وزارة التربية الوطنية — مديرية التربية لولاية غرداية
امتحان البكالوريا التجريبي — المقاطعة التفتيشية الأولى
الشعبة: رياضيات — دورة: ماي 2019

اختبار في مادة: الرياضيات — المدة: 04 سا و 30 د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

I. المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_0 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = 2u_n + 1$ (u_n)

1) احسب u_1 ، u_2 و u_3

2) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n = 2^n - 1$

(v_n) و (w_n) متتاليتان عدديتان معرفتان على $\mathbb{N}$: $v_n = u_n + 3$ و $w_n = 2^n$

3) احسب بدلالة n ، S_n ، S'_n و S''_n

حيث: $S_n = w_0 + w_1 + \cdots + w_n$ ، $S'_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ و $S''_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$

II. نعتبر في هذا الجزء من أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$ فإن جميع حدود المتتاليتين (u_n) و (v_n) من $\mathbb{N}$

1) عين القيم الممكنة للقاسم المشترك الأكبر للعددين u_n و v_n

2) أ) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 3

ب) عين قيم العدد الطبيعي n التي تحقق $v_n \equiv 0[3]$

ج) استنتج مجموعة قيم الطبيعي n التي تجعل الحدين u_n و v_n أوليين فيما بينهما

3) بين أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$ فإن: $S''_n \equiv S'_n[3]$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

1) نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة (E) ذات المجهول z:

$$(E): \ldots\ z^3 - 2(\sqrt{3} + i)z^2 + 4(1 + \sqrt{3}i)z - 8i$$

أ) بين أن المعادلة (E) تقبل حلا تخيليا صرفا يطلب تعيينه ،

ب) حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة (E) ، تعطى الحلول على الشكل الأسي..

2) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ نعتبر النقط A ، B ، C و D

3) التي لاحقاتها على الترتيب $z_A = \sqrt{3} - i$ ، $z_B = \dfrac{4e^{i\frac{\pi}{4}} - 2\sqrt{2}}{\sqrt{2}\left(\sin\frac{\pi}{6} + i\cos\frac{\pi}{6}\right)}$ ، $z_C = 2i$ و $z_D = \dfrac{\sqrt{3}}{3} + i$

أ) بين العددين المركبين z_A و z_B مترافقان واستنتج أن (Γ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث:

$z - z_A = \dfrac{1}{\bar{z} - z_B}$ هي دائرة يطلب تعيين عناصرها المميزة (العدد المركب $\bar{z}$ هو مرافق العدد المركب z)

ب) برر وجود التشابه المباشر S الذي يحول النقطة A إلى النقطة B والنقطة O إلى النقطة D ، ثم جد العبارة المركبة له مستنتجا عناصره المميزة

ج) بين أن النقط A ، C و D في استقامية واستنتج العناصر المميزة للتحاكي h الذي مركزه C ويحول D إلى A وأن B هي صورة D بتشابه مباشر مركزه C محددا نسبته وزاوية له.

د) (δ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي تحقق $\left\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = \left\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\right\|$

عين صورة المجموعة (δ) بالتحويل S .

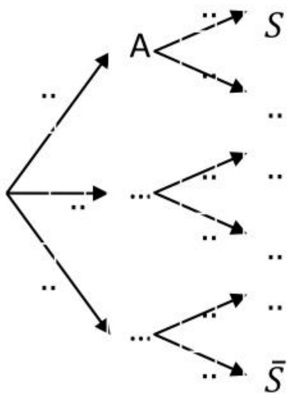
التمرين الثالث: (05 نقاط)

يقوم متجر ببيع جزء من مدخراته من قطع الغيار التي تشتمل ثلاثة أنواع من السلع x ، y و z تمثل السلعة x ربع المدخرات بينما y ثلثها وتمثل z الباقي ، كانت السلعة تحوي عيوب تشمل 40% من السلعة x ، 75% من السلعة y و 24% من السلعة z ، أخذ زبون قطعة عشوائيا.

لتكن الحوادث التالية:

الحادثة A : " أخذ الزبون القطعة من السلعة x "

الحادثة B : " أخذ الزبون القطعة من السلعة y "
الحادثة C : " أخذ الزبون القطعة من السلعة z "
الحادثة S : " القطعة التي أخذها الزبون تحوي عيوبا "



1) أ) أتمم شجرة الاحتمالات لهذه التجربة
ب) ماهو احتمال أن تكون السلعة تحوي عيبا ثم استنتج نسبة السلع السليمة
ج) القطعة التي أخذها الزبون تحوي عيوبا ، ما احتمال أن تكون القطعة من السلعة z
د) علما أن 180 هو إجمالي عدد القطع المعروضة للبيع ، أنقل ثم أكمل الجدول التالي:

نوع القطعة	x	y	z	المجموع
عدد القطع				
عدد القطع ذات عيوب				81

2) بسبب العيوب الواضحة اضطر صاحب المتجر عزل هذه القطع وعرضها للبيع بتخفيضات هامة ، سعر القطعة x هو $65\ DA$ ، سعر القطعة y هو $80\ DA$ وسعر القطعة z هو $75\ DA$
نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل من هذه الإمكانيات لبيع قطعتين معا مخفضتين سعرهما الإجمالي
أ) ما هي عدد الطرائق الممكنة لبيع قطعتين معا من السلعة المخفضة
ب) ما هي قيم X الممكنة (توجد ست قيم)
ج) أكتب قانون احتمال للمتغير العشوائي X
د) أحسب الأمل الرياضياتي ، التباين والانحراف المعياري

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I. نعتبر الدالة h المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ كما يلي: $h(x) = -xe^x + 2e^x - 1$
1) أدرس اتجاه تغير الدالة h ثم أنشئ جدول تغيراتها .
2) أثبت أن المعادلة $h(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $1.8 < \alpha < 1.9$
3) استنتج إشارة $h(x)$ على المجال $[0;+\infty[$.

II. نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ كما يلي: $f(x) = \frac{e^x-1}{e^x-x}$
1) أحسب نهاية الدالة f عند $+\infty$ وفسرها هندسيا .
2) أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم أنشئ جدول تغيراتها .
3) تعطى g دالة موجبة تماما على المجال: $]0;+\infty[$
أ) بين أن: $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha-1}$ ، ثم أعط حصرا لـ $f(\alpha)$
ب) استنتج أنه من أجل كل x من $[0;1]$ فإن: $f(x) \in [0;1]$
ج) بين أنه من أجل كل x من $[0;+\infty[$ فإن: $f(x) - x = \frac{(1-x).g(x)}{e^x-x}$ ، عين دستور الدالة g
د) استنتج وضعية (C) بالنسبة للمستقيم (Δ) ذو المعادلة: $y = x$ على المجال $[0;+\infty[$.
4) ليكن (C) التمثيل البياني للدالة f في معلم متعامد $(O;\vec{i};\vec{j})$ نأخذ: $\|\vec{i}\| = 5\ cm$ و $\|\vec{j}\| = 10\ cm$
أ) تحقق أن معادلة المماس (T) للمنحنى (C) عند النقطة ذات الفاصلة 1 هي: $y = \frac{1}{e-1}(x-1) + 1$
ب) أنشئ (Δ) ، (T) و (C) في نفس المعلم
ج) أحسب بالسنتمتر المربع مساحة الحيز المغلق للمستوي المحدد بالمنحنى (C) و المستقيم (Δ)
د) ناقش بيانيا وهذا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد الحلول ومجال انتمائها للمعادلة (E) التالية:
$$(E): f(x) = mx + 1 - m$$

III. نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_0 = \frac{1}{2}$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = f(u_n)$
1) بين أن المتتالية (u_n) محدودة من الأعلى وحدد اتجاه تغيرها
2) استنتج أن (u_n) متقاربة ، ثم أوجد نهايتها
(ملاحظة: في هذا الجزء يمكنك توظيف نتائج السؤالين 3) ب) و 3) د) من الجزء II .)

الموضوع الثاني:

التمرين الأول: (04 نقاط)

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، النقط $A(3;1;0)$، $B(1;2;0)$، $C(3;2;1)$ و $D(0;0;m)$ حيث m عدد حقيقي موجب.

1) أ) احسب الجداء السلمي $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$، ثم استنتج القيمتين المضبوطتين لكل من $cos\widehat{ABC}$ و $sin\widehat{ABC}$.
ب) احسب مساحة المثلث ABC.
2) بين أن الشعاع $\vec{n}(1;2;-2)$ ناظمي للمستوي (ABC)، ثم استنتج معادلة ديكارتية له.
3) بين أن $ABCD$ رباعي وجوه، وأن حجمه $V_{ABCD}=\frac{2m+5}{6}\ u.v$ ($u.v$ وحدة الحجوم)
4) لتكن (S_m) مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء التي تحقق: $x^2+y^2+z^2-2mz+m^2-9=0$.
أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي m موجب، لدينا: (S_m) سطح كرة، يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.
ب) عين قيمة m حتى يكون المستوي (ABC) مماس لسطح الكرة (S_m).
ج) اكتب معادلة للمستوي (P) الموازي تماما للمستوي (ABC) ويمس (S_2).

التمرين الثاني: (04 نقاط)

من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n نضع: $S_n=1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3$.

1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n لدينا: $S_n=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.
2) أ) تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي k غير معدوم فإن: $PGCD(k;k+1)=1$.
ب) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي k غير معدوم فإن: $PGCD(S_{2k};S_{2k+1})=(2k+1)^2$.
3) أ) عين من أجل كل عدد طبيعي k غير معدوم $PGCD(2k+1;2k+3)$.
ب) عين $PGCD(S_{2k+1};S_{2k+2})$.
4) أ) استنتج حسب قيم العدد الطبيعي غير المعدوم n: $PGCD(S_n;S_{n+1})$.
ب) استنتج $PGCD(S_{2017};S_{2018})$.
(ملاحظة: يمكن استعمال المبرهنة: $PGCD(a;b)$ يكافئ $PGCD(a^2;b^2)$)

التمرين الثالث: (05 نقاط)

1) ليكن $p(z)$ كثير الحدود للمتغير المركب z والمعرف كما يلي: $p(z)=z^2-\left(\frac{5+i}{2}\right)z+1+i$.
أ) احسب $p(2)$.
ب) عين العددين المركبين a و b حيث: $p(z)=(z-2)\ (az+b)$.
ج) حل في $\mathbb{C}$ مجموعة الأعداد المركبة المعادلة: $p(z)=0$ (نضع z_0 الحل الحقيقي و z' الحل الآخر)
2) نعتبر في المستوي المركب المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$. الوحدة $5\ cm$.
نضع $z_0=2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $z_{n+1}=z'z_n$ (حيث z' حل المعادلة في السؤال الأول) ونسمي النقطة A_n صورة العدد المركب z_n.
أ) احسب الأعداد المركبة z_1، z_2، z_3 و z_4.
ب) مثل النقط A_0، A_1، A_2، A_3 و A_4.
3) من أجل كل عدد طبيعي n نعرف المتتالية (u_n) كما يلي: $u_n=|z_n|$.
أ) بين أن المتتالية (u_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.
ب) اكتب عبارة الحد العام للمتتالية (u_n).
ج) احسب نهاية المتتالية (u_n)، ماذا تستنتج حول تقارب المتتالية (u_n)؟
4) .
أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا: $\frac{z_{n+1}-z_n}{z_{n+1}}=i$.
ب) استنتج طبيعة المثلث OA_nA_{n+1}.
5) من أجل كل عدد طبيعي n نسمي L_n طول الخط المنكسر المحدد بالنقط A_0، A_1، A_2، ...، A_n.

أ) احسب الأطوال: A_0A_1، A_1A_2 و A_2A_3.
ب) تحقق أن: $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{A_1A_2}{A_0A_1} = \frac{A_2A_3}{A_1A_2}$.
ج) عبر عن L_n بدلالة nثم حدد نهاية L_n.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I) باستعمال قابلية اشتقاق الدالة ln عند 1، بين أن: $\lim_{x\to1}\left(\frac{lnx}{x-1}\right) = 1$، ثم استنتج أن $\lim_{x\to0}\left(\frac{\ln(x+1)}{x}\right) = 1$.

II) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[1;+\infty[$ بـ: $f(x) = \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$، وليكن (C) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x حيث $(x \geq 1)$ لدينا: $f(x) = \ln x + \ln\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)$.
ب) من أجل $(x \geq 1)$، بين أن: $x - 1 = \sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\left(x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right)$.
جـ) بين أن الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند 1، وفسر النتيجة بيانيا.

2) أ) احسب النهاية: $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.
ب) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]1;+\infty[$، لدينا: $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f.
جـ) ارسم المنحنى (C).

3) ليكن S مساحة الحيز D المستوي المحدد بالمنحنى (C)، محور الفواصل والمستقيمين ذو المعادلتين $x = 1$ و $x = 3$، ولتكن A و B نقطتان من المنحنى (C) فاصلتاهما على الترتيب 1 و 3، والنقطتان $P\left(1;2\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right)$ و $Q(3;0)$ من المستوي.
أ) احسب مساحة كل من المستطيل $APBQ$ والمثلث ABQ.
ب) استنتج أن $2\ln\left(1+\sqrt{2}\right) \leq S \leq 4\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$.

III) نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ: $g(x) = \frac{e^{2x}+1}{2e^x}$ و (C_g) تمثيلها البياني.

1) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب x لدينا: $g(x) \geq 1$.

2) أ) بين أن: $(g\circ f)(x) = x$، ثم بين أنه إذا كانت النقطة $M(x;y)$ من المنحنى (C) فإن النقطة $M'(y;x)$ من المنحنى (C_g).
ب) ماذا تستنتج بالنسبة للمنحنيين (C) و (C_g)؟ أنشئ (C_g) في المعلم السابق.

3) ليكن S' مساحة الحيز D'المحدد بالمنحنى (C_g) والمستقيمات التي معادلاتها $x = 0$، $x = 2\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$ و $y = 3$.
أ) بين أن: $S' = 6\ln\left(1+\sqrt{2}\right) - \int_0^{2\ln\left(1+\sqrt{2}\right)} g(x)dx$.
ب) احسب $\int_0^{2\ln\left(1+\sqrt{2}\right)} g(x)dx$ ثم استنتج قيمة S.

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية — **ثانوية عقون محند اليزيد– اغيل اعلي ،**

مديرية التربية لولاية بجاية — **ثانوية عبد المالك فضلاء– تازمالت ،**

امتحان بكالوريا تجريبية — **و ثانويتي ذبيح شريف و ثيحارقاثين – أقبو**

الشعبة : رياضيات — **دورة : ماي 2022**

اختبار في مادة : الرياضيات — **المدة : 4 ساعات ونصف**

على المترشح ان يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأول

التمرين الأول:(4 نقاط)

يحتوي صندوق U_1 على ثلاث كريات تحمل الأرقام 2 ، 2 و 3 . و يحتوي صندوق U_2 على تسع كريات منها أربعة خضراء تحمل كل منها الرقم 3 و خمس كريات حمراء تحمل الأرقام 1 ، 2 ، 2 ، 3 و 4 . (الكريات لا يمكن التمييز بينها باللمس)

نسحب عشوائيا كرية من الصندوق U_1 و نسجل رقمها و ليكن n .

إذا كان $n=2$: نسحب عشوائيا من الصندوق U_2 كريتين على التوالي من دون إرجاع.

إذا كان $n=3$: نسحب عشوائيا و في آن واحد ثلاث كريات من الصندوق U_2 .

نعتبر الحدثين التاليين :

A : " الكريات المسحوبة من الصندوق U_2 لها نفس اللون ".

B : " الكريات المسحوبة من الصندوق U_2 تحمل نفس الرقم ".

1) أ) بين أن $P(A)=\dfrac{19}{54}$ ثم أحسب $P(B)$ احتمال الحدث B .

ب) بين أن $P(A\cap B)=\dfrac{55}{378}$.

2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحبة، عدد الكريات الحمراء المسحوبة من الصندوق U_2.

- عين قانون احتمال المتغير العشوائي X ثم أحسب $E(X)$ أمله الرياضياتي.

التمرين الثاني:(4 نقاط)

1) نعتبر في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ المعادلة (E) ذات المجهول $(x;y)$: $(E)\ldots\ldots\ 4x-9y=5$

- بين انه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حلا للمعادلة (E) فإن : $x\equiv 8[9]$ ثم استنتج حلول المعادلة (E)

2) α عدد طبيعي يكتب $\overline{43}$ في نظام التعداد الذي أساسه x و يكتب $\overline{98}$ في النظام التعداد الذي أساسه y حيث $x\leq 35$ و $y\leq 15$

- عين القيم الممكنة لــ x و y ثم أكتب α في النظام العشري

3) أ) أدرس و حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد 4^n على 9

ب) عين الثنائيات $(x;y)$ من $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ حلول المعادلة (E) حيث يكون: $1444^x+4^y+7\equiv 0[9]$.

4) نعتبر العددان الطبيعيان a و b حيث $a=9n+8$ و $b=4n+3$ و ليكن d قاسمهما المشترك الأكبر

- ما هي القيم الممكنة لــ d
- عين مجموعة قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون $d=5$

5) من أجل كل عدد طبيعي n نضع $A=9n^2+17n+8$ و $B=4n^2+7n+3$

- بين أن العدد $(n+1)$ يقسم كل من العددين A و B
- إستنتج حسب قيم n القاسم المشترك الأكبر للعددين A و B

اقلب الصفحة

التمرين الثالث:(5 نقاط)

(u_n) المتتالية العددية المعرفة أجل كل عدد طبيعي n بـ : $u_n=\int_0^1 (1-x)^n e^x dx$

1) احسب u_0 ثم باستعمال التكامل بالتجزئة احسب u_1 .

2) أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0\le u_n \le e-1$.

ب) اثبت أن المتتالية (u_n) متناقصة ثم استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة .

ج) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $\frac{1}{n+1}\le u_n \le \frac{e}{n+1}$ ثم استنتج نهاية (u_n).

3) باستعمال التكامل بالتجزئة بين أن : $u_{n+1}=(n+1)u_n-1$ ثم استنتج قيمة u_2.

4) نضع $A=\int_0^1 (2x^2-3x+1)e^x dx$

أ) عين العددان الحقيقيان α و β بحيث من اجل كل x من $\mathbb{R}$: $2x^2-3x+1=\alpha(x-1)^2+\beta(x-1)$

ب) استنتج القيمة المضبوطة للعدد الحقيقي A .

التمرين الرابع:(7 نقاط)

I نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجموعة $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=x-(x^2+1)e^{-x+1}$

نسمي (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب للمعلم المتعامد والمتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$ حيث $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=1cm$

1) أحسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ وبين أن $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x)=1+(x-1)^2e^{-x+1}$

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

2) بين أن المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y=x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$، ثم ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) بالنسبة الى (Δ).

3) بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α بحيث: $1.8\prec\alpha\prec 1.9$

4) بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f''(x)=-(x-1)(x-3)e^{-x+1}$ ثم استنتج أن (C_f) يقبل نقطتي انعطاف يطلب تعيينها.

5) أكتب معادلة ديكارتية للمستقيم (T) مماس المنحنى (C_f) عند النقطة التي فاصلتها 1.

6) أحسب $f(0)$ ثم أنشئ (Δ) ، (T) و (C_f).

7) ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة ذات المجهول x التالية: $(E): f(x)=x+m$

II نضع من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $I_n=\int_0^1 x^n e^{-x+1}dx$

1) بين أن الدالة المعرفة بـ: $G(x)=-(x+1)e^{-x+1}$ هي دالة أصلية للدالة $x\mapsto xe^{-x+1}$. ثم أحسب I_1 .

2) باستعمال المكاملة بالتجزئة بين أن $I_{n+1}=-1+(n+1)I_n$ لكل عدد طبيعي غير معدوم n . ثم أحسب I_2 .

3) أحسب بـ cm^2 مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) والمستقيم (Δ) والمستقيمين الذين معادلتيهما : $x=0$ و $x=1$.

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول:(4 نقاط)

يحتوي كيس على $n+8$ كرية لا نفرق بينهما باللمس، 8 كريات بيضاء و n كرية سوداء (n عدد طبيعي أكبر أو يساوي2)

I) نسحب على التوالي كرتين بدون ارجاع الكرية المسحوبة في كل مرة الى الكيس بحيث نربح دينارا من أجل كل كرية بيضاء مسحوبة و نخسر دينارين من أجل كل كرية سوداء مسحوبة .

ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب قيمة الربح الجبري .

1) ما هي قيم المتغير العشوائي الممكنة.
2) أكتب بدلالة n قانون احتماله.
3) أحسب بدلالة n أمله الرياضياتي.
4) هل توجد قيمة للعدد n تجعل الأمل الرياضياتي معدوما؟ أحسبها.

II) نفرض أننا سحبنا كرتين في آن واحد ، ليكن A_n حادث الحصول على كرتين من نفس اللون .

B_n حادث الحصول على كرتين من لونين مختلفين .

أ) احسب $p(A_n)$ بدلالة n ثم $\lim_{n\to+\infty} p(A_n)$ ، فسر هذه النتيجة.

ب) احسب $p(B_n)$ بدلالة n ثم $\lim_{n\to+\infty} p(B_n)$ ، فسر هذه النتيجة.

التمرين الثاني:(4 نقاط)

α عدد طبيعي حيث $\alpha \geq 6$

1) y عدد طبيعي يكتب $\overline{4452}$ في نظام التعداد ذي الأساس α ويكتب $\overline{2020}$ في نظام التعداد ذي الأساس $\alpha+2$

أ) بين أن α يحقق $\alpha(2\alpha^2-8\alpha-21)=18$ ثم استنتج قيمة العدد α

ب) أكتب العدد $2y$ في نظام التعداد ذي الأساس 6

2) a و b عددان طبيعيان حيث $a>b$. نضع $d=p\gcd(a;b)$

أ) بين أن $d=p\gcd(a-b;b)$

ب) استنتج $p\gcd(437;323)$ و $ppcm(437;323)$

ج) عين كل الثنائيات $(x;y)$ من الأعداد الطبيعية الغير معدومة والتي تحقق $\begin{cases} xy=24 \\ m^2+d^2=148 \end{cases}$ حيث $d=p\gcd(x;y)$ و $m=ppcm(x;y)$

التمرين الثالث:(5 نقاط)

المتتالية العددية (u_n) معرفة بحدها الأول $u_0=\frac{1}{2}$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=\sqrt{2u_n+3}$

1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $\frac{1}{2}\leq u_n<3$

2) اثبت أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما ثم استنتج أنها متقاربة محددا نهايتها

3) أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $|u_{n+1}-3|\leq\frac{2}{5}|u_n-3|$

اقلب الصفحة

4) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $3-u_n \le \left(\frac{2}{5}\right)^n (3-u_0)$

5) استنتج من جديد نهاية المتتالية (u_n)

- لتكن (v_n) المتتالية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n بـ : $v_n = n(3-u_n)$

أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $\frac{v_{n+1}}{v_n} \le \frac{4}{5}$

ب) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $v_n \le \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}$

التمرين الرابع:(7 نقاط)

- نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = x - e + \ln\left(1+2e^{-2(x-e)}\right)$

و (C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد متجانس $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$

1) تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x) = -x + e + \ln\left(2+e^{2(x-e)}\right)$

2) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

3) أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

4) بين أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين (D) و (D') معادلتاهما : $y = x-e$ و $y = -x+\ln 2+e$ عند $+\infty$ وعند $-\infty$ على الترتيب . ثم ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيمين المقاربين (D) و (D').

5) بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $x = \frac{1}{2}\ln 2 + e$ هو محور تناظر للمنحنى (C_f) .

6) انشئ (Δ) ، (D) ، (D') و (C_f)

- (D_m) المستقيم الذي معادلته : $y = mx - m\left(e+\frac{\ln 2}{2}\right)+\frac{\ln 2}{2}$ حيث m وسيط حقيقي.

أ) بين أن جميع المستقيمات (D_m) تشمل النقطة الثابتة $A\left(\frac{\ln 2}{2}+e\ ;\ \frac{\ln 2}{2}\right)$.

ب) ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد نقط تقاطع المستقيم (D_m) و المنحنى (C_f) .

- نضع: $J = \int_{\ln\sqrt{2}+e}^{\ln\sqrt{3}+e} \left[f(x)-(x-e)\right]dx$ ، $I_n = \int_0^1 \ln\left(1+X^n\right)dX$ حيث n عدد طبيعي غير معدوم

أ) فسر هندسيا العدد J واحسب العدد I_1 .

ب) بين أن: $0 \le I_n \le \ln 2$

ج) عين اتجـاه تغير المتتالية (I_n)ثم استنتج أنها متقاربة.

د) استنتج أنه من أجل كل $X \in]0;+\infty[$: $0 \le J + I_1 \le \int_{\ln\sqrt{2}+e}^{\ln\sqrt{3}+e} 2e^{-2(x-e)}dx - 1 + \ln 4$ (باستعمال : $\ln(1+X) \le X$)

ثم اعط حصرا للعدد $J + I_1$.

انتهى الموضوع الثاني

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية
مديرية التربية لولاية تيزي وزو
الشعبة : 3 رياضيات

امتحان بكالوريا تجريبي للتعليم الثانوي
ثانوية العقيد أوعمران أعمر - فريقات
دورة : ماي 2022

اختبار في مادة: الرياضيات — المدة: 04 سا و 30 د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول

التمرين الأول : 05 نقاط

1) نعتبر المعادلة (E) ذات المجهول $(x;y)$ التالية : $2021x-1442y=11$ حيث x و y عددان صحيحان .

أ) بين أن العددان 2021 و 1442 أوليان فيمابينهما ، ثم استنتج أن المعادلة (E) تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$.

ب) باستعمال خوارزمية إقليدس عين $(x_0\,;y_0)$حلا خاصا للمعادلة (E) ، ثم حل المعادلة (E) في $\mathbb{Z}^2$.

ج) عين جميع الثنائيات $(x;y)$ حلول المعادلة (E) التي تحقق $|y-x-581|\leq 579$

2) أ) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية لكل من العددين 5^n و 7^n على 11 .

ب) جد باقي القسمة الإقليدية للعدد $2020^{2022^{1442}}$ على 11 .

ج) عين قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها العدد $2\times 2020^{10n+1}+3n+1$ قابلا للقسمة على 11

د) λ عدد طبيعي يكتب في نظام التعداد ذي الأساس 5 كمايلي : $\overline{22\ldots.222\ldots22}$ حيث 2 مكرر 2020 مرة

- جد باقي قسمة 2λ على 11 .

- عين جميع الثنائيات $(x;y)$ حلول المعادلة (E) التي تحقق $2020^{x-1}+2018^y+9\equiv 0[11]$

التمرين الثاني : 04 نقاط

1) نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بحدها الأول $u_0\in\,]0;1[$ و من أجل كل عدد طبيعي n :

$$u_{n+1}=\frac{1}{\pi}u_n+\frac{\pi-1}{\pi}$$

أ - برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $0\leq u_n\leq 1$

ب - بين أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما ، ثم استنتج أنها متقاربة .

2) (v_n) المتتالية العددية المعرفة بحدها الأول $v_0=\frac{2\pi-1}{2\pi}$ و من أجل كل عدد طبيعي n $v_n=u_n-1$

أ - برهن أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=\frac{1}{\pi}$

ب - أكتب عبارة v_n بدلالة n .

ج - استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n=1+\frac{1}{\pi^n}-\frac{1}{2\pi^{n+1}}$

د - استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

3) نضع : $S_n=u_0+u_1+\cdots\ldots\ldots+u_n$ ، أحسب S_n بدلالة n ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$

التمرين الثالث : 4 نقاط

يحتوي كيس غير شفاف على كريتين بيضاوين و n كرية سوداء حيث $n \epsilon \mathbb{N}$ و $n \geq 2$

(الكريات متماثلة لانميز بينها باللمس)

1) نعتبر أن $n = 5$ نسحب عشوائيا من هذا الكيس ثلاث كريات في آن واحد .

نعتبر الحدثين : A : " سحب ثلاث كريات مختلفة اللون " ، B : " سحب كرية بيضاء واحدة على الأكثر "

- أحسب $P(A)$ احتمال الحدث A ثم بين أن : $P(B) = \frac{6}{7}$

2) نعيد الكيس إلى حالته الإبتدائية و نسحب عشوائيا كريتان على التوالي دون إرجاع .

نعرف المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل عملية سحب عدد الكريات البيضاء المسحوبة .

أ) عين قيم المتغير العشوائي X .

ب) أنقل وأكمل الجدول التالي مع التبرير :

ج) بين أن الأمل الرياضياتي $E(X) = \frac{4}{n+2}$

$X = x_i$	...	1	...
$P(X = x_i)$	$\frac{n^2 - n}{(n+2)(n+1)}$	...	...

التمرين الرابع : 7 نقاط

I/ g الدالة المعرفة على $[0; +\infty[$ بـ : $g(x) = \frac{x}{x+1} - \ln(x+1)$

1) أ- بين أن الدالة g متناقصة تماما على $[0; +\infty[$

ب - حدد إشارة الدالة g على $[0; +\infty[$

II/ f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = e^{-x}\ln(1 + e^{x})$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (الوحدة $2cm$)

1) أ- أحسب $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ وفسر النتيجة بيانيا .

ب - تحقق أنه من أجل كل حقيقي x : $f(x) = \frac{x}{e^x} + e^{-x}\ln(1 + e^{-x})$

ج - أحسب $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ وفسر النتيجة بيانيا .

2) أ- أحسب $f'(x)$ ثم عبر عن $f'(x)$ بدلالة $g(e^x)$.

ب - استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

3) أنشئ (C_f) .

III) F الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ و (C_F) تمثيلها البياني في المعلم السابق .

1) أ- تحقق أن من أجل كل عدد حقيقي x : $\frac{1}{1+e^x} = 1 - \frac{e^x}{1+e^x}$

ب- باستعمال المكاملة بالتجزئة أحسب $F(x)$.

2) أ- تحقق أن : $F(x) = x + 2ln2 - f(x) - \ln(1 + e^x)$

ب- أحسب نهايات الدالة F عند $-\infty$ و عند $+\infty$.

ج- أحسب $\lim_{x \to -\infty} [F(x) - x]$ واستنتج أن (C_F) يقبل مستقيم مقارب (Δ) عند $-\infty$ يطلب تعيين معادلته .

3) شكل جدول تغيرات الدالة F .

4) باستعمال إشارة الدالة g ، عين الوضع النسبي لـ (C_F) و (Δ) .

5) أنشىء في المعلم السابق المنحنى (C_F) .

6) أ- عبر بدلالة العدد e عن مساحة الحيز المستوي المحدد بحامل محور الفواصل و المنحنى (C_f)

و المستقيمين اللذين معادلتيهما $x = 1$ و $x = -1$

ب - أعط قيمة مقربة إلى 10^{-2} لهذه المساحة .

7) نضع $u_n = \int_{n-1}^{n} f(x)dx$ مع n عدد طبيعي أكبر من أو يساوي 1

أ) أحسب المجموع $S_n = u_1 + u_2 + \cdots \ldots\ldots + u_n$

ب) أحسب $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول : 4 نقاط (الأسئلة 1 ، 2 و 3 مستقلة فيما بينها)

1) نعتبر α عددا طبيعيا أكبر تماما من 5 و n عدد طبيعي يكتب من الشكل $\overline{4452}$ في نظام التعداد ذي الأساس α و يكتب من الشكل $\overline{2020}$ في نظام التعداد ذي الأساس $\alpha + 2$

أ) بين أن $\alpha\,(2\alpha^2 - 8\alpha - 21) = 18$

ب) استنتج قيمة α ، ثم أكتب العدد $2n$ في النظام العشري .

ج) نفرض أن $\alpha = 6$ ، أكتب العدد $2n$ في النظام ذي الأساس 6 .

2) a و b عددان طبيعيان حيث $a > b$ نضع $d = PGCD(a;b)$

أ) برهن أن $d = PGCD(a-b;b)$

ب) استنتج $PGCD(437;323)$ و $PPCM(437;323)$

3) عين كل الثنائيات $(x;y)$ من الأعداد الطبيعية غير المعدومة و التي تحقق $\begin{cases} xy = 24 \\ m^2 + d^2 = 148 \end{cases}$

حيث $d = PGCD(x;y)$ و $m = PPCM(x;y)$

التمرين الثاني : 4 نقاط

(u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ : $u_n = \int_{-1}^{1}\left(\frac{2|x|}{3} + \frac{e^{-2n|x|}}{3}\right)\,dx$

1) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن $u_n > 0$

2) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن : $u_n = 2\int_{0}^{1}\left(\frac{2x}{3} + \frac{e^{-2nx}}{3}\right)\,dx$

3) أثبت انه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن : $u_{n+1} - u_n = \frac{2}{3}\int_{0}^{1}(\,1 - e^{2x})\left(e^{-2(n+1)x}\right)dx$

4) استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) وبين أنها متقاربة .

5) أكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n ثم أحسب نهاية المتتالية (u_n) .

التمرين الثالث :

يحتوي كيس U على 9 كريات لانفرق بينهما باللمس، من بينها ثلاثة بيضاء تحمل الأرقام 1 ، 1 ، 2 و اثنان حمراء تحمل الأرقام 2 ، 3 و أربعة سوداء اللون تحمل الأرقام 1 ، 3 ، 3 ، 3 .

نسحب عشوائيا من الكيس 3 كريات في آن واحد .

1) أحسب احتمال الحوادث التالية : E : " الحصول على 3 كريات من نفس اللون "

F : " الحصول على كرية تحمل على الأكثر رقما فرديا "

G : " الحصول على 3 كريات تحمل عددا أوليا من كل لون "

2) نعتبر X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب عدد الكرات الحمراء المتبقية في الكيس
أ - عين قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X ثم أحسب أمله الرياضياتي.
ب - استنتج $E(2022X + 1443)$

3) نعتبر الآن الكيس الأول U وكيسا آخر V يحوي كرية بيضاء وكرتين حمراوين وثلاث كرات صفراء، نرمي مرة واحدة زهرة نرد متوازنة مرقمة من 1 إلى 6
- إذا ظهر الرقم 4 نسحب كرية واحدة من الكيس U وإلا فنسحب كرتين في آن واحد من الكيس الثاني V.
أ) نعتبر الحدث B : " سحب كرية بيضاء على الأقل " . بين أن $P(B) = \frac{1}{3}$
ب) إذا سحبنا كرية بيضاء على الأقل، ماهو احتمال أن تكون من الكيس الثاني V ؟

التمرين الرابع:

I/ g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = 1 - (x+1)^2 e^x$
1) أ - أدرس تغيرات الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.
ب – تحقق أن: $g(0) = 0$ ثم استنتج إشارة الدالة g .

II/ f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي : $f(x) = x + 1 - (x^2+1)\, e^x$
(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ (الوحدة $2cm$)
1) أ - بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x) = x + 1 - 4\left(\frac{x}{2}e^{\frac{x}{2}}\right)^2 - e^x$
ب – استنتج $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$
ج – بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x) = x\left[1 + \frac{1}{x} - \left(x + \frac{1}{x}\right)e^x\right]$
د - بين أن : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$
2) أ - بين أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) معادلته $y = x + 1$ بجوار $-\infty$.
ب – أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمستقيم المقارب (Δ) .
3) أ - برر قابلية اشتقاق الدالة f على $\mathbb{R}$ ثم أحسب f' الدالة المشتقة للدالة f .
ب – أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.
4) - بين أن المنحنى (C_f) يقبل نقطتي انعطاف يطلب تعيينهما .
5) أنشئ المنحنى (C_f) و (Δ) . (نأخذ $f(-3) \approx -2{,}5$ و $f(-1) \approx -0{,}7$)
6) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي عدد وإشارة حلول المعادلة: $(x^2+1) = (1-m)e^{-x}$
7) أ – بين أن الدالة $H: x \to (x-1)e^x$ دالة أصلية للدالة $h: x \to xe^x$ على $\mathbb{R}$
ب – بين أن $\int_{-1}^{0} xe^x dx = \frac{2}{e} - 1$
ج – باستعمال المكاملة بالتجزئة بين أن: $\int_{-1}^{0} (x^2+1)\, e^x\, dx = 3\left(1 - \frac{2}{e}\right)$
د - أحسب بـ cm^2 مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) ، المستقيم (Δ) ، والمستقيمين ذو المعادلتين $x = -1$ و $x = 0$

وزارة التربية الوطنية

مديريتي التربية لولايتي أدرار و تيميمون — ثانويات المقاطعة الأولى

الشعبة : رياضيـــــات — دورة مـاي 2022

امتحان البكالوريا التجريبي في مادة الرياضيات — المدة : أربع ساعات ونصف

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين :

الموضوع الأوّل :

التمرين الأول: (03.5 نقاط و نصف)

نعتبر المعادلة التفاضلية: $y' - 2y = (x-3)e^x$ ....(E)

1) عين قيمتي العددين الحقيقيين a و b حتى تكون الدالة $g : x \longmapsto (ax+b)e^x$ حلا لـ (E) .

2) عين حلول المعادلة التفاضلية: $y' - 2y = 0$ ....(E') .

3) أثبت أن f حل للمعادلة التفاضلية (E) إذا وفقط إذا كان $f - g$ حلا للمعادلة التفاضلية (E') .

4) استنتج حلول المعادلة التفاضلية (E) ، ثم استنتج الحل الذي يحقق $y(0) = 4$.

التمرين الثاني: (04.5 نقاط و نصف)

لتكن X_n و Y_n المتتاليتين المعرفتين على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ كمايلي:

$$\begin{cases} X_0 = 5 \\ X_{n+1} = 3X_n - 2 \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} Y_0 = 1 \\ Y_{n+1} = 3Y_n + 8 \end{cases}$$

1) نعرف من أجل كل عدد طبيعي n المتتالية (U_n) بالعبارة: $U_n = X_n - 1$.

أ) بين أن المتتالية (U_n) هندسية، يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

ب) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $X_n = 4 \times 3^n + 1$.

2) بين أن: $PGCD(X_{n+1};X_n)$ يقسم 2 ، ثم استنتج أن: $PGCD(X_{n+1};X_n) = 1$.

3) أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $5X_n - 4Y_n = 21$.

ب) استنتج عبارة Y_n بدلالة n ، ثم جد القيم الممكنة لـ: $PGCD(X_n;Y_n)$.

4) أ) ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 7 .

ب) بين أنه إذا كان: $n \equiv 5[6]$ ، فإن: $PGCD(X_n;Y_n) = 7$.

ج) استنتج قيمة $PGCD(X_{2021};Y_{2021})$.

التمرين الثالث: (04 نقاط)

يحتوي وعاء على n كرية بيضاء ($n \geqslant 2$)، 5 كريات حمر و 3 كريات خضراء. نسحب عشوائيا كرتين في آن واحد.

1) ماهو احتمال الحصول على كريتين بيضاوين.

2) نرمز بـ $P(n)$ إلى احتمال الحصول على كريتين من نفس اللون.

أ) أ– أثبت أن: $P(n) = \dfrac{n^2 - n + 26}{(n+7)(n+8)}$.

ب) احسب: $\lim_{n\to+\infty} P(n)$ ، ثم فسر النتيجة.

3) نضع $n=4$ ، يقوم لاعب بسحب كريتين من الوعاء في آ ن واحد ثم يرجعهما ويسحب كريتين أخريين، لإجراء هذين السحبين يدفع اللاعب مبلغا قدره 30 دينارا، وبعد كل سحب يتحصل على 40 دينارا إذا كانت الكريتان من نفس اللون، وإلا تحصل على 5 دنانير فقط.

ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحبين مقدار ربح هذا اللاعب.

أ) عين قيم المتغير X .

ب) عرف قانون احتمال المتغير العشوائي X ، ثم احسب أمله الرياضياتي.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

n عدد طبيعي غير معدوم، f_n الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كمايلي: $f_n(x)=\frac{(\ln x)^n}{x^2}$ وليكن (C_n) المنحنى الممثل للدالة f_n في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) نضع $n=1$

أ) احسب $\lim_{x\to+\infty} f_1(x)$ و $\lim_{x\overset{>}{\to}0} f_1(x)$ ثم فسر النتيجتين بيانيا.

ب) ادرس اتجاه تغير الدالة f_1 ، ثم شكل جدول تغيراتها.

ج) اكتب معادلة المماس للمنحنى (C_1) في النقطة ذات الفاصلة 1 .

2) نضع $n=2$

أ) احسب $\lim_{x\to+\infty} f_2(x)$ و $\lim_{x\overset{>}{\to}0} f_2(x)$ ثم فسر النتيجتين بيانيا.

ب) ادرس اتجاه تغير الدالة f_2 ، ثم شكل جدول تغيراتها.

3) ا) ادرس إشارة الفرق $f_1(x)-f_2(x)$ ثم استنتج الوضع النسبي للمنحنيين (C_1) و (C_2) .

ب) أنشئ كلا من المنحنيين (C_1) و (C_2) .

4) نضع من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم، $I_n=\int_1^e f_n(x)dx$

ا) نضع $F(x)=\frac{1+\ln x}{x}$ ، احسب $F'(x)$ ثم استنتج I_1 .

ب) باستعمال المكاملة بالتجزئة، بين أن: $I_{n+1}=-\frac{1}{e}+(n+1)I_n$.

ج) احسب I_2 ، ثم استنتج مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنيين (C_1) و (C_2) والمستقيمين اللذين معادلتاهما: $x=1$ و $x=e$.

5) ا) اعتمادا على السؤال (4–ب)، برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n :

$$\frac{1}{n!}I_n=1-\frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}\right)$$.

ب) باستعمال حصر للعدد $\ln x$ على المجال $[1;e]$ ، بين أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n :

$0\le I_n\le 1$

ج) استنتج النهاية : $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}\right)$

الموضوع الثّاني :

التمرين الأول: (04 نقاط)

من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n نفرض الأعداد: $a_n = 4\times 10^n - 1$ ، $b_n = 2\times 10^n - 1$ و $c_n = 2\times 10^n + 1$

I) 1) احسب a_n ، b_n و c_n من أجل قيم n تساوي: 1 ، 2 و 3 .

2) ماهو عدد أرقام العددين a_n و c_n ؟

3) بين أن العددين a_n و c_n يقبلان القسمة على 3 و بين أن العدد b_3 أولي.

4) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $b_n \times c_n = a_{2n}$.

5) استنتج تحليلا إلى جداء عوامل أولية للعدد a_6 .

6) باستعمال الخاصية: $PGCD(a;b) = PGCD(a;a-b)$

- بين أن: $PGCD(b_n;c_n) = PGCD(c_n;2)$ ، ثم استنتج أن b_n و c_n أوليان فيما بينهما.

II) نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة ذات المجهولين $(x;y)$: $b_3x + c_3y = 1..........(*)$.

1) برر أن المعادلة $(*)$ تقبل على الأقل حلا.

2) طبّق خوارزمية إقليدس على b_3 و c_3 لإيجاد حل خاص للمعادلة $(*)$.

3) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة $(*)$.

التمرين الثاني: (05 نقاط)

U_1 صندوق يحتوي على 3 كريات حمراء وكريتين خضراء ، و U_2 صندوق آخر يحتوي على كريتين حمراوين و 3 كريات خضراء ، الكريات متجانسة لانفرق بينها باللمس، نقوم عشوائيا بسحب كرية من الصندوق U_1 ونضعها في الصندوق U_2 ، ثم نسحب عشوائيا من الصندوق U_2 كريتين في آن واحد.

نرمز بـ R_1 للحادثة: "سحب كرية حمراء من الصندوق U_1 " وبالرمز A للحادثة: "سحب كريتين حمراوين من الصندوق U_2 ".

1) احسب الاحتمالين $P(R_1)$ و $P(R_1 \cap A)$.

2) تحقق أن: $P(A) = \dfrac{11}{75}$ ، هل الحادثتان R_1 و A مستقلتان؟برر

3) علما أن الكريتين المسحوبتين من U_2 حمراوان، مااحتمال أن الكرية المسحوبة من U_1 كانت حمراء ؟

4) ليكن n عددا طبيعيا غير معدوم. نضيف n كرية حمراء إلى الصندوق U_1 ، ونعيد التجربة العشوائية السابقة؛ حيث يربح اللاعب 5 دنانير عند كل سحب لكرية خضراء من U_2 ، ويخسر 10 دنانير عند كل سحب لكرية حمراء من الصندوق U_2 .

نسمي X المتغير العشوائي الذي يساوي مقدار أرباح اللاعب في هذه اللعبة.

أ) بين أن: $P(X=-5) = \dfrac{9n+43}{15(n+5)}$.

ب) أعط، بدلالة n ، قانون احتمال المتغير العشوائي X ، ثم احسب أمله الرياضيتي.

التمرين الثالث: (04 نقاط)

لتكن (u_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}^*$ كمايلي: $u_n = \dfrac{n^{10}}{2^n}$.

1) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n يكون:

$u_{n+1} \le 0{,}95u_n$ إذا وفقط إذا كان: $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{10} \le 1{,}9$.

2) نعتبر الدالة f المعرفة على $[1;+\infty[$ بـ: $f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^{10}$.

أ) ادرس تغيرات الدالة f على مجال تعريفها، ثم احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

ب) بين أنه يوجد عدد حقيقي وحيد α من المجال $[1;+\infty[$ حيث: $f(\alpha)=1{,}9$.

ج) عين العدد الطبيعي n_0 ، بحيث: $n_0-1<\alpha<n_0$.

د) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n\geq 16$ يكون: $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{10}\leq 1{,}9$.

3) أ) عين اتجاه تغير المتتالية (u_n) ابتداء من الرتبة 16 .

ب) ماذا تستنتج بالنسبة للمتتالية (u_n) .

4) برهن بالتراجع، أنه من أجل كل عدد طبيعي n يحقق $n\geq 16$ يكون: $0\leq u_n\leq (0{,}95)^{n-16}\times u_{16}$ ، ثم استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I) لتكن g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة: $g(x)=e^x(x-1)+1$.

1) ادرس اتجاه تغير الدالة g ، ثم شكل جدول تغيّراتها.

2) استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $g(x)\geq 0$.

II) لتكن الدالة العددية I المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي: $I(x)=\int_0^x (x-t)e^t dt$.

1) باستعمال المكاملة بالتجزئة، أثبت أن : $I(x)=e^x-(1+x)$.

2) ليكن x عددا حقيقيا موجبا، أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي t من المجال $[0;x]$ يكون: $1\leq e^t\leq e^x$

ثم استنتج أن: $\frac{x^2}{2}\leq I(x)\leq \frac{x^2e^x}{2}$.

3) ليكن x عددا حقيقيا سالبا، أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي t من المجال $[x;0]$ يكون: $e^x\leq e^t\leq 1$

ثم استنتج أن: $\frac{x^2e^x}{2}\leq I(x)\leq \frac{x^2}{2}$.

4) استنتج أن: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-(1+x)}{x^2}=\frac{1}{2}$

III) لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $\begin{cases} f(x)=\frac{e^x-1}{x};x\neq 0 \\ f(0)=1 \end{cases}$

وليكن (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1) احسب كلا من $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) ادرس قابلية اشتقاق الدالة f عند 0 .

3) احسب $f'(x)$ ، ثم استنتج تغيرات الدالة f .

4) عين معادلة المماس (T) للمنحنى عند النقطة ذات الفاصلة 0 .

5) ارسم المماس (T) والمنحنى (C_f) .

الامتحان التجريبي في مادة الرياضيات

قسم 03 رياضيات

المدة : 4 سا و 30 د

دورة ماي 2022

الموضوع الاول

التمرين الاول :

عين في كل حالة الاقتراح الصحيح من بين لاقتراحات (أ) ، (ب) ، (ج) و (د) (التبرير مطلوب)

1) الكتابة المبسطة للعدد A المعرف ب : $A= \ln (e + e^{-1} + 2) - 2\ln (e + 1)$ هي :

أ) $A=0$ ، ب) $A=1$ ، ج) $A=-1$ ، د) $A=e$

2) *من اجل كل عدد حقيقي x العدد $2x - \ln(e^{x} + 3)$ يساوي :*

أ) $3x + \ln (1+3e^{-x})$ ، ب) $x - \ln (1+3e^{-x})$ ، ج) $x + \ln (1+3e^{-x})$ ، د) $3x - \ln (1+3e^{-x})$

3) *عدد حلول المعادلة $e^{x} - 3e^{-x} = -2$ في R هو :*

أ) 1 ، ب) 2 ، ج) 4 ، د) 0 ،

4) النهاية $\lim_{x\to 0} \frac{3}{4} \left[\frac{e^{3x} - 1}{5x}\right]$ تساوي :

أ) $\frac{3}{4}$ ب) $\frac{3}{5}$ ج) $\frac{5}{3}$ د) $\frac{9}{20}$

5) نعرف من اجل كل عدد طبيعي n المجموع $S= e^{\ln5} + e^{2\ln5} + e^{3\ln5} + \ldots.. + e^{n\ln5}$ و منه :

أ) $S= 5^{n+1} -1$ ب) $S=\frac{5}{4}(1 - 5^{n})$ ج) $S= \frac{1}{4}(1 - 5^{n+1})$ د) $S= \frac{5}{4} (5^{n+1} - 1)$

التمرين الثاني :

1) احسب القاسم المشترك الاكبر للعددين $4^5 - 1$ و $4^6 - 1$

2) نعتبر المتتالية (U_n) المعرفة على N ب : $u_0 = 0$ و $u_1 =1$ و من اجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+2} =5U_{n+1}- 4U_n$

أ) احسب الحدود : u_2 ، u_3 و u_4

ب) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} = 4U_n + 1$

ت) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n فان Un عدد طبيعي ، ثم استنتج $PGCD(U_n ; U_{n+1})$

3) لتكن (V_n) متتالية عددية معرفة من اجل كل عدد طبيعي n ب : $V_n = U_n + \frac{1}{3}$

أ) بين ان (V_n) متتالية هندسية يطلب تعيين اساسها و حدها الاول .

ب) اكتب بدلالة العدد الطبيعي n عبارة V_n ثم عبارة U_n

ت) عين من اجل كل عدد طبيعي n : $PGCD(4^{n+1} - 1 ; 4^n - 1)$

التمرين الثالث :

1) نعتبر في المجموعة Z^2 المعادلة (E) ذات المجهول $(x ;y)$ حيث : $4x - 9y = 5$

أ) بين انه اذا كانت الثنائية $(x ;y)$ حلا للمعادلة (E) فان : $x \equiv 8[9]$ ، ثم استنتج حلول المعادلة (E)

ب) αعدد طبيعي يكتب $\overline{43}$ في نظام التعداد الذي اساسه x و يكتب $\overline{98}$ في نظام التعداد الذي اساسه y حيث $x \leq 35$ و $y \leq 15$

أ) عين القيم الممكنة ل x و y ثم اكتب α في النظام العشري

ب) ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد 4^n على 9

2) عين الثنائيات $(x ;y)$ من N^2 حلول المعادلة (E) حيث : $2011^x + 4^y + 7 \equiv 0[9]$

أ) نعتبر العددين الطبيعيين a و b حيث : $a=9n+8$ و $b=4n+3$ و ليكن d قاسمهما المشترك الاكبر حيث n عدد طبيعي

.

ب) ما هي القيم الممكنة ل d

ت) عين مجموعة قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون $d=5$

3) من احل كل عدد طبيعي n ، نضع $A= 9n^2 + 17n + 8$ و $B=4n^2 + 7n +3$

أ) بين ان العدد $(n+1)$ يقسم كل من A و B

ب) استنتج حسب قيم n القاسم المشترك الاكبر للعددين A و B

التمرين الرابع :

I. لتكن الدالة u المعرفة على $]0 ; +\infty[$ ب : $u(t) = 3\ln(1+t) - \frac{t}{1+t}$

عين اتجاه تغيرالدالة u :

$$\begin{cases} f(x) = x3[\ln(1+x) - \ln x] \; ; \; x \epsilon]0 ; 1] \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1) ليكن الدالة f المعرفة على $[0 ;1]$ ب :

اثبت ان f قابلة للاشتقاق علي يمين 0

تحقق انه من اجل كل عدد حقيقي $x \epsilon]0 ;1]$ $f'(x) = x^2 u(\frac{1}{x})$

عين اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيرات الدالة f

II. نعتبر الدالتين g و h المعرفتين على [0 ;1] ب :

$\{\ g(x) = x^3 \ln(x+1)\quad x \in]0\ ;1[$

$\{\ h(0) = 0$

و ليكن على الترتيب (C_f) ، (C_g) و (C_h) منحنيات الدوال f ، g و h في معلم متعامد و متجانس $(o\ ,\ \vec{i}\ ,\ \vec{j})$ بحيث : $\|\vec{i}\| =$ 4cm

أ) تحقق انه من اجل كل عدد حقيقي x من [0 ,1] : $f(x) = g(x) - h(x)$

ب) عين الوضع النسبي بين المنحنيين (C_f) و (C_g)

1) ليكن (T) و (T’) مماسين ل (C_f) و (C_g) عند النقطة ذات الفاصلة $e^{-\frac{1}{3}}$ على الترتيب

اثبت ان (T) و (T’) متوازيان

2) انشئ المنحنى (C_f)

3) لتكن H الدالة الاصلية الوحيدة ل h على المجال [0 ,1] و التي تنعدم عند 1

ليكن $]0\ ;1]\ni\alpha$ و $A\alpha = \int_{\alpha}^{1} x^3 \ln x \, dx$ عبر عن $A\alpha$ بدلالة الدالة H

احسب $A\alpha$ باستعمال التكامل بالتجزئة ثم استنتج H(0)

4) عين مساحة الحيز من المستوي المحددة بالمنحنيين (C_f) و (C_g) و المستقيمين ذو المعادلتين x=0 و x=1

الموضوع الثاني :

التمرين الأول: (04 نقاط)

1) أ- أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 7.

ب- ما هو باقي القسمة الإقليدية للعدد $2017^{4n+2} + 2x2019^{6n+4}$ على 7

2) نعتبر المعادلة ذات المجهولين الصحيحين x وy: $343x-648y= 76$ ...(E)

أ- بين أن المعادلة (E) تقبل حلولا في Z^2

ب- حل في Z^2 المعادلة (E).

3) ليكن d القاسم المشترك الأكبر للعددين الطبيعيين غير معدومين x وy غير حلول المعادلة (E).

أ- ماهي القيم الممكنة للعدد d.

ب- عين الثنائيات $(x ; y)$ من الأعداد الطبيعية بحيث يكون $d= 76$.

4) عدد طبيعي يكتب $\beta 1 \alpha \beta$ في نظام التعداد ذي الأساس 7، ويكتب $\alpha 1 \alpha \alpha \beta$ في نظام التعداد ذي الأساس 5.

جد العددين α و β ، ثم أكتب γ في النظم التعداد ذي الأساس 6.

التمرين الثاني: (04 نقاط).

يحتوي كيس غير شفاف عل أربع كريات حمراء تحمل الأرقام: 0، 0، 1، 2 وأربع كريات خضراء تحمل الأرقام 1، 1، 1، 2 وكرتين سوداوين تحملان الرقمين 1، 2.(وكل الكريات متماثلة ولا يمكن التمييز بينها عند لمسها).

- نسحب عشوائيا من الكيس ثلاث كرايات على التوالي بدون إرجاع:
- نعتبر الأحداث التالية:

A: الحصول على ثلاث كريات من نفس اللون.

B: الحصول على ثلاث كريات تحمل نفس الرقم.

C: الحصول على ثلاث كريات جداء الأرقام المسجلة عليها غير معدوم.

1- احسب الاحتمالات التالية: $P(A)$، $P(B)$، $P(A\cap B)$، $P(AUB)$، و $P(C)$

2- نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل تجربة جداء الأرقام المسجلة على الكريات المسحوبة.

- حدد قيم X الممكنة، ثم عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X.

3- احسب الاحتمال: $P\ (e^{x2-x} >1)$.

التمرين الثالث:

(U_n) المتتالية العددية المعرفة بـ $U_0=\frac{7}{4}$، ومن أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1}=\frac{1}{2}U_n+\frac{3}{8}$

1) أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $U_n>\frac{3}{4}$

ب- ادرس اتجاه تغير المتتالية (U_n)، ثم استنتج أنها متقاربة؟

2) (V_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n كما $Vn=\alpha(\frac{3}{4})^n(U_n-\frac{\alpha}{4})$

أ- عين قيم العدد الحقيقي α حتى تكون (V_n) متتالية هندسية أساسها $q=\frac{1}{3}$

ب- من أجل $\alpha=3$ عبر عن V_n بدلالة n.

3) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n $U_n=t_n+\frac{3}{4}$ حيث (t_n) متتالية هندسية ثم استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} Un$

4) أ- عبر عن P_n بدلالة n حيث: $P_n=u_0\,v_0+u_1\,v_1+u_2\,v_2+\ldots+u_n\,v_n$

ب- أكتب S_n بدلالة n حيث: $S_n=\frac{V_0}{U_0-\frac{3}{4}}+\frac{1}{U_1-\frac{3}{4}}+\ldots+\frac{V_n}{U_n-\frac{3}{4}}$

التمرين الرابع:

الجزء الأول: الدالة g معرفة على المجال $]0\,;+\infty[$ بـ: $g(x)=2x^3-1+2\ln x$

1- ادرس اتجاه تغير الدالة g على المجال $]0\,;+\infty[$

2- برر وجود عدد حقيقي $g(\alpha)=0$. ثم اوجد قيمة مقربة لـα مدور إلى 10^{-3}

الجزء الثاني:الدالة f معرفة على المجال $]0\,;+\infty[$ $f(x)=2x-\frac{lnx}{2}$

(C_f)منحنيf في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(o\,,\vec{i}\,,\vec{j})$ بحيث $(\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=2cm)$

1- احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to0} f(x)$

2- أدرس الوضع النسبي بين (C_f) و(Δ) ذو المعادلة $y=2x$

3- أ- بين أنه من اجل كل x من المجال $]0\,;+\infty[$ $f'(x)=\frac{g(x)}{x^3}$

ت- شكل جدول التغيرات الدالة f

4- أرسم (Δ) و(C_f)

الجزء الثالث: ليكن n عدد طبيعي غير معدوم وليكنI_nالحيز من المستوي المحصور بين المنحنى (c_f) و(Δ) والمستقيمين ذو المعادلتين $x=1$ و$x=n$

1- برر أن هذه المساحة معطاة بـ: $In=\int_1^n \frac{lnx}{x^2}\,dx$

2- أ- تأكد أن الدالة $F x \to \frac{lnx}{x} - \frac{1}{x}$ هي دالة اصلية للدالة $\to \frac{lnx}{x^2}$ على المجال $]0 ; +\infty[$

ت- استنتج عبارة I_n بدلالة n

3- احسب نهاية المساحة I_n لما n تؤول إلى $+\infty$

☜ **على المترشح أن يختار أحد الموضوعين**

الموضوع الأول :

التمرين الأول: (06 نقاط)

I)- **1)**- أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد 5^n على 7 ، ثم استنتج باقي قسمة العدد A على 7

حيث : $A = 5^{2022} + 1443$.

2)- عين قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها العدد $222^n + 4\times 5^n + 337$ قابلا للقسمة على 7 .

3)- B عدد طبيعي غير معدوم مكتوب في النظام ذو الأساس 10 كما يلي : $B = \overline{20xx}$

- عين قيم العدد الطبيعي x الذي يحقق : $B \equiv 6[7]$.

II)- **1)**- تحقق أن العدد 337 أولي .

2)- نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ المعادلة : $14x - 337y = 2022 ......(1)$

أ)- تحقق أن المعادلة (1) تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$ **ب)**- حلل العدد 2022 إلى جداء عوامل أولية .

جـ)- بين أنه إذا كانت الثنائية (x, y) حلا للمعادلة (1) فإن x مضاعف للعدد 337 ، ثم استنتج حلول المعادلة (1).

د)- عين مجموعة حلول المعادلة (1) التي تحقق : $x \times y - 2696 = 0$

التمرين الثاني: (06 نقاط)

1)- (C) هو التمثيل البياني للدالة f على المجال : $[0, +\infty[$ المعرفة بـ : $f(x) = x^2 - 2x + 2$

(كما هو موضح في الوثيقة المرفقة)

- لتكن المتتالية العددية (U_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $\begin{cases} U_0 = \dfrac{3}{2} \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$

أ)- مثل على حامل محور الفواصل الحدود الأربعة الأولى لهذه المتتالية .

ب)- ضع تخمينا حول اتجاه تغير و تقارب هذه المتتالية .

جـ)- باستعمال مبدأ البرهان بالتراجع أثبت أنه : من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $1 \prec U_n \prec 2$

د)- ادرس اتجاه تغير المتتالية $\left(U_n\right)$ ، ماذا نستنتج ؟ - أحسب : $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

2)- لتكن المتتالية $\left(V_n\right)$ المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $V_n = Ln\left(U_n - 1\right)$.

أ)- أثبت أن المتتالية $\left(V_n\right)$ متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها. (لاحظ أن: $U_n^2 - 2U_n + 2 = \left(U_n - 1\right)^2 + 1$)

بـ)- عين حدها الأول V_0 . أكتب V_n ، U_n بدلالة n ثم أحسب : $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

جـ)- أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = \log\left(\sqrt{U_0 - 1}\right) + \log\left(\sqrt{U_1 - 1}\right) + \ldots\ldots + \log\left(\sqrt{U_n - 1}\right)$

- أحسب : $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

د)- نعتبر الجداء P_n حيث : $P_n = \dfrac{1}{\left(U_0 - 1\right)} \times \dfrac{1}{\left(U_1 - 1\right)} \times \ldots\ldots\ldots\ldots \times \dfrac{1}{\left(U_n - 1\right)}$

- أثبت أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $P_n = \dfrac{1}{2} e^{2^n Ln 4}$

التمرين الثالث:(08 نقاط)

الجزء الأول :

الجدول التالي هو جدول تغيرات الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = 1 - \left(2x + 4\right)e^{x-2}$

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	1	↗	$1 + 2e^{-5}$	↘	$-\infty$

1)- أثبت أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $0.4 \prec \alpha \prec 0.5$.

2)- استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

الجزء الثاني :

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=x^2e^{x-2}-\frac{1}{4}x^2$ ، (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$. (وحدة الطول 2cm)

1)- أحسب : $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

2)- أثبت أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)=-\frac{1}{2}xg(x)$ ، استنتج اتجاه تغيرا لدالة f ثم شكل جدول تغيراتها

3)- أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 2 .

4)- عين نقاط تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل .

5)- انشئ (C_f) على المجال $[-5,2]$ (نأخذ : $f(\alpha)\approx-0.2$)

6)- عين قيم الوسيط الحقيقي التي من أجلها المعادلة : $e^x=\left(\frac{m}{x^2}+\frac{1}{4}\right)\times e^2$ تقبل ثلاث حلول مختلفة .

7)- لتكن الدالتين g و G المعرفتان على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=x^2e^{x-2}$ ، $G(x)=(x^2-2x+2)e^{x-2}$

أ)- بين أن الدالة G هي دالة أصلية للدالة g ، استنتج حساب : $\int_1^2 g(x)dx$

بـ)- أحسب S مساحة الحيز المستوي المحدد بـ : (C_f) ومحور الفواصل و المستقيمين الذي معادلتهما :

$x=1$ $\quad$ $x=2$

الجزء الثالث :

نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $h(x)=e^{1-f(x)}$

أكتب $h'(x)$ بدلالة $f(x)$ و $f'(x)$ ، استنتج إشارتها ،ثم شكل جدول تغيرات الدالة h (دون حساب عبارة $h(x)$)

لا تضيع فرصة تقييم مستواك

بالتوفيق و النجاح في شهادة البكالوريا2022 **الأستاذة : بن زادي**

المـــوضوع الثـاني :

التمرين الأول: (04 نقاط)

I)- إختر الإجابة الصحيحة مع التبرير :

1)- (U_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $U_n = \int_n^{n+1} e^{2-x}dx$ ، المجموع : $U_0 + U_1 + ... + U_n$ يساوي :

أ)- $e^2\left[1-\left(\frac{1}{e}\right)^{n+1}\right]$ ب)- $e(e-1)\left[1-\left(\frac{1}{e}\right)^{n}\right]$ جـ)- $e(e-1)\left[1-\left(\frac{1}{e}\right)^{n+1}\right]$

2)- A عدد حقيقي حيث : $A = \dfrac{\sqrt[5]{2}\times\sqrt[4]{16}\times\sqrt{2}}{\sqrt{\sqrt[5]{128}}}$

أ)- $A = \frac{1}{2}$ ب)- $A = 2$ جـ)- $A = \sqrt{2}$

II)- حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة $5x - 6y = 3$ ، ثم حل في $\mathbb{Z}$ الجملة : $\begin{cases}\alpha \equiv -1[6]\\ \alpha \equiv -4[5]\end{cases}$ بطريقتين مختلفتين .

التمرين الثاني: (08 نقاط)

(U_n) متتالية هندسية حدودها موجبة تماما تحقق : $\begin{cases}U_5 = 32768\\ U_7 = 2097152\end{cases}$

1)- أوجد الأساس q لهذه المتتالية و حدها الأول U_0 .

2)- أكتب عبارة الحد العام U_n بدلالة n ، أحسب : $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$ ، ماذا تستنتج ؟

3)-أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = U_0 + U_1 + ... + U_n$

4)- باستعمال مبدأ البرهان بالتراجع برهن انه من أجل كل عدد طبيعي n :

$$1+8+8^2+.........+8^n = \frac{8^{n+1}-1}{7}$$

5)-عين العدد الطبيعي n بحيث : $1+8+8^2+.........+8^n = 19173961$

6)- أ)- أدرس تبعا لقيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد 8^n على 13.

بـ)- استنتج باقي قسمة العدد α على 13 حيث : $\alpha = 102 \times 38^{2022} + 5^{1443} - 3$.

جـ)- عين قيم العدد الطبيعي n التي تحقق : $7S_n \equiv 4[13]$

7)- أ)- برهن انه من أجل كل عدد طبيعي n : $(5n+1)\times 64^n - 5^{2n+3} \equiv (5n+6)\times 8^{2n}\ [13]$

بـ)- عين قيم العدد الطبيعي التي تحقق : $(5n+1)\times 64^n - 5^{2n+3} \equiv 0[13]$ و n مضاعف للعد 2 .

التمرين الثالث:(08 نقاط)

الجزء الأول :

- لتكن الدالة f المعرفة على $D_f = \mathbb{R} - \left\{\frac{-1}{2}\right\}$ بـ : $f(x) = x + 2 - Ln(2x+1)^2$ ، (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$. (وحدة الطول 2cm)

1)- أحسب : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}} f(x)$ ، فسر هذه النتيجة بيانيا.

2)- ادرس إتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها .

3)- بين أن المنحنى (C_f) يقبل مماسا (Δ) معامل توجيهه -3 ، ثم اكتب معادلته .

4)- أوجد إحداثيتي نقطتي تقاطع (C_f) مع المستقيم الذي (T) معادلته : $y = x$.

5)- أحسب : $f(-1)$ ، $f(6)$ ثم أنشىء (C_f) و (Δ).

6)- لتكن الدالتين h و H المعرفتان على المجال $\left]\frac{-1}{2},+\infty\right[$ بـ :

$$H(x) = \left(\frac{2x+1}{2}\right)Ln(2x+1) - x \quad ، \quad h(x) = Ln(2x+1)$$

أ)- بين أن الدالة H هي دالة أصلية للدالة h.

بـ)- أحسب $A(\lambda)$ مساحة الحيز المستوي المحدد بـ : (C_f) و المستقيم (Δ) و المستقيمين الذي معادلتهما $x = 0$

$x = \lambda$ حيث : $\lambda \succ 0$. جـ)- بين أن : $\lim_{\lambda \to +\infty} A(\lambda) = +\infty$.

الجزء الثاني :

- لتكن الدالة g المعرفة على $D_g = \mathbb{R} - \left\{\frac{-1}{2}\right\}$ بـ : $g(x) = \frac{3}{2} + \left|x + \frac{1}{2}\right| - 2Ln\left|2x + 1\right|$ ، (C_g) تمثيلها البياني

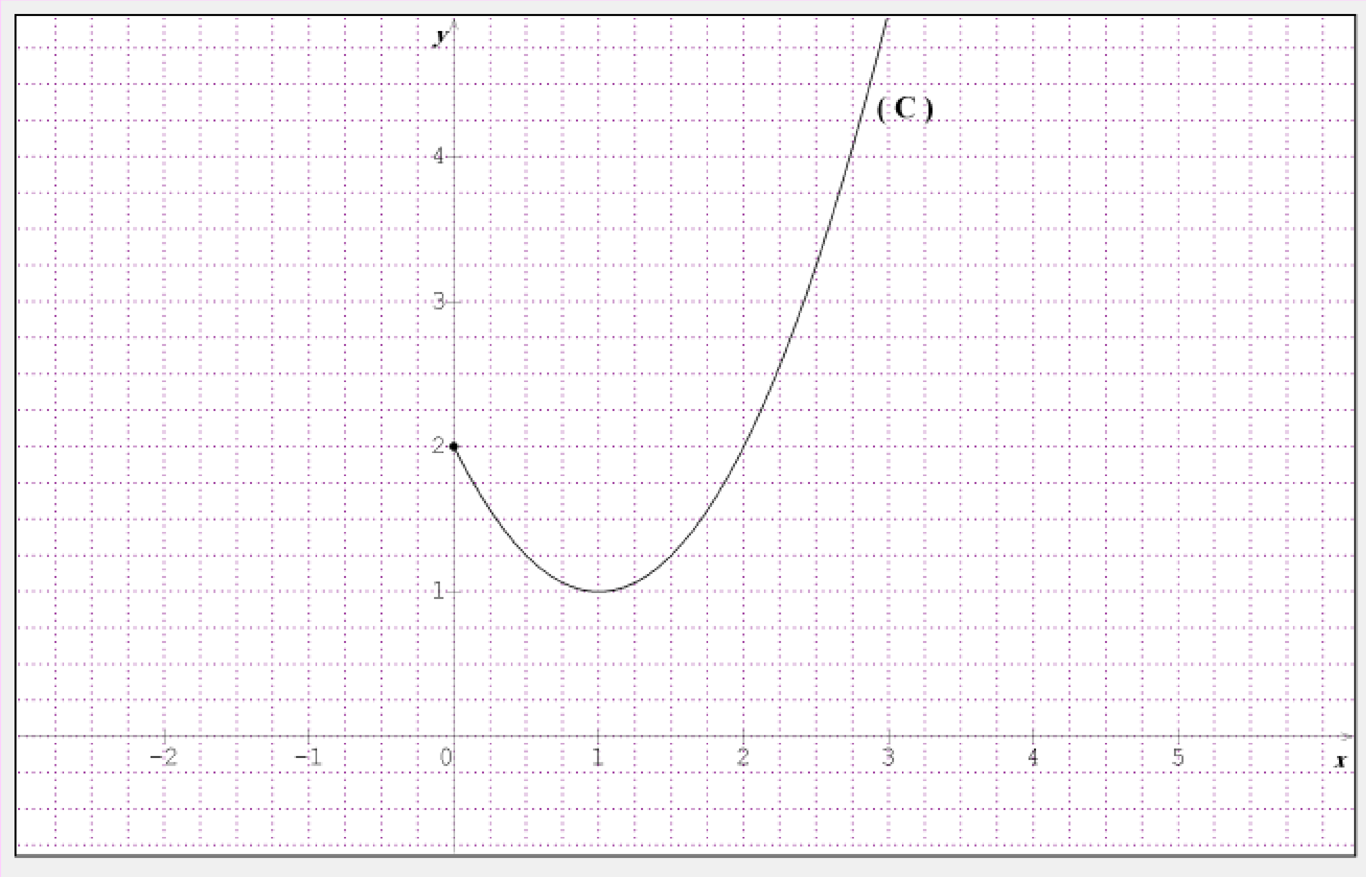
أ)- أثبت أنه من أجل كل $x \neq -\frac{1}{2}$ يكون $-x - 1 \neq -\frac{1}{2}$ و ، $g(-1-x) = g(x)$ فسر هذه النتيجة بيانا .

بـ)- أثبت أن : $g(x) = f(x)$ على مجال يطلب تعيينه .

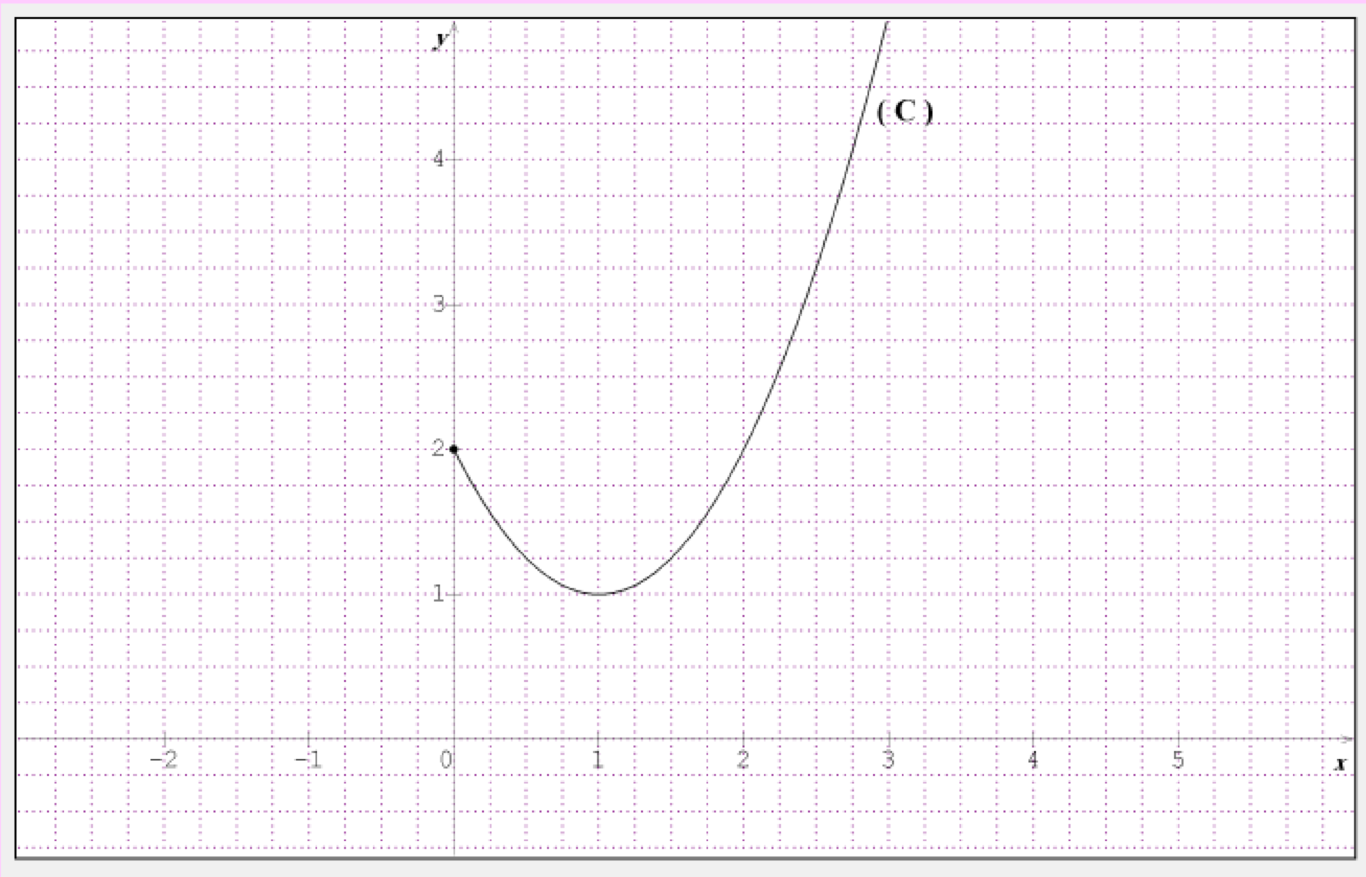
جـ)- إشرح كيفية إنشاء (C_g) إنطلاقا من (C_f) ، ثم انشئه في نفس المعلم السابق (استعمل الالوان للتوضيح)

لا تضيع فرصة تقييم مستواك

الوثيقة المرفقة : التمرين الثاني الموضوع الأول : الإسم و اللقب :...



الوثيقة المرفقة : التمرين الثاني الموضوع الأول : الإسم و اللقب :...



التصحيح النموذجي للبكالوريا الوردية في مادة الرياضيات — القـــسم : 03 رياضيات

المــوضوع الأول :

التمرين الأول : ☹☺☹ (06نقاط)

I)- **1**)- بواقي قسمة العدد 5^n على 7 :

$5^0 \equiv 1[7]$ ، $5^1 \equiv 5[7]$ ، $5^2 \equiv 4[7]$ ، $5^3 \equiv 6[7]$ ، $5^4 \equiv 2[7]$ ، $5^5 \equiv 3[7]$ ، $5^6 \equiv 1[7]$.

ومنه : $P = 6$ ....(01ن)

$k \in \mathbb{N}$	$6k+5$	$6k+4$	$6k+3$	$6k+2$	$6k+1$	$6k$	$n =$
$[7]$	3	2	6	4	5	1	$5^n \equiv$

- $1443 \equiv 1[7]$ ، $2022 = 337 \times 6$ معناه : $5^{2022} \equiv 1[7]$ ومنه : $A \equiv 2[7]$

باقي قسمة A على 7 هو 2 . ...(0.5ن)

2)- $222 \equiv 5[7]$ ومنه : $222^n \equiv 5^n[7]$ ، $222^n + 4\times 5^n + 337 \equiv (5^{n+1}+1)[7]$

$222^n + 4\times 5^n + 337 \equiv 0[7]$ معناه : $5^{n+1}+1 \equiv 0[7]$ ، $5^{n+1} \equiv 6[7]$ ، $n+1 = 6k+3 \ (k \in \mathbb{N})$ ومنه :

$(k \in \mathbb{N}) \quad n = 6k+2$..(01ن)

3)- $(0 \le x \prec 10) \quad B = 2\times 10^3 + 10x + x = 11x + 2000$

$B \equiv 6[7]$ معناه : $4x+5 \equiv 6[7]$ ، $4x \equiv 1[7]$ ، $8x \equiv 2[7]$ ، $x \equiv 2[7]$ و منه :

$(k \in \mathbb{N}) \quad x = 7k+2$ ، لكن : $0 \le x \prec 10$ و منه : $0 \le 7k+2 \prec 10$ ، $\frac{-2}{7} \le k \prec \frac{8}{7}$ ، $k \in \{0,1\}$.

و منه : $x = 2$ أو $x = 9$. ($B = 2022$ أو $B = 2099$ غير مطلوب) ....(0.75ن)

II)- **1**)- $\sqrt{337} \approx 18.35$ ، 337 لا يقبل القسمة على : 2 ، 3 ، 5 ، 7 ، 11 ، 13 ، 17 ومنه العدد 337 أوليا......(0.5ن)

2)-أ)- $PGCD(14,337) = 1$ $\left({}^{1}\!/_{2022}\right)$ ومنه المعادلة (1) تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$ . ...(0.25ن)

بـ)- $2022 = 2\times 3\times 337$..(0.25ن)

جـ)- $14x - 337y = 2022$ يكافئ : $14x = 337(y+6)$ ، ${}^{337}\!/_{4x}$ لكن : 14 و 337 أوليان فيما بينهما و منه :

حسب مبرهنة غوص : $337 / x$ ....(0.25ن)

- $(k \in \mathbb{Z})$ $x = 337k$ ، بتعويض x بما يساويه في المعادلة (1) نجد : $y = 14k - 6$ و منه :

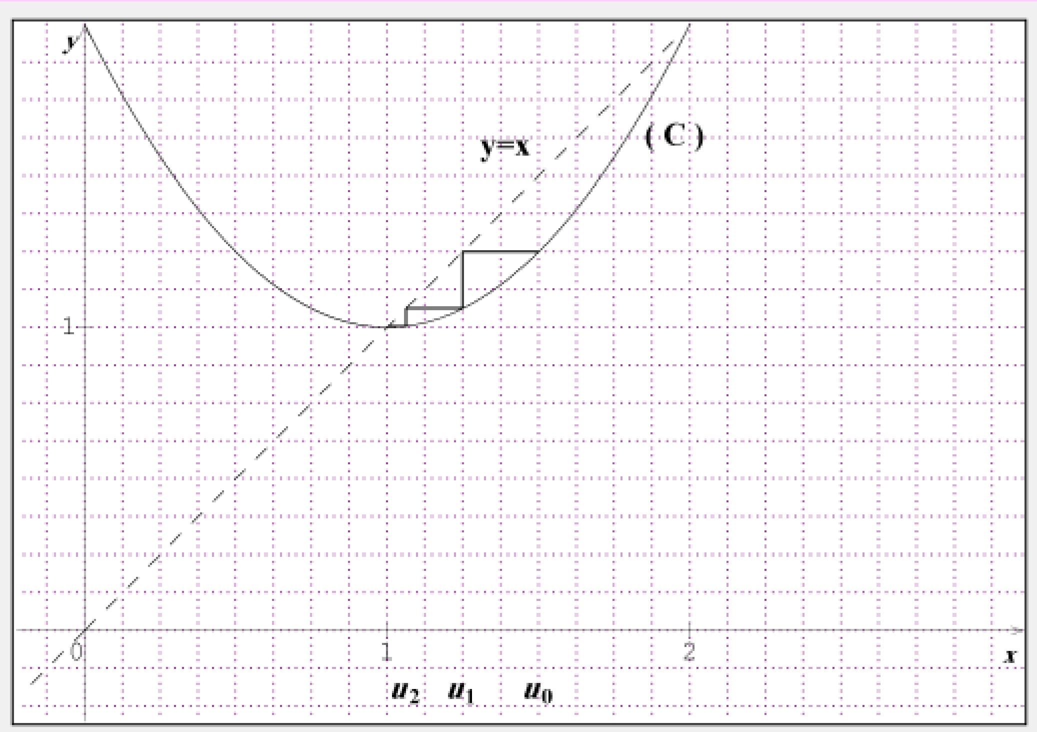
$S = \{(337k, 14k - 6) \quad k \in \mathbb{Z}\}$..(01ن)

د)- $x \times y - 2696 = 0$ يكافئ : $337k(14k - 6) - 2696 = 0$ أي أن : $7k^2 - 3k - 4 = 0$

$\Delta = 121$ ، $k_1 = 1$ ، $k_2 = \frac{-4}{7}$ مرفوض و منه : $S' = \{(337,8)\}$ ....(0.5ن)

التمرين الثاني :☹☺☹ ________________________ ______________06نقاط)

1)- أ)- تمثيل الأربع حدود الأولى من (U_n) . ...(0.25ن)



ب)- (U_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$. (U_n)متقاربة . ...(0.5ن)

جـ)- البرهان بالتراجع ....(0.75ن)

د)- من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $U_{n+1} - U_n = U_n^2 - 3U_n + 2 = (U_n - 1)(U_n - 2)$

بما أن $2 \prec U_n \prec 1$ فإن : (U_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$ . ...(0.5ن)

(U_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$ و محدودة من الأسفل بـ 1 فهي متقاربة : $\lim_{n \to +\infty} U_n = l$ ....(0.25ن)

$l^2-3l+2=0$ ، $\Delta=1$ مرفوض ، $l_2=2$ ، $l_1=1$ ومنه : $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=1$ ....(0.25ن)

2)- أ)- من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $V_{n+1}=\ln\left(U_{n+1}-1\right)=\ln\left(U_n^2-2U_n+2-1\right)=\ln\left[\left(U_n-1\right)^2\right]$

$V_{n+1}=2\ln\left(U_n-1\right)=2V_n$ $\left(1\prec U_n\prec 2\right)$ ومنه : $\left(V_n\right)$ متتالية هندسية أساسها $q=2$ و حدها الأول :

$V_0=Ln\left(\frac{3}{2}-1\right)=Ln\left(\frac{1}{2}\right)=-Ln2$ ....(0.5ن)(0.25ن)(0.25)

بـ)- من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $V_n=-2^nLn2$ ، $U_n=e^{V_n}+1=e^{Ln\left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}}+1=\left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}+1$.........(0.5ن)(0.5 ن)

بما ان : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}=0$ ومنه : $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=1$ ....(0.25ن)

جـ)- $$S_n=\frac{1}{2Ln10}\left[Ln\left(U_0-1\right)+Ln\left(U_1-1\right)+.......+Ln\left(U_n-1\right)\right]$$
$$S_n=\frac{1}{2Ln10}\left[V_0+V_1+.....+V_n\right]=\frac{1}{2Ln10}\left[\frac{-Ln2}{1-2}\left(1-2^{n+1}\right)\right]$$

ومنه : $S_n=\left(\frac{1-2^{n+1}}{2}\right)\log 2$ ....(0.5ن)

$\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=-\infty$ ....(0.25ن)

د)- $e^{V_n}=U_n-1$ $\quad\frac{1}{e^{V_n}}=e^{-V_n}=\frac{1}{U_n-1}$

$$P_n=e^{-V_0}\times e^{-V_1}\times......\times e^{-V_n}=e^{-V_0-V_1-.......-V_n}=e^{-(V_0+V_1+.......+V_n)}$$

$P_n=e^{-Ln2\left(1-2^{n+1}\right)}=e^{Ln\frac{1}{2}+2^{n+1}\ln 2}=\frac{1}{2}e^{2^n\times 2Ln2}=\frac{1}{2}e^{2^nLn4}$ ....(0.5ن)

التمرين الثالث: ☹☺☹ ______________________ ______________ (08نقاط)

الجزء الأول :

1)- مبرهنة القيم المتوسطة ....(0.25ن)

2)- إشارة $g(x)$: ....(0.5ن)

x	$-\infty$	α	$+\infty$
إشارة $g(x)$	+	0	-

الجزء الثاني

1)- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^2\left(e^{x-2}-\frac{1}{4}\right) = -\infty$ ، $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^2\left(e^{x-2}-\frac{1}{4}\right) = +\infty$ ....(0.5ن)

2)- f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$:

ومنه $f'(x) = 2xe^{x-2} + x^2e^{x-2} - \frac{1}{2}x = \frac{4xe^{x-2}+2x^2e^{x-2}-x}{2} = \frac{-x\left(-4e^{x-2}-2xe^{x-2}+1\right)}{2}$:

$f'(x) = -\frac{1}{2}xg(x)$ ....(0.5ن)

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$-\frac{1}{2}x$		+	0	-		-	
$g(x)$		+		+	0	-	
$f'(x)$		+	0	-	0	+	

و منه : f متناقصة تماما على المجال: $[0,\alpha]$ ، f متزايدة تماما على المجال: $]-\infty,0] \cup [\alpha,+\infty[$ ....(0.5ن)

جدول تغيرات الدالة f : ....(0.75ن)

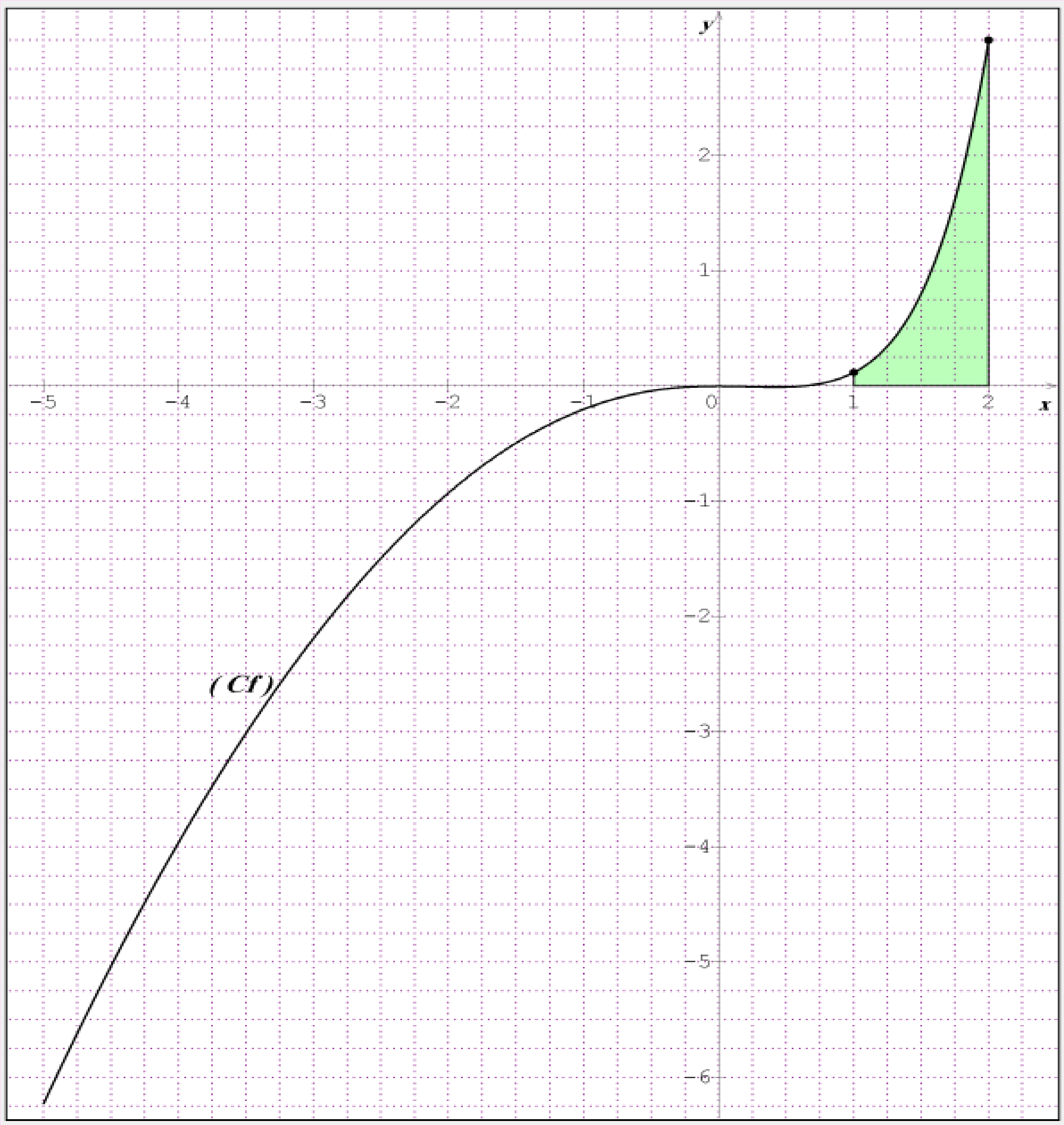
x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	$-\infty$		0		$f(\alpha)$		$+\infty$

3)- $(T): y = f'(x)(x-2)+f(2) = 7x-11$ ....(0.25ن)

4)- $(C_f)\cap(xx')$: $f(x)=0$ يكافئ : $x^2\left(e^{x-2}-\frac{1}{4}\right)=0$ ومنه : $x=0$ أو $x = 2-Ln4$.

$(C_f)\cap(xx') = \{O, A(2-Ln4, 0)\}$ ....(0.5ن)

5)- إنشاء (C_f): ....(01ن)



6)- $e^{x} = \left(\frac{m}{x^{2}}+\frac{1}{4}\right)\times e^{2}$ معناه : $f(x)=m$ ، للمعادلة ثلاث حلول يكافئ : $m\in \left]-0.2;0\right[$ ....(0.5ن)

G قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$: $G'(x)=(2x-2)e^{x-2}+(x^{2}-2x+2)e^{x-2}=(2x-2+x^{2}-2x+2)e^{x-2}$

ومنه : $G'(x)=x^{2}e^{x-2}=g(x)$ ....(0.25ن)

$\int_{1}^{2}g(x)dx=G(2)-G(1)=2-e^{-1}$ ....(0.5ن)

ومنه : $\int_{1}^{2}f(x)dx=\int_{1}^{2}g(x)dx+\int_{1}^{2}\frac{-1}{4}x^{2}dx=2-e^{-1}-\frac{1}{4}\left[\frac{x^{3}}{3}\right]_{1}^{2}=\frac{17}{12}-e^{-1}$

$S=\left(\frac{17}{3}-\frac{4}{e}\right)cm^{2}$ ....(0.75ن)

الجزء الثالث :

h قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$: $h'(x)=-f\ '(x)e^{1-f(x)}$..(0.5ن)

h و f متعاكستان في اتجاه التغير . ...(0.25ن)

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$h'(x)$		-	0	+	0	-	

جدول تغيرات الدالة f : ....(0.5ن)

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$h'(x)$		-	0	+	0	-	
$h(x)$	$+\infty$	↘	e	↗	$e^{1.2}$	↘	0

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية **مديرية التربية لولاية**

امتحان بكالوريا تجريبي التعليم الثانوي **دورة:**

الشعبة:رياضيات

اختبار في مادة: الرياضيات **المدة:04 ساعات و نصف**

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول

التمرين الأول:(04 نقط)

1) أ- أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة 3^n على 10.

ب- ما هو باقي قسمة العدد A_n على 10 حيث: $A_n = 3^{16n+6} - 2\times 109^{2n+3} - 13$ ؟

2) أ- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $(3n+4)\times 9^n + 7^{2n+1} \equiv 3^{2n}(3n+1)[10]$.

ب- عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون العدد الطبيعي $(3n+4)\times 9^n + 7^{2n+1}$ مضاعفا للعدد 10.

3) A عدد طبيعي يكتب $\overline{xx0xx01}$ في نظام التعداد ذي الأساس 3 و يكتب $\overline{y611}$ في نظام التعداد ذي الأساس 7.

- جد x و y ثم أكتب A في النظام العشري.

4) يحتوي كيس على 4 كرات مرقمة ببواقي قسمة 3^n على 10 نسحب عشوائيا كرتين في آن واحد.

أ- أحسب احتمال الحصول على رقمين مجموعهما يساوي مجموع أرقام العدد 2017.

ب- X متغير عشوائي يرفق بكل عملية سحب مجموع الرقمين المتحصل عليهما.

- عرف قانون احتمال X ثم احسب أمله الرياضياتي.

التمرين الثاني:(04 نقط)

التمرين الثالث:(05 نقط):

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$. نعتبر النقط A، B، C، D و E التي لاحقاتها على الترتيب $z_A = 1$، $z_B = 4+i$، $z_C = 3i$، $z_D = -1+i$ و $z_E = -2i$.

1) بيّن أن $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{z_E - z_A}{z_D - z_A}$. ثم بين أنه يوجد تحويل نقطي T، يحول D إلى E و B إلى C يطلب تعيين طبيعته وعناصره المميزة.

2) عين لاحقة النقطة C' صورة النقطة C بالتشابه المباشر S الذي مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{4}$ و نسبته $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

3) لتكن I_1 ، I_2 ، I_3 و I_4 منتصفات القطع المستقيمة $[BC]$ ، $[CD]$ ، $[DE]$ و $[EB]$ على الترتيب.

أ – بين أنه يوجد تحويل نقطي r مركزه I_1 و يحول النقطة I_4 إلى I_2.

ب – احسب $z_{I_1}+z_{I_3}$ و $z_{I_2}+z_{I_4}$ ثم استنتج طبيعة الرباعي $I_1\,I_2\,I_3\,I_4$.

4) لتكن M نقطة من المستوي لاحقتها z و النقطة M' ذات اللاحقة z' صورتها بالتشابه S.

– بين أن: $z'=\frac{1}{2}\left[(1+i)z+1-i\right]$.

5) لتكن (γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة Z التي تحقق $z=(i-1)\left(1+e^{i\theta}\right)$ حيث $\theta\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

أ– عين طبيعة المجموعة (γ) مع تحديد عناصرها المميزة عندما θ يمسح المجال $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

ب– جد طبيعة المجموعة (γ') صورة (γ) بالتحويل S.

التمرين الرابع:(07 نقط)

الدالة f المعرفة في $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=(3+x)e^{\frac{-x}{2}}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$، (الوحدة: $2cm$).

1) أ– أحسب نهايتي الدالة f عند $-\infty$ و عند $+\infty$.

ب– أدرس اتجاه تغير الدالة f على $\mathbb{R}$ ثم شكل جدول تغيراتها.

2) أ– بين أن المعادلة $f(x)=3$ تقبل حلين في $\mathbb{R}$ أحدهما معدوم و الثاني α بحيث: $-2<\alpha<\frac{-3}{2}$.

ب– أرسم (C_f) في المعلم $(O;\vec{i};\vec{j})$.

جـ– العدد الحقيقي m الموجب تماما. جد قيم m التي من أجلها المعادلة $f(x)=m$ لا تقبل حلولا في $\mathbb{R}$.

3) الدالة g المعرفة في $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=3e^{\frac{x}{2}}-3$.

أ – بين أن المعادلة $f(x)=3$ تكافئ $g(x)=x$.

ب – أدرس اتجاه تغير الدالتين g و g' على $\mathbb{R}$. (g' المشتقة الأولى للدالة g).

جـ – بين أن: $g'(\alpha)=\frac{\alpha+3}{2}$.

4) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[-2;\alpha]$:

أ– $g(x)$ تنتمي إلى المجال $[-2;\alpha]$.

ب– $\frac{1}{2}\le g'(x)\le\frac{3}{4}$..

5) المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0=-2$ و من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}=g(u_n)$.

أ– برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $-2\le u_n\le\alpha$.

ب– بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $0\le\alpha-u_{n+1}\le\frac{3}{4}(\alpha-u_n)$ و $0\le\alpha-u_n\le\left(\frac{3}{4}\right)^n$.

جـ– أستنتج نهاية u_n.

الموضوع الثاني

التمرين الأول:(04 نقط) :

العدد الطبيعي a المعرف كما يلي: $a=p^4-1$ حيث p عدد طبيعي أولي أكبر من أو يساوي 7.

1) بين أن p يوافق 1 أو (-1) بترديد 3 ثم أستنتج أن a مضاعف للعدد 3.

2) بين أنه يوجد عدد طبيعي k بحيث: $p^2-1=4k(k+1)$ و أن a مضاعف للعدد 16.

3) بأخذ كل بواقي القسمة الإقليدية الممكنة للعدد p على 5 ، برهن أن $a\equiv 0[5]$.

4) ليكن α، β و δ ثلاثة أعداد طبيعية.

أ- برهن أنه إذا كان α يقسم δ و β يقسم δ علما أن α أولي مع β فإن $\alpha\beta$ يقسم δ.

ب- استنتج مما سبق أن 240 يقسم a.

التمرين الثاني:(04 نقط):

التمرين الثالث:(05 نقط):

النقطتان A_0 و B_0 من المستوى بحيث $A_0B_0=8$ ، و S التشابه المباشر الذي مركزه A_0 ، نسبته $\frac{1}{2}$ و زاويته $\frac{3\pi}{4}$.

نعرف متتالية النقط (B_n) بـ: من أجل كل عدد طبيعي n ، $B_{n+1}=S(B_n)$.

1) أنشئ النقط B_1 ، B_2 و B_3 .

2) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، المثلثان $A_0B_nB_{n+1}$ و $A_0B_{n+1}B_{n+2}$ متشابهان.

3) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $\left(\overrightarrow{A_0B_0},\overrightarrow{A_0B_n}\right)\equiv\frac{3\pi}{4}n[2\pi]$.

4) نعرف المتتالية العددية (u_n) بـ: من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n=B_nB_{n+1}$.

أ- أثبت أن (u_n) متتالية هندسية يطلب تحديد أساسها q ثم أكتب u_n بدلالة n و u_0.

ب- نضع **من** أجل كل عدد طبيعي n ، $T_n=u_0+u_1+u_2+\cdots+u_n$. أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}T_n$.

5) أ- حل في المجموعة $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ المعادلة : $3x-4y=2$.

ب- ليكن (Δ) المستقيم العمودي على المستقيم (A_0B_0) في النقطة A_0 ، أوجد قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها تكون النقطة B_n تنتمي إلى المستقيم (Δ).

التمرين الرابع:(07 نقط):

1) الدالة العددية g المعرفة في المجموعة $]-\infty;-1[\cup]0\;;+\infty[$ كما يلي: $g(x)=Ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{1+x}$.

– أدرس تغيرات الدالة g ثم استنتج إشارة $g(x)$ على المجموعة $]-\infty;-1[\cup]0\;;+\infty[$.

2) الدالة العددية f المعرفة على المجموعة $D=]-\infty;-1[\cup[0;+\infty[$ كما يلي:

$$\begin{cases} f(x)=x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right); x\in]-\infty;-1[\cup]0;+\infty[\\ f(0)=0 \end{cases}$$

أ– أدرس قابلية اشتقاق f عند 0 ثم فسر النتيجة بيانيا.

ب– بين أن $\lim\limits_{|x|\to+\infty} f(x)=1$ ثم فسر النتيجة بيانيا.

جـ – بين أنه من أجل كل x من $]-\infty;-1[\cup]0;+\infty[$: $f'(x)=g(x)$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

3) أنشئ (C_f) منحنى الدالة f في المعلم المتعامد المتجانس $(o;\vec{i},\vec{j})$ ، (وحدة الطول $2cm$).

4) الدالة العددية h المعرفة كما يلي: $h(x)=f(-1-x)$.

أ– بين أن مجموعة تعريف الدالة h هي $]-\infty;-1[\cup]0;+\infty[$.

ب– عين اتجاه تغير الدالة h (دون حساب الدالة المشتقة) ثم شكل جدول تغيراتها.

جـ– بين أن (C_h) منحنى الدالة h و المنحنى (C_f) متناظران بالنسبة للمستقيم الذي معادلة له : $x=-\frac{1}{2}$.

5) ارسم (C_h) في نفس المعلم السابق.

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية

مديرية التربية لولاية وهران

المقاطعة الأولى (وهران شرق)

الامتحان التجريبي لبكالوريا 2022في مادة الرياضيات

الشعبة :رياضيات **المدة : أربع ساعات و نصف**

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين فقط

الموضوع الأول

التمرين الأول(05ن)

1) أ) بيّــن أن 193عدد أولي .

ب) حلّــل 206 إلى جداء عوامل أولية .

2) نعتبر المعادلة (E) ذات المجهولين الصحيحين x وy حيث: $4x - 193y = 78$.

أ) جـد الثنائية الطبيعية$(a;b)$ التي تحقق : $\begin{cases} PPCM(a;b) = 618 \\ PGCD(a;b) = 3 \end{cases}$ و $4a - 193b = 78$

ب) استنتج حلول المعادلة (E).

3) M وN عددان طبيعيان يكتبان على الترتيب$\overline{\alpha 12\beta}$ و$\overline{5\beta 1\alpha}$ في نظام التعداد ذو الأساس7 و$M \equiv N[193]$

حيث αو β رقمان طبيعيان كل منهما أصغر من 7.

أ) تحقّـق أن$44\alpha + 48\beta \equiv 78[193]$.

ب) بيّـن أن$11\alpha + 12\beta = 116$.

جـ) عيّـنα وβ ثم أكتبM وN في النظام العشري.

التمرين الثاني (04ن)

يمتلك لاعب نردين A وB متماثلان من حيث الشكل إلا أن النردA مغشوش و فيه كل وجهين متقابلين منه يحملان نفس الرقم i حيث $i \in \{1;2;3\}$ (كل رقم من الأرقام الثلاثة مسجل على وجهين متقابلين)، أما النرد B ليس مغشوشا وفيه ثلاثة أوجه تحمل الرقم 1و ثلاثة أوجه تحمل الرقم2 . يرمي اللاعب أحد النردين و نرمز بـ P_iلاحتمال ظهور الوجه الذي يحمل الرقم i في الحالتين (رمي النرد Aأو رمي النردB)

1) يرمي اللاعب النرد A ، أحسب p_1 ، p_2، p_3علما أنها تشكل ثلاث حدود متتابعة من متتالية حسابية أساسها$\frac{1}{4}$.

2) أحسب p_1 ، p_2. في حالة رمي النرد B

3) نرمي النردين في آن واحد ، و نعتبر المتغير العشوائي Xالذي يأخذ كقيم له مجموع رقمي الوجهين العلويين .

عرّف قانون احتمال المتغير العشوائي X وأحسب أمله الرياضياتي.

التمرين الثالث (04ن)

نعتبر المتتالية (U_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $U_{n+1} = \frac{2U_n}{\sqrt{U_n+1}}$ و $U_0 = 2$

1) أ) بيّـن أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $U_{n+1} = 2\sqrt{U_n + 1} - \frac{2}{\sqrt{U_n+1}}$

ب) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1 < U_n < 3$

جـ) بيّـن أن المتتالية (U_n) متزايدة تماما ثم استنتج أنها متقاربة .

2) أ) بيّـن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $9 - U_{n+1}^2 < 4(3 - U_n)$

ب) بيّـن أنه من أجل كل عدد طبيعي ، $3 - U_{n+1} < \frac{4}{5}(3 - U_n)$

جـ) بيّـن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $3 - U_n < \left(\frac{4}{5}\right)^n$

د) استنتج نهاية (U_n) لمّـــا $n \to \infty$

التمرين الرابع (07ن)

I) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ : $g(x) = 2x\sqrt{x} - 2 + lnx$

1) أدرس اتجاه تغير g على $]0;+\infty[$.

2) أحسب $g(1)$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ على $]0;+\infty[$.

II) نعتبر الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ : $f(x) = \frac{lnx}{\sqrt{x}} + 1 - x$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستو المنسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1) بيّـن أن $\lim_{x\to+\infty} \frac{lnx}{\sqrt{x}} = 0$.

2) أحسب نهايات الدالة f عند 0 وعند $+\infty$.

3) أ) بيّـن أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = -x + 1$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$.

ب) أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و (Δ) .

4) أ) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]0;+\infty[$: $f'(x) = -\frac{g(x)}{2x\sqrt{x}}$

ت) شكّـــل جدول تغيرات الدالة f.

5) أنشئ المنحنى (C_f) .

6) أ) باستعمال التكامل بالتجزئة جد العدد الحقيقي : $\int_{e^{-2}}^{1} \frac{lnx}{\sqrt{x}}\, dx$

ب) أحسب مساحة للحيز المحدد بالمنحنى (C_f) و (Δ) و المستقيمين اللذين معادلتيهما : $x = e^{-2}$ و x=1 .

III)) نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $h(x) = xe^{-\frac{x}{2}} - e^x + 1$

1) بيّن انه من أجل كل عدد حقيقي x: $h(x) = f(e^x)$

2) استنتج جدول تغيرات الدالة h .

الموضوع الثاني

التمرين الأول:(4.5نقط)

a عدد حقيقي موجب تماما ويختلف عن 1 . نعتبر الدالة f المعرفة و القابلة للإشتقاق على $[0;+\infty[$:

$$f(x)=\sqrt{1+a.x^2}$$

1.تحقق أن الدالة f متزايدة تماما على $[0;+\infty[$.

2.(u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $\begin{cases} u_0=0 \\ u_{n+1}=f(u_n) \end{cases}$

$I)$ نفرض أن : $0 \prec a \prec 1$

أ)برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 \le u_n \le \dfrac{1}{\sqrt{1-a}}$.

بـ) بين أن (u_n) متزايدة .

جـ) إستنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة .ثم عين نهايتها.

$II)$ نضع $a \succ 1$:

نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n=u_{n+1}^2-u_n^2$.

أ) بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .

ب) إستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}^2-u_n^2=a^n$.

جـ)من أجل كل عدد طبيعي n نعرف المتتالية (S_n) كالآتي :

$S_0=0$ و من أجل كل $n \ge 1$ ، $S_n=1+a+a^2+a^3+......+a^{n-1}$

تحقق أن من أجل كل عدد طبيعي n ، $S_n=\dfrac{a^n-1}{a-1}$.

د) إستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n=\sqrt{S_n}$.ثم أحسب نهاية (u_n) .

التمرين الثاني:(4.5نقط)

1. a و b عددان طبيعيان مكتوبان في النظام ذي الأساس ثلاثة على الشكل $a=\overline{201}$ و $b=\overline{100}$

أكتب العددين a و b في النظام العشري .

2. x ، y عددان صحيحان و (E) المعادلة ذات المجهول $(x\ ;\ y)$ التالية :

$$ax-by=3$$

أ)بين أنه إذاكانت الثنائية $(x\ ;\ y)$ حلا للمعادلة (E) فإن : $x \equiv 0[3]$.

بـ)إستنتج حلا خاصا $(x_0\ ;\ y_0)$ حيث $0 \le x_0 \prec 5$.ثم حل المعادلة (E) .

3.نرمز بالرمز d إلى القاسم المشترك الأكبر للعددين x و y حيث $(x\ ;\ y)$ حل للمعادلة (E).

أ)ماهي القيم الممكنة للعدد d ؟

بـ) بين ان $p\gcd(x,y)=p\gcd(y,3)$.

جـ)عين الثنائيات $(x\ ;\ y)$ حلول المعادلة (E) حتى يكون $\dfrac{y}{x}$ كسرا قابلا للإختزال .

4) (u_n) و (v_n) متتاليتان حسابيتان معرفتان على $\mathbb{N}$: $u_0 = 2$ ، $v_0 = 5$

$u_{n+1} = u_n + 19$ و $v_{n+1} = v_n + 9$

-عين كل الثنائيات $(p;q)$ للأعداد الطبيعية التي تحقق ، $u_p = v_q$ و $|q-p| \leq 20$.

التمرين الثالث :(4نقط)

كيس فيه أربع كرات حمراء وكرتين سوداوين لا نفرق بينها عند اللمس.

العملية الأولى نسحب من الكيس عشوائيا كرتين في آن واحد .

نرمز بـ ، إلى الحوادث ، A_0 "لانحصل على أي كرة سوداء"

A_1"الحصول على كرة سوداء واحدة فقط"

A_2 "الحصول على كرتين سوداوين"

أحسب كل من $p(A_0)$، $p(A_1)$ و $p(A_2)$.

2.بعد عملية السحب الأول ،يبقى في الكيس أربع كرات .نقوم بالسحب الثاني إذ نسحب كرتين في آن واحدأيضا.

نرمز إلى الحوادث : B_0 "لانحصل على أي كرة سوداءفي السحب الثاني"

B_1"الحصول على كرة سوداء واحدة فقط في السحب الثاني "

B_2 "الحصول على كرتين سوداوين في السحب الثاني "

أ)أحسب كل من $p_{A_0}(B_0)$ ، $p_{A_1}(B_0)$ و $p_{A_2}(B_0)$.ثم بين أن $p(B_0) = \dfrac{2}{5}$.

ب)أحسب كل $p(B_1)$و $p(B_2)$.

ج)بإفتراض أننا على كرة سوداء في السحب الثاني.مإحتمال الحصول على كرة سوداءواحدة في السحب الأول؟

3. C نعتبر الحادثة "الحصول على كرتين سوداوين، بعد السحب الأول والإضرار إلى السحب الثاني " .

أحسب $p(C)$.

التمرين الرابع:(7نقط)

$I)$ 1. لتكن الدالة u المعرفة على $\mathbb{R}$بـ : $u(x) = xe^x$

أدرس إتجاه تغير الدالة uثم إستنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $xe^x \geq -\dfrac{1}{e}$.

2. gدالة معرفة على $]-\infty;0]$ بـ : $g(x) = 1-(x^2+x+1)e^x$

أ-باستعمال إتجاه تغير الدالة g بين أن من أجل كل x من $]-\infty;0]$ ، $g(x) \geq 0$.

(لايطلب حساب نهاية g عند $-\infty$)

$II)$لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يأتي:
$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x+1}{xe^x+1} & x \leq 0 \\ f(x) = x\ln\left(\dfrac{x}{2}\right)+1 & x \succ 0 \end{cases}$$

ليكن (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.(الوحدة $2cm$)

1.أ) أدرس إستمرارية f عند 0 ؟

ب)أدرس قابلية إشتقاق الدالة f عند 0 .فسر النتيجة بيانيا.

2. أ)أحسب نهاية الدالة f عند $-\infty$ و $+\infty$.

ب)بين أن المستقيم (Δ)ذو المعادلة $y=x+1$ مقارب مائل للمنحنى (C) بجوار $-\infty$.

ثم أدرس الوضعية النسبية للمنحنى (C) والمستقيم (Δ) على المجال $]-\infty;0]$.

3 .أ)أدرس اتجاه تغير الدالة f على $]-\infty;0]$ ،ثم على المجال $]0;+\infty[$.

(يمكن ملاحظة أن إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ على $]-\infty;0]$).

ب) شكل جدول تغيرات الدالة f .

4. I نقطة من المنحنى (C) فاصلتها -1 .

أ)بين أن معادلة المماس (T) للمنحنى (C) عند النقطة I هي : $y=\dfrac{e}{e-1}(x+1)$.

ب)أدرس وضعية المنحنى (C) بالنسبة إلى المماس (T) . (إستعن بالإجابة المنجزة في I)1.)

5. أنشئ (T)، (Δ) و (C) .

6 . n عدد طبيعي غير معدوم .

نسمي $A(n)$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C) والمستقيمات التي معادلاتها $y=0$ و $x=1$ و $x=n+1$.

أ) (u_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ،

$u_n=\int_n^{n+1} f(x)dx$ و المجموع $S_n=u_1+u_2+u_3+....+u_n$.

بين أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $S_n=A(n)$.

ب) أحسب بـ cm^2 المساحة $A(n)$ بدلالة n .ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية الوطنية
وزارة التربية الوطنية

الإجابة النموذجية لموضوع بكالوريا تجريبي2022 في مادة الرياضيات / الشعبة : رياضيات

عناصر الإجابة(الموضوع الأول)	العلامة	
	مجزأة	المجموع
التمرين الأول:(5 نقاط)		
1)أ) 193عددا أوليا لأن 193 لا يقبل القسمة على 2،3 ،5 ، 7 ، 11 ،	0.25	
13.$\left(\sqrt{193} \simeq 13.89\right)$		
ب) $206 = 2 \times 103$.	0.25	0.5
2)أ)		
$PGCD(a;b) = 3$ معناه $a = 3a'$ ، $b = 3b'$ و $PGCD(a';b') = 1$.	0.25	
$PPCM(a;b) = 618$: $618 \times 3 = 3a' \times 3b'$	0.25	
و منه $a' \times b' = 206$		
إذن $(a';b') \in \{(1;206),(206;1),(2;103),(103;2)\}$	0.5	
بالتالي $(a;b) \in \{(3;618),(618;3),(6;309),(309;6)\}$	0.5	
و $4 \times 309 - 193 \times 6 = 78$	0.25	
إذن $(a;) = (309;6)$		
ب)حل المعادلة ( ): $(x;y) = (193k + 309; 4k + 6)$ حيث	0.5	
$k \in \mathbb{Z}$		2.25
1) $M = \overline{\alpha 12 \beta} = 343\alpha + \beta + 63$	0.25	
$N = \overline{5\beta 1\alpha} = \alpha + 49\beta + 1722$	0.25	
أ) $N - M \equiv 0[193]$		
	0.25	
ب) $44\alpha + 48\beta = 193l + 78$ حيث $l \in \mathbb{Z}$		
	0.25	
$11\alpha + 12\beta = 193k + 309$ مع $0 \leq 11\alpha + 12\beta \leq 138$		
	0.25	
إذن$11\alpha + 12\beta = 116$.		
جـ) $\alpha = 4$ و$\beta = 6$		
$M = 1441$ و $N = 2020$	0.25*4	2.25
التمرين الثاني:(4 نقاط)		

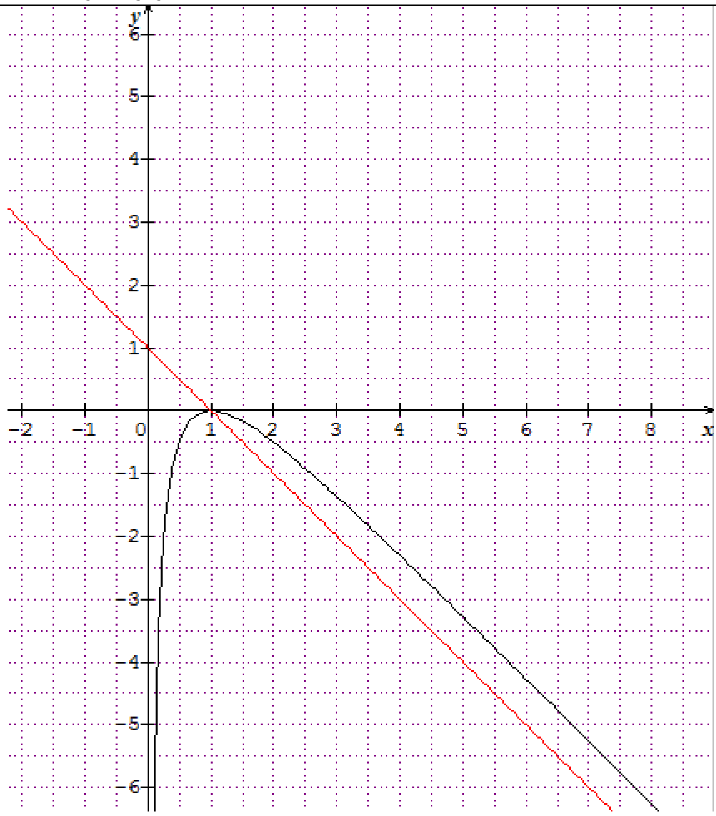
1) p_1 ، p_2، p_3 تشكل ثلاث حدود متتابعة من متتالية حسابية أساسها$\frac{1}{4}$ مع	0.25*2	
و منه	0.25*3	1.25
2) $p_2 = \quad p_1 = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$		
3) قيم Xهي :$\{2; 3; 4; 5\}$	0.25*3	0.75
قانون الاحتمال لـ X	0.5	
	1	
	0.5	2

	2	3	4	5

التمرين الثالث:(4 نقاط)

1) أ) إثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي n $U_{n+1} = 2\sqrt{U_n + 1} - \frac{2}{\sqrt{U_n + 1}}$،	0.25	
ب) $1 < U_0 < 3$	0.25	
نفرض أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1 < U_n < 3$ نجد	0.5	
و منه من أجل كل عدد طبيعي n : $1 < U_n < 3$		
جـ) ${}_{n+1} - U_n = \frac{U_n\left(2-\sqrt{u_n+1}\right)}{\sqrt{U_n+1}}$ حيث من أجل كل عدد طبيعي n :	0.25	
$1 < U_n < 3$نجد أن المتتالية (U_n) متزايدة تماما	0.5	
- المتتالية (U_n) متزايدة تماما و محدودة من الأعلى بـ 3 نستنتج أنها متقاربة .	0.25	2
2) أ) إثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $9 - U_{n+1}^2 < 4(3 - U_n)$	0.75	
ب) إثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي ، $3 - U_{n+1} < \frac{4}{5}(3 - U_n)$	0.75	
لدينا من أجل كل عدد طبيعي n، $3 - U_{n+1} < \frac{4}{3+U_{n+1}}(3 - U_n)$		

		و $U_0 < U_1 < U_2 < \cdots < U_{n+1}$ إذن $2 < U_{n+1}$
		فنجد أنه من أجل كل عدد طبيعي ، $3 - U_{n+1} < \frac{4}{5}(3 - U_n)$
		جـ) إثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $3 - U_n < \left(\frac{4}{5}\right)^n$
2	0.25	د) من أجل كل عدد طبيعي n ، $3 - \left(\frac{4}{5}\right)^n < U_n < 3$
	0.25	إذن $\lim_{n\to+\infty} U_n = 3$
		التمرين الرابع:(7 نقاط)
		I) نعتبر الدالة g المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ : $g(x) = 2x\sqrt{x} - 2 + lnx$
0.75	0.25*3	1) من أجل x من $]0;+\infty[$: $g'(x) = 3\sqrt{x} + \frac{1}{x}$ و $g'(x) > 0$
		إذن g متزايدة تماما على $]0;+\infty[$.
		2) $g(1)=0$ وبما أن g متزايدة تماما على $]0;+\infty[$ فإن :
0.	0.25*2	$g(x) < 0$ على المجال $]0;1[$ و $g(x) > 0$ على المجال $]1;+\infty[$.
		II) نعتبر الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ : $f(x) = \frac{lnx}{\sqrt{x}} + 1 - x$
		1) بوضع $t = \sqrt{x}$ لما $x \to +\infty$: $t \to +\infty$
0.5	0.5	$\lim_{x\to+\infty} \frac{lnx}{\sqrt{x}} = \lim_{t\to+\infty} \frac{ln\,t^2}{t} = \lim_{t\to+\infty} \frac{2lnt}{t} = 0$
0.5	0.25*2	2) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x\to0} f(x) = -\infty$
	0.25	3) أ) $\lim_{x\to+\infty}[f(x) - (-x+1)] = 0$
		إذن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = -x + 1$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$.
0.75	0.5	ب) (C_f) يقع أسفل (Δ) على المجال $]0;1[$ و (C_f) يقع أعلى (Δ) على المجال
		$]1;+\infty[$
	1	4) أ) بين انه من أجل كل عدد حقيقي x من $]0;+\infty[$: $f'(x) = -\frac{g(x)}{2x\sqrt{x}}$
1.5	0.5	ب) إشارة $f'(x)$ من إشارة $-g(x)$
		جدول تغيرات الدالة f.
0.75	0.25+0.5	

	0.75	
1		
	0.25	
0.25	0.25	(5
0.5	0.5	6) أ) باستعمال التكامل بالتجزئة $\int_{e^{-2}}^{1}\frac{lnx}{\sqrt{x}}\,dx = \left[2\sqrt{x}lnx\right]_{e^{-2}}^{1} - \int_{e^{-2}}^{1}\frac{2\sqrt{x}}{x}dx =$ $\left[2\sqrt{x}lnx - 4\sqrt{x}\right]_{e^{-2}}^{1} = 8e^{-1} - 4$ ب) مساحة للحيز المحدد بالمنحنى (C_f)و (Δ) و المستقيمين اللذين معادلتيهما $x = e^{-2}$ و x=1 هي: $\int_{e^{-2}}^{1}[(-x+1) - f(x)]\,dx = \int_{e^{-2}}^{1} -\frac{lnx}{\sqrt{x}}\,dx = (-8e^{-1}+4)u.a$ III)) نعتبر الدالة hالمعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $h(x) = xe^{-\frac{x}{2}} - e^x + 1$ 1) إثبات انه من أجل كل عدد حقيقي x: $h(x) = f(e^x)$ 2) استنتاج جدول تغيرات الدالة h من أجل كل عدد حقيقي x: $h'(x) = e^x f'(e^x)$. h متناقصة تماما على المجال$]-\infty;0]$ و متزايدة تماما على المجال$[0;+\infty[$. $\lim_{x\to 0} h(x) = -\infty$ و $\lim_{x\to +\infty} h(x) = -\infty$

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية الوطنية
وزارة التربية الوطنية

الحل النموذجي لبكالوريا التجريبي دورة ماي 2022 **شعبة :الرياضيات**

الموضوع الثاني

عناصر الإجابة	العلامة مجزأة	العلامة مجموع
التمرين الأول /1 $f'(x)=\frac{ax}{\sqrt{1+ax^2}}$ ،من أجل كل $x\in[0;+\infty[$: $f'(x)\geq 0$ 0.5........ . تقبل طرق أخرى $[0;+\infty[$ متزايدة تماما على		04.5
/2 $(I$ أ)برهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0\leq u_n\leq\frac{1}{\sqrt{1-a}}$ **0.5........** **ب) متزايدة . 0.5 ......** **جـ)متزايدة ومحدودة من الأعلى بـ** $\frac{1}{\sqrt{1-a}}$ **فهي متقاربة .نهايتها** $\frac{1}{\sqrt{1-a}}$ 0.5...... $(II$ $a>1$ **.1** (v_n) متتالية هندسية أساسها a وحدها الأول $v_0=1$ **0.5..... ....** **.2** $v_n=v_0.a^n=a^n$ **ومنه** $u_{n+1}^2-u_n^2=a^n$ **0.5..........** جـ) $S_0=0$ **و من أجل كل** $n\geq 1$ ، $S_n=1+a+a^2+a^3+......+a^{n-1}$ $S_0=0$ **و من أجل كل** $n\geq 1$ ، $S_n=\frac{a^n-1}{a-1}$ **0.5** **ومنه من أجل كل عدد طبيعي** n ، $S_n=\frac{a^n-1}{a-1}$ $S_n=1+a+a^2+a^3+......+a^{n-1}$ **د)** $S_n=u_1^2-u_0^2+u_2^2-u_1^2+u_3^2-u_2^2+......+u_n^2-u_{n-1}^2$ **ومنه** $u_n^2=S_n$ **وبالتالي** $u_n=\sqrt{S_n}$ **و** $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$ 01.........		
التمرين الثاني: .1 $a=19$ **و** $b=9$ **0.5...........** .2 أ) $19x-9y=3$ **فإن** $x\equiv 0[3]$. **0.5..........** **ب) الحل الخاص** $(x_0;y_0)=(3;6)$ **0.25............** **حلول المعادلة** $(x;y)=(9k+3;19k+6)$ **مع** k **عدد صحيح. 0.5..........** .3 أ) $d\|3$ **ومنه** $d\in\{1,3\}$ **0.5 ....** **ب) نضع** $p\gcd(x,y)=d$ **و** $p\gcd(y,3)=d'$ **0.75.........** **نجد** $d=d'$.	4.5	

عناصر الإجابة	مجزأة	مجموع
جـ) $\frac{y}{x}$ كسر قابلا للإختزال يكافئ $p\gcd(x,y)=3$ 0.5 .... **عدد صحيح .** p **مع** $(x;y)=(27p+3;57p+6)$ 4. $u_p=2+19p$ **و** $v_q=5+9q$ **01. ....** $(p;q)=(9k+3;19k+6)$ **ومنه** $19p-9q=3$ **يكافئ** $u_p=v_q$ $(p;q)\in\{(3,6);(12,25)\}$ **ومنه**		
التمرين الثالث: 1/ $p(A_0)=\frac{C_4^2}{C_6^2}=\frac{2}{5}$ ، $p(A_1)=\frac{8}{15}$ ، $p(A_2)=\frac{1}{15}$ 0.75............		**04**
2/ أ) $p_{A_0}(B_0)=\frac{C_2^2}{C_4^2}=\frac{1}{6}$ ، $p_{A_1}(B_0)=\frac{1}{2}$ ، $p_{A_2}(B_0)=1$ 0.75 .... ومنه $p(B_0)=\frac{2}{5}$ 0.5........ ب) $p(B_1)=\frac{8}{15}$ و $p(B_2)=\frac{1}{15}$ 0.5+0.5........ جـ) $p_{B_1}(A_1)=\frac{p(A_1\cap B_1)}{p(B_1)}=\frac{p(A_1)p_{A_1}(B_1)}{p(B_1)}$ نجد $p_{B_1}(A_1)=\frac{1}{2}$ 0.5		
3/ $p(C)=p(A_0\cap B_2)+p(A_1\cap B_1)$ نجد $p(C)=\frac{1}{3}$ 0.5...........		
عناصر الإجابة	**العلامة** **مجزأة**	**مجموع**
التمرين الرابع: I) 1. الدالة متناقصة تماما على $\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right]$ ومتزايدة تماما على $\left[-\frac{1}{2};+\infty\right[$ 0.25 .... من أجل كل عدد حقيقي x ، $xe^x\geq-\frac{1}{e}$. 0.25...... 2. $g'(x)=-(x^2+3x+2)e^x$ 0.25..... ومنه من أجل كل x من $]-\infty;0]$ ، $g(x)\geq 0$ 0.25......		**07**

$(II$ 1/ أ) f مستمرة عند 0 ....0.5

ب) f قابلة للإشتقاق عند 0 من اليسار وعددها المشتق $f_g'(0)$ معدوم 0.25

f غير قابلة للإشتقاق عند 0 من اليمين لأن $\lim_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = -\infty$ 0.25

يقبل نصف مماس من اليمين يوازي حامل محور التراتيب ونصف مماس من اليسار يوازي حامل محور الفواصل 0.25

$(II$ 2. أ) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ 2 x0.25

ب) $\lim_{x \to -\infty} \left[f(x) - (x+1)\right] = 0$ 0.25

(C) يقع أسفل (Δ) على $]-\infty;-1[$ ويقع أعلى (Δ) على $]-1;0[$ ....0.5 ويقطعه في النقطة $A(-1,0)$

$(II$ 3. أ) على $]-\infty;0]$: $f'(x) = \frac{g(x)}{(xe^x+1)^2}$ ، f متزايدة تماما على $]-\infty;0]$ ...0.25

على $]0;+\infty[$: $f'(x) = 1 + \ln\left(\frac{x}{2}\right)$ ، 0.25

ب) جدول التغيرات 0.5

$(II$ 4. أ) $(T): y = \frac{e}{e-1}(x+1)$ **.......0.25**

ب) وضعية المنحنى (C) بالنسبة إلى المماس (T) 0.5

$(II$ 5. إنشاء (T) ، (Δ) و (C) **.........0.75**

$$S_n = \int_1^2 f(x) + \int_2^3 f(x) + ... + \int_n^{n+1} f(x)$$

$(II$ 6. أ) $S_n = A(n)$ **.........0.25**

ب) $$A(n) = \left[4n + 2(n+1)^2\left[\ln\left(\frac{n+1}{2}\right) - \frac{1}{2}\right] + \ln(4e)\right] cm^2$$ **..........0. 5**

$\lim_{n \to +\infty} S_n = \lim_{n \to +\infty} A(n) = +\infty$ **..........0.25**

امتحان تجريبي لبكالوريا دورة جوان 2021

شعبة: رياضيات — **المدة: 4 ساعات ونصف**

على المترشح أن يختار احد الموضوعين

الموضوع الأول

التمرين الأول:

لتكن المتتالية (U_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ ب: $U_0 = \frac{1}{5}$ و $U_{n+1} = 1 - \frac{1}{2U_n+1}$

1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < U_n < \frac{1}{2}$.

2) أ) تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} - U_n = \frac{U_n(1-2U_n)}{2U_n+1}$ ،ثم استنتج اتجاه تغير (U_n) .

ب) بين أن المتتالية (U_n) متقاربة ، ثم احسب نهايتها.

3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $V_n = \frac{5^n U_n}{2U_n+1}$.

أ) اثبت أن (V_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.

ب) اكتب عبارة $_n$ بدلالة n ، ثم بين أن : $U_n = \frac{2^n}{2^{n+1}+3}$ و احسب $\lim_{n\to+\infty} U_n$.

4) احسب بدلالة n المجموع: $S_n = \frac{1}{U_0} + \frac{1}{U_1} + \cdots + \frac{1}{U_n}$

التمرين الثاني:

المستوي المركب مزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ ،نعتبر النقط A ، B و C التي لواحقها على الترتيب $z_A = 1+i$ ، $z_B = \sqrt{3}-i$ و $z_c = 4$.

1) أ) اكتب الاعداد z_A ، z_B و $\frac{z_A}{z_B}$ على الشكل المثلثي ثم على الشكل الأسي.

ب) أكتب العدد المركب $\frac{z_A}{z_B}$ على الشكل الجبري، ثم استنتج القيمة المضبوطة لكل من: $\cos(\frac{5\pi}{12})$ و $\sin(\frac{5\pi}{12})$.

2) أوجد قيمة العدد الطبيعي n بحيث يكون $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n = \frac{1}{8}(1-\sqrt{3}i)$ ، احسب $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n$.

3) ليكن التحويل النقطي S الذي يرفق بكل نقطة M النقطة M' حيث: $z' = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{i5\pi}{12}}z$.

حيث z و z' هي لواحق النقطتين M و M' على الترتيب.

- حدد طبيعة التحويل النقطي S وعناصره المميزة.

4) أ) أوجد المجموعة (T_1) للنقط M من المستوي و التي تحقق: $z = z_c + 2e^{i\theta}$ لما θ تمسح $\mathbb{R}$.

ب) أوجد المجموعة (T_2) للنقط M من المستوي و التي تحقق: $Arg(z - z_c) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ مع .

5) أوجد صورة (T_1) بالتحويل S ، استنتج مساحتها.

التمرين الثالث:

1) ادرس حسب قيم n بواقي قسمة العدد الطبيعي 4^n على 7 .
2) هل العدد $2020^{2021} - 1441^{1442} - 1$ يقبل القسمة على 7 .
3) عين حسب قيم العدد الطبيعي n باقي قسمة العدد $1957^{3n} + 1957^{2n} + 1957^n$ على 7 .
4) نعتبر العدد $A = \overline{2a032a1}$ المكتوب في النظام ذي الأساس 4 .

- عين قيمة العدد الطبيعي a التي من أجلها A يقبل القسمة على ثم أكتب A في النظام العشري.

التمرين الرابع:

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

جزء 1: نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ ب: $g(x) = 1 + 4xe^{2x}$

1) بين انه من اجل كل x من $\mathbb{R}$: $g'(x) = 4(1+2x)e^{2x}$.
2) ادرس اتجاه تغير الدالة g وشكل جدول تغيراتها.
3) استنتج حسب قيم x من $\mathbb{R}$ أن: $g(x) \geq 0$

جزء 2: نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ ب: $f(x) = (2x+1)e^{2x} + x + 1$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ و $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2cm$

1) احسب نهاية الدالة عند $+\infty$ و $-\infty$.
2) أ) بين أنه من اجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = g(x)$.

   ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.
3) أ) بين أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x + 1$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$.

   ب) أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) .
4) أ) اكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة التي فاصلتها 0.

   ب) بين أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف فاصلتها $\frac{-1}{2}$.

   ج) أنشئ (T) ، (Δ) والمنحنى (C_f) .
5) أ) باستعمال التكامل بالتجزئة، اثبت أن: $\int_0^{\frac{1}{2}}(2x-1)e^{2x}x = 1 - \frac{e}{2}$

   ب) لتكن A المساحة (بالسنتيمتر مربع) للحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيم (T)

   والمستقيمين اللذين معادلتهما: $x = 0$ ، $x = \frac{1}{2}$

   - بين أن: $A = (6-2e)cm^2$

الموضوع الثاني

التمرين الأول:

أ/ نعتبر في مجموعة الاعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة:

$$(E) \ldots\ldots . z^3-(4+i)z^2+(13+4i)z-13i=0$$

1. برهن أن العدد i حل للمعادلة (E) .

2. عين الاعداد الحقيقية a ، b و c بحيث من أجل كل عدد مركب z لدينا:

$$z^3-(4+i)z^2+(13+4i)z-13i=(z-i)(az^2+bz+c)$$

3. حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E)

ب/ نعتبر في المستوي المركب المزود بمعلم متعامد ومتجانس النقط: A ، B و C لواحقها i ، $2+3i$ ، $2-3i$ على الترتيب.

1. ليكن r الدوران الذي مركزه النقطة B وزاويته $\frac{\pi}{4}$ ، عين لاحقة النقطة D صورة A بالدوران r .
2. برهن أن النقط D ، B ، C على استقامة ثم عين الكتابة المركبة للتحاكي ذو المركز B والذي يحول D إلى C .
3. استنتج طبيعة وخصائص التحويل النقطي الذي مركزه B يحول A إلى C .

التمرين الثاني:

تحتوي علبة شكولاتة ذات نوعين: بيضاء وسوداء على سبعة قطع بيضاء منها 4 قطع مبلغها 1 و ثلاثة مبلغهم 5، و 8 سوداء منها ستة مبلغها 1 و اثنتان مبلغهما 5.

نسحب قطعتين من العلبة في ان واحد.

لتكن الحوادث التالية: A" سحب قطعتين من نفس النوع"، B"سحب قطعتين لهما نفس المبلغ"،

C "سحب قطعة سوداء على الأقل"

1) بين أن: $P(A)=\frac{49}{105}$.
2) أحسب $P(B)$ و $P(C)$.
3) احسب احتمال الحادثة " سحب قطعتين من نفس النوع ولهما نفس المبلغ" ثم استنتج احتمال الحادثة " سحب قطعتين من نفس النوع أو لهما نفس المبلغ"
4) نعتبر المتغير العشوائي X الذي يساوي المبلغ الإجمالي للقطعتين المسحوبتين.

أ) حدد قيم وقانون احتمال المتغير العشوائي X.

ب) احسب الامل الرياضي، التباين والانحراف المعياري.

التمرين الثالث:

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ ب:

$$u_{n+1} = \frac{3u_n - 1}{2u_n}$$

1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > 1$
2) أ) بين أن: $u_{n+1} - u_n = \frac{(u_n-1)(1-2u_n)}{2u_n}$ ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) .
ب) استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة وعين نهايتها.
3) أ) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - 1 \leq \frac{1}{2}(u_n - 1)$
ب) استنتج أن: $u_n - 1 \leq (\frac{1}{2})^n$
ج) احسب نهاية المتتالية (u_n).
4) لتكن (v_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ ب: $v_n = \frac{u_n-1}{2u_n-1}$
أ) بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$.
ب) أكتب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n .

احسب بدلالة n المجموع: $S_n = \frac{v_0-1}{u_0} + \frac{v_0-1}{u_0} + \cdots + \frac{v_n-1}{u_n}$

التمرين الرابع:

الجزء 1:

نعتبر f الدالة المعرفة على R ب: $g(x) = \frac{e^x}{1+e^x} - \ln(1 + e^x)$.

1. ادرس اتجاه تغير الدالة g وشكل جدول تغيراتها.
2. بين أن $g(x) \leq 0$ من أجل كل x من R .

الجزء 2:

f دالة معرفة على R ب: $f(x) = e^{-x}\ln(1 + e^x)$ ، تمثيلها البياني في مستوي المزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. احسب نهاية الدالة f عند $-\infty$ و $+\infty$ ، ثم فسر النتيجة هندسياً.
2. أ/ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = \frac{g(x)}{e^x}$.
ب/ استنتج اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها.
ج/ أنشئ (C_f) .

الجزء 3:

نعتبر الدالة F المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ ب: $F(x) = \int_0^x f(t)dt$.

1. تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي t : $\frac{1}{1+e^t} = 1 - \frac{e^t}{1+e^t}$
2. باستعمال التكامل بالتجزئة بين أن: $F(x) = -\ln\left(\frac{1+e^x}{e^x}\right) - f(x) + 2ln2$
3. استنتج مساحة الحيز المستوي المحدد ب (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها $y = 0$ ، $x = ln4$ ، $x = 0$.