ـ احسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ ، $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ ، $\lim_{x \xrightarrow{<} 0} f(x)$ و $\lim_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)$ مع التفسير البياني.

ب ـ بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = 2x$ مقارب مائل لـ(C_f)بجوار $+\infty$

جـ ـ بين أن: $\lim_{x\to-\infty} [f(x) - 2x] = -1$ ثم استنتج معادلة للمستقيم (Δ') المقارب المائل الثاني لـ(C_f) .

د ـ ادرس وضعية (C_f) بالنسبة لكل من (Δ) و (Δ') .

3) أ ـ بين أنه من أجل كل xمن $R-\{0\}$: $f'(x) = \frac{2e^{2x} - 5e^x + 2}{(e^x - 1)^2}$

ب ـ حدد اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

4) بين أن النقطة $A\left(0; -\frac{1}{2}\right)$ مركز تناظر للمنحنى (C_f) .

5) أنشئ (Δ)،(Δ')و المنحنى (C_f) .

6) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي عدد حلول المعادلة: $f(x) = 2x + m$. انتهى الموضوع الثاني.

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية — مديرية التربية لولاية أم البواقي

امتحان البكالوريا التجريبي — دورة مـــــاي 2024

الشعبة : تقني رياضي — ثانوية الطيب العقبي – العامرية -

اختبار في مادة : الرياضيات	أستاذ المادة : طويجيني حسام الدين	المدة : 04 ساعات و 30 د

أستاذ مادة الرياضيات طويجيني حسام الدين

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين :

الموضوع الأول :

التمرين الأول :(04.50 نقاط — بالتوفيق في شهادة البكالوريا

I. $P(z)$ كثير حدود للمتغير المركب z حيث : $P(z) = z^3 - 3z^2 + 3z + 7$

1- احسب $P(-1)$ ثم عين العددين الحقيقيين a و b حتى يكون :

$$P(z) = (z+1)(z^2 + az + b)$$

2- حل في المعادلة : $P(z) = 0$

II. في المستوي المركب المنسوب الى معلم متعامد و متجانس $(o, \vec{u}, \vec{v})$ تعتبر النقط D, C, B, A التي لواحقها على الترتيب :

1- عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون : $(z_B - z_A)^n$ عددا حقيقيا سالبا .

2- عين طبيعة المثلث ABC .

3- أكتب $\frac{z_A - z_C}{z_D - z_C}$ على الشكل الأسي ثم استنتج أن A صورة D بتحويل نقطي يطلب تعيينه وتعيين عناصره المميزة .

4- جد مركز ونصف قطر الدائرة المحيطية بالمثلث ACD .

6- عين مجموعة النقط M من المستوي حيث : $\|-\overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{BM} + 2\overrightarrow{CM}\| = \|\overrightarrow{BM} - \overrightarrow{CM}\|$

7- أنشئ دون حساب النقطة H والتي لاحقتها : $Z_H = 1 + e^{i\frac{\pi}{6}}$, ثم عيّن بطريقة هندسية عمدة العدد المركب Z_H .

التمرين الثاني :(04.50 نقاط)

I- حل في R المعادلة التفاضلية : $(E): \acute{y} + y\ln 2 = 0$

ثم عين f الحل الخاص لها الذي يحقق : $f(0) = 1$

- نضع من أجل كل x من R : $f(x) = e^{-x\ln 2}$، عين دالة أصلية للدالة f على .

II- لتكن (U_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $U_n = \int_n^{n+1} f(x)dx$

- بين أن (U_n) متتالية هندسية ثم استنتج أن : $U_n = -\frac{1}{2^{n+1}\ln 2}$, ثم ادرس تقاربها .

- أحسب بدلالة n المجموع : $S_n = \frac{1}{U_0} + \frac{1}{U_1} + \dots + \frac{1}{U_n}$

III- نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n = \ln(|U_n|)$

- بين أن (v_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها وحدّها الأول .
- ادرس اتجاه تغير المتتالية (v_n).

- اكتب v_n بدلالة n ثم أحسب المجموع : $\acute{S}_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$

التمرين الثالث :(04 نقاط)

1) أ) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الاقليدية للعدد 3^n على 7 .

ب) ما هو باقي القسمة الاقليدية للعدد $2\times2019^{6n+4}+2017^{4n+2}$ على 7 .

2) نعتبر المعادلة ذات المجهولين الصحيحين x و y : (E)..... $343x-648y=76$.

أ) بين أن المعادلة (E) تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$.

ب) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E).

3) ليكن d القاسم المشترك الأكبر للعددين الطبيعيين غير المعدومين x و y حلول المعادلة (E).

أ) ما هي القيم الممكنة للعدد d ؟ .

ب) عين الثنائيات $(x;y)$ من الأعداد الطبيعية بحيث يكون $d=76$.

4) λ عدد طبيعي يكتب $\overline{\beta1\alpha\beta}$ في نظام التعداد ذي الأساس 7 ، ويكتب $\overline{\alpha1\alpha\alpha\beta}$ في نظام التعداد ذي الأساس 5.

جد العددين الطبيعيين α و β ، ثم أكتب λ في نظام التعداد ذي الأساس 6 .

التمرين الرابع : (07 نقاط)

I- نعتبر الدالتين f و g المعرفتين على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $f(x) = -x + 1 + \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

$g(x) = -[2(x\sqrt{x}-1) + \ln x]$ و (C_f) التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(o;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

1- تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]1;+\infty[$: $x\sqrt{x}-1>0$.

2- أحسب $g(1)$ ثم عين إشارة $g(x)$ لما : $0<x<1$.

3- أحسب نهايتي f عند 0 و $+\infty$.

4- بين أن (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (d) يطلب تعيين معادلة له. ثم ادرس وضعية (C_f) بالنسبة الى (d).

5- أحسب $f'(x)$ على المجال $]0;+\infty[$ ثم تحقق أن: $f'(x) = \frac{g(x)}{2x\sqrt{x}}$.

6- استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

7- أنشئ (d) و (C_f).

II - باستعمال المكاملة بالتجزئة بين ان الدالة : $x \to 2\sqrt{x}\ln x - 4\sqrt{x} + 4$ هي الدالة الأصلية للدالة $x \to \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ على المجال $]0;+\infty[$ والتي تنعدم عند 1.

- أحسب $A(\alpha)$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها:

$x=1$ ، $x=\alpha$ و $y=-x+1$,حيث : $0<\alpha<1$

ثم احسب : $\lim_{\alpha\to+\infty} A(\alpha)$

أستاذ مادة الرياضيات
طويجيني حسام الدين

الموضوع الثاني :

التمرين الأول :(05 نقاط)

1- حل في $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $(z-i)(z^2+2z+2)=0$

2- المستوي منسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $(o\ ,\vec{u}\ ,\vec{v}\ )$ النقط $A\ ,B\ ,C\ ,\ D$ لواحقها على الترتيب:

$$z_D=1-2i\quad ,\quad z_C=-1-i\quad ,\quad z_B=2\quad ,\quad z_A=i$$

أ- تحقق أن النقطة D مرجح للجملة $\{(A,1),(B,-1),(C,-1)\}$.

ب - أكتب العدد المركب $\frac{z_D-z_A}{z_B-z_C}$ على الشكل الأسي ثم فسر النتيجة هندسيا و برر طبيعة الرباعي $ABCD$.

ج – أكتب العدد المركب $-4+4i$ عل الشكل الأسي ثم أحسب $(-4+4i)^{2018}$.

3- من أجل كل نقطة $M(z)$ من المستوي تختلف عن B نرفق النقطة $M'(z')$ حيث : $z'=\frac{iZ-4+2i}{Z-2}$

أ - تحقق أن : $z'-i=\frac{-4+4i}{Z-2}$

ب - بين أن : $AM'\times BM=4\sqrt{2}$ و $(\vec{u};\overrightarrow{AM'})+(\vec{u};\overrightarrow{BM})=\frac{3\pi}{4}+2k\pi\ /\ k\in\mathbb{Z}$

4/ (μ) هي مجموعة النقط M من المستوي حيث : $\arg(z-i)=\frac{\pi}{4}$

- هل النقطة E ذات اللاحقة $z_E=2+i$ تنتمي الى (μ)

- عين طبيعة المجموعة (μ) .

التمرين الثاني : (04 نقاط)

(U_n) المتتالية العددية المعرفة بـ : $U_0=2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1}=\frac{1}{2}U_n+2n$

1- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $U_n\geq n$ ثم استنتج $\lim_{n\to+\infty}U_n$.

2 - (V_n)المتتالية المعرفة بـ : $V_n=U_n-4n+b$, حيث b عدد حقيقي .

- عين قيمة b حتى تكون (V_n) متتالية هندسية يطلب تعين أساسها وحدها الأول .

- أكتب V_n بدلالة n ثم إستنتج U_n بدلالة n .

- أحسب $\lim_{n\to+\infty}U_n$.

3- نضع : $S_n=V_0+V_1+\cdots+V_n$ و $S'_n=U_0+U_1+\cdots+U_n$

- أحسب S_n بدلالة n ثم بين أن : $S'_n=S_n+(n+1)(2n-8)$

التمرين الثالث :(04 نقاط)

يحتوي كيس على أربع كرات بيضاء تحمل الأرقام 0،1،1، 2 وأربع كرات حمراء تحمل الأرقام 1،1،2، 2 .

نسحب عشوائيا وفي آن واحد ثلاث كرات من هذا الكيس.

1) أحسب احتمال الحصول على :

أ) ثلاث كرات من نفس اللون .

ب) ثلاث كرات تحمل نفس الرقم .

ج) ثلاث كرات أرقامها مختلفة مثنى مثنى .

2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحبة عدد الكرات المسحوبة التي تحمل الرقم 1 .

أ) عين قانون احتمال المتغير العشوائي X .

ب) أحسب الأمل الرياضي $E(X)$ والانحراف المعياري $\sigma(X)$.

التمرين الرابع :(07 نقاط)

I- لتكن الدالة العددية g المعرفة على R بالشكل: $g(x) = 1 + x + e^x$

1 - أدرس تغيرات الدالة g .

2 - برهن أن المعادلة : $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α فى R حيث : $\alpha \in]-1{,}3\ ,\ -1{,}2[$

3 - حدد تبعا لقيم x إشارة $g(x)$ ثم إستنتج إشارة $g(-x)$.

II - نعتبر الدالة العددية f المعرفة على R كما يلي : $f(x) = \frac{xe^x}{1+e^x}$ وليكن (C) تمثيلها البياني فى معلم متعامد ومتجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$.

1- أحسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها.

2- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي : $f'(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}.g(x)$

3- استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

4- برهن أن : $f(\alpha) = 1 + \alpha$.

5- برهن أن المنحنى (C) يقبل مستقيما مقاربا (Δ) معادلته : $y = x$.

6- أكتب معادلة للمماس (T) للمنحنى (C)عند النقطة O مبدأ المعلم ثم أدرس وضعية (C) بالنسبة للمماس (T) .

7- أرسم (C) و(T) .

III- H نقطة فاصلتها x (حيث $x > 0$) وترتيبها معدوم , المستقيم الموازي للمحور (yy') والمار من H يقطع (C) فى النقطة M و يقطع المقارب (Δ) فى النقطة N , نضع : $\varphi(x) = MN$.

1- بين أن : $\varphi(x) = \frac{x}{1+e^x}$, ثم برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا : $\varphi'(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}.g(-x)$

2- استنتج أن MN يكون أكبر ما يمكن عندما: $x = -\alpha$

3- بين أن : $f(-\alpha) = 1$

4- برهن أن المماس (T') عند النقطة A ذات الفاصلة $(-\alpha)$ يوازي المستقيم (Δ) , أكتب معادلته و أرسمه فى نفس المعلم السابق .

5- برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي x حيث $x \geq 1$: $\frac{e^x}{1+e^x} \leq f(x) \leq x$ ثم إستنتج حصرا لمساحة الحيز المحدد بالمنحنى (C) و المستقيمات التى معادلاتها : $y = 0\ ,\ x = 1\ ,\ x = -\alpha$

π

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية

متقن المجاهد بن حود محمد ولاية المنيعة

امتحان بكالوريا تجريبية التعليم الثانوي

الشعبة: تقني رياضي دورة: 2024

اختبار في مادة: الرياضيات المدة: 4 سا و30د

على المترشح ان يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

يحتوي كيس على خمس كريات حمراء مرقمة 1، 2، 3، 4، 5 وأربع كريات سوداء مرقمة 6، 7، 8، 9 (الكريات متشابهة لا نفرق بينها عند اللمس). نسحب عشوائيا ثلاث كريات على التوالي مع إعادة الكرية إلى الكيس في كل مرة.

نعتبر الحادثين التاليتين:

A " الحصول على ثلاثة أرقام زوجية " و B " الحصول على ثلاث كريات مختلفة الألوان ".

1) احسب $P(A)$ ثم بين أن: $P(B)=\frac{20}{27}$.

2) نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل عملية سحب لثلاث كريات عدد الأرقام الزوجية المسحوبة.

أ ـ عين مجموعة قيم المتغير العشوائي $X(\Omega)$ مع التوضيح.

ب ـ عرِّف قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X .

3) احسب $P\left(\log|X|\leq 0,25\right)$.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

(u_n) متتالية عددية معرفة بحدها الأول $u_0=0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=3u_n+2n+7$.

1) أحسب u_1، u_2 و u_3 ثم ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n).

2) أ− برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n\geq 0$.

ب− حدد اتجاه تغير المتتالية (u_n).

3) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n=\ln(u_n+n+4)$.

أ− أثبت أن المتتالية (v_n) حسابية أساسها $\ln 3$.

ب−أكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n، ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n.

ت− هل المتتالية (u_n) متقاربة؟ برر اجابتك.

أحسب S_n و T_n بدلالة n حيث $S_n=v_0+v_1+\ldots+v_n$ و $T_n=u_0+u_1+\ldots+u_n$.

التمرين الثاني:(04 نقاط)

1) أ ـ ادرس تبعا لقيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 13.

ب ـ بين أن العدد $5\times 2024^{1445}+10\times 1962^{1954}+2025^{1446}$ مضاعف للعدد 13.

ج ـ ماهو باقي قسمة العدد $2024^{2026^{2027}}$ على 13؟

2) نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E) ... $5x-2y=13$.

تحقق أن الثنائية $(3;1)$ حل للمعادلة (E). ثم استنتج مجموعة حلولها.

عين مجموعة قيم العدد الطبيعي n التي تحقق : $\begin{cases} n+3^{2n}+2\equiv 2025[4] \\ n\equiv 1445[3] \end{cases}$

التمرين الرابع:(08 نقاط)

I. نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجموعة $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=x-(x^2+1)e^{-x+1}$

نسمي (C_f) المنحني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1- أ) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ثم بيَن أنَ : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

ب) بين أنَه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x)=1+(x-1)^2e^{-x+1}$

ج) استنتج اتجاه تغير الدالة f .ثم شكل جدول تغيراتها .

2- بين أن المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y=x$ مقارب مائل للمنحني (C_f) عند $+\infty$ ثم أدرس الوضع النسبي للمنحني (C_f) بالنسبة إلى (Δ).

3- بيَن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث ، $1.8<\alpha<1.9$.

4- أكتب معادلة ديكارتية للمماس (T) للمنحني (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1.

5- بيَن أنه من أجل كل عدد حقيقي x، $f''(x)=-(x-1)(x-3)e^{-x+1}$ ثم استنتج أنَ (C_f) يقبل نقطتي انعطاف يطلب تعيينهما .

6- أحسب $f(3),f(0)$ ثم أرسم (Δ)، (T) و (C_f).

7- ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة ذات المجهول الحقيقي x التالية :

$$(E):f(x)=x+m$$

II. نضع من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، $I_n=\int_0^1 x^n e^{-x+1}dx$.

1- أ) بيَن أنَ الدالة G المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $G(x)=-(x+1)e^{-x+1}$ هي دالة أصلية للدالة $x\mapsto xe^{-x+1}$

ب) أحسب I_1.

2- أ) باستعمال المكاملة بالتجزئة بين أنَ : $I_{n+1}=-1+(n+1)I_n$ لكل عدد طبيعي غير معدوم n.

ب) أحسب I_2.

3- أحسب بـ cm^2 مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) و المستقيم (Δ) والمستقيمين الذين معادلتيهما : $x=0$ و $x=1$.

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول:(04 نقاط)

عين الاقتراح الصحيح الوحيد من بين الاقتراحات الثلاثة في كل حالة من الحالات الأتية مع التبرير .

1) صندوق U_1 يحتوي على 6 كريات حمراء و4 سوداء و صندوق U_2 يحتوي على 3 كريات حمراء و1 زرقاء جميع الكرات متماثلة.نسحب كرية واحد من صندوق U_1 وكرية واحدة من الصندوق U_2.وليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب عدد الكرات السوداء المسحوبة فان أمله الرياضياتي هو:

أ) $\frac{3}{5}$ ب) $\frac{2}{5}$ ج) 1.

نضيف n كرية سوداء الى الصندوق U_1 وn كرية حمراء الى الصندوق U_2.و نسحب كرية من الصندوق U_1 وكرية من الصندوق U_2.فان قيمة n بحيث يكون احتمال الحصول على كرتين من لونين مختلفين $\frac{7}{12}$ هي :

أ) 1   ب) 2   ج) 3

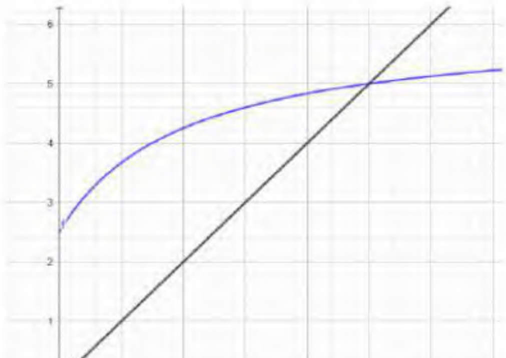
2) حلول المعادلة $(z-2)(z^2+2z+4)=0$ ذات المجهول z في $\mathbb{C}$ هي :

أ) $S=\{2,-1+i\sqrt{3},-1-i\sqrt{3}\}$ ب) $S=\{2,1+i\sqrt{3},1-i\sqrt{3}\}$ ج) $S=\{2,1+i\sqrt{3},-1-i\sqrt{3}\}$

نعتبر في المستوي المركب المنسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس المباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$ النقط C,B,A لواحقها على الترتيب $z_A=-1+i\sqrt{3}$, $z_B=-1-i\sqrt{3}$ و $z_C=2$. فان $\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}$ تساوي :

أ) $2e^{i\frac{\pi}{3}}$ ب) $e^{i\frac{-\pi}{3}}$ ج) $e^{i\frac{\pi}{3}}$

التمرين الثاني:(05 نقاط)



1) الدالة العددية f معرفة على $[0;+\infty[$ كمايلي : $f(x)=\frac{6x+5}{x+2}$ ، (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$, (D) المستقيم ذو المعادلة $y=x$.

المتتالية العددية (U_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $\begin{cases} U_0=1 \\ U_{n+1}=f(U_n) \end{cases}$.

أ) أعد رسم الشكل على ورقة الاجابة ثم مثل على حامل محور الفواصل الحدود U_0 ، U_1 و U_2(دون حسابها مبررا خطوط التمثيل).

ب) ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (U_n) و تقاربها .

2) أ / برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1\le U_n\le 5$.

ب / ادرس اتجاه تغير (U_n) ثم استنتج أنها متقاربة .

3) المتتالية العددية (V_n) معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $V_n=\dfrac{U_n-5}{U_n+1}$.

أ / أثبت أن (V_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .

ب / اكتب كلا من V_n و U_n بدلالة n ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

4) احسب بدلالة n المجموع : $S_n=\dfrac{1}{U_0+1}+\dfrac{1}{U_1+1}+...+\dfrac{1}{U_n+1}$

التمرين الثالث:(04نقاط)

1)نعتبر المعادلة (E)........$9x+4y=22$ ، ذات المجهولين الصحيحين x و y.

بين أنه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حلا للمعادلة (E)فإن $x\equiv 2[4]$ ثم استنتج حلول المعادلة (E).

2) Nعدد طبيعي يكتب $\overline{133\alpha\beta3}$ في نظام التعداد ذو الأساس 4، ويكتب $\overline{56\alpha0}$ في نظام التعداد ذو الأساس 7

حيث αو β عددان طبيعيان.

عين αو β ثم أكتب N في النظام العشري

3) نضع $a=88n+22$ و $b=198n+44$ حيث n عدد طبيعي .

أ) بين أن الثنائية $(a;-b)$حل للمعادلة (E).

ب) باستعمال مبرهنة بيزو بين أن العددين $4n+1$ و $9n+2$ أوليان فيما بينهما .ثم جد $\text{PGCD}(a;b)$.

التمرين الرابع:(07نقاط)

I. نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كمايلي : $g(x)=x^2-2+\ln x$

1) أحسب $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

2) أدرس اتجاه تغيرالدالة g وشكل جدول تغيراتها.

3) بين أن المعادلة$g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $1.31<\alpha<1.32$ ثم استنتج إشارة $g(x)$.

II. لتكن الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي : $f(x)=x-e+\dfrac{1-\ln x}{x}$, (C_f) المنحني الممثل للدالة f

في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$ (وحدة الطول $2cm$)

1) أحسب $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ وفسر النتيجة الأولى هندسيا .

2) أثبت أن المنحنى(C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (D) يطلب تعيين معادلته .

3) أدرس الوضعية النسبية للمنحنى(C_f) والمستقيم(D).

4) بين أنه من أجل كل x من $]0;+\infty[$ فان : $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$

5) استنتتج اتجاه تغير الدالة f , ثم شكل جدول تغيراتها.

6) أثبت أن : $f(\alpha)=2\alpha-e-\frac{1}{\alpha}$, ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

7) أ) بين أن المنحني (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي المستقيم (D) في نقطة يطلب تعيين احداثياتها.

ب)أكتب معادلة ديكارتية للمماس (T) .

8) أنشئ (T) والمنحنى (C_f).

9) نسمي $A(\alpha)$ مساحة الحيز من المستوي المحددة بالمنحنى (C_f) والمستقيم (D) والمستقيمين اللذين معادلتيهما $x=\alpha$ و $x=e$

- بين أن : $A(\alpha)=2(\alpha^2-1)^2 cm^2$

انتهى الموضوع الثاني

ثانوية العربي عبد القادر - بوقيرات

امتحان بكالوريا التجريبي التعليم الثانوي — دورة: 2024

الشعبة: تقني رياضي

اختبار في مادة: الرياضيات — المدة: 04 سا و30 د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأول

التمرين الأول:(04 نقاط)

1. نعتبر في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ المعادلة (E) ذات المجهول $(x;y)$ حيث : $63x+5y=159...(E)$.

أ- تحقق أنّ $p\gcd(5;63)=1$ ثم بيّن أنّ المعادلة (E) تقبل حلولا في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$.

ب-عيّن الحل الخاص $(x_0;y_0)$ حلا للمعادلة (E)الذي يحقق $x_0+y_0=-3$ ثم استنتج حلول المعادلة (E) .

ج- عيّن الثنائيات $(x;y)$ حلول المعادلة (E) والتي تحقق $\ln|13x+y-33|<2\ln 2$.

2. N عدد طبيعي يكتب $\overline{5\alpha0\alpha}$ في نظام التعداد ذو الأساس 7 ويكتب $\overline{\beta10\beta0}$ في نظام التعداد ذو الأساس 5 .

– جد العددين الطبيعيين α و β ثم أكتب العدد $N+\alpha+\beta$ في النظام العشري .

3. أ- أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 5 .

ب- جد الثنائيات $(x;y)$ حلول المعادلة (E) والتي تحقق : $3^{x+1}+3^{-3y-2}+2024^{1445}\equiv 0[5]$

التمرين الثاني : (04 نقاط)

يحتوي كيس على خمس كريات حمراء تحمل الأرقام 1- ، 0 ، 1 ، 1 ، 2 وأربع كريات بيضاء تحمل الأرقام 1- ، 0 ، 1، 2 وكرتين خضراوين تحملا الرقمين 2، 4 (جميع الكريات متماثلة لانفرق بينها عند اللمس)

نسحب من الكيس ثلاث كريات في آن واحد.

1) نعتبر الأحداث التالية :

A "الحصول على ثلاث كرات من نفس اللون " ، B " الحصول على ثلاث كريات جداء أرقامها سالب تماما "

C " الحصول على ثلاث كريات أرقامها هي حدود متتابعة من متتالية حسابية "

أ- أحسب $P(A)$ و $P(B)$ ثمّ بيّن أنّ $P(C)=\frac{12}{55}$.

ب- بيّن أن : $P(A\cap B)=\frac{4}{165}$ ثم استنتج $P(\overline{A\cup B})$.

2) نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل عملية سحب أصغر الأرقام المحصل عليها .

أ- عيّن القيم الممكنة للمتغير المتغير العشوائي X ثمّ عرّف قانون إحتماله .

ب- أحسب الأمل الرياضياتي $E(X)$ واستنتج قيمة العدد الطبيعي a حيث $E(-55X+a)=2038$.

3) نعيد الكيس إلى وضعه الأول ثم نسحب منه ثلاث كرات على التوالي دون إرجاع .

– أحسب إحتمال الحصول على ثلاث كريات أرقامها هي حدود متتابعة من متتالية هندسية غير معدومة "

التمرين الثالث : (05 نقاط)

(u_n) متتالية عددية معرفة على بحدها الأول $u_0=4$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=4-\frac{8}{u_n+2}$

1. برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $2<u_n\leq 4$.

2. أدرس إتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم استنتج أنّها متقاربة.

3. أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $0<u_{n+1}-2\leq\frac{2}{3}(u_n-2)$

ب) بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_n - 2 \leq 2\left(\frac{2}{3}\right)^n$ ثم استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n$.

4. لتكن (v_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = \ln\left(\frac{u_n}{u_n - 2}\right)$

أ- بيّن أنّ المتتالية (v_n) حسابية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول v_0 .

ب- أكتب v_n بدلالة n ثم بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = \frac{2}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}$ و أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n$.

5. أحسب بدلالة n المجموعين S_n و S'_n

حيث : $S_n = \frac{2}{u_n - 2} + \frac{2}{u_{n+1} - 2} + ... + \frac{2}{u_{n+2023} - 2}$ و $S'_n = \ln\left(\frac{u_0}{u_1}\right) + \ln\left(\frac{u_1}{u_2}\right) + ... + \ln\left(\frac{u_{n-1}}{u_n}\right)$

التمرين الرابع : (07 نقاط)

I. لتكن الدالة g المعرفة على $\Re$ بـ : $g(x) = 2 - (x+2)e^{x+2}$

1) أدرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

2) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α يحقق : $-1.15 \prec \alpha \prec -1.14$ ثم حدد حسب قيم x إشارة $g(x)$.

II. لتكن الدالة f المعرفة على $\Re$ بـ : $f(x) = 2x - 1 - (x-1)e^{-x+2}$ وليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$.

1) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن : $f'(x) = g(-x)$

ب) ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها

ج) بين أن : $f(-\alpha) = -2\alpha + 1 - \frac{2}{\alpha+2}$ ثم عين حصرا لـ $f(\alpha)$.

3) أ) بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = 2x - 1$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.

ب) أدرس الوضع النسبي بين المنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) .

جـ) بين أن المنحنى (C_f) يقبل مماس (T) موازي للمستقيم (Δ) يطلب تعيين معادلته .

د) عين نقاط تقاطع المنحنى (C_f) مع حامل محور الفواصل .

4) أرسم المنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) والمماس (T) . ($-\alpha = 1.14$ ، $f(-\alpha) = 0.94$)

5) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة $f(x) = -2x + m$.

6) لتكن (I_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ: $I_n = \int_1^2 (x-1)^n e^{-x+2}dx$

- باستعمال المكاملة بالتجزئة أحسب I_1 ثم فسر النتيجة هندسيا .
- باستعمال المكاملة بالتجزئة بيّن أنّ $I_{n+1} = -1 + (n+1)I_n$ ثم استنتج I_2

انتهى الموضوع الأول

الموضـــوع الثـــاني

التمرين الأول : (04 نقاط)

نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$، النقط A ، B ، C التي لواحقها

$z_A = 2+2i$ ، $z_B = 2\sqrt{3}-2i$ و $z_C = \overline{z_B}$ على الترتيب .

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $\left(\bar{z}-2+2i\right)\left(z^2-4z+16\right)=0$.

2) أ- أكتب العدد المركب $\dfrac{z_A}{z_B}$ على الشكل الجبري ثم الشكل الأسي .

ب- استنتج القيمة المضبوطة لـ $\cos\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$.

3) أكتب العدد $\dfrac{z_A-z_C}{z_B-z_C}$ على الشكل الأسي ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .

4) n عدد طبيعي ، عيّن قيم العدد الطبيعي n حتى يكون العدد $\left(\dfrac{z_B}{z_A}\right)^n$ حقيقيا .

5) عيّن (E) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z التي يكون من أجلها : $\left|\bar{z}-2+2i\right|=2$

التمرين الثاني : (04 نقاط)

يحتوي كيس على أربع كريات بيضاء تحمل الأرقام 1- ، 0 ، 1 ، 3 وأربع كريات حمراء تحمل الأرقام 1- ، 0 ، 1، 2 وكرتين خضراوين تحملا الرقمين 0، 2 (جميع الكريات متماثلة لانفرق بينها عند اللمس)
نسحب من الكيس ثلاث كريات في آن واحد.

1. نعتبر الأحداث التالية :
A "الحصول على الألوان الثلاثة " ، B " الحصول على ثلاث كريات مجموع أرقامها معدوم "
C " الحصول على ثلاث كريات أرقامها من نظام التعداد ذي الأساس 4 "

أ- أحسب $P(A)$ و$P(B)$ و $P(C)$.

ب- بيّن أن : $P(A\cap B)=\dfrac{1}{40}$ ثم استنتج $P\left(\overline{A\cup B}\right)$.

2. نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل عملية سحب لثلاث كريات عدد الألوان المتحصل عليها .

أ- عيّن القيم الممكنة للمتغير المتغير العشوائي X ثمّ عرّف قانون إحتماله .

ب- أحسب الأمل الرياضياتي $E(X)$ واستنتج قيمة العدد $E(5X+2013)$.

ج- أحسب $P\left(X=\dfrac{6}{5-X}\right)$.

التمرين الثالث : (05 نقاط)

لتكن المتتالية (u_n) هندسية متزايدة تماما حدها الأول u_0 و أساسها q حيث : $\begin{cases}\ln(u_1)+\ln(u_5)=20\\ u_0\times u_2=e^8\end{cases}$

1. أ) أحسب u_1 والأساس q للمتتالية (u_n) .

ب) تحقق أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n=e^{3n+1}$.

ج) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n=\ln(u_0)+\ln(u_1)+...+\ln(u_n)$.

2. نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $A_n=n+2$.

أ) بيّن أنّ : $PGCD(2S_n;A_n)=PGCD(A_n;4)$.

ب) عيّ القيم الممكنة لـ $PGCD\left(2S_n;A_n\right)$.

ج) عيّن قيم العدد الطبيعي n حيث : $PGCD\left(2S_n;A_n\right)=2$.

3. أدرس تبعا لقيم العدد الطبيعي n باقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 7 .

4. نضع : $B_n=3nA_n-2S_n+1445^{2024}+1$

– عيّن قيم العدد الطبيعي n والتي من أجلها يكون : $\begin{cases}B_n\equiv 0[7]\\ n\equiv 0[4]\end{cases}$

التمرين الرابع : (07 نقاط)

I. g دالة عددية معرفة على $]-2;+\infty[$ بـ: $g(x)=2(x+2)^2-1+\ln(2x+4)$.

1. أدرس إتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها .
2. بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α من المجال $]-1.38;-1.37[$.
3. استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]-2;+\infty[$.

II. f دالة عددية معرفة على $]-2;+\infty[$ بـ: $f(x)=-2x-4+\dfrac{\ln(2x+4)}{x+2}$ ، (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ (وحدة الطول $1cm$)

1. أ) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ ، $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-2}f(x)$ وفسر النتيجة بيانيا .

ب) بيّن أنّ المستقيم (Δ) معادلته $y=-2x-4$ مقارب مائل لـ (C_f) ثم أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ) .

2. أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من $]-2;+\infty[$ أنّ : $f'(x)=\dfrac{-g(x)}{(x+2)^2}$

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

ج) بيّن أنّ $f(\alpha)=-4\alpha-8+\dfrac{1}{\alpha+2}$ ثم عيّن حصرا له .

3. بيّن أنّ المنحنى (C_f) يقبل مماس (T) ميله -2 يطلب كتابة معادلة له .

4. أ)أرسم المنحنى (C_f) والمماس (T) والمستقيم المقارب (Δ) .

ب) m وسيط حقيقي ، ناقش بيانيا وحسب قيم m عدد وإشارة حلول المعادلة $f(x)=-2x-m$.

5. أ) أحسب بالسنتمتر المربع A مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) والمستقيمين الذين معادلتيهما $x=\alpha$ و $x=-\dfrac{3}{2}$

ب) تحقق أنّ : $A=\dfrac{1}{2}\left(2\alpha^2+8\alpha+7\right)^2 cm^2$.

انتهى الموضوع الثاني

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية — مديرية التربية لولاية باتنة

امتحان البكالوريا التجريبي — دورة: ماي 2023

شعبة: التقني رياضي — ثانوية عياش مقلاتي الحاسي

اختبار في مادة: الرياضيات — المدة: 04 سا و 30 د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضـــــــــوع الأول

التمرين الأول: 05 نقاط

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{5}{3} \end{cases}$.

1. أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n < \frac{5}{2}$.

ب) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n)، ثم استنتج أنها متقاربة.

2. أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $\frac{5}{2} - u_{n+1} = \frac{1}{3}\left(\frac{5}{2} - u_n\right)$.

ب) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $\frac{5}{2} - u_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n \left(\frac{5}{2} - u_0\right)$، ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n واحسب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

3. نضع من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n = \ln(u_{n+1} - u_n)$.

أ. بين أن (v_n) متتالية حسابية أساسها $r = -\ln 3$ يطلب حساب حدها الأول، ثم اكتب v_n بدلالة n.

ب. احسب بدلالة n الجداء P_n بحيث: $P_n = (u_1 - u_0) \times (u_2 - u_1) \times \ .... \ \times (u_{n+1} - u_n)$.

التمرين الثاني: 04 نقاط

يحتوي كيس على 8 كريات متماثلة منها 6 كريات بيضاء مرقمة بـ: $0,2,2,2,2,4$ و كريتين سوداوين مرقمتين بـ: $0,1$.

نسحب عشوائيا و في آن واحد ثلاث كريات من هذا الكيس و نعتبر الحدثين A و B بحيث: الحدث A: الحصول على ثلاث كريات مختلفة اللون و الحدث B: الحصول على ثلاث كريات مجموع أرقامها يساوي 4.

1. احسب كلا من $P(A)$ و $P(B)$ احتمالي الحدثين A و B على الترتيب.
2. بين أن $P(A \cap B) = \frac{1}{8}$، ثم استنتج $P(A \cup B)$.
3. ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة عملية سحب أصغر الأرقام المحصل عليها أو يساويها.
   - ✓ عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ثم احسب أمله الرياضياتي $E(X)$.
4. نسحب الآن عشوائيا n كرية على التوالي بالإرجاع بحيث $\begin{cases} n \in \mathbb{N} \\ n \geq 2 \end{cases}$ ونسمي C الحدث: الحصول على n كرية سوداء.
   - ✓ بين أن $P(C) = \left(\frac{1}{4}\right)^n$، ثم أوجد أصغر قيمة للعدد الطبيعي n التي من أجلها يكون $P(\overline{C}) \geq 0,99$.

التمرين الثالث: 04 نقاط

نعتبر المعادلة (E) ذات المجهول الصحيح $(x;y)$: $2x-5y=1$.

1. أ) جد الحل $(x_0;y_0)$ للمعادلة (E) بحيث $x_0=3y_0$، ثم حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E).

ب) بين أنه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حلا للمعادلة (E) فإن الكسر $\frac{x}{y}$ غير قابل للاختزال.

2. جد قيم العدد الطبيعي λ التي تحقق $\begin{cases}\lambda \equiv 1962[5]\\ \lambda \equiv 2023[2]\end{cases}$، ثم عين باقي قسمة λ على 10.

3. عين الثنائيات الطبيعية $(x;y)$ حلول المعادلة (E) والتي تحقق $10^{\lambda}+x+y\equiv 0[11]$.

4. ليكن N عددا طبيعيا يكتب $\overline{23}$ في النظام ذي الأساس α و يكتب $\overline{54}$ في النظام ذي الأساس β بحيث α و β عددان طبيعيان.

   ✓ جد العددين α و β علما أن $\beta^2-\alpha=31$، ثم اكتب N في النظام العشري.

التمرين الرابع: 07 نقاط

I. نعتبر الدالة g المعرفة و المتزايدة تماما على $\mathbb{R}$ بحيث: $g(x)=e^x+x+1$.

1. بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$، ثم تحقق أن $-1,29<\alpha<-1,27$.

2. استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$، ثم تحقق أن $e^{-\alpha}=-\frac{1}{\alpha+1}$.

II. الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=1-x+\frac{x}{e^x+1}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o;\vec{i},\vec{j})$.

1. احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

2. أ) بين أنه من أجل $x\in\mathbb{R}$: $f'(x)=\frac{-e^x g(x)}{(e^x+1)^2}$، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f.

ب) بين أن $f(\alpha)=-\alpha$، ثم استنتج حصرا لـ $f(\alpha)$.

3. أ) بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=1-x$ مقارب مائل لـ (C_f) عند $+\infty$، ثم ادرس الوضع النسبي لـ (C_f) و (Δ).

ب) بين أن $f(-\alpha)=0$ و $f'(-\alpha)=-1$، ثم اكتب معادلة للمماس (T) لـ (C_f) في النقطة ذات الفاصلة $-\alpha$.

4. أنشئ المماس (T) و المستقيمات المقاربة، ثم مثل (C_f).

5. أ) بين أنه من أجل $x\in[0;1]$: $f(x)\le 1-\frac{1}{2}x$، ثم استنتج أنه من أجل $x\in[0;1]$: $1-x\le f(x)\le 1-\frac{1}{2}x$.

ب) استنتج حصرا لـ A مساحة الحيز المحدد بـ (C_f) و محوري الاحداثيات و المستقيم ذا المعادلة $x=1$.

انتهـــــــــــى الموضوع الأول

الموضـــــوع الثانــــــي

التمرين الأول: 04 نقاط

نعتبر العددين الطبيعيين a و b بحيث: $\begin{cases} a+b \equiv 7[11] \\ a-b \equiv 5[11] \end{cases}$.

1. أ) عين باقي القسمة الإقليدية للعدد a^2-b^2 على العدد 11.
   ب) بين أن $a \equiv 6[11]$ ثم استنتج أن $b \equiv 1[11]$.
2. ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد a^n على 11.
3. بين أن العدد A بحيث $A = a^{2023} + a^{1444} - (a-b)^{2021}$ مضاعف للعدد 11.
4. عين قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون $(b-a)^{10n+6} + (a+b)n \equiv b^{2973} [11]$.

التمرين الثاني: 05 نقاط

I. جد العددين المركبين α و β بحيث: $\begin{cases} 2\overline{\alpha} - \sqrt{3}\overline{\beta} = 3\sqrt{3} + i \\ \overline{\alpha i - \beta} = 0 \end{cases}$.

II. في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o;\vec{u},\vec{v})$ نعتبر النقط A، B و C التي لاحقاتها $z_A = \sqrt{3}+i$، $z_B = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}z_A$ و $z_C = -1+i\sqrt{3}$ على الترتيب.

1. اكتب z_B على الشكلين المثلثي و الجبري، ثم استنتج القيم المضبوطة لـ $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$.
2. أ) عين قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون $\left(\frac{z_B}{\sqrt{2}z_A}\right)^n$ تخيليا بحتا سالبا تماما.
   ب) تحقق أن B صورة A بتحويل نقطي S يطلب تعيين طبيعته و تحديد عناصره المميزة.
3. أ) بين أن $\frac{z_C}{z_A} = i$، ثم استنتج طبيعة المثلث AOC.
   ب) تحقق أن $z_B - z_A = z_C$ ثم حدد بدقة طبيعة الرباعي $AOCB$.
4. عين طبيعة المجموعة (E) مجموعة النقط $M(Z)$ بحيث $\left|\frac{\overline{z} - \sqrt{3} + i}{\frac{\sqrt{2}}{2}iz}\right| = \left|\frac{z_B}{z_A}\right|$، ثم عين صورتها بالتحويل النقطي S.

التمرين الثالث: 04 نقاط

I. نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \left(\frac{1+\sqrt{u_n}}{2}\right)^2 \end{cases}$.

1. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $0 \le u_n \le 1$.

2. بين أنه من أجل $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{4}\left(1-\sqrt{u_n}\right)\left(1+3\sqrt{u_n}\right)$، ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) و برر تقاربها.

II. المتتالية العددية (v_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = \sqrt{u_n} - 1$.

1. أ) بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ يطلب حساب حدها الأول.

ب) اكتب v_n بدلالة n، ثم استنتج أنه من أجل $n \in \mathbb{N}$: $u_n = \left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)^2$ و احسب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

2. احسب بدلالة n المجموع S_n بحيث $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$.

التمرين الرابع: 07 نقاط

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x) = \ln\left(\frac{x^2-2x+2}{x}\right)$ و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى ا علم المتعامد المتجانس $(o;\vec{i},\vec{j})$.

1. احسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{> \\ \to 0}} f(x)$.

2. أ) تحقق أنه من أجل $x > 0$: $f(x) = \ln(x) + \ln\left(1 - \frac{2x-2}{x^2}\right)$.

ب) احسب $\lim\limits_{x \to +\infty}\left[f(x) - \ln(x)\right]$، ثم فسر النتيجة بيانيا.

ج) ادرس الوضع النسبي لـ (C_f) و (Γ) المنحني الممثل للدالة $x \mapsto \ln(x)$.

3. بين أنه من اجل $x > 0$: $f'(x) = \frac{x^2-2}{x(x^2-2x+2)}$ ثم ادرس حسب قيم x إشارة $f'(x)$ (لاحظ أن: $x^2-2x+2 = (x-1)^2+1$) و شكل جدول تغيرات الدالة f.

4. أ) بين أن حل المعادلة $f'(x) = -1$ يؤول إلى حل المعادلة $(x-1)(x^2+2) = 0$، ثم استنتج أن (C_f) يقبل مماسا (T) معامل توجيهه -1 يطلب كتابة معادلة له.

ب) عين احداثيات نقط تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل.

5. أنشئ (T) و مثل (Γ) ثم مثل (C_f).يعطى $f\left(\sqrt{2}\right) \approx -0,2$.

6. الدالة g معرفة على $[-2;0[\cup]0;2]$ بـ: $g(x) = -\ln\left(\frac{x^2-2|x|+2}{|x|}\right)$ و (C_g) تمثيلها البياني في المستوي السابق.

أ) بين أن الدالة g زوجية.

ب) ب) بين أنه من أجل $x \in]0;2]$: $g(x) + f(x) = 0$، ثم استنتج طريقة لرسم (C_g) انطلاقا من (C_f) و ارسمه.

انتهـــــــــى الموضـــــوع الثاني

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التربية الوطنية

ثانوية مسعودي عطية- الجلفة | امتحان بكالوريا التجريبي
دورة : ماي **2023** | الشعبة : **تقني رياضي**

المدة : 04 سا و 30 د | **2023-05-15** | اختبار في مادة: **الرياضيات**

على المتر شح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: 04 نقاط

نعتبر في $\mathbb{Z}^2$، المعادلة : $9x+2y=42 ....(1)$

1) أ) اثبت انه إذا كان $(x;y)$ حلا للمعادلة(1) ، فان $x\equiv 0[2]$

ب) استنتج حلا خاصا للمعادلة (1).

ج) حل المعادلة (1) ثم استنتج الحلول $(x;y)$ التي تحقق : $xy>0$

2) N عدد طبيعي يكتب $\overline{30\alpha\beta\gamma}$ في النظام ذي الأساس 5 .

ويكتب $\overline{55\alpha\beta}$ في النظام ذي لأساس 7 .

عين الأعداد الطبيعية α ، β ، γ ثم أكتب N في النظام العشري .

التمرين الثاني : 05 نقاط

لكل سؤال تعطى 4 إجابات واحدة منها فقط صحيحة، حدد الجواب الصحيح مع التعليل.

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\overline{OI};\overline{OJ})$ ، لتكن النقط C,B,A لواحقها على الترتيب:

$z_A=\frac{7+3i}{5-2i}$ ، $z_B=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$ ، $Z_C=-1+\sqrt{3}i$ و $Z_J=i$.

1. الشكل الجبري لـ z_A هو : ☐ $\frac{7}{5}-\frac{3}{2}i$ ☐ $\frac{29}{21}+\frac{29}{21}i$ ☐ $1+i$ ☐ $\frac{10}{3}$

2 . الشكل الآسي للعدد المركب z_C هو: ☐ $2e^{\frac{2\pi}{3}i}$ ☐ $-e^{i\sqrt{3}}$ ☐ $-2e^{-\frac{i\pi}{3}}$ ☐ $\sqrt{2}e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

3. $\arg\left(\frac{i-z_B}{z_C-z_A}\right)$ هو قيس للزاوية: ☐ $(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BI})$ ☐ $(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{BJ})$ ☐ $(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BJ})$ ☐ $(\overrightarrow{BJ},\overrightarrow{AC})$.

4. أحد حلي المعادلة $z^2-2z+2=0$ هو: ☐ z_A ☐ z_B ☐ $\frac{1+i}{4}$ ☐ $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$.

5. مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث $|z-i|=\left|z-\frac{1+i}{2}\right|$ هي :

☐ الدائرة ذات المركز B ونصف القطر 1. ☐ محور القطعة $[BJ]$.

☐ المستقيم (BI). ☐ المستقيم (BI) ما عدا النقطة I .

التمرين الثالث: 04 نقاط

(u_n) ، (v_n) المتتاليتان المعرفتان على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0 = 2$ ، $v_0 = 1$ ومن اجل كل عدد طبيعي n:

$$\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{u_n + 3v_n}{4} \\ v_{n+1} = \dfrac{u_n + 4v_n}{5} \end{cases}$$

1) نضع من اجل كل عدد طبيعي n : $w_n = u_n - v_n$

أ) اثبت أن (w_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول w_0 .

ب) اكتب عبارة الحد العام w_n بدلالة n .

ج) أحسب : $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n$.

2) اثبت ان المتتالية (u_n)متناقصة و المتتالية (v_n) متزايدة .

استنتج ان المتتاليتين (u_n) ، (v_n) متجاورتان .

3) نضع من اجل كل عدد طبيعي n : $T_n = 4u_n + 15v_n$.

أ) اثبت أن المتتالية (T_n) ثابتة واستنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ ، $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

ب) باستعمال $w_n = u_n - v_n$ و $T_n = 4u_n + 15v_n$ وعبارة الحد العام w_n

- أوجد عبارة الحد العام u_n و v_n.

التمرين الرابع : 07 نقاط

g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = 1 - (x+1)e^{-x}$

1) أ) ادرس اتجاه تغير الدالة g .

ب) أحسب $g(0)$ واستنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x .

2) f الدالة العددية المعرفة على$\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = x - 2 + (x+2)e^{-x}$.

(C) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس .

أ) أحسب نهاية f عند $-\infty$ ، $+\infty$.

ب) بين انه من اجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = g(x)$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

ج) بين أن المنحنى (C) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين إحداثياتها .

3) أ) بين أن المنحنى (C) يقبل مماس معامل توجيهه 1 ، ثم اكتب معادلة له .

ب) بين أن (C) يقبل مستقيم مقارب (Δ)معادلته : $y = x - 2$ عند $+\infty$

ثم أدرس وضعية (C) بالنسبة إلى (Δ).

ج) أنشئ (Δ) و (C).

4) باستعمال المنحنى (C) ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة:

$$(x - 2 - m)e^x + x + 2 = 0$$

انتهي الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول: 04 نقاط

1) جد القاسم المشترك الأكبر للأعداد : 2490 , 32785 , 2905

2) حل في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ المعادلة : $7x+6y=79\cdots\cdots(1)$ (لاحظ 79=7+72)

3) اشترى نادي كرة القدم ملابس رياضية للاعبيه . إذا علمنا أن ثمن بذلة اللاعب هو 2905 DA وثمن بذلة اللاعبة هو 2490 DA و علمنا أن النادي دفع في المجموع 32785 DA

- ما هو عدد اللاعبين و اللاعبات؟

4) N عدد طبيعي يكتب $\overline{1\alpha\beta\lambda}$ في نظام التعداد أساسه 9 حيث : $\lambda;\beta;\alpha$ بهذا الترتيب تشكل حدودا متتابعة من متتالية حسابية متزايدة تماما و $(\lambda;\beta)$ حلا للمعادلة (1)

- عين $\lambda;\beta;\alpha$ ثم اكتب N في النظام العشري

التمرين الثاني: 04 نقاط

يحوي كيس أربع قريصات تحمل الأرقام 3،2،1، a ($a\in\mathbb{N}$) .

نسحب قريصة واحدة و نعتبر P_k هو احتمال سحب القريصة ذات الرقم k

1) أحسب الأعداد الحقيقية P_1 ، P_2 ، P_3 ، P_a إذا علمت أنها بهذا الترتيب تشكل حدود متتابعة من متتالية حسابية أساسها $\frac{1}{18}$.

2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يساوي الرقم الذي تحمله كل قريصة مسحوبة .

أوجد قيمة العدد a إذا علمت أن الامل الرياضياتي $E(X)$ يساوي $\frac{43}{9}$

3) من أجل $a=10$ احسب $P\left(X^2-3X+2\leq 0\right)$ ، $P(X>2)$

التمرين الثالث: 05 نقاط

(u_n) متتالية هندسية حدودها موجبة تماما حيث : $\begin{cases} u_0+u_4=17e \\ \ln(u_3)-\ln(u_1)=2\ln 2 \end{cases}$

حيث $\ln$ اللوغاريتم النيبري ذو الاساس e.

1) أ- احسب q أساس المتتالية (u_n) وحدها الأول u_0.

ب- عبر عن u_n بدلالة n.

2) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$

3) (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $v_n = \ln(u_n) + \ln(u_{n+1})$

أ) أكتب v_n بدلالة n ثم بين أن (v_n) متتالية حسابية .

ب) عين العدد الطبيعي n بحيث : $v_0 + v_1 + ... + v_n = 32 + 128\ln 4$

التمرين الرابع: 07 نقاط

I / عتبر الدالة g المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي : $g(x) = x - x\ln x$

1) احسب نهايات الدالة g عند أطراف مجالات تعريفها .

2) ادرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها .

3) بين أن المعادلة $g(x) = -1$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $3{,}5 \prec \alpha \prec 3{,}6$.

4) استنتج إشارة العبارة $g(x)+1$ على المجال $]0;+\infty[$

II / نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $f(x) = \dfrac{\ln x}{x+1}$.

(C_f) التمثيل البياني للدالة f بالنسبة إلى معلم متعامد $(O;\vec{i};\vec{j})$ حيث $\|\vec{i}\| = 2cm$ و $\|\vec{j}\| = 4cm$.

1) بين أن (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين معادلتيهما $x = 0$ و $y = 0$

2) برهن انه من اجل كل عدد حقيقي x من لمجال $]0;+\infty[$: $f'(x) = \dfrac{g(x)+1}{x(x+1)^2}$.

3) ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها

4) اكتب معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1 .

5) احسب $\lim\limits_{x \to \alpha} \dfrac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha}$, فسر النتيجة هندسيا.

6) بين أن : $f(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha}$ ثم استنتج حصرا لـ $f(\alpha)$ (تدور النتائج إلى 10^{-2})

7) ارسم (C_f) ثم استنتج إشارة $f(x)$

انتهي الموضوع الثاني

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية

مديرية التربية لولاية تيارت | ثانوية بوشارب الناصر سوقر

امتحان بكالوريا تجريبي التعليم الثانوي | دورة: ماي 2024

الشعبة: تقني رياضي

اختبار في مادة: الرياضيات | المدة: 04 سا و 30 د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

1) ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الاقليدية للعدد 3^n على 10

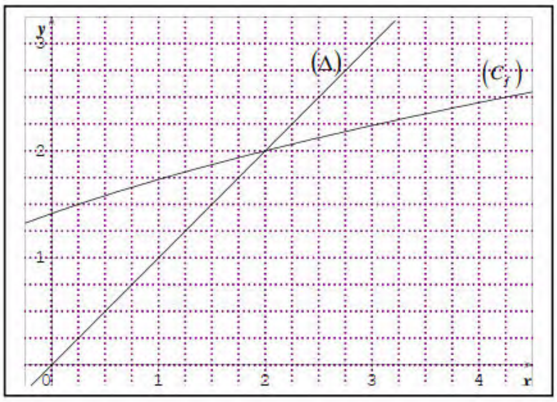
2) استنتج باقي القسمة الاقليدية للعدد A على 10 حيث: $A=-63\times 9^{2024}-7^{1445}$

3) بين أنه من اجل كل عدد طبيعي n يكون: $3n\times 9^n+7^{2n+1}\equiv(n-1)3^{2n+1}[10]$

4) عين قيم العدد الطبيعي حتى يكون: $3n\times 9^n+7^{2n+1}\equiv 0[10]$

التمرين الثاني: (05 نقاط)

f دالة معرفة ومتزايدة تماما على المجال $]-2,+\infty[$ بـ: $f(x)=\sqrt{x+2}$ تمثيلها البياني في الشكل المقابل (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y=x$ ، المتتالية العددية (u_n) معرفة بـ : $u_0=0$ و من اجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=f(u_n)$



1) أ) انقل الشكل على ورقة الاجابة ثم مثل على حامل محور الفواصل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 دون حسابها مبرزا خطوط الانشاء

ب) ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها

2) أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0\le u_n<2$

ب) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}-u_n=\dfrac{-u_n^2+u_n+2}{\sqrt{u_n+2}+u_n}$

واستنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n)

ح) استنتج ان المتتالية (u_n) متقاربة

3) أ) بين انه من اجل كل عدد طبيعي n : $2-u_{n+1}\le\dfrac{1}{2}(2-u_n)$

ب) استنتج انه من اجل كل عدد طبيعي n : $2-u_n\le\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

ج) اعد اثبات ان المتتالية (u_n) متقاربة

التمرين الثالث : (04 نقاط)

يحتوي كيس على اربع كريات حمراء مرقمة $2,2,3,3$ وثلاث كريات خضراء مرقمة $2,2,3$ وكرية سوداء مرقمة بـ 4

نسحب عشوائيا في ان واحد كريتين من هذا الكيس ونعتبر الحدثين:

A : الحصول على كريتين تحملان نفس اللون B : الحصول على كريتين تحملان رقمين أولين فيما بينهما

1) أ) احسب احتمال كل من الحدثين A و B .

ب) بين أن احتمال الحصول على كريتين تحملان نفس اللون ورقميهما اوليان فيما بينهما هو $\frac{3}{14}$

ج) استنتج احتمال الحصول على كريتين تحملان نفس اللون أو رقميهما أوليان فيما بينهما.

2) ليكن المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل سحب باقي قسمة مجموع الرقمين الظاهرين على 3

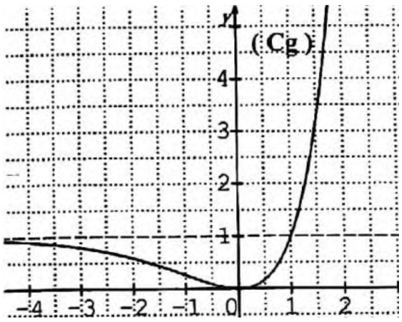
أ) بين أن قيم X هي $\{0,1,2\}$

ب) عرف قانون احتمال المتغير العشوائي X .

3) استنتج احتمال الحدث: $\ln(x^2+1)=0$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

.I g الدالة العددية المعرفة على IR بـ : $g(x)=1+(x-1)e^x$ ، (C_g) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ (الشكل المقابل)



بقراءة بيانية:

1) شكل جدول تغيرات الدالة g

2) حدد حسب قيم x اشارة $g(x)$

.II الدالة العددية f معرفة على IR بـ : $f(x)=x+(x-2)e^x$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ حيث: $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=1cm$

1) أ) احسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

ب) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x فان: $f'(x)=g(x)$. حيث f' هي الدالة المشتقة للدالة f

ج) استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها

2) أ) بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x$ مقارب للمنحنى (C_f)

ب)أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ)

3) بين ان المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف ، يطلب تعيين احداثياها.

4) أ) بين ان المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث $1.68<\alpha<1.69$

ب)بين انه يوجد مماس (T) وحيد للمنحنى (C_f) يوازي المستقيم (Δ) اكتب معادلة له

ج) انشئ المستقيم (Δ) ، المماس (T) والمنحنى (C_f) على المجال $]-\infty,2]$

5) λ عدد حقيقي، حيث: $2\leq\lambda$ نرمز بـ: $A(\lambda)$ الى مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) ،المستقيم (Δ) والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x=2$ و $x=\lambda$ ، h الدالة المعرفة على IR بـ: $h(x)=(x-1)e^x$

أ) احسب $h'(x)$ ، وماذا تستنتج؟

ب) بين أن: $A(\lambda)=e^2+(\lambda-3)e^\lambda$ واستنتج $\lim_{n\to-\infty} A(\lambda)$

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (05 نقاط)

1) نعتبر المعادلة (E).......$4x-13y=7$ ذات المجهولين الصحيحين x و y

أ) بين ان المعادلة (E) تقبل حلولا في المجموعة $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$

ب) عين الثنائية (x_0, y_0) حل خاص للمعادلة (E) الذي يحقق $x_0-y_0=4$ ، ثم استنتج حلول المعادلة (E)

ح) عين الثنائيات (x, y) من الاعداد الصحيحة حلول المعادلة (E) التي تحقق $|13x+y-33|<379$

2) نعتبر العددين الطبيعيين غير المعدومين a و b المعرفين من اجل كل عدد طبيعي n بـ: $a=13n+5$ و $b=4n+1$ وليكن $d=p\gcd(a,b)$

أ) عين القيم الممكنة لـ d

3) عين الثنائيات (a,b) من الاعداد الطبيعية حلول المعادلة (E) التي تحقق $d=7$ و $a+b<400$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

1) (u_n) متتالية عددية معرفة بحدها الثاني $u_1=4$ و من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $u_{n+1}=\frac{1}{3}u_n+\left(\frac{4}{3}\right)^n$

أ) احسب الحد الأول u_0

2) لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n=\frac{4}{3}u_n-u_{n+1}$

أ) تحقق انه من اجل كل عدد طبيعي n فان : $v_n=u_n-\left(\frac{4}{3}\right)^n$

ب) بين أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q=\frac{1}{3}$ يطلب تعيين حدها الأول

ج) اكتب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n

3) احسب $\lim_{n\to+\infty} u_n$

4) نضع من اجل كل عدد طبيعي n: $S_n=v_0+v_1+v_2+........+v_n$ و $T_n=u_0+u_1+u_2+........+u_n$
احسب بدلالة n المجموع S_n ثم استنتج المجموع T_n.

التمرين الثالث : (04 نقاط)

في كل مايلي اجب بصحيح أو خاطئ مع التبرير

1. الشكل الجبري للعدد المركب $\left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^{2024}$ هو 2^{1012}

2. (v_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n=4n+\frac{1}{2}$ و $S_n=v_0+v_2+v_4+........+v_{2n}$ فان

$$S_n = \frac{n+1}{2}(4n+1)$$

3. اذا كان العدد الصحيح x يحقق العلاقة: $x^2 + x \equiv 2[6]$ فان : $x \equiv 2[6]$

4. A و B نقطتين من المستوي لاحقتيهما على الترتيب : Z_A و Z_B حيث:

$Z_A = 1+\sqrt{3}i$ و $Z_A \times Z_B = 2\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$ لاحقة العدد Z_B هي: $Z_B = e^{-i\frac{\pi}{4}}$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I. g الدالة العددية المعرفة على $]0,+\infty[$ بـ : $g(x) = x - \frac{1}{x} - 2\ln x$

1) بين انه من اجل كل عدد حقيقي x من المجال: $]0,+\infty[$: $g'(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2}$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة g

2) احسب $g(1)$ ثم استنتج حسب قيم x اشارة $g(x)$ على المجال: $]0,+\infty[$

II. الدالة العددية f معرفة على $]0,+\infty[$ بـ : $f(x) = x + \frac{1}{x} - (\ln x)^2 - 2$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى معلم متعامد $(O;\vec{i};\vec{j})$ حيث: $\|\vec{i}\| = 1cm$ و $\|\vec{j}\| = 2cm$

1) أ) بين أن : $\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = 0$ ثم احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

ب) تحقق انه من اجل كل x من المجال: $]0,+\infty[$:فان $f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)$ ثم استنتج $\lim_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)$ وفسر النتيجة بيانيا

2) بين انه من اجل كل عدد حقيقي x من المجال: $]0,+\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{x}$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f

3) انشئ المنحنى (C_f) على المجال $[0,10[$ نأخذ $f(10) \approx 2.8$

4) أ) بين أن الدالة : $h: x \mapsto x\ln x - x$ هي دالة اصلية للدالة $x \mapsto \ln x$ على المجال $]0,+\infty[$

ب)باستعمال التكامل بالتجزئة بين أن: $\int_1^e (\ln x)^2 dx = e - 2$

ج) احسب بالسنتمتر مربع مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها:

$y = 0$ ، $x = 1$ و $x = e$

انتهى الموضوع الثاني

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية

الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات — امتحان بكالوريا التعليم الثانوي التجريبي

الشعبة: تقني رياضي — دورة: 2024

اختبار في مادة: الرياضيات — المدة: 04 سا و 30 د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول

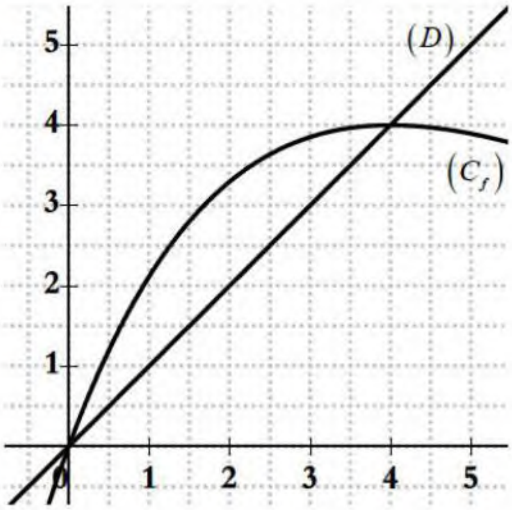
التمرين الأول: (05 نقاط)

f الدالة العددية المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=xe^{1-\frac{1}{4}x}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $\left(O,\vec{i};\vec{j}\right)$ و (D) المستقيم ذو المعادلة $y=x$

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بحدها الأول $u_0=1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=f(u_n)$

1) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0;4]$ فإن $f(x)\in[0;4]$



2) أ– أعد رسم الشكل المقابل ثم مثل على حامل محور الفواصل الحدود u_0، u_1، u_2 و u_3 مبرزا خطوط الإنشاء.

ب– ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها.

3) أ– برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $0<u_n\leq 4$

ب– بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $\frac{u_{n+1}}{u_n}\geq 1$

ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n)

جـ– استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة.

4) نضع من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، $S_n=u_0+u_1+...+u_{n-1}$

أ– بين أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، $u_n=e^{n-\frac{1}{4}S_n}$

ب– استنتج أن $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{S_n}{n}=4$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

1) أ– أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 5^n على 11

ب– استنتج باقي القسمة الإقليدية للعدد 5^{2024} على 11

2) نعتبر المعادلة $(E)\ ...\ 5x-3y=11$ ذات المجهولين الصحيحين x و y

أ- تحقق أن الثنائية $(1;-2)$ حل للمعادلة (E)

ب- استنتج حلول المعادلة (E)

3) الثنائية $(x;y)$ حل للمعادلة (E) و $d=PGCD(x;y)$

عين القيم الممكنة لـ d

4) نضع: $n=3\times16^{2024}+1$

أ- أوجد باقي القسمة الإقليدية للعدد n على 11

ب- أوجد $PGCD\left(3\times16^{2024}+1\,;\,5\times16^{2024}+1\right)$

التمرين الثالث: (04 نقاط)

يحتوي وعاء غير شفاف على 9 كريات متماثلة لا نفرق بينها باللمس، منها كريتين تحملان الرقم 1 وأربع كريات تحمل الرقم 2 وكرية واحدة تحمل الرقم 3 وكريتين تحملان الرقم 4

نسحب عشوائيا من هذا الوعاء كريتين على التوالي دون إرجاع.

نعتبر الحوادث A، B و C التالية:

A : "الحصول على كريتين مجموع رقميهما يساوي 5"

B : "الحصول على كريتين جداء رقميهما فردي"

C : "الحصول على كريتين رقميهما أوليان فيما بينهما"

1) أ- أحسب $p(A)$ و $p(B)$

ب- بين أن $p(C)=\dfrac{7}{12}$

2) نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل عملية سحب لكريتين، القاسم المشترك الأكبر للرقمين المسجلين عليهما.

أ- برر أن قيم المتغير العشوائي X هي: $\{1;2;4\}$

ب- عين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X واحسب أمله الرياضياتي $E(X)$

3) أحسب $p\left(|X-2024|<2024\right)$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I) g الدالة العددية المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=2x^2+\ln x$

1) أ- أحسب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

ب- أدرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

2) أ- بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0{,}54<\alpha<0{,}55$

ب- استنتج إشارة $g(x)$ على $]0;+\infty[$

II) f الدالة العددية المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=2x-\dfrac{1+\ln x}{x}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i};\vec{j})$ (وحدة الطول $2cm$)

1) أ- أحسب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)$ ثم فسر النتيجة بيانيا.

ب- أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2) أ- بين أن المنحنى (C_f) يقبل عند $+\infty$ مستقيما مقاربا مائلا (Δ) معادلته $y=2x$

ب- أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ)

3) أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]0;+\infty[$، $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$

ب- استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

4) بين أن $f(\alpha)=\dfrac{4\alpha^2-1}{\alpha}$ ثم أعط حصرا لـ $f(\alpha)$

5) أكتب معادلة لـ (T) مماس المنحنى (C_f) عند النقطة التي فاصلتها $\dfrac{1}{e}$

6) أنشئ (Δ)، (T) و (C_f)

7) أ- أوجد دالة أصلية F للدالة f على $]0;+\infty[$

ب- أحسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) وحامل محور الفواصل والمستقيمين $x=\dfrac{1}{e}$ و $x=1$

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04,5 نقاط)

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة (E) ذات المجهول z التالية: $z^2-2\sqrt{3}z+4=0$

2) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$، نعتبر النقط A ، B و C لواحقها $z_A=\sqrt{3}+i$ ، $z_B=\sqrt{3}-i$ و $z_B=4+\sqrt{3}+i$ على الترتيب.

أ– أكتب z_A و z_B على الشكل الأسي.

ب– بين أن: $\left(\frac{z_A}{2}\right)^6+\left(\frac{z_A}{2}\right)^6=-2$

3) أ– أثبت أن: $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=2e^{i\frac{\pi}{2}}$ ثم استنتج أن النقطة C هي صورة النقطة B بتحويل نقطي يطلب تعيين عناصره المميزة.

ب– ما طبيعة المثلث ABC ؟

جـ– عين لاحقة النقطة I مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABC

4) لتكن (E) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي تختلف عن $2+i$ حيث: $\arg\left(\bar{z}-2+i\right)=\frac{\pi}{6}+2k\pi$

(k عدد صحيح)

أ– تحقق أن النقطة I تنتمي إلى المجموعة (E)

ب– عين المجموعة (E)

التمرين الثاني: (04,5 نقاط)

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بحدها الأول $u_0=2\ln 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=\ln\left(\frac{2}{3}e^{u_n}+1\right)$

1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n>\ln 3$

2) أ– بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $e^{u_n}-e^{u_{n+1}}=\frac{1}{3}\left(e^{u_n}-3\right)$ ثم استنتج أن (u_n) متناقصة.

ب– استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة.

3) (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n=e^{u_n}-3$

أ– بين أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{2}{3}$ يطلب تعيين حدها الأول.

ب– عبر عن v_n بدلالة n ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n=\ln\left(3+\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)$

جـ– أحسب $\lim_{n\to+\infty}u_n$

4) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n=e^{u_0}+e^{u_1}+...+e^{u_n}$

التمرين الثالث: (04 نقاط)

1) أ– أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 7

ب– استنتج باقي القسمة الإقليدية للعدد 1445^{2024} على 7

2) N عدد طبيعي يكتب $\overline{651\alpha}$ في النظام العشري.

عين α حتى يقبل العدد $1445^{2024}+\overline{651\alpha}$ القسمة على 7

3) أ– أحسب القاسم المشترك الأكبر للعددين 4590 و 2025

ب– عين مجموعة قيم العدد الصحيح x التي تحقق: $34x \equiv 2[15]$

جـ– حل المعادلة $4590x+2025y=270$ ذات المجهولين الصحيحين x و y

4) ما هو رقم آحاد العدد 7^{2024} المكتوب في النظام العشري؟

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I) g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=e^x-x-1$

يعطى جدول تغيراتها كما هو موضح في الشكل المقابل:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$+\infty$ ↘	$g(0)$	↗ $+\infty$

1) أحسب $g(0)$

2) استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$

II) f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=(x+2)e^{-x}+x-2$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i};\vec{j})$

1) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2) أ– بين أن المنحنى (C_f) يقبل عند $+\infty$ مستقيما مقاربا مائلا (Δ) معادلته $y=x-2$

ب– أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ)

3) أ– بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x، $f'(x)=e^{-x}g(x)$

ب– استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها.

4) بين أن O هي نقطة انعطاف للمنحنى (C_f)

5) أنشئ (Δ) و (C_f)

6) λ عدد حقيقي أكبر تماما من -2

$A(\lambda)$ هي مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات (Δ)، $x=-2$ و $x=\lambda$

أ– باستعمال المكاملة بالتجزئة، بين أن: $A(\lambda)=e^2-(\lambda+3)e^{-\lambda}$

ب– أحسب $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} A(\lambda)$

انتهى الموضوع الثاني

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية
امتحان بكالوريا تجريبية
الشعبة: تقني رياضي

مديرية التربية لولاية تيارت
ثانوية بن براهيم زهرة –تخمارت–
دورة: ماي 2021

اختبار في مادة: الرياضيات   المدة: 04 ساعات ونصف

على المترشح ان يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (05 نقاط)

(u_n) المتتالية المعرّفة بحدّها الأوّل $u_0 = 4$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + \frac{4}{3}$.

1)أ/ احسب كل من u_1، u_2 وَ u_3.

ب/ أعط تخمينا حول اتجاه تغيّر المتتالية (u_n).

2) المتتالية العددية (v_n) معرّفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n = \alpha u_n - 4(\alpha + 1)$، حيث α عدد حقيقي.

أ/ جِد العدد الحقيقي α حتى تكون (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{3}{4}$، ثمّ احسب حدّها الأوّل.

ب/ بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n = \frac{16}{3} - \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$.

- ادرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n)، ثمّ احسب $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

3) أكتب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = v_0 + \frac{4}{3}v_1 + \left(\frac{4}{3}\right)^2 v_2 + \cdots + \left(\frac{4}{3}\right)^n v_n$، ثمّ احسب $\lim_{n\to+\infty} S_n$.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

يحتوي صندوق على 10 كريات متماثلة لا نُفرق بينها عند اللمس، منها أربع كريات بيضاء مرقمة بـ:1؛ 1؛ 2؛ 2 وثلاث كريات حمراء مرقمة بـ:0؛ 1؛ 2 وكريتان خضراوان مرقمتان بـ:0؛ 1 وكرية وسوداء مرقمة بـ:0.

نسحب عشوائيا وفي آن واحد أربع كريات من هذا الصندوق.

نعتبر الأحداث A: "الكريات المسحوبة من ألوان مختلفة"، وَ B: "الكريات المسحوبة تحمل لونين فقط"، وَ C: "الكريات المسحوبة تحمل على الأقل رقم زوجي".

1) بيّن أنّ $P(B) = \frac{29}{105}$، ثمّ احسب $P(A)$ وَ $P(C)$.

2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يُرفق بكل نتيجة عملية سحب عدد الألوان المحصل عليها.

– عرّف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X واحسب أمله الرياضياتي $E(X)$.

3) نسحب الآن عشوائيا على التوالي ودون إرجاع أربع كريات من هذا الصندوق.

نعتبر الحدث D: "الكريات المسحوبة تحمل الأرقام والتي تُشكل العدد 2021 بهذا الترتيب"، أحسب $P(D)$.

اقلب الصفحة

التمرين الثالث: (04 نقاط)

1)أ. ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد 2^n على 10.

ب. استنتج رقم أحاد العدد 1994^{1414}.

2) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ المتتالية المعرّفة بحدّها العام $u_n = 2^n$.

أ. تحقّق من أنّ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متتالية هندسية.

نضع لكل عدد طبيعي غير معدوم n: $S_n = 5 + 2^1 + 5 + 2^2 + \cdots + 5 + 2^n$.

ب. أوجد قيم n الطبيعية التي يكون من أجلها S_n قابلا القسمة على 10.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I- لتكن الدّالة g المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = e^x + x + 1$.

1) احسب نهايتي الدّالة g عند $+\infty$ وعند $-\infty$.

2) ادرس اتجاه تغيّر الدّالة g ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

3) أثبت أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-1,28 < \alpha < -1,27$.

4) استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II- لتكن الدّالة f المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = \frac{xe^x}{e^x+1}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$. (وحدة الطول $4\ cm$)

1) أثبت أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f'(x) = \frac{e^x.g(x)}{(\boldsymbol{e^x+1})^2}$.

2)أ− أثبت أنّ: $f(\alpha) = \alpha + 1$.

ب− استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

3)أ− احسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

ب− بيّن أنّ المستقيم (D) الذي معادلته $y = x$ مستقيم مُقارب مائل للمنحنى (C_f).

جـ− ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (D).

4)أ− شكّل جدول تغيّرات الدّالة f.

ب− ارسم (D) و (C_f).

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (05 نقاط)

1) في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$، مثّل المستقيم (Δ) وَ (D) اللّذين معادلتيهما على الترتيب: $y = x$ وَ $y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}$.

لتكن المتتالية (u_n) المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0 = 6$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n - \frac{1}{2}$.

أ- مثّل على حامل محور الفواصل الحدود u_0، u_1، u_2 وَ u_3 (مُبرزا خطوط الانشاء دون حسابها).

ب- عيّن احداثيي نقطة تقاطع المستقيمين (Δ) وَ (D).

جـ- أعط تخمينا حول اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) وتقاربها.

2) نعتبر المتتالية (v_n) المعرّفة من أجل كل عدد طبيعي n بالعلاقة $v_n = u_n + \alpha$، حيث α عدد حقيقي.

أ- جِد العدد الحقيقي α حتى تكون (v_n) متتالية هندسية يُطلب تعيين أساسها وحدّها الأوّل.

ب- نضع $\alpha = \frac{2}{3}$، أكتب v_n بدلالة n ثمّ استنتج عبارة u_n بدلالة n.

جـ- بيّن أنّ $u_{n+1} - u_n = -5\left(\frac{1}{4}\right)^n$، ثمّ استنتج اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) واحسب $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

د- احسب بدلالة n المجموع $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$، ثمّ استنتج المجموع $S'_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

يحتوي كيس على 8 كريات، أربعة منها تحمل الرقم 1 وثلاثة منها تحمل الرقم 2 وكرية واحدة تحمل الرقم 5.

نسحب عشوائيا من هذا الكيس كريتين في آن واحد.

1/ احسب احتمال سحب كريتين رقم كل منهما عدد أولي.

2/ احسب احتمال سحب كريتين مجموع رقميهما عدد فردي.

3/ ليكن X المتغير العشوائي الذي يُرفق بكل عملية سحب العدد $|x - y|$ حيث x وَ y رقما الكريتين المسحوبتين.

أ) ما هي قيم المتغيّر العشوائي X؟

ب) عرّف قانون احتمال المتغيّر العشوائي X، ثمّ احسب أمله الرياضياتي $E(X)$.

التمرين الثالث: (04 نقاط)

نعتبر المعادلة: $(E) \ldots 4862x - 1430y = 2002$ حيث x و y عدادان صحيحان.

1) أحسب القاسم المشترك الأكبر للأعداد: 4862، 1430 وَ2002.

2)أ. بيّن أنّ (E) تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$.

ب. حل المعادلة (E).

3) a وَ b عددان طبيعيان حيث $(a;b)$ حل للمعادلة (E)، نضع: $d = PGCD(a;b)$.

أ. عيّن القيم الممكنة لـd.

ب. عيّن الثنائيات $(a;b)$ عندما $d = 7$.

اقلب الصفحة

التمرين الرابع: (07 نقاط)

الجزء الأوّل:

لتكن g الدّالة العددية المعرّفة على $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=1-x^2-\ln x$.

1) ادرس تغيّرات الدّالة g على $]0;+\infty[$.

2) احسب $g(1)$ ثمّ استنتج، حسب قيم x، إشارة $g(x)$.

الجزء الثاني:

نعتبر الدّالة العددية f المعرّفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\frac{\ln x}{x}-x+2$

نسمي (C) المنحنى المُمثل للدّالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ (وحدة الطول $2\,cm$).

1)أ- احسب نهاية الدّالة f عند 0، فسّر هندسيا هذه النتيجة.

ب- احسب نهاية الدّالة f عند $+\infty$.

جـ- بيّن أنّ المستقيم (D) الذي معادلته $y=-x+2$ هو مستقيم مُقارب مائل للمنحنى (C) عند $+\infty$.

د- ادرس الوضعية النسبية للمنحنى (C) بالنسبة للمستقيم (D).

2)أ- أثبت أنّه، من أجل كل x من $]0;+\infty[$، $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$.

ب- استنتج اتجاه تغيّر الدّالة f وشكّل جدول تغيّراتها.

3)أ- عيّن إحداثيي النقطة A من (C) التي يكون المماس عندها مُوازيا للمستقيم (D).

ب- اكتب معادلة للمستقيم (T)، مماس المنحنى (C) عند النقطة ذات الفاصلة e. (نُذكّر أنّ e هو العدد الذي يُحقق $\ln e=1$)

4) أثبت أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α من المجال $]0;1[$.

5) ارسم المستقيمين (D)، (T) وَالمنحنى (C).

انتهى الموضوع الثاني

التصحيح المفصل للبكالوريا التجريبية/ مادة الرياضيات/ ثالثة تقني رياضي 2021

حل الموضوع الأول

حل التمرين الأول: (5 نقاط)

لدينا: $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + \frac{4}{3} \end{cases}$.

1) أ/ حساب كل من u_1، u_2 وَ u_3:

لدينا: $u_1 = \frac{3}{4}u_0 + \frac{4}{3} = \frac{3}{4}(4) + \frac{4}{3} = \frac{9+4}{3} = \frac{13}{3}$

وَ $u_2 = \frac{3}{4}u_1 + \frac{4}{3} = \frac{3}{4}\left(\frac{13}{3}\right) + \frac{4}{3} = \frac{13}{4} + \frac{4}{3} = \frac{39+16}{12} = \frac{55}{12}$

وَ $u_3 = \frac{3}{4}u_2 + \frac{4}{3} = \frac{3}{4}\left(\frac{55}{12}\right) + \frac{4}{3} = \frac{55}{16} + \frac{4}{3} = \frac{165+64}{48} = \frac{229}{48}$

ب/ إعطاء تخمينا حول اتجاه تغيّر المتتالية (u_n):

نلاحظ أنّ: $u_0 < u_1 < u_2 < u_3$، فتخميني حول اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) فهي **متزايدة تماما**.

2) المتتالية العددية (v_n) معرّفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n = \alpha u_n - 4(\alpha + 1)$، حيث α عدد حقيقي.

أ/ إيجاد العدد الحقيقي α حتى تكون (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{3}{4}$، ثمّ حساب حدّها الأوّل:

(v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{3}{4}$، معناه: $v_{n+1} = \frac{3}{4}v_n$

$v_{n+1} = \frac{3}{4}v_n$، تُكافئ: $\alpha u_{n+1} - 4(\alpha+1) = \frac{3}{4}v_n$

ومنه: $\alpha\left(\frac{3}{4}u_n + \frac{4}{3}\right) - 4(\alpha+1) = \frac{3}{4}\left(\alpha u_n - 4(\alpha+1)\right)$

وعليه: $\frac{3}{4}\alpha u_n + \frac{4}{3}\alpha - 4\alpha - 4 = \frac{3}{4}\alpha u_n - 3\alpha - 3$

ومنه: $\frac{4}{3}\alpha - 4\alpha - 4 = -3\alpha - 3$

وعليه: $4\alpha - 12\alpha - 12 = -9\alpha - 9$

ويكون: $-8\alpha + 9\alpha = 12 - 9$

وبالتالي: $\boxed{\alpha = 3}$، (بالتعويض نجد: $v_n = 3u_n - 16$)

حساب الحدّ الأوّل:

$v_n = 3u_n - 16 = 3(4) - 16 = 12 - 16 = -4$

ب/ تبيان أنّه من أجل كل عدد طبيعي n،

$u_n = \frac{16}{3} - \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$:

لدينا: $\begin{cases} v_n = v_0 \times q^n = -4 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n \\ v_n = 3u_n - 16 \end{cases}$،

ومنه:

$$u_n = \frac{v_n + 16}{3}$$
$$= \frac{v_n}{3} + \frac{16}{3}$$
$$= \frac{16}{3} + \frac{-4\times\left(\frac{3}{4}\right)^n}{3}$$
$$= \frac{16}{3} - \frac{3^{-1}}{4^{-1}} \times \left(\frac{3}{4}\right)^n$$
$$= \frac{16}{3} - \left(\frac{3}{4}\right)^{-1} \times \left(\frac{3}{4}\right)^n$$
$$= \frac{16}{3} - \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$$

دراسة اتجاه تغيّر المتتالية (u_n)، ثمّ حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$:

ندرس إشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$:

لدينا: $u_{n+1} - u_n = \left(\frac{16}{3} - \left(\frac{3}{4}\right)^{(n+1)-1}\right) - \left(\frac{16}{3} - \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\right)$

$$= \frac{16}{3} - \left(\frac{3}{4}\right)^n - \frac{16}{3} + \left(\frac{3}{4}\right)^n \times \left(\frac{3}{4}\right)^{-1}$$
$$= \left(\frac{3}{4}\right)^n \left(\left(\frac{3}{4}\right)^{-1} - 1\right)$$
$$= \left(\frac{3}{4}\right)^n \left(\frac{4}{3} - 1\right)$$
$$= \frac{1}{3} \times \left(\frac{4}{3}\right)^n > 0$$

إذن: (u_n) **متزايدة تماما**.

حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$:

لدينا: $u_n = \frac{16}{3} - \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$،

وبمأنّ: $-1 < \frac{3}{4} < 1$ فإنّ: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} = 0$

ومنه: $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{16}{3}}$.

3) كتابة بدلالة n المجموع S_n حيث،

$S_n = v_0 + \frac{4}{3}v_1 + \left(\frac{4}{3}\right)^2 v_2 + \cdots + \left(\frac{4}{3}\right)^n v_n$، ثمّ حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$:

لدينا: $S_n = v_0 + \frac{4}{3}v_1 + \left(\frac{4}{3}\right)^2 v_2 + \cdots + \left(\frac{4}{3}\right)^n v_n$

$$= \left(\frac{4}{3}\right)^0 v_0 + \left(\frac{4}{3}\right)^1 v_1 + \left(\frac{4}{3}\right)^2 v_2 + \cdots + \left(\frac{4}{3}\right)^n v_n$$
$$= \left(\frac{4}{3}\right)^0 \times -4\left(\frac{3}{4}\right)^0 + \left(\frac{4}{3}\right)^1 \times -4\left(\frac{3}{4}\right)^1 + \left(\frac{4}{3}\right)^2 \times -4\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{4}{3}\right)^n \times -4\left(\frac{3}{4}\right)^n$$
$$= -4(1^0 + 1^1 + 1^2 + \cdots + 1^n)$$
$$= -4[1(n - 0 + 1)]$$
$$= -4n - 4$$

حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$:

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty}(-4n - 4) = +\infty$$

حل التمرين الثاني: (4 نقاط)

يحتوي صندوق على 10 كريات متماثلة لا نُفرق بينها عند اللمس، منها **أربع كريات بيضاء مرقمة بـ:1؛ 1؛ 2؛ 2** و**ثلاث كريات حمراء مرقمة بـ:0؛ 1؛ 2** و**كريتان خضراوان مرقمتان بـ:0؛ 1** و**كرية وسوداء مرقمة بـ:0**.

عدد الحالات الممكنة لسحب أربع كريات في آن واحد من هذا الصندوق هو: $\boxed{C_{10}^4 = \frac{10!}{4!(10-4)!} = 210}$.

نعتبر الأحداث A: "الكريات المسحوبة من ألوان مختلفة"، وَ B: "الكريات المسحوبة تحمل لونين فقط"، وَ C: "الكريات المسحوبة تحمل على الأقل رقم زوجي".

1) تبيان أنّ $P(B) = \frac{29}{105}$، ثمّ حساب $P(A)$ وَ $P(C)$:

لدينا:

$$P(B) = \frac{C_4^1\times C_3^3+C_4^2\times C_3^2+C_4^3\times C_3^1+C_4^2\times C_2^2+C_4^3\times C_2^1+C_4^3\times C_1^1+C_3^2\times C_2^2+C_3^3\times C_2^1+C_3^3\times C_1^1}{C_{10}^4}$$
$$= \frac{4\times1+6\times3+4\times3+6\times1+4\times2+4\times1+3\times1+1\times2+1\times1}{210}$$
$$= \frac{58}{210}$$
$$= \frac{29}{105}$$

حساب $P(A)$ وَ$P(C)$:

لدينا: $P(A) = \frac{C_4^1\times C_3^1\times C_2^1\times C_1^1}{C_{10}^4} = \frac{4\times3\times2\times1}{210} = \frac{24}{210} = \frac{4}{35}$

وَ $P(C) = \frac{C_6^1\times C_4^3+C_6^2\times C_4^2+C_6^3\times C_4^1+C_6^4}{C_{10}^4}$
$$= \frac{6\times4+15\times6+20\times4+15}{210}$$
$$= \frac{205}{201}$$
$$= \frac{41}{57}$$

2) **لدينا:** X المتغير العشوائي الذي يُرفق بكل نتيجة عملية سحب عدد الألوان المحصل عليها.

تعريف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X وحساب أمله الرياضياتي $E(X)$:

- قيم المتغيّر العشوائي X هي: 1، 2، 3، 4.
- $X = 1$، معناه: "الكريات المسحوبة تحمل نفس اللون"

ومنه: $\boxed{P(X=1) = \frac{C_4^4}{C_{10}^4} = \frac{1}{210}}$.

$X = 2$، معناه: "الكريات المسحوبة تحمل لونين فقط"

ومنه: $\boxed{P(X=1) = P(B) = \frac{58}{210}}$.

$X = 4$، معناه: "الكريات المسحوبة من ألوان مختلفة"

ومنه: $\boxed{P(X=1) = P(A) = \frac{24}{210}}$.

$X = 3$، معناه: "الكريات المسحوبة تحمل ثلاث ألوان مختلفة"،

ومنه: $\boxed{P(X=3) = 1 - \left(\frac{1}{210}+\frac{58}{210}+\frac{24}{210}\right) = \frac{127}{210}}$.

نُلخص النتائج في الجدول التالي:

x_i	1	2	3	4
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{210}$	$\frac{58}{210}$	$\frac{127}{210}$	$\frac{24}{210}$

حساب الأمل الرياضياتي $E(X)$:

لدينا: $E(X) = 1\times\frac{1}{210} + 2\times\frac{58}{210} + 3\times\frac{127}{210} + 4\times\frac{24}{210}$
$$= \frac{1+116+381+96}{210}$$
$$= \frac{594}{210}$$
$$= \frac{99}{35}$$

3) عدد الحالات الممكنة لسحب أربع كريات على التوالي ودون إرجاع من هذا الصندوق هو:

$\boxed{A_{10}^4 = \frac{10!}{(10-4)!} = \frac{10!}{6!} = 5040}$.

نعتبر الحدث D: "الكريات المسحوبة تحمل الأرقام والتي تُشكل العدد 2021 بهذا الترتيب"،

حساب $P(D)$:

لدينا: $\boxed{P(D) = \frac{4\times3\times3\times2}{5040} = \frac{72}{5040} = \frac{1}{70}}$.

حل التمرين الثالث: (04 نقاط)

1) أ. دراسة حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد 2^n على 10:

لدينا: $2^0 \equiv 1[10]$،
$2^1 \equiv 2[10]$،
$2^2 \equiv 4[10]$،
$2^3 \equiv 8[10]$،
$2^4 \equiv 6[10]$،
$2^5 \equiv 2[10]$،

ومنه: بواقي قسمة 2^n على 10 تُشكل متتالية دورية، دورها 5 وبالتالي:

$n =$	$5k$	$5k+1$	$5k+2$	$5k+3$	$k \in \mathbb{N}^*$
$2^n \equiv$	2	4	8	6	$[10]$

ب. استنتاج رقم أحاد العدد 1994^{1414}:

لدينا: $1994 \equiv 4[10]$ أي: $1994 \equiv 2^2[10]$

ومنه: $1994^{1414} \equiv 2^{2828}[10]$

وبمأنّ: $2828 = 5(565) + 3$، فإنّ:

$$\boxed{1994^{1414} \equiv 6[10]}$$

إذن: رقم أحاد العدد 1994^{1414} هو 6.

2) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ المتتالية المعرّفة بحدّها العام $u_n = 2^n$.

أ. التحقق من أنّ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متتالية هندسية:

لدينا: $u_{n+1} = 2^{n+1} = 2\times 2^n = 2u_n$،

إذن: (u_n) متتالية هندسية.

ب. لدينا: من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n،
$S_n = 5 + 2^1 + 5 + 2^2 + \cdots + 5 + 2^n$.

إيجاد قيم n الطبيعية التي يكون من أجلها S_n قابلا القسمة على 10:

أولا نكتب S_n بدلالة n:

$$S_n = (5+2^1) + (5+2^2) + \cdots + (5+2^n)$$
$$= 5(n-1+1) + (u_1 + u_2 + \cdots + u_n)$$
$$= 5n + u_1\left(\frac{1-2^{n-1+1}}{1-2}\right)$$
$$= 5n + 2\left(\frac{1-2^n}{-1}\right)$$
$$= 5n + 2(2^n - 1)$$

S_n يقبل القسمة على 10، معناه: $S_n \equiv 0[10]$

أي: $5n + 2(2^n - 1) \equiv 0[10]$

$n =$	$5k$	$5k+1$	$5k+2$	$5k+3$	$k \in \mathbb{N}^*$
$2^n \equiv$	2	4	8	6	$[10]$
$5n \equiv$	5	0	5	0	$[10]$
$S_n \equiv$	7	6	9	0	$[10]$

إذن: $\boxed{n = 5k+3}$، (حيث $k \in \mathbb{N}^*$)

حل التمرين الرابع: (7 نقاط)

I- g دّالة معرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = e^x + x + 1$.

1) حساب نهايتي الدّالّة g عند $+\infty$ وعند $-\infty$:

لدينا: $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} (x+1) = -\infty \end{cases}$، ومنه: $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty}$.

ولدينا: $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} (x+1) = +\infty \end{cases}$، ومنه: $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty}$.

2) دراسة اتجاه تغيّر الدّالّة g ثمّ تشكيل جدول تغيّراتها:

g معرّفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$، ولدينا:

$\boxed{g'(x) = e^x + 1 > 0}$،

ومنه: الدّالة g **متزايدة تماما** على $\mathbb{R}$، **ويكون جدول تغيّراتها كالتالي:**

x	$-\infty$	$+\infty$
$g'(x)$	+	
$g(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

3) إثبات أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $-1,28 < \alpha < -1,27$:

g مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]-1,28; -1,27[$

(لأنّها: متزايدة تماما على $\mathbb{R}$)

ولدينا: $\begin{cases} g(-1,28) \simeq -0,56 \\ g(-1,27) \simeq +0,01 \end{cases}$، أي: $g(-1,28) \times g(-1,27) < 0$

إذن: حسب **مبرهنة القيم المتوسطة** المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-1,28 < \alpha < -1,27$.

4) استنتاج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$:

بما أنّ: g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ وَ $g(\alpha) = 0$، فإنّ:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	−	0	+

II- f دّالة معرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = \dfrac{xe^x}{e^x+1}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$. (وحدة الطول $4\,cm$)

1) إثبات أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f'(x) = \dfrac{e^x.g(x)}{(e^x+1)^2}$:

f معرّفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$، ولدينا:

$$f'(x) = \frac{(xe^x)'(e^x+1) - (e^x+1)'(xe^x)}{(e^x+1)^2}$$
$$= \frac{(1\times e^x + e^x \times x)(e^x+1) - e^x(xe^x)}{(e^x+1)^2}$$
$$= \frac{e^x(x+1)(e^x+1) - e^x(xe^x)}{(e^x+1)^2}$$
$$= \frac{e^x(xe^x + x + e^x + 1 - xe^x)}{(e^x+1)^2} = \frac{e^x g(x)}{(e^x+1)^2}$$

2)أ- إثبات أنّ $f(\alpha) = \alpha + 1$:

لدينا: من السؤال I-3)، $g(\alpha) = 0$

أي: $e^\alpha + \alpha + 1 = 0$ ومنه: $e^\alpha = -\alpha - 1$

وبالتعويض نجد:

$\boxed{f(\alpha) = \dfrac{\alpha e^\alpha}{e^\alpha+1} = \dfrac{\alpha(-\alpha-1)}{-\alpha-1+1} = \dfrac{-\alpha(\alpha+1)}{-\alpha} = \alpha + 1}$.

ب- استنتاج حصرا للعدد $f(\alpha)$:

لدينا: $-1,28 < \alpha < -1,27$

ومنه: $-0,28 < \alpha + 1 < -0,27$

إذن: $\boxed{-0,28 < f(\alpha) < -0,27}$.

3)أ- حساب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$:

لدينا: $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} (e^x+1) = 1 \end{cases}$، ومنه: $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0}$.

حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$:

لدينا: $f(x) = \dfrac{xe^x}{e^x+1} = \dfrac{xe^x}{e^x\left(1+\frac{1}{e^x}\right)} = \dfrac{x}{1+\frac{1}{e^x}}$

نعلم أنّ: $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ وبالتالي: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{e^x} = 0$

ومنه: $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{e^x}\right) = 1$ نستنتج أنّ: $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x}{1+\frac{1}{e^x}}\right) = +\infty$

إذن: $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$.

ب- تبيان أن المستقيم (D) الذي معادلته $y = x$ مستقيم مُقارب مائل للمنحنى (C_f):

لدينا: $f(x) - x = \dfrac{-x}{e^x+1} = \dfrac{-x}{x\left(\frac{e^x}{x}+\frac{1}{x}\right)} = \dfrac{-1}{\frac{e^x}{x}+\frac{1}{x}}$

وبما أنّ: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ وَ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$، فإنّ:

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - x] = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{-1}{\frac{e^x}{x}+\frac{1}{x}}\right) = 0$$

ولدينا: $\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x) - x] = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{-x}{e^x+1}\right) = +\infty$

نستنتج أنّ: المستقيم (D) الذي معادلته $y = x$ مستقيم مُقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

جـ دراسة الوضع النسبي للمنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (D):

ندرس إشارة الفرق $f(x) - x$.

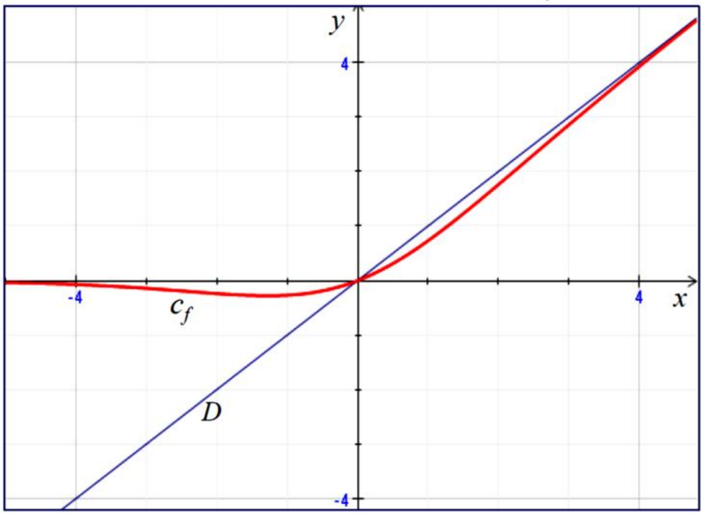
لدينا: $f(x) - x = \dfrac{-x}{e^x+1}$، ومنه: إشارة الفرق $f(x) - x$ من إشارة $(-x)$ على $\mathbb{R}$، وعليه:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$-x$	+	0	-
$f(x) - x$	+	0	-
الوضع النسبي	(C_f) يقع فوق (D)	(C_f) يقطع (D)	(C_f) يقع تحت (D)

4)أ- تشكيل جدول تغيّرات الدّالة f:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	0 ↘	$\alpha+1$	↗ $+\infty$

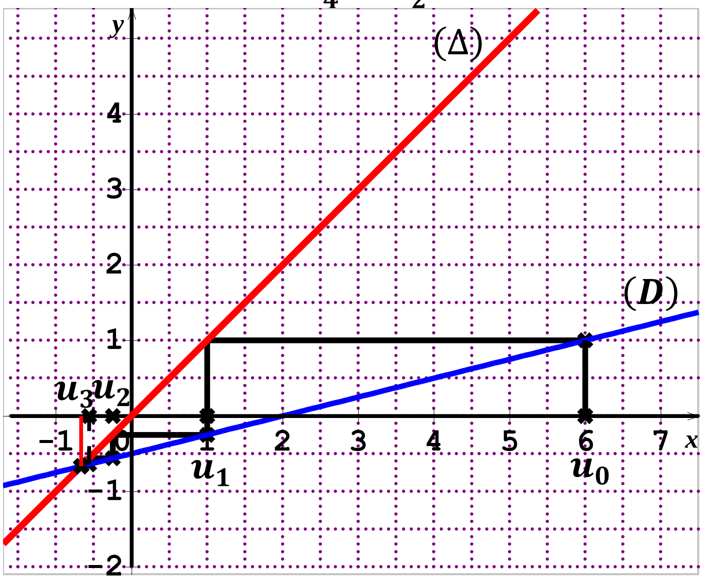
ب- رسم (D) و (C_f):



حل الموضوع الثاني

حل التمرين الأول: (5 نقاط)

1) في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$، تمثيل المستقيم (Δ) وَ (D) اللّذين معادلتيهما على الترتيب $y=x$ وَ $y=\frac{1}{4}x-\frac{1}{2}$:



لدينا: $\begin{cases} u_0=6 \\ u_{n+1}=\frac{1}{4}u_n-\frac{1}{2} \end{cases}$.

أ- تمثيل على حامل محور الفواصل الحدود u_0، u_1، u_2 وَ u_3 (مُبرزا خطوط الانشاء دون حسابها):

ب- تعيين احداثيي نقطة تقاطع المستقيمين (Δ) وَ (D):

نحل المعادلة $x=\frac{1}{4}x-\frac{1}{2}$، ومنه: $4x=x-2$

وعليه: $x=-\frac{2}{3}$،

إذن: (Δ) و (D) يتقاطعان في نقطة إحداثييها $\left(-\frac{2}{3};-\frac{2}{3}\right)$.

جـ- إعطاء تخمينا حول اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) وتقاربها:

نلاحظ أنّ: $u_0>u_1>u_2>u_3$، فتخميني حول اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) وتقاربها فهي **متناقصة تماما وتتقارب نحو العدد** $-\frac{2}{3}$.

2) لدينا: (v_n) متتالية معرّفة من أجل كل عدد طبيعي n بالعلاقة $v_n=u_n+\alpha$، حيث α عدد حقيقي.

أ- إيجاد العدد الحقيقي α حتى تكون (v_n) متتالية هندسية يُطلب تعيين أساسها وحدّها الأوّل:

➲ لدينا: $v_{n+1}=u_{n+1}+\alpha$

$=\frac{1}{4}u_n-\frac{1}{2}+\alpha$

$=\frac{1}{4}(v_n-\alpha)-\frac{1}{2}+\alpha$

$=\frac{1}{4}v_n-\frac{1}{4}\alpha-\frac{1}{2}+\alpha$

➲ تكون (v_n) متتالية هندسية،

إذا وفقط إذا كان: $-\frac{1}{4}\alpha-\frac{1}{2}+\alpha=0$

ومنه: $-\alpha-2+4\alpha=0$

وعليه: $3\alpha=2$

وبالتالي: $\boxed{\alpha=\frac{2}{3}}$، (بالتعويض نجد: $v_n=u_n+\frac{2}{3}$)

إذن: في حالة $\alpha=\frac{2}{3}$، تكون (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{4}$ وحدّها الأوّل $v_0=u_0+\frac{2}{3}=6+\frac{2}{3}=\frac{20}{3}$.

ب- نضع $\alpha=\frac{2}{3}$، كتابة v_n بدلالة n ثمّ استنتاج عبارة u_n بدلالة n:

لدينا: $\boxed{v_n=v_0\times q^n=\frac{20}{3}\times\left(\frac{1}{4}\right)^n}$،

ومنه: $\boxed{u_n=v_n-\frac{2}{3}=\frac{20}{3}\times\left(\frac{1}{4}\right)^n-\frac{2}{3}}$.

جـ- تبيان أنّ $u_{n+1}-u_n=-5\left(\frac{1}{4}\right)^n$، ثمّ استنتاج اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) وحساب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$:

لدينا: $u_{n+1}-u_n=\left[\frac{20}{3}\times\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}-\frac{2}{3}\right]-\left[\frac{20}{3}\times\left(\frac{1}{4}\right)^n-\frac{2}{3}\right]$

$=\frac{20}{3}\times\left(\frac{1}{4}\right)^n\times\left(\frac{1}{4}\right)-\frac{2}{3}-\frac{20}{3}\times\left(\frac{1}{4}\right)^n+\frac{2}{3}$

$=\frac{20}{3}\times\left(\frac{1}{4}\right)^n\left(\frac{1}{4}-1\right)$

$=\frac{20}{3}\times\left(\frac{1}{4}\right)^n\left(\frac{-3}{4}\right)$

$=-5\left(\frac{1}{4}\right)^n$

استنتاج اتجاه تغيّر المتتالية (u_n):

بمأنّ: $u_{n+1}-u_n=-5\left(\frac{1}{4}\right)^n<0$،

فإنّ: (u_n) **متناقصة تماما**.

حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$:

لدينا: $u_n=\frac{20}{3}\times\left(\frac{1}{4}\right)^n-\frac{2}{3}$،

وبمأنّ: $-1<\frac{1}{4}<1$ فإنّ: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n=0$

ومنه: $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=-\frac{2}{3}}$.

د-حساب بدلالة n المجموع $S_n=v_0+v_1+\cdots+v_n$:

لدينا:

$$S_n=v_0+v_1+\cdots+v_n$$
$$=v_0\left(\frac{1-q^{n-0+1}}{1-q}\right)$$
$$=\frac{20}{3}\left(\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{4}}\right)$$
$$=\frac{20}{3}\times\frac{4}{3}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right)$$
$$=\frac{80}{9}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right)$$

استنتاج المجموع $S'_n=u_0+u_1+\cdots+u_n$:

لدينا:

$$S'_n=u_0+u_1+\cdots+u_n$$
$$=\left(v_0-\frac{2}{3}\right)+\left(v_1-\frac{2}{3}\right)+\cdots+\left(v_n-\frac{2}{3}\right)$$
$$=(v_0+v_1+\cdots+v_n)-\frac{2}{3}(n-0+1)$$
$$=S_n-\frac{2}{3}(n+1)$$
$$=\frac{80}{9}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right)-\frac{2}{3}(n+1)$$

حل التمرين الثاني: (4 نقاط)

يحتوي كيس على 8 كريات، أربعة منها تحمل الرقم 1 وثلاثة منها تحمل الرقم 2 وكرية واحدة تحمل الرقم 5.

عدد الحالات الممكنة لسحب كريتين في آن واحد من هذا الكيس هو: $\boxed{C_8^2=\frac{8!}{2!(8-2)!}=28}$.

1/ حساب احتمال سحب كريتين رقم كل منهما عدد أولي:

ليكن الحدث A: "سحب كريتين رقم كل منهما عدد أولي"

ومنه: $\boxed{P(A)=\frac{C_4^2}{C_8^2}=\frac{6}{28}=\frac{3}{14}}$.

2/ حساب احتمال سحب كريتين مجموع رقميهما عدد فردي:

ليكن الحدث B: "سحب كريتين مجموع رقميهما عدد فردي"

ومنه: $\boxed{P(B)=\frac{C_3^1\times C_5^1}{C_8^2}=\frac{15}{28}}$.

3/ لدينا: X المتغير العشوائي الذي يُرفق بكل عملية سحب العدد $|x-y|$ حيث x وَ y رقما الكريتين المسحوبتين.

أ) قيم المتغيّر العشوائي X هي: 0، 1، 3، وَ 4.

ب) تعريف قانون احتمال المتغيّر العشوائي X، ثمّ حساب أمله الرياضياتي $E(X)$:

- $X=0$، معناه: "سحب كريتين تحملان نفس الرقم (الكريتين تحملان الرقم 1 **أو** تحملان الرقم 2)"

ومنه: $\boxed{P(X=0)=\frac{C_4^2+C_3^2}{C_8^2}=\frac{6+3}{28}=\frac{9}{28}}$.

$X=1$، معناه: "سحب كريتين إحداهما تحمل الرقم 1 وَالأخرى تحمل الرقم 2"

ومنه: $\boxed{P(X=1)=\frac{C_4^1\times C_3^1}{C_8^2}=\frac{4\times3}{28}=\frac{12}{28}=\frac{3}{7}}$.

$X=3$، معناه: "سحب كريتين إحداهما تحمل الرقم 2 وَالأخرى تحمل الرقم 5"

ومنه: $\boxed{P(X=3)=\frac{C_3^1\times C_1^1}{C_8^2}=\frac{3\times1}{28}=\frac{3}{28}}$.

$X=4$، معناه: "سحب كريتين إحداهما تحمل الرقم 1 وَالأخرى تحمل الرقم 5"،

ومنه: $\boxed{P(X=4)=\frac{C_4^1\times C_1^1}{C_8^2}=\frac{4\times1}{28}=\frac{4}{28}=\frac{1}{7}}$.

نُلخص النتائج في الجدول التالي:

x_i	0	1	3	4
$P(X=x_i)$	$\frac{9}{28}$	$\frac{12}{28}$	$\frac{3}{28}$	$\frac{4}{28}$

حساب الأمل الرياضياتي $E(X)$:

لدينا: $E(X)=0\times\frac{9}{28}+1\times\frac{12}{28}+3\times\frac{3}{28}+4\times\frac{4}{28}$
$$=\frac{0+12+9+16}{28}$$
$$=\frac{37}{28}$$

حل التمرين الثالث: (4 نقاط)

لدينا المعادلة: $4862x-1430y=2002\ldots(E)$

حيث x و y عدادان صحيحان.

1) حساب القاسم المشترك الأكبر للأعداد 4862، 1430 وَ2002:

لدينا: $\begin{cases}4862=2\times11\times13\times17\\1430=2\times5\times11\times13\\2002=2\times7\times11\times13\end{cases}$، ومنه:

$\boxed{PGCD(4862;1430;2002)=2\times11\times13=286}$.

2) أ. تبيان أنّ (E) تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$:

- (E) تُكافئ: $17x-5y=7$
- بمأنّ: 17 أولي مع 5،

فإنّه: توجد ثنائية $(x;y)$ من $\mathbb{Z}^2$ تُحقق $17x-5y=1$،

وبضرب الطرفين في 7، نجد:

$17X-5Y=7$ (حيث $X=7x$ وَ $Y=7y$)،

إذن: (E) **تقبل حلولا في** $\mathbb{Z}^2$.

ب. حل المعادلة (E):

إيجاد حل خاص لـ(E):

نلاحظ أنّ: $17\times1-5\times2=7$، إذن: الثنائية $(1;2)$ حل خاص لـ(E).

حل المعادلة (E):

لدينا: $\begin{cases}17x-5y=7 & \ldots(1)\\17(1)-5(2)=7 & \ldots(2)\end{cases}$

بطرح (2) من (1) نجد: $17(x-1)-5(y-2)=0$

وعليه: $17(x-1)=5(y-2)$

ومنه: 5 **يقسم** $17(x-1)$ وَ 5 **أولي مع** 17

إذن: حسب مبرهنة **غوص**؛ 5 **يقسم** $(x-1)$

أي: يوجد عدد صحيح k، حيث $x-1=5k$

وبالتالي: $\boxed{x=5k+1}$.

بالتعويض نجد: $\boxed{y=17k+2}$.

إذن: $\boxed{(x;y)=(5k+1;17k+2)}$ (حيث $k\in\mathbb{Z}$).

3) a وَ b عددان طبيعيان حيث $(a;b)$ حل للمعادلة (E)،

نضع: $d=PGCD(a;b)$.

أ. تعيين القيم الممكنة لـd:

لدينا: $d=PGCD(a;b)$، ومنه: $d|a$ و $d|b$

وعليه: $d|17a-5b$

أي: $d|7$

وهذا يعني أنّ: $d\in D_7$

إذن: $\boxed{d\in\{1;7\}}$

ب. تعيين الثنائيات $(a;b)$ عندما $d=7$:

$\boxed{(a;b)=(35k+7;119k+14)}$ (حيث $k\in\mathbb{N}$).

حل التمرين الرابع: (7 نقاط)

الجزء الأوّل:

لدينا: g دّالة معرّفة على $]0;+\infty[$ بـ:

$g(x)=1-x^2-\ln x$.

1) دراسة تغيّرات الدّالة g على $]0;+\infty[$:

⊂ النهايات:

لدينا: $\begin{cases}\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}}(1-x^2)=1\\ \lim\limits_{\substack{x\to0\\>}}\ln x=-\infty\end{cases}$، ومنه: $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}}g(x)=+\infty}$.

ولدينا: $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}(1-x^2)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty\end{cases}$، ومنه: $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=-\infty}$.

⊂ اتجاه التغيّر:

g معرّفة وقابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$، ولدينا:

$\boxed{g'(x)=-2x-\frac{1}{x}=-\frac{2x^2+1}{x}<0}$.

ومنه: الدّالة g **متناقصة تماما** على $]0;+\infty[$.

⊂ جدول التغيّرات:

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖		+		
$g(x)$	‖ $+\infty$	+ +	○	- -	$-\infty$

2) حساب $g(1)$ ثمّ استنتاج، حسب قيم x، إشارة $g(x)$:

لدينا: $g(1)=1-(1)^2-\ln 1=0$،

وبما أنّ: g **متناقصة تماما** على المجال $]0;+\infty[$، فإنّ:

x	0		1		$+\infty$
$g(x)$	‖	+	○	-	

الجزء الثاني:

لدينا: f دّالة عددية معرّفة على $]0;+\infty[$ بـ:

$$f(x)=\frac{\ln x}{x}-x+2$$

(C) المنحنى المُمثل للدّالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ (وحدة الطول $2\,cm$).

1)أ- حساب نهاية الدّالة f عند 0، وتفسير هندسيا النتيجة:

لدينا: $\begin{cases}\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}}\ln x=-\infty\\ \lim\limits_{\substack{x\to0\\>}}x=0^+\end{cases}$، ومنه: $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}}f(x)=-\infty}$.

وتفسيرها الهندسي هو: المنحنى (C) يقبل محور التراتيب كمُقارب له.

ب- حساب نهاية الدّالة f عند $+\infty$:

لدينا: $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0\\ \lim\limits_{x\to+\infty}(-x+2)=-\infty\end{cases}$، ومنه: $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty}$.

جـ- تبيان أنّ المستقيم (D) الذي معادلته $y=-x+2$ هو مستقيم مُقارب مائل للمنحنى (C) عند $+\infty$:

لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(-x+2)]=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$

نستنتج أنّ: المستقيم (D) الذي معادلته $y=-x+2$ مستقيم مُقارب مائل للمنحنى (C) عند $+\infty$.

د- دراسة الوضعية النسبية للمنحنى (C) بالنسبة للمستقيم (D):

ندرس إشارة الفرق $f(x)-(-x+2)$.

لدينا: $f(x)-(-x+2)=\frac{\ln x}{x}$، ومنه: إشارة الفرق $f(x)-(-x+2)$ من إشارة $\ln x$ على $]0;+\infty[$،

وعليه:

x	0		1		$+\infty$
$\ln x$	‖	-	○	+	
$f(x)-(-x+2)$	‖	-	○	+	
الوضع النسبي	‖	(C) يقع تحت (D)	(C_f) يقطع (D)	(C) يقع فوق (D)	

2)أ- إثبات أنه، من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$:

f معرّفة وقابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$، ولدينا:

$\boxed{f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\times x-1\times\ln x}{x^2}-1=\frac{1-\ln x}{x^2}-1=\frac{1-\ln x-x^2}{x^2}=\frac{g(x)}{x^2}}$

ب- استنتاج اتجاه تغيّر الدّالة f وتشكيل جدول تغيّراتها:

على المجال $]0;+\infty[$، $x^2>0$ إذن: إشارة $f'(x)$ هي من إشارة البسط $g(x)$.

وبالتالي: f **متزايدة تماما** على المجال $]0;1]$ وَ**متناقصة تماما** على المجال $[1;+\infty[$، **ويكون جدول تغيّراتها كالتالي:**

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	1	↘	$-\infty$

3)أ- تعيين إحداثيي النقطة A من (C) التي يكون المماس عندها مُوازيا للمستقيم (D):

نضع: $f'(x)=-1$، نجد: $\frac{1-\ln x-x^2}{x^2}=-1$

ومنه: $1-\ln x-x^2=-x^2$

وعليه: $1-\ln x=0$

ومنه: $\ln x=1$

وبالتالي: $x=e$

وبمأنّ: $f(e)=\frac{\ln e}{e}-e+2=\frac{1}{e}+2-e$

فإنّ: $\boxed{A\left(e;\frac{1}{e}+2-e\right)}$

ب- كتابة معادلة للمستقيم (T)، مماس المنحنى (C) عند النقطة ذات الفاصلة e:

معادلة (T) من الشكل $y=f'(e)(x-e)+f(e)$

ومنه: $y=-(x-e)+\frac{1}{e}+2-e$،

نجد: $\boxed{(T): y=-x+\frac{1}{e}+2}$.

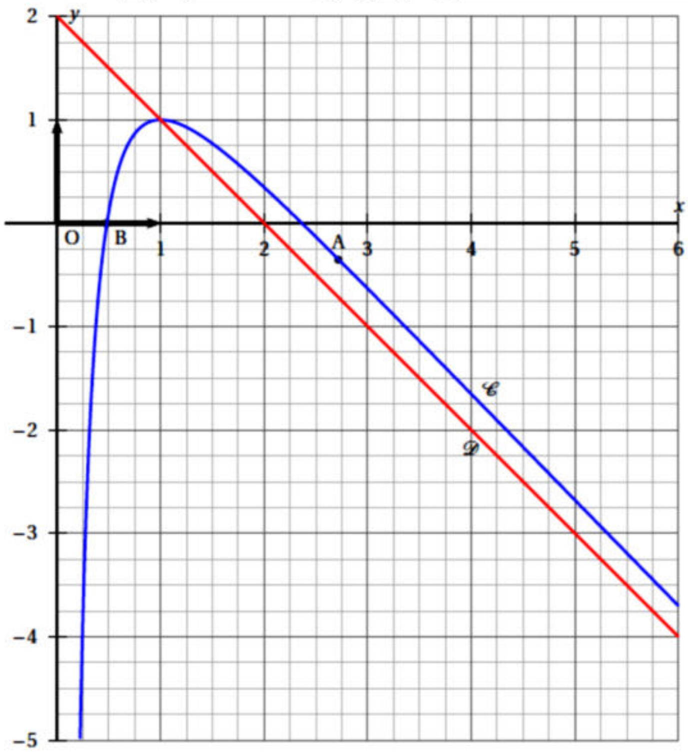
4) إثبات أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α من المجال $]0;1[$:

f مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]0;1[$

ولدينا: $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0}^{>} f(x)=-\infty \\ f(1)=1\end{cases}$، أي: $0\in]-\infty;1[$

إذن: حسب **مبرهنة القيم المتوسطة** المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α من المجال $]0;1[$.

5) رسم المستقيمين (D)، (T) وَالمنحنى (C):



انتهى ـــــــــ مُحبكم في الله أستاذ المادة ـــــــــ بالتوفيق في بكالوريا دورة جوان 2021.

تمرين محلول 12 : (Bac Métropole juin 2007)

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ : $f(x)=x-\frac{\ln(x+1)}{x+1}$

(c) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1) احسب $f'(x)$ لكل x من $]-1;+\infty[$.

2) من أجل كل x من $]-1;+\infty[$ ، نضع : $g(x)=(x+1)^2-1+\ln(x+1)$

- تحقق أن الدالة g متزايدة تماما على المجال $]-1;+\infty[$.

- احسب $g(0)$. استنتج اتجاه تغير الدالة f .

3) ادرس الوضع النسبي للمنحني (c) بالنسبة للمستقيم (D) الذي معادلته $y=x$.

4) ارسم المستقيم (D) والمنحني (c) .

الحل :

1) حساب $f'(x)$: $f(x)=x-\frac{\ln(x+1)}{x+1}$

من أجل كل x من $]-1;+\infty[$:

$$f'(x)=(x)'-\frac{[\ln(x+1)]'\times(x+1)-(x+1)'\times\ln(x+1)}{(x+1)^2}$$

إذن : $f'(x)=\frac{(x+1)^2+1-\ln(x+1)}{(x+1)^2}$

2) التحقق أن الدالة g متزايدة تماما على المجال $]-1;+\infty[$:

من أجل كل x من $]-1;+\infty[$: $g'(x)=2(x+1)+\frac{1}{x+1}=\frac{2(x+1)^2+1}{x+1}$

إذا كان $x\in]-1;+\infty[$ فإن $(x+1)>0$ و $(x+1)^2>0$

وبالتالي : $\frac{2(x+1)^2+1}{x+1}>0$ أي : $g'(x)>0$

إذن : الدالة g متزايدة تماما على المجال $]-1;+\infty[$.

- حساب $g(0)$: $g(0)=(0+1)^2-1+\ln(0+1)=0$

- استنتاج اتجاه تغير الدالة f :

لدينا : الدالة g متزايدة تماما على المجال $]-1;+\infty[$ و $g(0)=0$

نستنتج أن : $[g(x)=0]$ يكافئ $[x=0]$

$[g(x)>0]$ يكافئ $[x\in]0;+\infty[]$

$[f(x)<0]$ يكافئ $[x\in]-1;0[]$

لكن : $f'(x)=\frac{(x+1)^2+1-\ln(x+1)}{(x+1)^2}=\frac{g(x)}{(x+1)^2}$

وبالتالي فإن إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ ومنه النتيجة التالية :

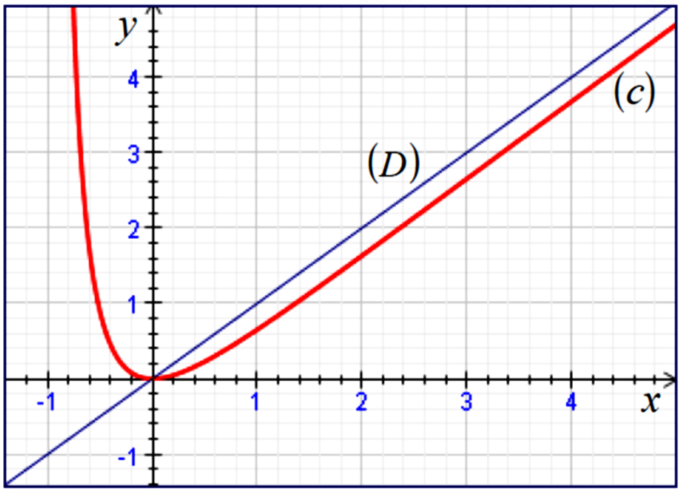
الدالة f متناقصة على المجال $]-1;0]$ ومتزايدة على المجال $[0;+\infty[$

3) دراسة الوضع النسبي للمنحني (c) بالنسبة للمستقيم (D) :

من أجل كل x من $]-1;+\infty[$: $f(x)-x=-\frac{\ln(x+1)}{x+1}$

إذا كان $x\in]-1;+\infty[$ فإن $(x+1)>0$ وبالتالي فإن إشارة الفرق $f(x)-x$ من إشارة $-\ln(x+1)$.

● $[-\ln(x+1)=0]$ يكافئ $[\ln(x+1)=0]$ ومنه : $\ln(x+1)=\ln 1$
وبالتالي : $(x+1)=1$ إذن : $x=0$
في هذه الحالة : المستقيم (D) يقطع المنحني (c) في النقطة $O(0;0)$.
● $[-\ln(x+1)>0]$ يكافئ $[\ln(x+1)<0]$ ومنه : $\ln(x+1)<\ln 1$
وبالتالي : $(x+1)<1$ إذن : $x<0$ أي : $x\in]-1;0[$
في هذه الحالة : المنحني (c) يقع فوق المستقيم (D) .
● $[-\ln(x+1)<0]$ يكافئ $[x\in]0;+\infty[\ ]$
في هذه الحالة : المنحني (c) يقع تحت المستقيم (D) .
4) رسم المستقيم (D) والمنحني (c) :



تمرين محلول 13 : (بكالوريا المغرب 2008 الشعبة : رياضيات الدورة العادية)

لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ :
$f(x)=2x-e^{-x^2}$ ، (c) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.
1) أ- احسب النهاية $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-2x)$ ثم فسّر هذه النتيجة هندسيا .
ب- احسب $f'(x)$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة f .
جـ- بيّن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0<\alpha<1$.
د- ادرس إشارة $f(x)$ على المجال $[0;1]$.
2) أنشئ المنحني (c) . (نأخذ : $\alpha\approx 0.4$)

الحل :

1) أ- حساب $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-2x)$: $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-2x)=\lim_{x\to+\infty}\left(-e^{-x^2}\right)=0$
● التفسير الهندسي :
تذكير : إذا كانت $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$ فإن المستقيم الذي معادلته $y=ax+b$ مستقيم مقارب مائل للمنحني الممثل للدالة f عند $+\infty$.
بما أن $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-2x)=0$ نستنتج أن المستقيم (D) الذي معادلته $y=2x$ مستقيم مقارب مائل للمنحني (c) عند $+\infty$.
ب- حساب $f'(x)$:
الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ و $f'(x)=2+2xe^{-x^2}$
ومن أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$ ، $f'(x)>0$
● جدول تغيرات الدالة f :
$f(0)=-1$
$\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

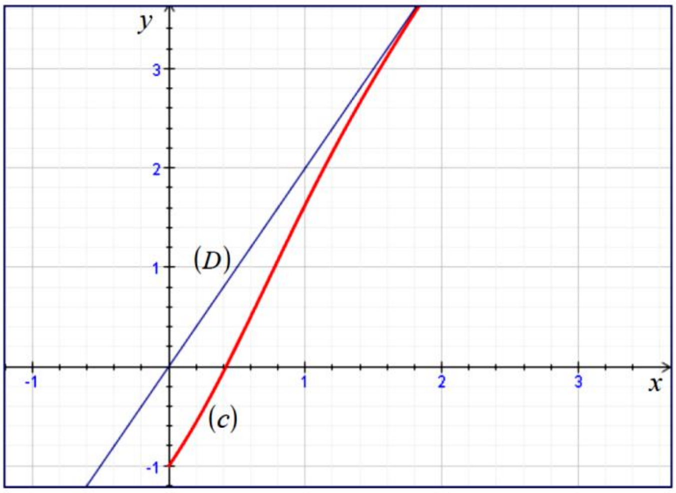
x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	-1 ↗	$+\infty$

جـ- تبيان أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0<\alpha<1$:

تذكير : إذا كان : ● f مستمرة على المجال $[a;b]$ ؛
● f رتيبة تماما على المجال $[a;b]$ ؛
● $f(a).f(b)<0$.
فإنه ، حسب مبرهنة القيم المتوسطة ، المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α من المجال $]a;b[$.
- من جدول تغيرات الدالة f نستنتج أنها مستمرة ومتزايدة تماما على $]0;+\infty[$
وبالتالي فهي مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $[0;1]$.
- زيادة على ذلك ، نتحقق بسهولة أن : $f(0)\times f(1)<0$.
من هذه الحالات الثلاثة (الاستمرارية ، الرتابة والجداء سالب) وحسب مبرهنة القيم المتوسطة نستنتج أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α مع $0<\alpha<1$.
د- دراسة إشارة $f(x)$ على المجال $[0;1]$: $[f(x)=0]$ يكافئ $[x=\alpha]$
$[f(x)>0]$ يكافئ $[x\in]\alpha;1]]$ و $[f(x)<0]$ يكافئ $[x\in [0;\alpha[]$

x	0	α	$+\infty$
$f(x)$	$-$	0	$+$

2) رسم المستقيم (D) والمنحني (c) :



x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$\frac{-4}{3}$	↗	0	↘	$-\infty$

x	0		1		$+\infty$
$\ln x$		-	0	+	
$f(x)-(-x+2)$		-	0	+	
الوضع النسبي		(C) يقع تحت (D)	(C_f) يقطع (D)	(C) يقع فوق (D)	

x	0		1		$+\infty$
$g(x)$		+	0	-	

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$			+		
$g(x)$		$+\infty$ + +	0	- -	$-\infty$

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية

مديرية التربية لولاية تمنراست

امتحان بكالوريا التعليم الثانوي التجريبي دورة 2020

الشعبة : تقني رياضي

اختبار في مادة الرياضيات المدة :4 سا و 30 د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين

الموضوع الأول

التمرين الأول : (04 نقاط)

(u_n) المتتالية المعرفة بـ $u_0=1$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=\dfrac{4u_n}{1+u_n}$.

1 أ- أحسب u_1 و u_2 ثم برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0<u_n<3$

2 لتكن (v_n) متتالية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n=\dfrac{u_n-3}{u_n}$

أ -بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\dfrac{1}{4}$

ب أكتب v_n ثم u_n بدلالة n ثمّ احسب نهاية المتتالية (u_n) .

3 -(w_n) المتتالية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n : $w_n=\dfrac{3}{u_n}$، نضع $S_n=w_0+w_1+w_2+....+w_n$.

أ. تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $w_n=1-v_n$

ب. بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n=n+1+\dfrac{8}{3}\left(1-\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n+1}\right)$

ج. أحسب نهاية $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{S_n}{n}$.

التمرين الثاني : (04 نقاط)

يحتوي كيس على ست كرات بيضاء تحمل الارقام 0 ، 0 ، 0 ، 1 ،1 ، 2 و كرتين سوداوين تحملان الرقمين 0 ، 1 (الكرات لانفرق بينها باللمس) نسحب عشوائيا في آن واحد كرتين من الكيس

1. أحسب احتمال الحوادث A ، B ، C حيث :

A" الكرتين المسحوبتين من نفس اللون " B " الكرتين تحملان رقمين جداؤهما معدوم "

C " كرتين بلونين مختلفين و رقمين جداؤهما معدوم "

2. نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل سحب مجموع الرقمين المسحوبين

أ. عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي

ب. أحسب الأمل ألرياضياتي للمتغير العشوائي X

التمرين الثالث : (05 نقاط)

1. عين العددين المركبين α و β حيث : $\begin{cases} \alpha+\beta=-1 \\ 2\overline{\alpha}+\beta=6i \end{cases}$

2. المستوي منسوب الى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\right)$ نعتبر النقط I و A و B لواحقها على الترتيب $z_I=1$ و $z_A=1-2i$ و $z_B=-2+2i$.

أ –أنشئ النقط I و A و B

ب عين z_w لاحقة النقطة w مركز الدائرة (C) ذات القطر $[AB]$

3. D نقطة لاحقتها $z_D=\dfrac{3+9i}{4+2i}$ أكتب z_D على شكل الجبري ثم بين أن النقطة D تنتمي إلى الدائرة (C).

4. E نقطة من الدائرة (C) لاحقتها z_E حيث $z_E=e^{i\frac{\pi}{4}}z_I+\left(1-e^{i\frac{\pi}{4}}\right).z_w$

أ –أكتب العدد $z_E+\dfrac{1}{2}$ على الشكل الآسي .

ب استنتج أن $z_E=\dfrac{3\sqrt{2}-2}{4}+\dfrac{3\sqrt{2}}{4}i$

التمرين الرابع : (07 نقاط)

I) نعتبر الدالة h المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ : $h(x)=x^2-1+\ln x$.

1. احسب نهايات الدالة h عند 0 وعند $+\infty$.
2. ادرس اتجاه تغير الدالة h على $]0;+\infty[$ ثم شكل جدول تغيراتها.
3. احسب $h(1)$ ثم استنتج اشارة $h(x)$ على $]0;+\infty[$.

II) نعتبر الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ : $f(x)=x-1-\dfrac{\ln x}{x}$

و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

1. احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ ثم احسب $\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}}f(x)$ وفسر النتيجة بيانيا .
2. بين انه من اجل كل x من $]0;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{h(x)}{x^2}$. استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيرات.
3. أ) بين ان المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x-1$ مستقيم مقارب للمنحني (C_f) عند $+\infty$.

ب) ادرس وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) .

4. بين ان المستقيم (d) ذو المعادلة $y=x-1-e^{-1}$ يمس المنحني (C_f) في نقطة A يطلب تعيين احداثيها
5. ارسم (Δ) و (d) و (C_f) .
6. ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة $-1-\dfrac{\ln(x)}{x}=m$.

انتهى الموضوع الأول

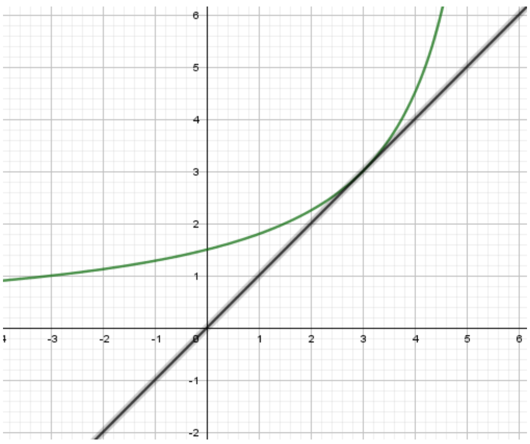
الموضوع الثاني

التمرين الأول : (04 نقاط)

نعتبر الدالة f المعرفة على $]-\infty,6[$ بـ: $f(x)=\dfrac{9}{6-x}$.

ولتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $\begin{cases} u_0=-3 \\ u_{n+1}=f(u_n) \end{cases}$

في الرسم المقابل ، (c_f) المنحنى الممثل للدالة f في المعلم المتعامد والمتجانس $(o;\vec{i},\vec{j})$ و (Δ) المستقيم ذي المعادلة $y=x$



1. أ- بإستعمال الرسم السابق مثل على حامل محور الفواصل وبدون حساب الحدود : u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 .

ب -. ضع تخمينا حول اتجاه تغير (u_n) وتقاربها.

2. أ- برهن بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n<3$

ب- استنتج اتجاه تغير (u_n) . هل (u_n) متقاربة ؟ برر

3. نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على □ كمايلي: $v_n=\dfrac{1}{u_n-3}$

أ- برهن أن المتتالية (v_n) حسابية يطلب تحديد أساسها r وحدها الاول v_0

ب- اكتب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n ثم احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n$.

هـ- احسب بدلالة n المجموعين: $s_n=v_0+v_1+...+v_n$ و $s'_n=v_0\times u_0+v_1\times u_1+...+v_n\times u_n$.

التمرين الثاني : (05 نقاط)

أذكر إن كانت الجمل التالية صحيحة أم خاطئة مبرّرا الإجابة .

1) من أجل كل عدد طبيعي n ، 3 يقسم العدد $2^{2n}-1$.

2) إذا كان x عددا صحيحا حلا للمعادلة $x^2-x\equiv 0[6]$ فإن $x\equiv 0[6]$.

3) إذا كان $x^2\equiv y^2[17]$ فإن $x\equiv y\,[17]$.

4) مجموعة حلول المعادلة $12x-5y=3$ المعرفة في Z^2 ، هي مجموعة الثنائيات (x,y) من الشكل $(4+10k\,;9+24k)$ مع $k\in Z$.

5) M و N عددان طبيعيان كتابتهما في النظام العشري هي : $\overline{abc}$ و $\overline{bca}$ على الترتيب .

إذا كان M يقبل القسمة على 27 فإن $M-N$ يقبل القسمة على 27.

التمرين الثالث : (04 نقاط)

صندوق يحتوي على n كرية بيضاء حيث $n \geq 2$ و أربع كرات حمراء و ثلاث كرات خضراء . نسحب في آن واحد كرتين من الصندوق .

1. ما احتمال سحب كرتين بيضاوين
2. نسمى $P(n)$ احتمال سحب كرتين من نفس اللون .

أ –بين أن $P(n)=\dfrac{n^2-n+18}{(n+7)(n+6)}$.

ب أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} P(n)$ ثم فسر النتيجة المحصل عليها .

3. فيما يلي نأخذ $n=5$ و نعتبر اللعبة التالية : يدفع اللاعب $30DA$ ويسحب في آن واحد كرتان من الصندوق

. عند سحب كرة بيضاء يتحصل على $40DA$ وعند سحب كرة حمراء يتحصل على $10DA$ و عند سحب كرة خضراء يخسر ما دفعه . X المتغير العشوائي الذي يمثل الربح الجبري للاعب .

أ. عين قيم المتغير العشوائي X .

ب. عين قانون الاحتمال العشوائي للمتغير العشوائي X ثم أحسب أمله الرياضياتي.

التمرين الرابع : (07 نقاط)

I) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=-x+1+e^{-x}$.

1) احسب نهايات الدالة g عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

2) ادرس اتجاه تغير الدالة g على $\mathbb{R}$ ثم شكل جدول تغيراتها .

3) بين ان المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1.27<\alpha<1.28$ ثم استنتج اشارة $g(x)$ على

II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=(e^x-1)(2-x)$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

1) –احسب نهاية الدالة f عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

2) أ– بين أن $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-x]=-2$ استنتج أن المنحني (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل يطلب تعيين معادلته

ب– ادرس الوضع النسبي بالنسبة لـ (C_f) والمستقيم (Δ) معادلته $y=x-2$.

3) بين ان $f'(x)=e^x.g(x)$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f على $\mathbb{R}$ و شكل جدول تغيراتها.

4) بين ان $f(\alpha)=\dfrac{(2-\alpha)^2}{\alpha-1}$ ثم استنتج حصرا لـ $f(\alpha)$.

5) ارسم (Δ) و (C_f) .

انتهى الموضوع الثاني

تصحيح الموضوع الأول شعبة التقني رياضي البكالوريا التجريبية 2021

التمرين الأول : (04 نقاط)

(u_n) المتتالية المعرفة بـ $u_0=1$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=\dfrac{4u_n}{1+u_n}$.

1. أ- حساب u_1 و u_2 : $u_1=\dfrac{4u_0}{1+u_0}=\dfrac{4}{2}=2$ و $u_2=\dfrac{4u_1}{1+u_1}=\dfrac{4\times 2}{1+2}=\dfrac{8}{3}$

البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0<u_n<3$:

لدينا $0<u_0<3$ محققة .

نفرض أن $0<u_n<3$ صحيحة و نبرهن أن $0<u_{n+1}<3$ صحيحة

لدينا $u_{n+1}=\dfrac{4u_n}{1+u_n}$ يعني أن $u_{n+1}=4-\dfrac{4}{1+u_n}$

$0<u_n<3$ بإضافة 1 نجد $1<1+u_n<4$ بالقلب نجد $\dfrac{1}{4}<\dfrac{1}{1+u_n}<1$ بالضرب في -4 نجد

$-1>-\dfrac{4}{1+u_n}>-4$ بإضافة 4 نجد $3>4-\dfrac{4}{1+u_n}>0$ إذن $0<u_{n+1}<3$ محققة

ومنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0<u_n<3$

2. لتكن (v_n) متتالية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n=\dfrac{u_n-3}{u_n}$

أ- إثبات أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\dfrac{1}{4}$: $v_{n+1}=\dfrac{u_{n+1}-3}{u_{n+1}}=\dfrac{\left(\dfrac{4u_n}{1+u_n}\right)-3}{\left(\dfrac{4u_n}{1+u_n}\right)}$ أي أن

$v_{n+1}=\dfrac{4u_n-3-3u_n}{4u_n}=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{u_n-3}{u_n}\right)$ إذن $v_{n+1}=\dfrac{1}{4}v_n$ و منه (v_n) متتالية هندسية أساسها $\dfrac{1}{4}$ و

حدها الأول $v_0=\dfrac{u_0-3}{u_0}$ أي $v_0=-2$

ب كتابة v_n ثم u_n بدلالة n : $v_n=v_0.q^n$ أي $v_n=-2.\left(\dfrac{1}{4}\right)^n$ و لدينا $v_n=\dfrac{u_n-3}{u_n}$ يعني

$v_n=1-\dfrac{3}{u_n}$ و منه $v_n-1=-\dfrac{3}{u_n}$ أي أن $\dfrac{u_n}{3}=-\dfrac{1}{v_n-1}$ إذن $u_n=-\dfrac{3}{v_n-1}$ بالتعويض نجد

$u_n=-\dfrac{3}{\left(\dfrac{-2}{4^n}\right)-1}$ أي أن $u_n=\dfrac{3\times 4^n}{2+4^n}$.

حساب نهاية المتتالية (u_n) : $\lim u_n=\lim\left(\dfrac{3\times 4^n}{4^n}\right)=3$.

3. (w_n) المتتالية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n : $w_n = \frac{3}{u_n}$ نضع

. $S_n = w_0 + w_1 + w_2 + ... + w_n$

أ. التحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $w_n = 1 - v_n$ لدينا $w_n = \frac{3}{u_n}$ و لدينا $v_n = \frac{u_n - 3}{u_n}$ يعني

$v_n = 1 - \frac{3}{u_n}$ بالجمع نجد $w_n + v_n = 1$ و منه $w_n = 1 - v_n$ و هو المطلوب .

ب. إثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n = n + 1 + \frac{8}{3}\left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right)$

S_n هو مجموعة متتالية هندسية و متتالية ثابتة إذن $S_n = (n+1) - v_0 . \left[\frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{4}}\right]$ أي أن

$$S_n = (n+1) + \frac{8}{3} . \left[1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right]$$

ح. حساب نهاية . $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{S_n}{n}$: $\lim \frac{S_n}{n} = \lim \left[\frac{(n+1)}{n} + \frac{8}{3n} . \left[1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right]\right] = 1$

التمرين الثاني : (04 نقاط)

يحتوي كيس على ست كرات بيضاء تحمل الارقام 0 ، 0 ، 0 ، 1 ، 1، 2 و كرتين سوداوين تحملان الرقمين 0 ، 1 (الكرات لانفرق بينها باللمس) نسحب عشوائيا في آن واحد كرتين من الكيس

1. أحسب احتمال الحوادث A ، B ، C حيث :

"A الكرتين المسحوبتين من نفس اللون " B " الكرتين تحملان رقمين جداؤهما معدوم "

C " كرتين بلونين مختلفين و رقمين جداؤهما معدوم "

$P(A) = \frac{C_6^2 + C_2^2}{C_8^2} = \frac{16}{28} = \frac{4}{7}$ و $P(B) = \frac{C_4^1 \times C_4^1 + C_4^2}{C_8^2} = \frac{22}{28} = \frac{11}{14}$ و

$$P(C) = \frac{C_6^1 \times C_1^1 + C_3^1 \times C_2^1}{C_8^2} = \frac{12}{28} = \frac{3}{7}$$

3. نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل سحب مجموع الرقمين المسحوبين

أ. قانون الاحتمال للمتغير العشوائي :

x_i	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{C_4^2}{C_8^2} = \frac{6}{28}$	$\frac{C_3^1 \times C_4^1}{C_8^2} = \frac{12}{28}$	$\frac{C_1^1 \times C_4^1 + C_3^2}{C_8^2} = \frac{7}{28}$	$\frac{C_1^1 \times C_3^1}{C_8^2} = \frac{3}{28}$

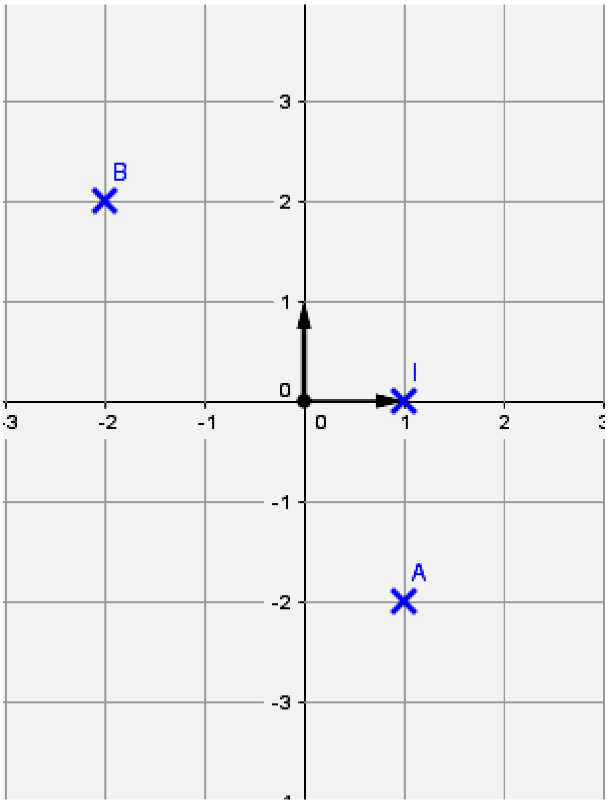
ب. حساب الأمل ألرياضياتي للمتغير العشوائي X :

$E(X)=\dfrac{0\times6+1\times12+2\times7+3\times3}{28}=\dfrac{35}{28}=\dfrac{5}{4}$ إذن $E(X)=1,25$

التمرين الثالث : (05 نقاط)

1. تعيين العددين المركبين α و β حيث : $\begin{cases}\alpha+\beta=-1\\ 2\overline{\alpha}+\beta=6i\end{cases}$ يكافئ أن $2\overline{\alpha}-\alpha=1+6i$ بوضع $\alpha=x+iy$ نجد $x-3iy=1+6i$ و منه $\begin{cases}x=1\\ -3y=6\end{cases}$ إذن $\begin{cases}x=1\\ y=-2\end{cases}$ و منه $\alpha=1-2i$ بالتعويض في معادلة من معادلتي الجملة نجد $1-2i+\beta=-1$ إذن $\beta=-2+2i$

2. المستوى منسوب الى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ نعتبر النقط I و A و B لواحقها على الترتيب $z_I=1$ و $z_A=1-2i$ و $z_B=-2+2i$



أ-أنشاء النقط I و A و B

ب-تعيين z_w لاحقة النقطة w مركز الدائرة (C) ذات القطر $[AB]$: المركز هو منتصف القطعة $[AB]$ أي أن

$z_w=\dfrac{z_A+z_B}{2}=-\dfrac{1}{2}$

3. D نقطة لاحقتها $z_D=\dfrac{3+9i}{4+2i}$

كتابة z_D على شكل الجبري :

$z_D=\dfrac{3+9i}{4+2i}=\dfrac{(3+9i)(4-2i)}{16+4}=\dfrac{30+30i}{20}=\dfrac{3}{2}+\dfrac{3}{2}i$

إثبات أن النقطة D تنتمي إلى الدائرة (C): $|z_D-z_w|=\left|\dfrac{4}{2}+\dfrac{3}{2}i\right|=\dfrac{5}{2}$ و $|z_A-z_w|=\left|\dfrac{3}{2}-2i\right|=\dfrac{5}{2}$ و منه محققة

4. E نقطة من الدائرة (C) لاحقتها z_E حيث $z_E=e^{i\frac{\pi}{4}}z_I+\left(1-e^{i\frac{\pi}{4}}\right).z_w$

أ –كتابة العدد $z_E+\frac{1}{2}$ على الشكل الآسي : $z_E+\frac{1}{2}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right).+\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}$

يعني أن $z_E+\frac{1}{2}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right).+\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)$ و منه $z_E+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ إذن

$z_E+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ و هو المطلوب .

ب استنتج أن $z_E=\frac{3\sqrt{2}-2}{4}+\frac{3\sqrt{2}}{4}i$: لدينا $z_E+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ و منه $z_E+\frac{1}{2}=\left(\frac{3\sqrt{2}}{4}+i\frac{3\sqrt{2}}{4}\right)$ و

منه $z_E=\left(\frac{3\sqrt{2}-2}{4}+i\frac{3\sqrt{2}}{4}\right)$

التمرين الرابع : (07 نقاط) :

I - نعتبر الدالة h المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ : $h(x)=x^2-1+\ln x$.

1. حساب النهايات الدالة h عند 0 وعند $+\infty$:

النهايات $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty$ و $\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}}h(x)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}}\left[x^2-1+\ln(x)\right]=-\infty$

دراسة اتجاه تغير الدالة h على $]0;+\infty[$: $h'(x)=2x+\frac{1}{x}$ موجبة إذن الدالة h متزايدة على $]0;+\infty[$

جدول تغيرات:

x	0 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$h(x)$	$-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$

2. حساب $h(1)$: $h(1)=1^2-1+\ln(1)=0$

استنتاج إشارة $h(x)$ حسب قيم x على المجال $]0;+\infty[$: بما أن الدالة hمتزايدة على $]0;+\infty[$ و تنعدم عند 1 فإن $h(x)$ موجبة على المجال $[1;+\infty[$ و سالبة على المجال $]0;1]$.

II - نعتبر الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ : $f(x)=x-1-\frac{\ln x}{x}$

و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. حساب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}=0$ بالتزايد المقارن

حساب $\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}}f(x)$: حساب $\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$: $\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}}f(x)=+\infty$ لأن $\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}}\frac{\ln(x)}{x}=-\infty$

تفسير النتيجة بيانيا المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب له معادلة من الشكل $x=0$.

2. بين انه من اجل كل x من $]0;+\infty[$: $f'(x)=\frac{h(x)}{x^2}$:

$f'(x)=1-\frac{\left(\frac{1}{x}\right).x-\ln(x)}{x^2}$ و منه $f'(x)=\frac{x^2-1+\ln(x)}{x^2}$ إذن $f'(x)=\frac{h(x)}{x^2}$ محققة

استنتاج اتجاه تغير الدالة f : f متزايدة على المجال $[1;+\infty[$ و متناقصة على المجال $]0;1]$

جدول تغيرات الدالة f :

x	0	1	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	0	↗ $+\infty$

3. أ) إثبات أن (Δ) المستقيم الذي معادلته

من الشكل $y=x-1$ مقارب للمنحنى

(C_f) : $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-y]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[-\frac{\ln(x)}{x}\right]=0$ و منه محققة.

ب) دراسة وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) ندرس إشارة الفرق $[f(x)-y]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[-\frac{\ln(x)}{x}\right]$

و هو موجب على المجال على المجال $]0;1[$ إي أن (C_f) يقع فوق المستقيم (Δ) على هذا المجال .

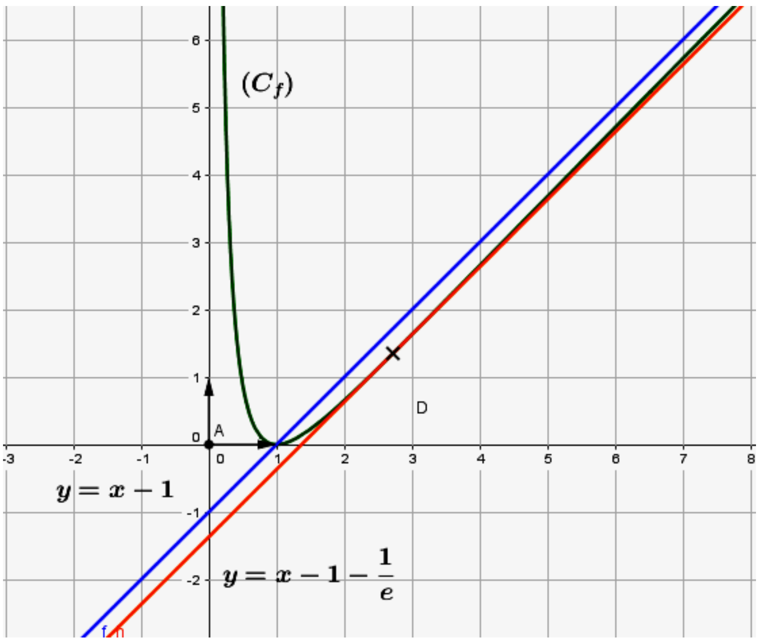
و سالب على المجال على المجال $]1;+\infty[$ إي أن (C_f) يقع تحت المستقيم (Δ) على هذا المجال.

1. إثبات أن المستقيم (d) ذو المعادلة $y=x-1-e^{-1}$ يمس المنحني (C_f) في نقطة A يطلب تعيين

احداثيها : معامل توجيهه هو $f'(x)=1$ يعني أن تكافئ $\frac{g(x)}{x^2}=1$ يعني أن $g(x)=x^2$ يكافئ أن

$\ln(x)=1$ يكافئ أن $x=e$ و منه ف $A(e;\ f(e))$ أي أن $A\left(e\ ;\ e-1-\frac{1}{e}\right)$

4. ارسم (Δ) و (d) و (C_f) .



5. ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة $-1-\frac{\ln(x)}{x}=m$.

يعني أن $x-1-\frac{\ln(x)}{x}=x+m$ أي أن $f(x)=x+m$ حلها هو إيجاد فواصل نقاط تقاطع (C_f) مع المستقيم $(\Delta_m): y=x+m$

لما $m\in\left]-\infty;-1-\frac{1}{e}\right[$ نلاحظ أن (C_f) و (Δ_m) لا يتقاطعان و منه ليس للمعادلة حلول

لما $m=-1-\frac{1}{e}$ نلاحظ أن $\left(C_f\right)$ و $\left(\Delta_m\right)$ يتقاطعان في نقطة واحدة و منه للمعادلة حل وحيد

لما $m\in\left]-1-\frac{1}{\mathrm{e}};-1\right[$ نلاحظ أن $\left(C_f\right)$ و $\left(\Delta_m\right)$ يتقاطعان في نقطتان و منه للمعادلة حلين

لما $m\in\left[-1;+\infty\right[$ نلاحظ أن $\left(C_f\right)$ و $\left(\Delta_m\right)$ يتقاطعان في نقطة وحيدة و منه للمعادلة حل وحيد

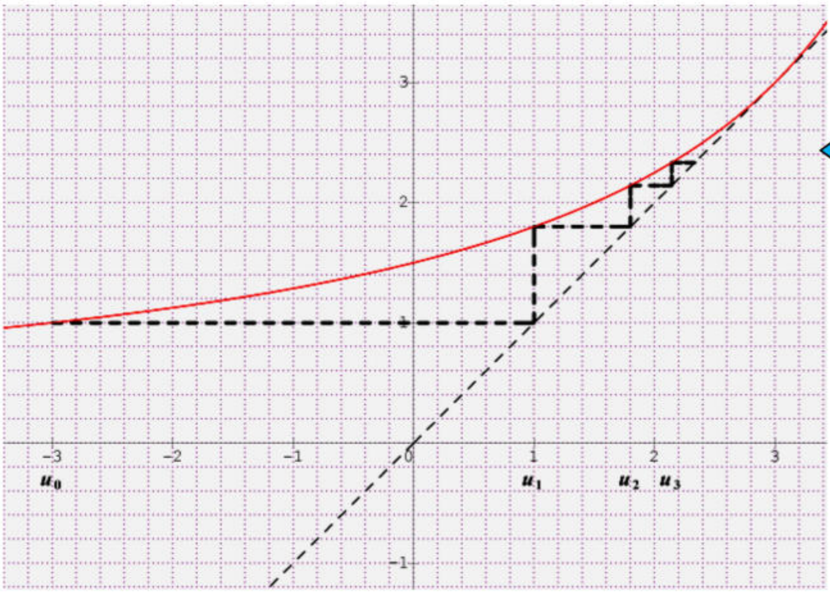
انتهى الموضوع الأول

التمرين الأول : (04 نقاط)

نعتبر الدالة f المعرفة على $]-\infty\,;\,6[$ بـ: $f(x)=\dfrac{9}{6-x}$.

ولتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $\begin{cases} u_0=-3 \\ u_{n+1}=f(u_n) \end{cases}$

في الرسم المقابل ، (c_f) المنحنى الممثل للدالة f في المعلم المتعامد والمتجانس $(o;\vec{i},\vec{j})$ و (Δ) المستقيم ذي المعادلة $y=x$



1. أ- باستعمال الرسم السابق نمثل على حامل محور الفواصل في الشكل المقابل

ب - التخمين حول اتجاه تغير (u_n) وتقاربها :

(u_n) متتالية متزيدة و محدودة من الأعلى بالعدد 3 فاصلة نقطة تقاطع المستقيم (Δ) و (C_f) فهي متقاربة

2. أ- البرهان بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n<3$:

$u_0<3$ محققة

نفرض أن $u_n<3$ صحيحة و نبرهن صحة $u_{n+1}<3$

$u_n<3$ بالضرب في (-1) نجد $-u_n>-3$ بإضافة 6 نجد $6-u_n>3$ بالقلب نجد $\dfrac{1}{6-u_n}<\dfrac{1}{3}$ بالضرب في 9 نجد $\dfrac{9}{6-u_n}<3$ أي أن $u_{n+1}<3$ صحيحة

ومنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n<3$.

ب- استنتاج اتجاه تغير (u_n) : $u_{n+1}-u_n=\dfrac{9}{6-u_n}-u_n$ أي أن $u_{n+1}-u_n=\dfrac{9-6u_n+u_n^2}{6-u_n}$ يعني أن $u_{n+1}-u_n=\dfrac{(3-u_n)^2}{6-u_n}$ بما أن $u_n<3$ فإن الفرق موجب إذن المتتالية (u_n) متزايدة .

(u_n) متتالية متزايدة و محدودة من الأعلى هي متقاربة .

3. نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كمايلي: $v_n=\dfrac{1}{u_n-3}$

أ – البرهان أن المتتالية (v_n) حسابية : $v_{n+1}=\frac{1}{u_{n+1}-3}=\frac{1}{\frac{9}{6-u_n}-3}$ أي أن $v_{n+1}=\frac{6-u_n}{9-18+3u_n}$ و منه

$v_{n+1}=\frac{6-u_n}{3u_n-9}$ بحساب الفرق نجد $v_{n+1}-v_n=\frac{6-u_n}{3u_n-9}-\frac{1}{u_n-3}$ أي

$v_{n+1}-v_n=\frac{6-u_n-3}{3u_n-9}=-\frac{(3-u_n)}{3(3-u_n)}$ إذن $v_{n+1}-v_n=-\frac{1}{3}$ و منه المتتالية (v_n) حسابية أساسها

$-\frac{1}{3}$ و حدها الأول $v_0=\frac{1}{u_0-3}=-\frac{1}{6}$

ب – كتابة عبارة v_n بدلالة n : $v_n=v_0+n.r$ أي $v_n=-\frac{1}{6}-\frac{1}{3}n$

استنتاج عبارة u_n : $v_n=\frac{1}{u_n-3}$ يعني أن $u_n-3=\frac{1}{v_n}$ و منه $u_n=3+\frac{1}{v_n}$ أي أن $u_n=3+\frac{1}{-\frac{1}{6}-\frac{1}{3}n}$

و منه , $u_n=3+\frac{6}{-1-2n}$ إذن $u_n=\frac{3-6n}{-1-2n}$

حساب $\lim\limits_{x\to+\infty}u_n$: $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{-6n}{-2n}\right)=3$

هـ – حساب بدلالة n المجموعين:

المجموع الأول : $s_n=v_0+v_1+...+v_n$ أي $S_n=\frac{(n+1)(v_0+v_n)}{2}$ أي $S_n=\frac{(n+1)\left(-\frac{1}{6}-\frac{1}{6}-\frac{1}{3}n\right)}{2}$ و منه

$S_n=\frac{(n+1)(-1-n)}{6}$ إذن $S_n=-\frac{(n+1)^2}{6}$

و المجموع الثاني : $s'_n=v_0\times u_0+v_1\times u_1+...+v_n\times u_n.$ لدينا $u_n=3+\frac{1}{v_n}$ و منه $u_n\times v_n=3v_n+1$ و

منه S'_n هو مجموع حدود متتابعة لمتتاليتين متتالية حسابية و متتالية ثابتة إذن $S'_n=3S_n+(n+1)$ أي أن

$S'_n=-3\frac{(n+1)^2}{6}+(n+1)$ إذن $S'_n=\left[-\frac{(n+1)}{2}+1\right](n+1)$ أي $S'_n=-\frac{1}{2}(1-n).(n+1)$

التمرين الثاني : (05 نقاط)

أذكر إن كانت الجمل التالية صحيحة أم خاطئة مبرّرا الإجابة .

1) من أجل كل عدد طبيعي n ، 3 يقسم العدد $2^{2n}-1$ لدينا $2^2\equiv1[3]$ بالرفع الى قوى n نجد $2^{2n}\equiv1[3]$ و منه

$2^{2n}-1\equiv0[3]$ و منه صحيحة.

2) إذا كان x عددا صحيحا حلا للمعادلة $x^2-x\equiv0[6]$ فإن $x\equiv0[6]$:

$x\equiv$	0	1	2	3	4	5	$[6]$
$x^2-x\equiv$	0	0	2	0	0	2	$[6]$

و منه خاطئة

3) إذا كان $x^2 \equiv y^2 [17]$ فإن $x \equiv y [17]$.

$x^2 \equiv y^2 [17]$ يعني إن $x^2 - y^2 \equiv 0 [17]$ يكافئ أن $x^2 - y^2$ مضاعف للعدد 17 و 17 عدد أولي و $(x-y)(x+y) = x^2 - y^2$ إذن 17 قاسم$(x+y)$ أو 17 قاسم للعدد $(x-y)$ أي أن $x \equiv y [17]$ أو $x \equiv -y [17]$ و منه خاطئة .

4) مجموعة حلول المعادلة $12x - 5y = 3$ المعرفة في Z^2 ، هي مجموعة الثنائيات (x, y) من الشكل $(4+10k ; 9+24k)$ مع $k \in Z$: $12(4+10k) - 5(9+24) = 12\times4 + 120k - 5\times9 - 120k$ و منه $12(4+10k) - 5(9+24) = 3$ إذن محققة و منه صحيحة

5) M و N عددان طبيعيان كتابتهما في النظام العشري هي : $\overline{abc}$ و $\overline{bca}$ على الترتيب .

إذا كان M يقبل القسمة على 27 فإن $M - N$ يقبل القسمة على 27.

إذا كان M يقبل القسمة على 27 يعني $M \equiv 0 [27]$ أي أن $100a + 10b + c \equiv 0 [27]$ أي أن $M - N \equiv -N [27]$ أي أن $M - N \equiv -100b - 10c - a [27]$ أي

$M - N \equiv -a - 100b - 10c [27]$ و $-999 \equiv 0 [27]$ أي أن و منه $M - N \equiv -1000a - 100b - 10c [27]$

أي $M - N \equiv -10(100a + 10b + c) [27]$ أي أن $M - N \equiv -10M [27]$ و $M \equiv 0 [27]$ إذن

$M - N \equiv 0 [27]$ صحيحة

التمرين الثالث : (04 نقاط)

صندوق يحتوي على n كرية بيضاء حيث $n \geq 2$ و أربع كرات حمراء و ثلاث كرات خضراء . نسحب في آن واحد كرتين من الصندوق .

1. احتمال سحب كرتين بيضاوين : $P(A) = \frac{C_n^2}{C_{n+7}^2} = \frac{\frac{n!}{2(n-2)!}}{\frac{(n+7)!}{2(n+5)!}} = \frac{n(n-1)}{(n+7)(n+6)}$.

2. نسمي $P(n)$ احتمال سحب كرتين من نفس اللون .

أ –بين أن $P(n) = \frac{n^2 - n + 18}{(n+7)(n+6)}$: $P(n) = \frac{C_n^2 + C_4^2 + C_3^2}{C_{n+7}^2} = \frac{\frac{n(n-1)}{2} + 6 + 3}{\frac{(n+7)(n+6)}{2}}$ أي ان

$$P(n) = \frac{n^2 - n + 18}{(n+7)(n+6)}$$

ب حساب $\lim_{n \to +\infty} P(n)$: $\lim_{n \to +\infty} P(n) = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{n^2}{n^2}\right) = 1$

تفسير النتيجة المحصل عليها : كلما كان عدد الكرات البيضاء أكبر فإن احتمال سحب كرتين من نفس اللون يقترب احتمالها من 1 .

3. فيما يلي نأخذ $n=5$ و نعتبر اللعبة التالية : يدفع اللاعب $30DA$ ويسحب في آن واحد كرتان من الصندوق . عند سحب كرة بيضاء يتحصل على $40DA$ وعند سحب كرة حمراء يتحصل على $10DA$ و عند سحب كرة خضراء يخسر ما دفعه . X المتغير العشوائي الذي يمثل الربح الجبري للاعب .

أ. قيم المتغير العشوائي X هي -60 ، -20 ، -10 ، 10 ، 20 ، 50

n كرية بيضاء حيث $n \geq 2$ و أربع كرات حمراء و ثلاث كرات خضراء

ب. تعيين قانون الاحتمال العشوائي للمتغير العشوائي X :

x_i	-60	-20	-10	10	20	50
$p(X=x_i)$	$\frac{3}{66}$	$\frac{12}{66}$	$\frac{6}{66}$	$\frac{15}{66}$	$\frac{20}{66}$	$\frac{10}{66}$

حساب أمله الرياضياتي: $\mathrm{E(X)}=\frac{-60\times3-20\times12-10\times6+10\times15+20\times20+50\times10}{66}=\frac{570}{66}=\frac{95}{11}$

التمرين الرابع : (07 نقاط)

I – نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=-x+1+e^{-x}$.

1. حساب نهايات الدالة g عند $-\infty$ وعند $+\infty$: $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x}=+\infty$ بالتزايد المقارن

و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(-x)=-\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}=0$

2. دراسة اتجاه تغير الدالة g: $g'(x)=-1-e^{-x}$ سالبة تماماً

و منه الدالة g متناقصة على المجال $\mathbb{R}$.

جدول تغيرات :

x	$-\infty$		$+\infty$
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

3. إثبات أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيد α حيث $1.27<\alpha<1.28$: $g(1{,}27)=0{,}010$ و $g(1{,}28)=-0{,}0001$ بما أن الدالة g مستمرة و متناقصة تماماً على $\mathbb{R}$ حسب مبرهن القيم المتوسطة فإن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حل وحيد α حيث $1.27<\alpha<1.28$

استنتاج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
إشارة $g(x)$		$+$	0	$-$	

II – نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=(e^{x}-1)(2-\mathrm{x})$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. حساب نهاية الدالة f عند $-\infty$ وعند $+\infty$:

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} -x.e^x=-\infty$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}[-(2-x)]=-\infty$

2. أ- إثبات أن $\lim_{x\to-\infty}[f(x)-x]=-2$: $\lim_{x\to-\infty}[f(x)-x]=\lim_{x\to-\infty}[e^x.(2-x)-2]=-2$ لأن
$\lim_{x\to-\infty}[e^x.(2-x)]=0$ التزايد المقارن .

استنتاج أن المنحني (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل يطلب تعيين معادلته : بما أن $\lim_{x\to-\infty}[f(x)-x]=-2$
فإن $y=x-2$ معادلة نصف مستقيم المقارب المائل جهة $-\infty$.

ب- دراسة الوضع النسبي بالنسبة لـ (C_f) والمستقيم (Δ) معادلته $y=x-2$:

$[f(x)-x+2]=e^x(2-x)$ إشارة الفرق من إشارة $(2-x)$

و المستقيم (Δ) و (C_f) المنحنى يتقاطعان في النقطة ذات الفاصلة 2

x	$-\infty$	2	$+\infty$
إشارة $f(x)-y$	+	0	—
الوضعية :	(C_f) يقع فوق المستقيم (Δ)	(C_f) و (Δ) يتقاطعان	(C_f) يقع تحت المستقيم (Δ)

3. إثبات إن $f'(x)=e^x.g(x)$: $f(x)=(e^x-1)(2-x)$ يعني أن $f'(x)=e^x(2-x)-(e^x-1)$ أي
أن $f'(x)=e^x[(2-x)-(1-e^{-x})]$ و منه $f'(x)=e^x[-x+1+e^{-x}]$ إذن $f'(x)=e^xg(x)$

استنتاج اتجاه تغير الدالة f على $\mathbb{R}$: $f'(x)=e^xg(x)$ إشارتها من إشارة $g(x)$ و منه f متزايدة
على $]-\infty;\alpha]$ و متزايدة على المجال $[\alpha;+\infty[$

جدول تغيرات :

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$f(\alpha)$	↘ $-\infty$

4. إثبات أن $f(\alpha)=\frac{(2-\alpha)^2}{\alpha-1}$: $g(\alpha)=0$ يعني $-\alpha+1+e^{-\alpha}=0$ يعني أن $e^{-\alpha}=\alpha-1$ أي
$e^{\alpha}=\frac{1}{\alpha-1}$ و $f(\alpha)=(e^{\alpha}-1).(2-\alpha)$ بالتعويض نجد $f(\alpha)=\left(\frac{1}{\alpha-1}-1\right).(2-\alpha)$ و منه
$f(\alpha)=\frac{(2-\alpha).(2-\alpha)}{\alpha-1}$ إذن $f(\alpha)=\frac{(2-\alpha)^2}{\alpha-1}$.

استنتج حصرا لـ $f(\alpha)$: $1,27<\alpha<1,28$ و منه $0,27<\alpha-1<0,28$ بالقلب نجد

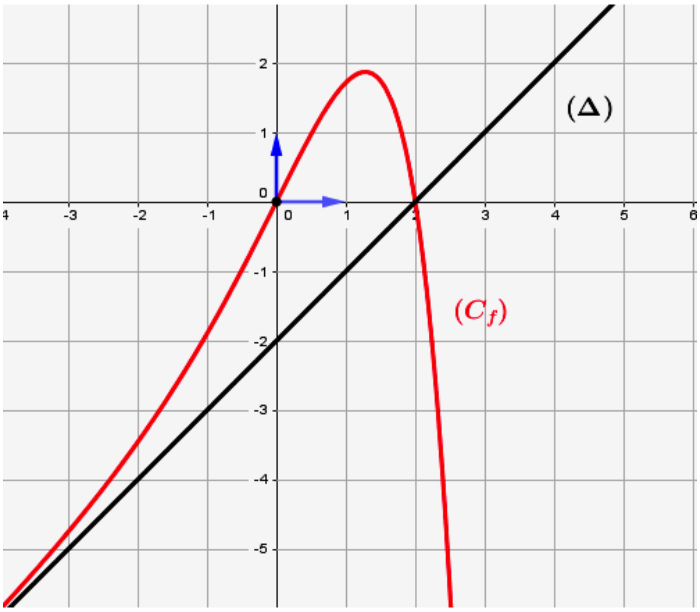
$\frac{1}{0,28}<\frac{1}{\alpha-1}<\frac{1}{0,27}$ ....(1)

و $1,27 < \alpha < 1,28$ بإضافة -2 يعني $-0,73 < \alpha - 2 < -0,72$ بالتربيع نجد

$0,72^2 < (\alpha - 2)^2 < 0,73^2$..............$(2)$

بضرب (1) و (2) نجد $\frac{0,73^2}{0,27} < \frac{(\alpha - 2)^2}{\alpha - 1} < \frac{0,72^2}{0,28}$ أي أن $1,85 < f(\alpha) \leq 1,97$

5. رسم (Δ) و (C_f) :



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية (دورة ماي 2022)

مديرية التربية لولاية البليدة الشعبة : تقني رياضي

امتحان البكالوريا التجريبي لثانويات مدينة مفتاح المـدة : 4ساعات و 30 د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين

الموضوع الاول :

التمرين الأول :4 ن

(u_n) متتالية معرفة على N بـ: $u_0=\frac{3}{2}$ ومن أجل كل n من N : $u_{n+1}=\frac{6u_n-2}{u_n+3}$

1) أ ـ بين أنه من أجل كل n من N : $u_{n+1}=6-\frac{20}{u_n+3}$

ب ـ برهن بالتراجع أنه من أجل كل n من N : $\frac{3}{2}\le u_n\le 2$

ج ـ بين أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما ثم استنتج أنها متقاربة.

2) أ ـ بين أنه من أجل كل n من N : $0\le 2-u_{n+1}\le\frac{8}{9}(2-u_n)$

ب ـ استنتج أنهمن أجل كل n من N : $0\le 2-u_n\le\frac{1}{2}\times\left(\frac{8}{9}\right)^n$ ثم استنتج $\lim_{n\to+\infty}u_n$.

التمرين الثاني :4 ن

1) نعتبر المعادلة (E) ذات المجهولين الصحيحين x و y حيث: $11x-5y=2$

أ*/ أثبت أنه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ من $\mathbb{Z}^2$ حلا للمعادلة (E) فإن $y\equiv 4[11]$.

ب*/ استنتج حلول المعادلة (E) .

2) ليكن n عددا طبيعيا غير معدوم ، نضـع : $a=5n+2$ و $b=11n+4$.

أ*/ عين القيم الممكنة للقاسم المشترك الأكبر للعددين a و b .

ب*/عين قيم العدد الطبيعي غير المعدوم n بحيث يكون: $PGCD(a;b)=2$.

ج*/ استنتج قيم العدد الطبيعي غير المعدوم n بحيث يكون العددان a و b أوليان فيما بينهما.

3) من أجل كل عدد طبيعي n ، نضع : $A=5n^2+7n+2$ و $B=11n^2+15n+4$.

أ*/ بين أن العدد $(n+1)$ يقسم كل من العددين A و B .

ب*/استنتج حسب قيم n القاسم المشترك الأكبر للعددين A و B .

التمرين الثالث : 4ن

اجب بصحيح ام خاطئ مع التبرير

1− المعادلة ذات المجهول x تقبل حلين في IR هما e و 1

$2(\ln x)^2-\ln x-1=0$

2− f دالة معرفة على $\{0\ ;1\}$−IR بـ $f(x)=(x-1)\ln(\left|\frac{x-1}{x}\right|)-\ln(|x|)$

من اجل $f(1-x)=f(x):\ x\in IR-\{0\ ;1\}$

3− نعتبر المتراجحة ذات المجهول الحقيقي x $(2\,e^{x}-2e)(e^{1-x}-1)>0$

مجموعة حلول المتراجحة هي : $[1;e]$

4- حل المعادلة التفاضلية : $3ج(1)\quad 2y+4y'=8y$ هو : $f(x)=e^{2x+2}$

التمرين الرابع:8 ن

_نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x-e+\ln\left(1+2e^{-2(x-e)}\right)$

و (C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد متجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

1) أ*/ تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x)=-x+e+\ln\left(2+e^{2(x-e)}\right)$

ب */ احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$.

ج*/ أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

2) أ*/ بين أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين (D) و (D') معادلتاهما:

$y=x-e$ و $y=-x+\ln 2+e$ عند $+\infty$ وعند $-\infty$ على الترتيب.

ب*/ ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيمين المقاربين (D) و (D') .

ج*/ بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $x=\frac{1}{2}\ln 2+e$ هو محور تناظر للمنحنى (C_f).

3) أرسم (Δ) ، (D) ، (D') و (C_f)

4) ليكن (D_m) المستقيم الذي معادلته : $y=mx-m\left(e+\frac{\ln 2}{2}\right)+\frac{\ln 2}{2}$ حيث m وسيط حقيقي.

أ*/ بين أن جميع المستقيمات (D_m) تشمل النقطة الثابتة $A\left(\frac{\ln 2}{2}+e\ ;\ \frac{\ln 2}{2}\right)$.

ب*/ ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد نقط تقاطع المستقيم (D_m) و المنحنى (C_f) .

5) نضع: $I=\int_{\ln\sqrt{2}+e}^{\ln\sqrt{3}+e}\left[f(x)-(x-e)\right]dx$ ، $I_n=\int_0^1\ln\left(1+X^n\right)dX$ ، n عدد طبيعي غير معدوم

أ*/ فسر هندسيا العدد I واحسب العدد I_1 .

ب*/ بين أن: $0\le I_n\le\ln 2$

ج*/ عين اتجاه تغير المتتالية (I_n) ثم استنتج أنها متقاربة.

الموضوع الثاني :

التمرين الأول:4ن (u_n) و (v_n) متتاليتان عدديتان معرفتان من أجل كل عدد طبيعي n : بــ $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = 2u_n - 1 \end{cases}$ و

$$\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = 2v_n + 3 \end{cases}$$

1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $u_n = 2^{n+1} + 1$ هل العددان u_n و u_{n+1} أوليان فيما بينهما ؟

2) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الاقليدية للعدد 2^n على 5

ثم أستنتج باقي القسمة الأقليدية للعدد 2017^{1438} على 5

3) برهن بالتراجع أنه من اجل كل عدد طبيعي n فإن $2u_n - v_n = 5$ ثم أستنتج عبارة v_n بدلالة.

4) عين القيم الممكنة للعدد الطبيعي $PGCD(u_n ; v_n)$

ثم أستنتج قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها $PGCD(u_n ; v_n) = 5$

التمرين الثاني : 4ن لتكن (u_n) متتالية معرفة بـ $u_0 = \frac{1}{4}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{3u_n + 2}{u_n + 4}$.

1) عين العددين الحقيقيين a ، b حتى يكون من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = a + \frac{b}{u_n + 4}$.ثم برهن بالتراجع بين أنه

من أجل كل عدد طبيعي n : $-2 < u_n < 1$.

2) أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ؛ ثم استنتج أن (u_n) متقاربة

3) لتكن المتتالية (v_n) المعرفة كما يلي: من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n = \frac{u_n + 2}{1 - u_n}$.

بين أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول . أكتب v_n و u_n بدلالة n ثم أحسب $\lim_{n \to +\infty} u_n$

4) ثم أحسب المجموع : $S_n = \frac{1}{v_0} + \frac{5}{v_1} + \frac{5^2}{v_2} + ... + \frac{5^n}{v_n}$

التمرين الثالث :4ن

لكل سؤال أجوبة مقترحة أحدها– فقط – صحيح، يطلب تحديده مع التبرير.

1 – في مجموعة الأعداد الصحيحة، المعادلة: $x^2 + x + 3 \equiv 0\ [5]$.

(أ) لا تقبل حلولا (ب) حلولها زوجية. (جـ)حلولها تحقق $x \equiv 2\ [6]$ (د) حلولها تحقق $x \equiv 1[5]$ أو $x \equiv 3[5]$.

2 –نعتبر في مجموعة الأعداد الصحيحة المعادلة التالية : $24x + 34y = 2$ ...(1) .

(أ) حلول المعادلة (1) من الشكل : $(x;y)=(17k-7\ ;\ 5-12k)$.

(ب) حلول المعادلة (1) من الشكل : $(x;y)=(-7k\ ;\ 5k)$.

(جـ)حلول المعادلة (1) من الشكل : $(x;y)=(34k-7\ ;\ 5-24k)$.

(د) المعادلة (1) لا تقبل حلولا .

3− N عدد طبيعي يكتب : $\overline{421}$ في النظام ذي الأساس 5 .

العدد N يكتب في النظام ذي الأساس 6 بالشكل : أ) $\overline{421}$ ب) $\overline{111}$ ج) $\overline{303}$ د) $\overline{222}$.

4 − نعتبر متتالية لتكاملا التالية $I_n = \int_0^1 \frac{e^{nx}}{1+e^x}dx$ حيث $n \in \mathbb{N}$

ا) $I_0 = \left[\ln(1+e^x)\right]_0^1$ ب) $I_1 = \left(\frac{1+e}{2}\right)$ ج) من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$: $I_{n+1} + I_n = \frac{1}{n}(e^n - 1)$

التمرين الرابع :8ن

I) لتكن الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ بالشكل : $g(x) = 1 + x + e^x$

1 / ادرس تغيرات الدالة g

2 / برهن أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل في $\mathbb{R}$ حلا وحيدا α. تحقق أن α من المجال $]-1.3;-1.2[$.

3 / حدد تبعا لقيم x إشارة $g(x)$ ، ثم استنتج إشارة $g(-x)$.

II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي : $f(x) = \frac{xe^x}{1+e^x}$ نسمي (Γ) المنحنى البياني لها .

1 / أ . أكتب $f'(x)$ بدلالة $g(x)$ ثم ادرس تغيرات الدالة f .

ب . برهن أن $f(\alpha) = 1 + \alpha$ . .

ج . برهن أن المنحنى (Γ) يقبل مستقيما مقاربا (Δ) معادلته : $y = x$.

د . اكتب معادلة للمماس (T) للمنحنى (Γ) عند النقطة O مبدأ المعلم ، ثم ادرس وضعية المنحنى (Γ) بالنسبة للمماس (T)

هـ . ارسم في معلم متعامد ومتجانس $(o, \vec{i}, \vec{j})$ المنحنى (Γ) و (Δ) (تؤخذ $2cm$ كوحدة).

2 / H نقطة فاصلتها x (حيث $x \succ 0$) وترتيبها معدوم ،المستقيم الموازي للمحور (yy') والمار من H يقطع (Γ) في النقطة M ويقطع المقارب (Δ) في النقطة N ، نضع $\varphi(x) = MN$.

أ . بين أن $\varphi(x) = \frac{x}{1+e^x}$.

ب . برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا : $\varphi'(x) = \frac{e^x}{\left(1+e^x\right)^2} \cdot g(-x)$.

واستنتج أن MN يكون أكبر ما يمكن عندما $x = -\alpha$.

جـ . برهن أن $f(-\alpha) = 1$.

د. برهن أن المماس للمنحنى (Γ) عند النقطة A ذات الفاصلة $(-\alpha)$ يوازي المستقيم (Δ) .اكتب معادلته ثم ارسمه في نفس المعلم السابق.

3 / ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة التالية: $me^x + m + x = 0$.

4 / أ . برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي x حيث $x \geq 1$ لدينا : $\frac{e^x}{1+e^x} \leq f(x) \leq x$.

ب . استنتج باستعمال المتباينة السابقة حصرا لمساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (Γ) والمستقيمات التي معادلاتها : $y = 0$ ، $x = 1$ و $x = -\alpha$.

لو كنت تملك الرغبة في النجاح فقد قطعت نصف الطريق نحو النجاح ولو كنت لا تملك الرغبة فقد قطعت نصف الطريق نحو الفشل

بالتوفيق في بكالوريا 2022

مديرية التربية لولاية المغير
امتحان البكالوريا التجريبي
(دورة: مـــــاي 2022)

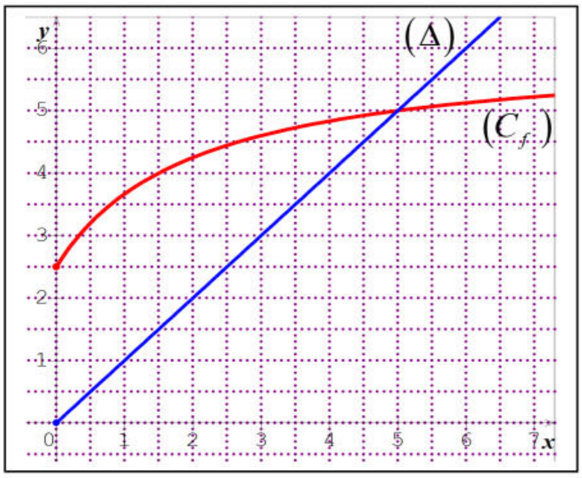
ثانوية الشيـــخ محمد
المقرانــــي - جامـــعة
الشعبة: تقني رياضي

اختبار في مادة الرياضيات | المـدة : 4 ساعات و نصف

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول (20 نقطة)

التمرين الأول : (05 نقاط)



المنحني (C_f) في الشكل المقابل هو التمثيل البياني للدالة f المعرفة على $[0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\dfrac{6x+5}{x+2}$ و (Δ) هو المستقيم ذو المعادلة $y=x$.

1. بين أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0,+\infty[$.

2. نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بحدها الأول $u_0=1$ و من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}=f(u_n)$.

أ) على الوثيقة المرفقة مثل على حامل محور الفواصل و دون حسابها الحدود u_0, u_1, u_2, u_3.

ب) ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها.

3. برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n أن: $1\le u_n\le 5$.

4. ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ، و ماذا تستنتج حول تقاربها.

5. نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n=\dfrac{u_n-5}{u_n+1}$.

أ) بين أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.

ب) عبر عن v_n ثم u_n بدلالة n ثم احسب $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

6. احسب المجموع S_n حيث: $S_n=\dfrac{1}{u_0+1}+\dfrac{1}{u_1+1}+........\dfrac{1}{u_n+1}$.

التمرين الثاني : (04 نقاط)

نعتبر المعادلة (E) ذات المجهولين الصحيحين x و y التالية: (E).............. $11x-5y=2$.

1. أ) أثبت أنه إذا كانت الثنائية (x,y) من $\mathbb{Z}^2$ حلا للمعادلة (E) فإن: $y\equiv 4[11]$.

ب) استنتج حلول المعادلة (E).

2. ليكن n عددا طبيعيا غير معدوم. نضع: $a=5n+2$ و $b=11n+4$.

أ) عين القيم الممكنة للقاسم المشترك الأكبر للعددين a و b.

ب) عين قيم n بحيث يكون $PGCD(a,b)=2$.

ج) استنتج قيم n بحيث يكون العددان a و b أوليان فيما بينهما.

3. أ) ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 7^n على 10.

ب) استنتج رقم آحاد كلا من العددين التاليين: 7^{2022} و 7^{1443}.

ج) عين كل الثنائيات (x,y) من $\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$ حلول المعادلة (E) و التي تحقق: $7^{y-2x}\equiv 9[10]$.

<u>التمرين الثالث : (04 نقاط)</u>

1. تحقق أن: $5^6\equiv 1[7]$ و استنتج أن: $5^{1443}\equiv -1[7]$.

2. من أجل كل عدد طبيعي n نضع: $S_n=1+5+5^2+5^3.............+5^n$.

أ) بين أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$ أن: $4S_n=5^{n+1}-1$ و استنتج أن S_n و 5^n أوليان فيما بينهما.

ب) ليكن العدد الصحيح a. بين أن $4S_n\equiv a[7]$ إذا وفقط إذا كان $S_n\equiv 2a[7]$.

ج) بين أن $4S_{1442}\equiv 5[7]$ و استنتج باقي قسمة S_{1442} على 7.

د) عين أصغر عدد طبيعي غير معدوم n بحيث يكون 7 قاسما لـ S_n.

3. ليكن n عدد طبيعي غير معدوم . نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $(E)...............5^nx+S_ny=1$.

أ) تحقق أن الثنائية $(5,-4)$ حل للمعادلة (E) ثم حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E).

ب) استنتج حلول الجملة $\begin{cases}5^nx-s_ny=7\\ PGCD(x,y)=7\end{cases}$

<u>التمرين الرابع : (07 نقاط)</u>

الجزء I : نعتبر الدالة العددية g_α المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $g_\alpha(x)=x^2-1+\alpha\ln x$ وليكن (c_α) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ حيث $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=2cm$ و α عدد حقيقي.

1. ناقش حسب قيم α وجود و عدد النقط الحدية للمنحني (c_α).

2. فيما يلي نفرض $\alpha=1$ و نضع $g_1=g$. أ) احسب $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

ب) ادرس اتجاه تغير الدالة g على المجال $]0;+\infty[$ ثم شكل جدول تغيراتها.

ج) احسب $g(1)$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ على $]0;+\infty[$.

الجزء II : نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ : $f(x)=-x+1+\dfrac{\ln x}{x}$.

وليكن (c_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. احسب $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)$ و فسر النتيجة هندسيا ثم احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2. أ) بين أن المنحني (c_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) يطلب تعيين معادلة له.

ب) ادرس وضعية (c_f) بالنسبة إلى (Δ) على المجال $]0;+\infty[$.

3. أ) بين أنه من أجل كل x من $]0;+\infty[$ أن: $f'(x)=-\dfrac{g(x)}{x^2}$.

ب) ادرس اتجاه تغير الدالة f على المجال $]0;+\infty[$ ثم شكل جدول تغيراتها.

ج) ارسم المستقيم (Δ) و المنحني (c_f).

4. أ) بين أن الدالة F المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ : $F(x)=\frac{(\ln x)^2}{2}$ أصلية للدالة $x\mapsto \frac{\ln x}{x}$.

ب) احسب بـ cm^2مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (c_f)و المستقيمات التي معادلاتها $y=0$ ، $x=\frac{1}{2}$ و $x=1$.

الجزء III :نعتبر الدالة العددية hالمعرفة على $\mathbb{R}-\{0\}$ بـ: $h(x)=|x|-1-\frac{\ln|x|}{|x|}$ وليكن (c_h)تمثيلها البياني في المعلم السابق.

1. بين أن الدالة h زوجية.
2. اشرح كيف يتم رسم (c_h) انطلاقا من (c_f) ثم ارسمه في نفس المعلم السابق (استعمل الألوان).
3. ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m حيث $m\neq 0$ عدد و إ شارة حلول المعادلة $e^{h(x)}=|m|$.

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني (20 نقطة)

التمرين الأول : (04 نقاط)

(u_n) متتالية عددية معرفة بحدها الأول $u_0=6$ و بالعلاقة التراجعية $u_{n+1}=\sqrt{u_n+3}-3$.

1. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n أن: $-2\le u_n\le 6$.
2. أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n أن: $u_{n+1}-u_n=\frac{-(u_n+2)(u_n+3)}{\sqrt{u_n+3}+u_n+3}$.

ب) ادرس اتجاه تغيير المتتالية (u_n) ثم برر تقاربها.

3. أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n أن: $0\le u_{n+1}+2\le\frac{1}{2}(u_n+2)$.

ب) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n أن: $0\le u_n+2\le 8\left(\frac{1}{2}\right)^n$ ، ثم احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n$.

4. من أجل كل عدد طبيعي n نضع: $S_n=u_0+u_1+...+u_n$. بين أن $-2(n+1)\le S_n\le 16\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)-2(n+1)$.

التمرين الثاني : (05 نقاط)

1. نعتبر المعادلة (E) ذات المجهولين الصحيحين x و y حيث: (E)............ $63x+5y=159$.

أ) تحقق أن العددين 63 و 5 أوليان فيما بينهما ثم بين أن المعادلة (E) تقبل حلولا.

ب) عين الحل الخاص $(x_0;y_0)$ للمعادلة (E) الذي يحقق: $x_0+y_0=-3$ ثم استنتج حلول المعادلة (E).

ج) عين كل الثنائيات $(x;y)$ حلول المعادلة (E) التي تحقق: $|13x+y-33|<4$.

2. A عدد طبيعي يكتب $\overline{5\alpha 0\alpha}$ في نظام التعداد ذي الأساس 7 و يكتب $\overline{\beta 10\beta 0}$ في نظام التعداد ذي الأساس 5 .

أ) جد العددين الطبيعيين α و β ثم اكتب العدد $(A+7)$ في النظام العشري.

ب) ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 5.

ج) عين قيم العدد الطبيعي n التي تحقق: $\begin{cases}3^{4n}+3^n-A\equiv 0[5]\\ n\equiv 0[3]\end{cases}$ و $35<n<65$.

التمرين الثالث : (04 نقاط)

(u_n) متتالية هندسية متزايدة تماما حدودها موجبة تماما تحقق: $\begin{cases} u_1+2u_2+u_3=100 \\ u_1\times u_3=256 \end{cases}$.

1. أ) احسب u_2 ثم u_1 و u_3.

ب) احسب q أساس المتتالية (u_n) ثم عبر عن u_n بدلالة n.

2. احسب المجموع بدلالة n المجموع $S_n=u_0+u_1+u_3+.......+u_n$ ، ثم الجداء $P_n=u_0\times u_1\times u_3\times.......\times u_n$.

3. أ) ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 7^n على 5.

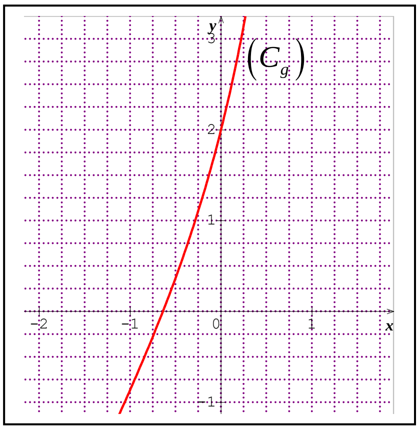
ب) بين أن العدد $2\times 47^{1443}+7^{2022}$ مضاعف للعدد 5.

ج) عين باقي القسمة الاقليدية للعدد $1954^{1443}+1979^{2022}+5n-2$ على 5.

4. من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n نضع $T_n=\dfrac{1}{\ln 2}\left[\ln 4+\ln 4^2+........+\ln 4^n\right]$.

احسب T_n بدلالة n ثم عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون $T_n+7^{2022}-n^2\equiv 0[5]$.

التمرين الرابع : (07 نقاط)



الجزء I : المنحنى البياني (c_g) في الشكل المقابل هو التمثيل البياني للدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=2x+1+e^{2x}$.

1. شكل جدول تغيرات الدالة g على $\mathbb{R}$.

2. أ) بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α على $[-0.7;-0.6]$.

ب) استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

الجزء II : نعتبر الدالة العددية f المعرفة $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=1-x+(x+1)e^{-2x}$

وليكن (c_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ حيث $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=2cm$.

1. احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثم بين أن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.

2. أ) بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=-x+1$ مقارب مائل للمنحنى (c_f) بجوار $+\infty$.

ب) ادرس وضعية (c_f) بالنسبة إلى (Δ) على $\mathbb{R}$.

3. أ) بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ أن: $f'(x)=-g(x)e^{-2x}$.

ب) ادرس اتجاه تغير الدالة f على $\mathbb{R}$ ثم شكل جدول تغيراتها.

ج) أثبت أن المنحنى (c_f) يقبل مماسا (T) يوازي (Δ) عند نقطة يطلب تعيين فاصلتها، حيث $(T):-x+1+\dfrac{1}{2}e$.

4. بين أن $f(\alpha)=\dfrac{-2\alpha^2}{2\alpha+1}$ ثم أوجد حصرا لـ $f(\alpha)$.

5. احسب $f(0)$ و $f(1)$ ، ثم ارسم (Δ) ، (T) و (c_f) . نأخذ $f(\alpha)\simeq 2.9$.

6. عين بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m بحيث المعادلة $f(x)=-x+m$ تقبل حلين سالبين تماما.

7. نضع من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $I_n=\int_0^1 x^n e^{-2x}dx$.

أ) بين أن الدالة F المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $F\left(x\right)=-\frac{1}{4}\left(2x+1\right)e^{-2x}$ أصلية للدالة $x\mapsto xe^{-2x}$.

ب) بين باستعمال المكاملة بالتجزئة أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n أن: $I_{n+1}=-\frac{e^{-2}}{2}+\frac{1}{2}(n+1)I_n$.

ج) λ عدد حقيقي حيث $\lambda>0$ ، ليكن العدد الحقيقي $A(\lambda)$ حيث $A(\lambda)=\int_0^{\lambda}\left[f(x)-(-x+1)\right]dx$.

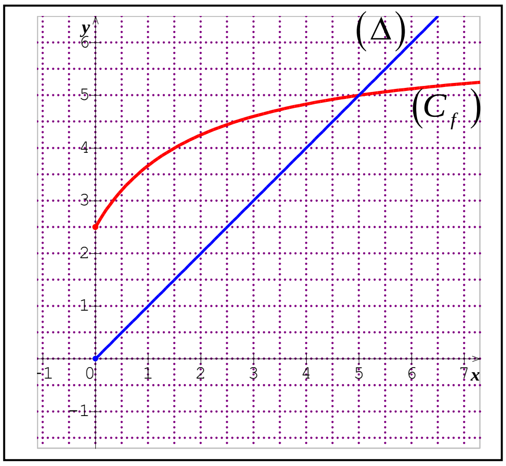
* بين أن $A\left(\lambda\right)=\frac{1}{4}\left[3-\frac{2\lambda+3}{e^{2\lambda}}\right]$. * ماذا يمثل العدد $A(\lambda)$. * احسب $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}A(\lambda)$.

انتهى الموضوع الثاني

مع تمنياتنا لطلبتنا الأعزاء بالتوفيق و النجاح و السداد في شهادة البكالوريا 2022

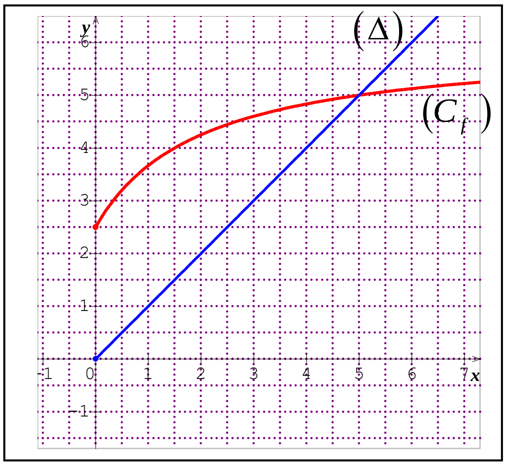
الوثيقة المرفقة

الاسم و اللقب:...................................القسم:.........



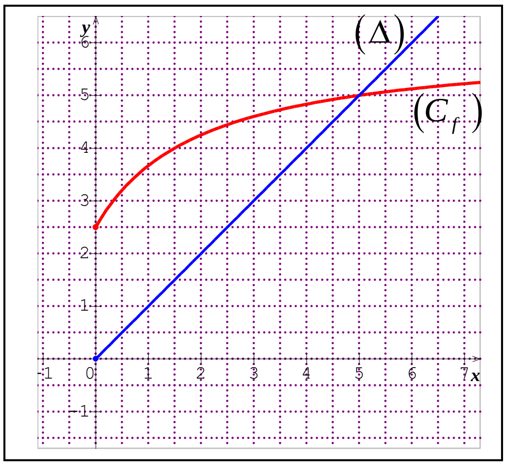
الوثيقة المرفقة

الاسم و اللقب..................................القسم:.........



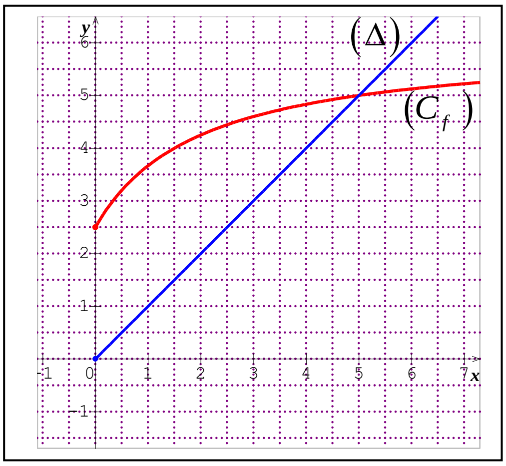
الوثيقة المرفقة

الاسم و اللقب:...................................القسم:.........



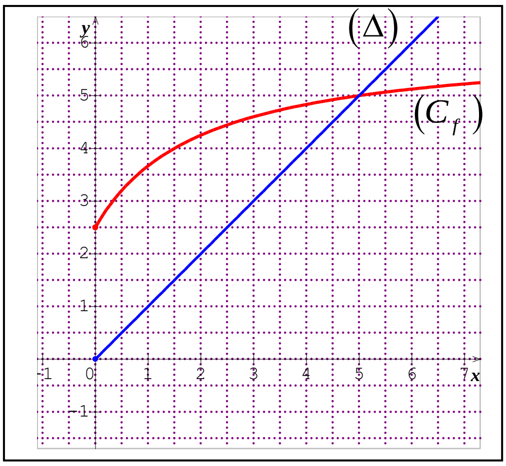
الوثيقة المرفقة

الاسم و اللقب..................................القسم:.........



الوثيقة المرفقة

الاسم و اللقب:...................................القسم:........



الوثيقة المرفقة

الاسم و اللقب..................................القسم:........