الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية

مديرية التربية لولاية تمنراست **البكالوريا التجريبية دورة ماي 2021**

الشعبة : رياضيات

اختبار في مادة الرياضيات **المدة : أربع ساعات و نصف**

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين

الموضوع الأول :

التمرين الأول: (04 نقاط)

1. أ- عين مجموعة الثنائيات $(x\,;y)$ من الأعداد الصحيحة حلول المعادلة (E): $8x-5y=3$

ب. ليكن m عددا صحيحا بحيث توجد الثنائية $(p;q)$ من الأعداد الصحيحة تحقق: $m=8p+1$ و $m=5q+4$

- بين أن الثنائية $(p;q)$ هي حل للمعادلة و استنتج أن : $m\equiv 9[40]$

ج- عين أصغر عدد صحيح m أكبر من 2000 و يحقق $m\equiv 9[40]$

2. ليكن n عددا طبيعيا.

أ- بين أنه من أجل كل k من $\mathbb{N}$: $2^{3k}\equiv 1[7]$.

ب-ما هو باقي القسمة الإقليدية للعدد 2^{1442} على 7 ؟

3. أ- حلل العدد 1998 الى جداء عوامل أولية ثم استنتج الأعداد الطبيعية التي مربعاتها تقسم العدد 1998

ب- عين الثنائيات من الأعداد الطبيعية حيث: $m^2-34d^2=1998$

حيث $d=pgcd\,(a;b)$ و $m=ppcm(a;b)$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

يحتوي كيس على 7 كرات بيضاء و 3 سوداء لا نفرق بينها باللمس نسحب عشوائيا كرتين من الكيس مع الإرجاع (نسحب الكرية الأولى نسجل لونها ثم نعيدها الى الكيس ثم نسحب الكرية الموالية).

1 -أحسب احتمال الحوادث التالية :

A " الحصول على الكريتيين بيضاويين "

B " الحصول على كريتيين من نفس اللون "

2 -نعرف لعبة حظ كما يلي: تمنح لكل كرية بيضاء العلامة α حيث α عدد حقيقي موجب و لكل كرية سوداء العلامة $-\alpha$.

ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب كريتيين مجموع النقاط المحصل عليها .

أ. عين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X و احسب أمله ألرياضياتي $E\,(X)$.

ب. عين قيمة العدد α حتى تكون اللعبة مربحة.

3 -نضيف الى الكيس $n-3$ كرية سوداء و نعيد عملية السحب المعرفة أعلاه

ما هو عدد الكريات السوداء التي تم إضافتها علما أن احتمال الحادثة A يساوي $\frac{1}{4}$

التمرين الثالث : (04 نقاط)

لتكن (u_n) متتالية عددية معرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ بحدها الأول $u_1=2$ و من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم : $u_{n+1}=\frac{2}{3}u_n+\frac{1}{3}n+1$.

1. أحسب الحدود u_2 و u_3 و u_4 ثم ضع تخميناً حول اتجاه تغير المتتالية (u_n).
2. أ- برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم ؛ $u_n \le n+3$.

ب- أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم: $u_{n+1}-u_n=\frac{1}{3}(n+3-u_n)$. استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n)

3. (v_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم بـ: $v_n=u_n-n$.

أ -بين المتتالية (v_n)متتالية هندسية أساسها $\frac{2}{3}$ يطلب تعيين حدها الأول .

ب أكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n ثم أستنتج u_n بدلالة n.

4. نضع : $S_n=\frac{2}{3}v_1+\left(\frac{2}{3}\right)^2v_2+...+\left(\frac{2}{3}\right)^nv_n$ و $S_n'=u_1+u_2+...+u_n$.

أحسب بدلالة n المجموعين S_n و S_n' ثم أحسب $\lim_{n\to+\infty}\frac{S_n}{n}$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I - g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$$g(x)=1-(x^2-2x+2)e^{-x}$$

1. ادرس تغيرات الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها
2. بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيداً α حيث $0{,}35<\alpha<0{,}36$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II - f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=x-1+(x^2+2)e^{-x}$

و (C) تمثيلها البياني في المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$..(الوحدة $2cm$)

1. أحسب $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim_{x\to-\infty}f(x)$.
2. بين انه من أجل كل عدد حقيقي x فإن $f'(x)=g(x)$ ثم أستنتج تغيرات الدالة f و شكل جدول تغيراتها.
3. أ. برهن أن المستقيم (Δ) الذي معادلته من الشكل $y=x-1$ مقارب للمنحنى (C) عند $+\infty$.

ب. حدد وضعية (C) بالنسبة للمستقيم (Δ).

4. أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C) في النقطة ذات الفاصلة 0
5. أنشئ (Δ) و (T) و المنحنى (C)

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

أذكر إن كانت الجمل التالية صحيحة أم خاطئة مبرّرا الإجابة .

1) من أجل كل عدد طبيعي n ، 3 يقسم العدد $2^{2n}-1$.

2) إذا كان x عددا صحيحا حلا للمعادلة $x^2-x\equiv 0[6]$ فإن $x\equiv 0[6]$.

3) إذا كان $x^2\equiv y^2[17]$ فإن $x\equiv y\,[17]$.

4) مجموعة حلول المعادلة $12x-5y=3$ المعرفة في Z^2 ، هي مجموعة الثنائيات (x,y) من الشكل $(4+10k\,;9+24k)$ مع $k\in Z$.

5) M و N عددان طبيعيان كتابتهما في النظام العشري هي : $\overline{abc}$ و $\overline{bca}$ على الترتيب .

إذا كان M يقبل القسمة على 27 فإن $M-N$ يقبل القسمة على 27.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

لدينا وعائيين U_1 و U_2 يحتويان على كرات لا نفرق بينها عند اللمس . الوعاء U_1 يحتوي على n كرة بيضاء و ثلاث كرات سوداء (n عدد طبيعي غير معدوم) و الوعاء U_2 يحتوي على كرتين بيضاوين و كرة واحدة سوداء .

نسحب عشوائيا كرة من U_1 نضعها في U_2 ثم نسحب كرة من U_2 نضعها في U_1 .

1. نعتبر الحادثة A يبقى الوعاءان على ما كانا عليه.

أ –بين أن $P(A)=\dfrac{3(n+2)}{4(n+3)}$

ب عين النهاية $\lim\limits_{n\to+\infty}P(A)$

2. نعتبر الحادثة B الوعاء U_2 يحتوي على كرة واحدة بيضاء فقط . تحقق أن $P(B)=\dfrac{3}{2(n+3)}$

3. يدفع لاعب $20DA$ و يقوم بالتجربة السابقة

أ. إذا كان بعد التجربة الوعاء U_2 يحتوي على كرة واحدة بيضاء اللاعب يكسب $2n\ DA$.

ب. إذا كان بعد التجربة الوعاء U_2 يحتوي على كرتين بيضاوين اللاعب يكسب $n\ DA$

ج. إذا كان بعد التجربة الوعاء U_2 يحتوي على 3 كرات بيضاء اللاعب لا يكسب شيئاً

اشرح لماذا لا يكون للاعب أي ربح إذا كان n لا يفوق 10 .

4. فيما يلي نفرض أن $n>10$ نعتبر X المتغير العشوائي الذي يأخذ قيمة الربح الجبري للاعب

مثلاً : إذا وجد كرة واحدة بيضاء يكون الربح $X=2n-20$

أ –عين قانون الاحتمال المتغير العشوائي X

ب أحسب أمله ألرياضياتي .

ج– بين أن اللعبة تكون رابحة عندما يكون 25 كرة بيضاء على الأقل في الوعاء U_1 .

التمرين الثالث: (05 نقاط)

1. عين العددين المركبين α و β حيث : $\begin{cases}\alpha+\beta=-1\\ 2\overline{\alpha}+\beta=6i\end{cases}$

2. المستوي منسوب الى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O\,;\overrightarrow{u}\,,\overrightarrow{v}\right)$ نعتبر النقط I و A و B لواحقها على الترتيب $z_I=1$ و $z_A=1-2i$ و $z_B=-2+2i$.

أ –أنشئ النقط I و A و B

ب عين z_w لاحقة النقطة w مركز الدائرة (C) ذات القطر $[AB]$

3. D نقطة لاحقتها $z_D=\dfrac{3+9i}{4+2i}$ أكتب z_D على شكل الجبري ثم بين أن النقطة D تنتمي إلى الدائرة (C).

4. E نقطة من الدائرة (C) لاحقتها z_E حيث $z_E=e^{i\frac{\pi}{4}}z_I+\left(1-e^{i\frac{\pi}{4}}\right).z_w$

أ –أكتب العدد $z_E+\dfrac{1}{2}$ على الشكل الآسي .

ب استنتج أن $z_E=\dfrac{3\sqrt{2}-2}{4}+\dfrac{3\sqrt{2}}{4}i$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I – g دالة عددية معرفة على $]0;+\infty[$ بـ

$g(x)=x^2-1+\ln(x)$.

1. ادرس تغيرات الدالة g .

2. أحسب $g(1)$ ثم أستنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x على المجال $]0;+\infty[$.

II – دالة عددية معرفة على $]0;+\infty[$ بـ

$$f(x)=x-1-\frac{\ln(x)}{x}$$

و (C_f) تمثيلها البياني في المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\overrightarrow{i}\,,\overrightarrow{j}\right)$.

1. أحسب $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

2. بين أن من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما x : $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$.ثم شكل جدول تغيرات الدالة f

3. بين أن (C_f) يقبل مماساً (T) معامل توجهه 1 يطلب كتابة معادلته .

4. أ– بين أن (Δ) المستقيم الذي معادلته من الشكل $y=x-1$ مقارب للمنحنى (C_f)

ب– أدرس وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ).

5. أنشئ (Δ) و (T) و المنحنى (C_f)

6. ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط m عدد حلول المعادلة $(m+1).x+\ln(x)=0$.

انتهى الموضوع الثاني

التصحيح المفصل الموضوع الأول شعبة الرياضيات البكالوريا التجريبية :

التمرين الأول: (04 نقاط)

1. أ- تعيين مجموعة الثنائيات $(x;y)$ من الأعداد الصحيحة حلول المعادلة $(E): 8x-5y=3$

لدينا $8=5+3$ و منه $8(1)-5(1)=3....(F)$ بطرح (F) من (E) نجد أن $8(x-1)=5(y-1)$ و

$pgcd(8;5)=1$ حسب مبرهنة غوص فإن $\begin{cases}x-1=5k\\y-1=8k\end{cases}:k\in Z$ أي $\begin{cases}x=1+5k\\y=1+8k\end{cases}:k\in Z$ إذن مجموعة الحلول هي

$S=\{(1+5k;1+8k):k\in Z\}$

ب. ليكن m عددا صحيحا بحيث توجد الثنائية $(p;q)$ من الأعداد الصحيحة تحقق: $m=8p+1$ و $m=5q+4$

- إثبات أن الثنائية $(p;q)$ هي حل للمعادلة و استنتج أن: $m\equiv 9[40]$:

لدينا $8p+1=5q+4$ أي $8p-5q=3$ أي أن الثنائية $(p;q)$ حل للمعادلة (E).

$(p;q)=(1+5k;1+8k)$ و منه $m=8p+1=8+40k+1$ أي $m=40k+9$ إذن $m\equiv 9[40]$

ج- تعيين أصغر عدد صحيح m أكبر من 2000 و يحقق $m\equiv 9[40]$: $m\geq 2000$ أي أن $40k+9\geq 2000$ يعني

أن $k\geq \frac{1991}{40}$ إذن $k\geq 50$ بالتعويض بأصغر عدد لي هو 50 نجد أن $m=40\times 50+9=2009$

2. ليكن n عددا طبيعيا.

أ- إثبات أنه من أجل كل k من $\mathbb{N}$: $2^{3k}\equiv 1[7]$ لدينا $2^3\equiv 1[7]$ بالرفع الى قوى k نجد $2^{3k}\equiv 1[7]$

ب- باقي القسمة الإقليدية للعدد 2^{1442} على 7 : لدينا $1442=3\times 480+2$ و $2^{3\times 480}\equiv 1[7]$ بالضرب في 2^2

نجد $2^{3\times 480+2}\equiv 4[7]$ إذن باقي قسمة 2^{1442} على 7 هو 4 .

3. أ- تحليل العدد 1998 الى جداء عوامل أولية: $1998=2\times 3^3\times 37$

استنتج الأعداد الطبيعية التي مربعاتها تقسم العدد 1998 : هي 1 و 3

ب- تعيين الثنائيات من الأعداد الطبيعية حيث: $m^2-34d^2=1998$ حيث $d=pgcd(a;b)$ و

$m=ppcm(a;b)$ لدينا d قاسم للعدد m و منه d^2 قاسم للعدد m^2-34d^2 أي انه قاسم للعدد 1998 إذن

$d^2=1$ أو $d^2=9$ إذن $d=1$ أو $d=3$

لما $d=1$: $m^2=34+1998$ أي $m^2=2032$ و 2032 ليس مربع تام إذن m غير موجودة لأنها عدد طبيعي .

لما $d=3$: $m^2=34\times 9+1998$ أي $m^2=2304$ ومنه $m=48$: $a.b=m.d$ أي أن $a.b=144$ نضع $a=3a'$ و

$b=3b'$ حيث $pgcd(a';b')=1$ و منه نجد $a'b'=16$ يعني أن $(a';b')=(1;16)$ أو $(a';b')=(16;1)$ إذن

$(a;b)=(3;48)$ أو $(a;b)=(48;3)$.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

يحتوي كيس على 7 كرات بيضاء و 3 سوداء لا نفرق بينها باللمس نسحب عشوائيا كرتين من الكيس مع الإرجاع

(نسحب الكرية الأولى نسجل لونها ثم نعيدها الى الكيس ثم نسحب الكرية الموالية).

1 حساب احتمال الحوادث التالية : $P(A)=\frac{7^2}{10^2}=\frac{49}{100}$ و $P(B)=\frac{7^2+3^2}{10^2}=\frac{58}{100}$

A " الحصول على الكريتيين بيضاويين "

B " الحصول على كريتيين من نفس اللون "

2 نعرف لعبة حظ كما يلي: تمنح لكل كرية بيضاء العلامة α حيث α عدد حقيقي موجب و لكل كرية سوداء العلامة $-\alpha$.

ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب كريتيين مجموع النقاط المحصل عليها .

أ. تعيين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X :

x_i	-2α	0	2α
$P(X=x_i)$	$\frac{9}{100}$	$\frac{42}{100}$	$\frac{49}{100}$

حساب أمله ألرياضياتي $E(X)$: $E(X)=\frac{9}{100}(-2\alpha)+0+\frac{49}{100}(2\alpha)=\frac{80}{100}\alpha=\frac{4}{5}\alpha$

ب. تعيين قيمة العدد α حتى تكون اللعبة مربحة : يعني أن $E(X)>0$ يكافئ أن $\alpha>0$

3 نضيف الى الكيس $n-3$ كرية سوداء و نعيد عملية السحب المعرفة أعلاه

حساب عدد الكريات السوداء التي تم إضافتها علما أن احتمال الحادثة A يساوي $\frac{1}{4}$:

$P(A)=\frac{7^2}{(n+7)^2}=\frac{49}{(n+7)^2}$ و $P(A)=\frac{1}{4}$ بما n عدد طبيعي يعني أن $\frac{49}{(n+7)^2}=\frac{1}{4}$ يكافئ $(n+7)^2=4\times 49$ إذن $(n+7)=2\times 7$ أي أن $n=7$

التمرين الثالث : (04 نقاط)

لتكن (u_n) متتالية عددية معرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ بحدها الأول $u_1=2$ و من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم : $u_{n+1}=\frac{2}{3}u_n+\frac{1}{3}n+1$.

1. حساب الحدود u_2 و u_3 و u_4 : $u_2=\frac{2}{3}u_1+\frac{1}{3}+1=\frac{4+1+3}{3}=\frac{8}{3}$ و $u_3=\frac{2}{3}u_2+\frac{2}{3}+1=\frac{16+6+9}{9}=\frac{31}{9}$ و $u_4=\frac{2}{3}u_3+\frac{4}{3}+1=\frac{62+36+27}{27}=\frac{125}{27}$

تخميناَ حول اتجاه تغير المتتالية (u_n): المتتالية متزايدة لاحظنا أن $u_1\le u_2\le u_3\le u_4$

2. أ– البرهان أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم ؛ $u_n\le n+3$:

$u_1\le 1+3$ محققة

نفرض أن $u_n\le n+3$ صحيحة و لنبرهن صحة $u_{n+1}\le n+4$

$u_n\le n+3$ يعني أن $\frac{2}{3}u_n\le\frac{2n+6}{3}$ بإضافة $\frac{1}{3}n+1$ نجد $\frac{2}{3}u_n+\frac{1}{3}n+1\le\frac{2n+6+n+3}{3}$ أي أن

$u_{n+1}\le n+3$ إذن $u_{n+1}\le n+4$ صحيحة لأن $n+3\le n+4$

و منه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن $u_n\le n+3$.

ب− إثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم $u_{n+1}-u_n=\frac{1}{3}(n+3-u_n)$ لدينا

$u_{n+1}-u_n=\frac{2}{3}u_n+\frac{1}{3}n+1-u_n$ أي $u_{n+1}-u_n=-\frac{1}{3}u_n+\frac{1}{3}n+1$ إذن $u_{n+1}-u_n=\frac{-u_n+n+3}{3}$

. استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) : بما أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن $u_n\le n+3$ و

$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{3}(n+3-u_n)$ فإن $u_{n+1}-u_n\ge 0$ إذن المتتالية (u_n) متزايدة

3. (v_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم بـ: $v_n=u_n-n$.

أ− إثبات أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{2}{3}$ يطلب تعيين حدها الأول : $v_{n+1}=u_{n+1}-n-1$ أي

$v_{n+1}=\frac{2}{3}u_n+\frac{1}{3}n+1-n-1$ و منه $v_{n+1}=\frac{2}{3}u_n-\frac{2}{3}n$ أي $v_{n+1}=\frac{2}{3}(u_n-n)$ إذن $v_{n+1}=\frac{2}{3}v_n$ ومنه (v_n) متتالية

هندسية أساسها $\frac{2}{3}$ و حدها الأول $v_1=u_1-1=1$

ب−كتابة عبارة الحد العام v_n بدلالة n : $v_n=\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

استنتاج u_n بدلالة n: بما أن $u_n=v_n+n$ فإن $u_n=\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}+n$

4. نضع : $S_n=\frac{2}{3}v_1+\left(\frac{2}{3}\right)^2v_2+\ldots+\left(\frac{2}{3}\right)^nv_n$ و $S_n'=u_1+u_2+\ldots+u_n$.

حساب بدلالة n المجموعين S_n : مجموعة متتالية هندسية أساسها $\frac{4}{9}$ و حدها الأول $\frac{2}{3}v_1$ إذن

$S_n=\frac{2}{3}v_1\left[\frac{1-\left(\frac{4}{9}\right)^n}{1-\frac{4}{9}}\right]$ و منه $S_n=\frac{2}{3}\times\frac{9}{5}\left[1-\left(\frac{4}{9}\right)^n\right]$ إذن $S_n=\frac{6}{5}.\left[1-\left(\frac{4}{9}\right)^n\right]$

$S_n'=u_1+u_2+\ldots+u_n$ تعني أن $S_n'=(v_1+1)+(v_2+2)+\ldots+(v_n+n)$ مجموع متتاليتين حسابية (متتالية الإعداد الطبيعية)

و المتتالية هندسية (v_n) و منه $S_n'=\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\frac{2}{3}}+\frac{n(n+1)}{2}$ أي أن $S_n'=3\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]+\frac{n(n+1)}{2}$

حساب $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{S_n}{n}$: $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{S_n}{n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{6}{5n}\left[1-\left(\frac{4}{9}\right)^n\right]=0$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I − الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$$g(x)=1-(x^2-2x+2)e^{-x}$$

1. دراسة تغيرات الدالة g : النهايات $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(1-x^2e^{-x})=1$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(-x^2e^{-x})=-\infty$

المشتقة $g'(x)=(-2x+2)e^{-x}+(x^2-2x+2)e^{-x}$ أي $g'(x)=(x^2-4x+4)e^{-x}$ إذن

$g'(x)=(x-2)^2e^{-x}$ موجبة و تنعدم عند 2

جدول تغيرات

x	$-\infty$	$+\infty$
$g(x)$	$-\infty$ ↗	1

2. إثبات أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيداً α حيث $0,35<\alpha<0,36$ لدينا ; $g(0,35)=-0,002$

$g(0,36)=0,016$ و بما الدالة g متزايدة على $\mathbb{R}$ فحسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة السابقة تقبل حل وحيد α

إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$ موجبة على المجال $[\alpha;+\infty[$ و سالبة على المجال $]-\infty;\alpha]$

III – f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=x-1+(x^2+2)e^{-x}$

و (C) تمثيلها البياني في المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$..(الوحدة $2cm$)

1. حساب النهايات: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}[x+x^2e^{-x}]=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} x.[1+xe^{-x}]=+\infty$.

2. اثبات انه من أجل كل عدد حقيقي x فإن $f'(x)=g(x)$: $f'(x)=1+2x.e^{-x}-(x^2+2)e^{-x}$ ومنه $f'(x)=1-(x^2-2x+2)e^{-x}$ إذن $f'(x)=g(x)$

استنتاج تغيرات الدالة f : f متزايدة على المجال $[\alpha;+\infty[$ و متناقصة على المجال $]-\infty;\alpha]$

جدول تغيرات:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$f(\alpha)$	↗ $+\infty$

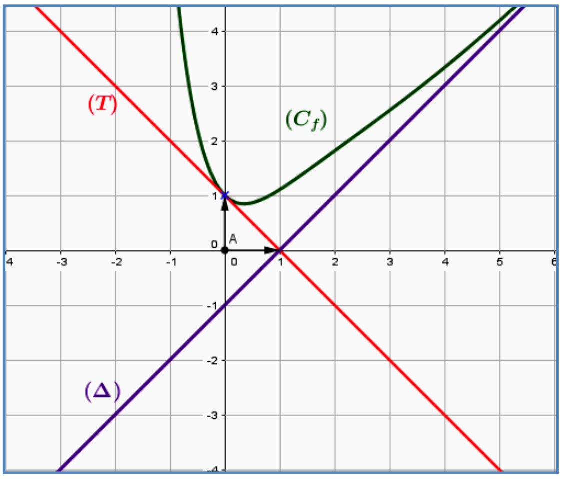
3. أ. البرهان أن المستقيم (Δ) الذي معادلته من الشكل $y=x-1$ مقارب للمنحنى (C) عند $+\infty$:

$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-y]=\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2+2)e^{-x}=0$ و منه محققة

ب. تحديد وضعية (C) بالنسبة للمستقيم (Δ): $[f(x)-y]=(x^2+2)e^{-x}$ الفرق موجب تماماً و منه (C) يقع فوق المستقيم (Δ)

4. كتابة معادلة المماس (T) للمنحنى (C) في النقطة ذات الفاصلة 0 : $y=f'(0)x+f(0)$ أي $y=-x+1$

5. أنشاء (Δ) و (T) و المنحنى (C):



انتهى الموضوع الأول

التصحيح المفصل الموضوع الثاني شعبة الرياضيات البكالوريا التجريبية

التمرين الأول: (04 نقاط)

أذكر إن كانت الجمل التالية صحيحة أم خاطئة مبرّرا الإجابة .

1) من أجل كل عدد طبيعي n ، 3 يقسم العدد $2^{2n}-1$ لدينا $2^2\equiv 1[3]$ بالرفع الى قوى n نجد $2^{2n}\equiv 1[3]$ و منه $2^{2n}-1\equiv 0[3]$ و منه صحيحة.

2) إذا كان x عددا صحيحا حلا للمعادلة $x^2-x\equiv 0[6]$ فإن $x\equiv 0[6]$:

$x\equiv$	0	1	2	3	4	5	$[6]$
$x^2-x\equiv$	0	0	2	0	0	2	$[6]$

و منه خاطئة

3) إذا كان $x^2\equiv y^2[17]$ فإن $x\equiv y[17]$.

$x^2\equiv y^2[17]$ يعني إن $x^2-y^2\equiv 0[17]$ يكافئ أن x^2-y^2 مضاعف للعدد 17 و 17 عدد أولي و $(x-y)(x+y)=x^2-y^2$ إذن 17 قاسم $(x+y)$ أو 17 قاسم للعدد $(x-y)$ أي أن $x\equiv y[17]$ أو $x\equiv -y[17]$ و منه خاطئة .

4) مجموعة حلول المعادلة $12x-5y=3$ المعرفة في Z^2 ، هي مجموعة الثنائيات (x,y) من الشكل $(4+10k;9+24k)$ مع $k\in Z$: $12(4+10k)-5(9+24)=12\times 4+120k-5\times 9-120k$ و منه $12(4+10k)-5(9+24)=3$ إذن محققة و منه صحيحة

5) M و N عددان طبيعيان كتابتهما في النظام العشري هي : $\overline{abc}$ و $\overline{bca}$ على الترتيب .

إذا كان M يقبل القسمة على 27 فإن $M-N$ يقبل القسمة على 27.

إذا كان M يقبل القسمة على 27 يعني $M\equiv 0[27]$ أي أن $100a+10b+c\equiv 0[27]$ أي أن $M-N\equiv -N[27]$ أي أن $M-N\equiv -100b-10c-a[27]$ أي $M-N\equiv -a-100b-10c[27]$ و $-999\equiv 0[27]$ أي أن و منه $M-N\equiv -1000a-100b-10c[27]$ أي $M-N\equiv -10(100a+10b+c)[27]$ أي أن $M-N\equiv -10M[27]$ و $M\equiv 0[27]$ إذن $M-N\equiv 0[27]$ صحيحة.

التمرين الثاني: (04 نقاط) :

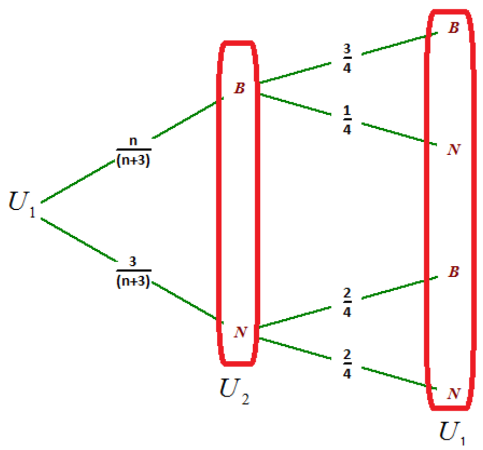
لدينا وعائيين U_1 و U_2 يحتويان على كرات لا نفرق بينها عند اللمس . الوعاء U_1 يحتوي على n كرة بيضاء و ثلاث كرات سوداء (n عدد طبيعي غير معدوم) و الوعاء U_2 يحتوي على كرتين بيضاوين و كرة واحدة سوداء .

نسحب عشوائيا كرة من U_1 نضعها في U_2 ثم نسحب كرة من U_2 نضعها في U_1 .

.1 نعتبر الحادثة A يبقى الوعاءان على ما كانا عليه.

أ –إثبات أن $P(A)=\dfrac{3(n+2)}{4(n+3)}$

الحادثة A هي أن نسحب كرة بيضاء من الوعاء U_1 و نضعها في الوعاء U_2 ثم نسحب من الوعاء U_2 كرة بيضاء و نضعها في الوعاء U_1 أو نسحب كرة سوداء من الوعاء U_1 و نضعها



في الوعاء U_2 ثم نسحب من الوعاء U_2 كرة سوداء و نضعها في الوعاء U_1

من الشجرة $P(A)=\frac{n}{n+3}\times\frac{3}{4}+\frac{3}{n+3}\times\frac{2}{4}=\frac{3(n+2)}{4(n+3)}$

ب–تعيين النهاية $\lim\limits_{n\to+\infty}P(A)$: $\lim\limits_{n\to+\infty}P(A)=\frac{3}{4}$

2. نعتبر الحادثة B الوعاء U_2 يحتوي على كرة واحدة بيضاء فقط . التحقق أن $P(B)=\frac{3}{2(n+3)}$:

الحادثة B هي : أن نسحب كرة سوداء من الوعاء U_1 و نضعها في الوعاء U_2 ثم نسحب من الوعاء U_2 كرة بيضاء و نضعها في الوعاء U_1 :

من الشجرة $P(B)=\frac{3}{n+3}\times\frac{2}{4}=\frac{3}{2(n+3)}$

3. يدفع لاعب $20DA$ و يقوم بالتجربة السابقة

أ. إذا كان بعد التجربة الوعاء U_2 يحتوي على كرة واحدة بيضاء اللاعب يكسب $2n\ DA$.

ب. إذا كان بعد التجربة الوعاء U_2 يحتوي على كرتين بيضاوين اللاعب يكسب $n\ DA$

ج. إذا كان بعد التجربة الوعاء U_2 يحتوي على 3 كرات بيضاء اللاعب لا يكسب شيئاً

شرح لماذا لا يكون للاعب أي ربح إذا كان n لا يفوق 10 :

اللاعب:

يأخذ $2n\ DA$ بعد دفع $20DA$ الفرق هو $2n-20$ يكون رابح إذا كانت $n>10$

أو يأخذ $n\,DA$ بعد دفع $20DA$ الفرق هو $n-20$ يكون رابح إذا كانت $n>20$

أو يأخذ إما $0\,DA$ بعد دفع $20DA$ الفرق هو -20 هنا هو خاسر

إذن إذا كان n اصغر من 10 فإن اللاعب خاسر في الحالات الثالثة المذكور أعلاه

4. فيما يلي نفرض أن $n>10$ نعتبر X المتغير العشوائي الذي يأخذ قيمة الربح الجبري للاعب

مثلاً : إذا وجد كرة واحدة بيضاء يكون الربح $X=2n-20$

أ –تعيين قانون الاحتمال المتغير العشوائي X

x_i	$2n-20$	$n-20$	-20
$P(X=x_i)$	$\frac{6}{4(n+3)}$	$\frac{3(n+2)}{4(n+3)}$	$\frac{n}{4(n+3)}$

ب حساب أمله الرياضياتي : $E(X)=\frac{6(2n-20)+3(n-20)(n+2)-20n}{4(n+3)}=\frac{3n^2-62n-240}{4(n+3)}$

ج– إثبات أن اللعبة تكون رابحة عندما يكون 25 كرة بيضاء على الأقل في الوعاء U_1 : اللعبة رابحة يعني أن $E(X)>0$

أي أن $3n^2-62n-240>0$ نحسب مميز كثير الحدود $3n^2-62n-240$ نجده $\Delta=6724=82^2$ إذن الجذران هما

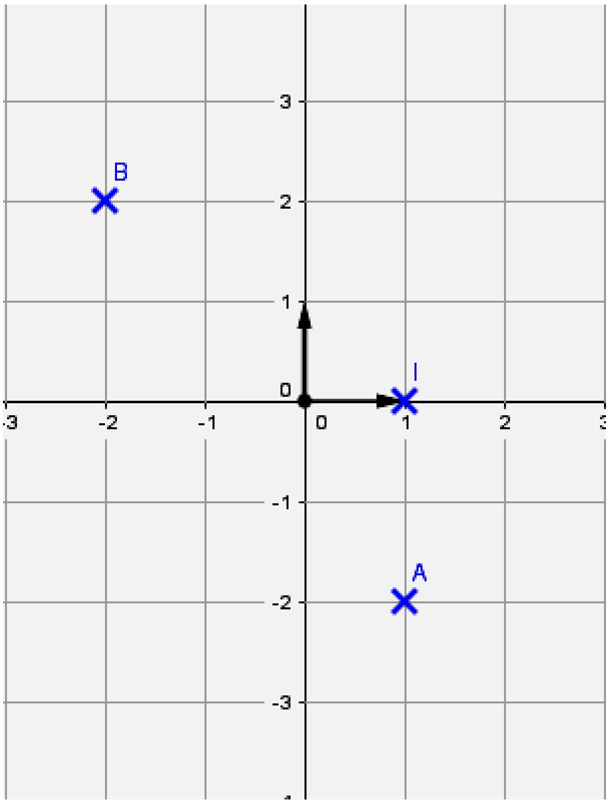
$-\frac{10}{3}$ و 24 ومنه $E(X)>0$ لما $n\geq 25$

التمرين الثالث: (05 نقاط)

1. تعيين العددين المركبين α و β حيث : $\begin{cases}\alpha+\beta=-1\\ 2\overline{\alpha}+\beta=6i\end{cases}$ يكافئ أن $2\overline{\alpha}-\alpha=1+6i$ بوضع $\alpha=x+iy$

نجد $x-3iy=1+6i$ و منه $\begin{cases}x=1\\ -3y=6\end{cases}$ إذن $\begin{cases}x=1\\ y=-2\end{cases}$ و منه $\alpha=1-2i$ بالتعويض في معادلة من معادلتي الجملة نجد $1-2i+\beta=-1$ إذن $\beta=-2+2i$

2. المستوي منسوب الى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ نعتبر النقط I و A و B لواحقها على الترتيب $z_I=1$ و $z_A=1-2i$ و $z_B=-2+2i$.



أ- أنشاء النقط I و A و B

ب- تعيين z_w لاحقة النقطة w مركز الدائرة (C) ذات القطر $[AB]$: المركز هو منتصف القطعة $[AB]$ أي أن

$$z_w=\frac{z_A+z_B}{2}=-\frac{1}{2}$$

3. D نقطة لاحقتها $z_D=\dfrac{3+9i}{4+2i}$

كتابة z_D على شكل الجبري :

$$z_D=\frac{3+9i}{4+2i}=\frac{(3+9i)(4-2i)}{16+4}=\frac{30+30i}{20}=\frac{3}{2}+\frac{3}{2}i$$

إثبات أن النقطة D تنتمي إلى الدائرة (C):

$|z_D-z_w|=\left|\frac{4}{2}+\frac{3}{2}i\right|=\frac{5}{2}$ و $|z_A-z_w|=\left|\frac{3}{2}-2i\right|=\frac{5}{2}$ و منه محققة

4. E نقطة من الدائرة (C) لاحقتها z_E حيث

$$z_E=e^{i\frac{\pi}{4}}z_I+\left(1-e^{i\frac{\pi}{4}}\right).z_w$$

أ- كتابة العدد $z_E+\frac{1}{2}$ على الشكل الآسي : $z_E+\frac{1}{2}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right).+\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}$ يعني

أن $z_E+\frac{1}{2}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right).+\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)$ و منه $z_E+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ إذن

$z_E+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ و هو المطلوب .

ب استنتاج أن $z_E=\frac{3\sqrt{2}-2}{4}+\frac{3\sqrt{2}}{4}i$: لدينا $z_E+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ و منه $z_E+\frac{1}{2}=\left(\frac{3\sqrt{2}}{4}+i\frac{3\sqrt{2}}{4}\right)$ و منه

$$z_E=\left(\frac{3\sqrt{2}-2}{4}+i\frac{3\sqrt{2}}{4}\right)$$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I - g دالة عددية معرفة على $]0;+\infty[$ بـ

. $g(x)=x^2-1+\ln(x)$

1. دراسة تغيرات الدالة g:

النهايات $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} g(x)=\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0}\left[x^2-1+\ln(x)\right]=-\infty$

المشتقة : $g'(x)=2x+\dfrac{1}{x}$ موجبة إذن الدالة g متزايدة على $]0;+\infty[$

2. حساب : $g(1)=1^2-1+\ln(1)=0$

استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x على المجال $]0;+\infty[$: بما أن الدالة g متزايدة على $]0;+\infty[$ و تنعدم عند 1 فإن $g(x)$ موجبة على المجال $[1;+\infty[$ و سالبة على المجال $]0;1]$.

II – f دالة عددية معرفة على $]0;+\infty[$ بـ

$$f(x)=x-1-\frac{\ln(x)}{x}$$

و (C_f) تمثيلها البياني في المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. حساب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$: $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)=+\infty$ لأن $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0}\dfrac{\ln(x)}{x}=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$

لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x}=0$ بالتزايد المقارن.

2. إثبات أن من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما x : $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$:

$f'(x)=1-\dfrac{\left(\frac{1}{x}\right).x-\ln(x)}{x^2}$ و منه $f'(x)=\dfrac{x^2-1+\ln(x)}{x^2}$ إذن $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$ محققة

جدول تغيرات الدالة f :

x	0		1		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

3. إثبات أن (C_f) يقبل مماساً (T) معامل توجهه 1 : $f'(x)=1$ تكافئ $\dfrac{g(x)}{x^2}=1$ يعني أن $g(x)=x^2$ يكافئ أن $\ln(x)=1$ يكافئ أن $x=e$

معادلته $y=(x-e)+f(e)$ أي أن $y=x-1-\dfrac{1}{e}$ هي المعادلة المطلوبة

4. أ– إثبات أن (Δ) المستقيم الذي معادلته من الشكل $y=x-1$ مقارب للمنحنى (C_f) :

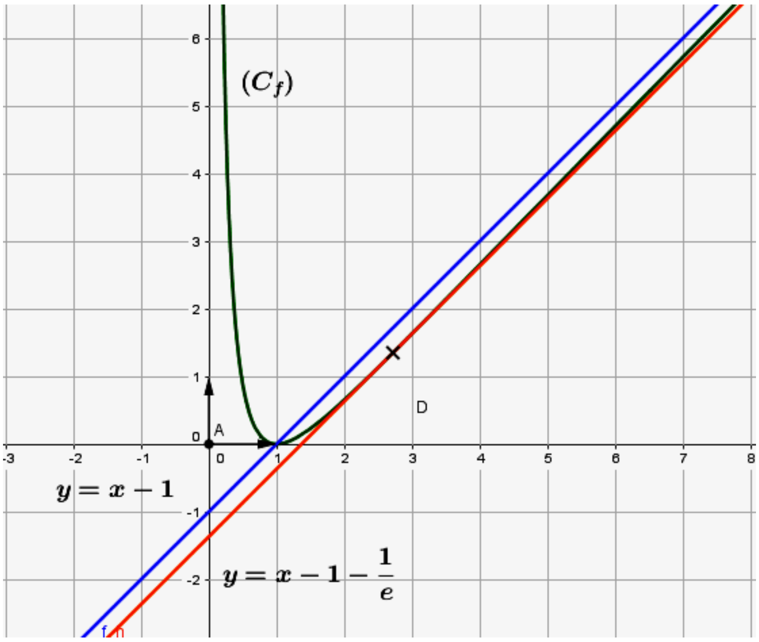
$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-y\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[-\dfrac{\ln(x)}{x}\right]=0$ و منه محققة

ب– درس وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) : ندرس إشارة الفرق $\left[f(x)-y\right]=\left[-\dfrac{\ln(x)}{x}\right]$

و هو موجب على المجال على المجال $]0;1]$ إي أن (C_f) يقع فوق المستقيم (Δ) على هذا المجال .

و سالب على المجال على المجال $]1;+\infty[$ إي أن (C_f) يقع تحت المستقيم (Δ) على هذا المجال.

5. إنشاء (Δ) و (T) و المنحنى (C_f)



6. المناقشة بيانيا حسب قيم الوسيط m عدد حلول المعادلة $(m+1).x+\ln(x)=0$.

$(m+1).x+\ln(x)=0$ يكافئ

$(m+1)+\frac{\ln(x)}{x}=0$ و منه $m=-1-\frac{\ln(x)}{x}$

بإضافة x نجد $x+m=x-1-\frac{\ln(x)}{x}$ و منه

$x+m=f(x)$ حلها هو إيجاد فواصل نقاط

تقاطع (C_f) مع المستقيم $(\Delta_m):y=x+m$

لما $m\in\left]-\infty;-1-\frac{1}{e}\right[$ نلاحظ أن (C_f) و (Δ_m) لا يتقاطعان و منه ليس للمعادلة حلول

لما $m=-1-\frac{1}{e}$ نلاحظ أن (C_f) و (Δ_m) يتقاطعان في نقطة واحدة و منه للمعادلة حل وحيد

لما $m\in\left]-1-\frac{1}{e};-1\right[$ نلاحظ أن (C_f) و (Δ_m) يتقاطعان في نقطتان و منه للمعادلة حلين

لما $m\in[-1;+\infty[$ نلاحظ أن (C_f) و (Δ_m) يتقاطعان في نقطة وحيدة و منه للمعادلة حل وحيد

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية — ثانويات الاغواط- المقاطعة (01)

الامتحان التجريبي لبكالوريا التعليم الثانوي — دورة ماي 2024

الشعبة: رياضيـــــات

اختبار في مادة الرياضيات — المدة :04 ساعات ونصف

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين

الموضوع الأول

يحتوي الموضوع الأوّل على 3 صفحات

التمرين الأول (04 نقاط) :

1. نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بـ: $u_1 = \frac{1}{2}$ وبالعلاقة التراجعية : $u_{n+1} = \frac{1}{6}u_n + \frac{1}{3}$

ولتكن المتتالية (v_n) المعرفة من اجل كل $n \geq 1$ بـــ: $v_n = u_n - \frac{2}{5}$

أ) بين ان المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين اساسها.

ب) استنتج عبارة v_n بدلالة n ثم عبارة u_n بدلالة n .

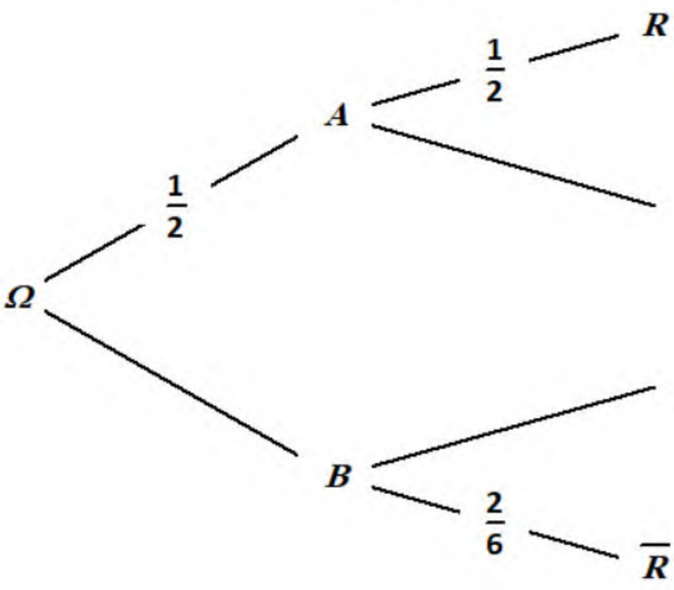
2. نعتبر نردين A و B غير مزيفين بحيث : النرد A به ثلاث اوجه حمراء وثلاث اوجه بيضاء ، اما النرد B به اربع اوجه حمراء ووجهين بيضاوين.

نختار عشوائيا نردا ونرميه : إذا ظهر اللون الأحمر نحتفظ بهذا النرد ، اما اذا ظهر اللون الأبيض نغير النرد. ثم نرمي هذا النرد وهكذا دواليك.

نرمز بـ A_n : الى الحدث : " رمي النرد A n مرة " و بـ: $\overline{A_n}$ إلى الحدث العكسي للحدث A_n .

R_n الى الحدث: " ظهور اللون الأحمر في الرمية n " .و بـ: $\overline{R_n}$ إلى الحدث العكسي للحدث R_n.

ونرمز بـ: a_n الى احتمال الحدث A_n و r_n الى احتمال الحدث R_n



أ) عين a_1

ب) اكمل الشجرة ثم عين r_1

ج) بملاحظة أنّه من اجل كل $n \geq 1$

$$R_n = (R_n \cap A_n) \cup (R_n \cap \overline{A_n})$$

- بين أنّ : $r_n = -\frac{1}{6}a_n + \frac{2}{3}$

د) بيّن أنّه من أجل كل $n \geq 1$:

$$A_{n+1} = (A_n \cap R_n) \cup (\overline{A_n} \cap \overline{R_n})$$

هـ) استنتج أنّه من أجل كل $n \geq 1$: $a_{n+1} = \frac{1}{6}a_n + \frac{1}{3}$ ثمّ عيّن عبارة a_n بدلالة n

و) استنتج عبارة r_n بدلالة n ثمّ أحسب $\lim_{n \to +\infty} r_n$

التمرين الثاني(04.5 نقاط) :

1) نعتبر في مجموعة الاعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z: $\bar{z}^3 - 3\bar{z}^2 + 3\bar{z} + 7 = 0$ ..(E) $\bar{z}$ هو مرافق العدد المركب z.

أ/ بين أن المعادلة (E) تكافئ المعادلة : $(\bar{z}+1)\left(\bar{z}^2 - 4\bar{z} + 7\right) = 0$.

ب/ حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E).

2) في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{u};\vec{v})$ ، نعتبر النقط A, B, C و D لواحقها

على الترتيب: $z_A = -1$ ، $z_B = 2 + i\sqrt{3}$ ، $z_C = \overline{z_B}$ ، $z_D = 3$.

أ/ عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون $(z_B - z_A)^n$ عددا حقيقيا سالبا .

ب/ عين طبيعة المثلث ABC .

3) أ/أكتب العدد $\frac{z_A - z_C}{z_D - z_C}$ على الشكل الأسي، ثم استنتج أن النقطة A صورة D بتحويل نقطي يطلب تعيينه.

ب/ أوجد مركز ونصف قطر الدائرة المحيطة بالمثلث ACD .

4) (Γ) مجموعة النقط M من المستوي لاحقتها z تحقق: $z + 1 = 2\sqrt{3}.k.e^{i\frac{\pi}{6}}$ حيث k يمسح المجال $]0;+\infty[$

✓ عين قيسا للزاوية الموجهة $(\vec{u};\overrightarrow{AB})$ ، ثم استنتج مجموعة النقط (Γ).

5) أ/ عين قيمة العدد الحقيقي α بحيث يكون: $-\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB} + \alpha\overrightarrow{CD} = \vec{0}$.

ب/ عين (E) مجموعة النقط M من المستوي حيث: $\left\|-\overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{BM} - 3\overrightarrow{DM}\right\| \leq 2\left\|\overrightarrow{BM} - \overrightarrow{CM}\right\|$

ج/ استنتج مجموعة نقط تقاطع (E) و (Γ).

التمرين الثالث (04.5 نقاط) :

1) من أجل كل عدد حقيقي t وكل عدد طبيعي n ، أنشر وبسط العبارة $(t-6)(t^2+1)$

ثم أدرس حسب قيم n بواقي قسمة 3^n على 7

2) a ، b و c أعداد طبيعية تكتب في نظام التعداد ذي الأساس p كمايلي : $a = \overline{102}$ ، $b = \overline{125}$ و $c = \overline{13154}$

أ/ علما أنّ : $a \times b = c$ جد قيمة العدد p

ب / أكتب كلا من a ، b و c في النظام العشري

3) نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة: $38x - 53y = 15 \ldots\ldots\ldots (1)$

أ/ بيّن أنّه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حلّا للمعادلة (1) فإنّ $x \equiv 52[53]$

ب/ استنتج حلول المعادلة (1)

4) نعتبر الآن x و y عددان طبيعيّان ونسمي d قاسمهما المشترك الأكبر

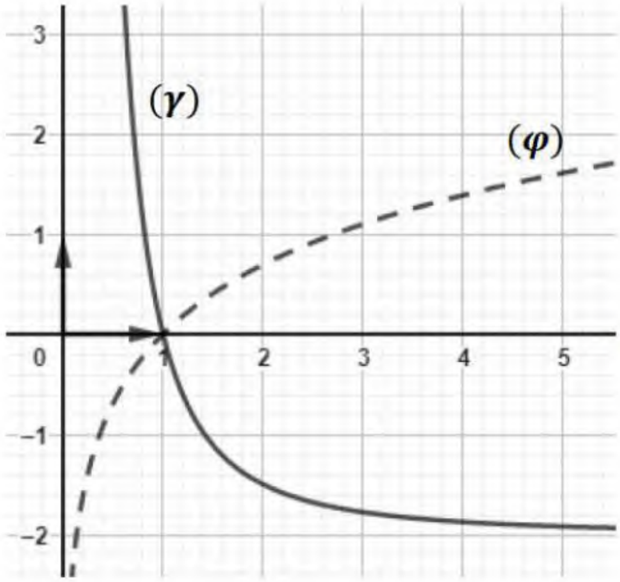
أ/ عين القيم الممكنة لـ d

ب/ جد كل الثنائيات $(x;y)$ بحيث يكون $d = 15$

5) يحتوي كيس على 10 قريصات مرقمة من 0 إلى 9 "لا نفرق بينها عند اللمس" ، نسحب في آن واحد قريصتين من الكيس

✓ أحسب أحتمال كي يكون مجموع رقمي القريصتين المسحوبتين من بواقي قسمة 3^n على 7

التمرين الرابع (07 نقاط) :



الجزء الأول:

(γ) و (φ) التمثيلان البيانيان للدالتين المعرفتين على $]0;+\infty[$

$x \mapsto 2(\frac{1}{x^2}-1)$ و $x \mapsto lnx$ على الترتيب في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

(γ) و (φ) يتقاطعان في النقطة ذات الفاصلة 1 كما هو موضح في الشكل المقابل:

g الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=\frac{2}{x^2}-lnx-2$.

✓ بقراءة بيانية حدد وضعية (γ) بالنسبة إلى (φ) على $]0;+\infty[$ ،

ثم استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$.

الجزء الثاني:

نعتبر الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\frac{2x^2+x-lnx+1}{x}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) أحسب: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. فسّر النتائج هندسيا

2) أ/ أثبت أنه من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $f'(x)=\frac{g\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}$.

ب/عين دون حساب: $\lim\limits_{h\to 0}\frac{4-f(1+h)}{h}$، ثم فسر النتيجة هندسيا .

ج/ أدرس اتجاه تغيّر الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

3) أ/ أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-2x]$ ، ماذا تستنتج

ب/ أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=2x+1$

4) أرسم كلا من (Δ) و (C_f).

5) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $U_n=\int_{e^n}^{e^{n+1}}\left(f(x)-(2x+1)\right)dx$

أ/ أحسب U_n بدلالة n ثم استنتج طبيعة المتتالية (U_n)

ب/ لتكن A مساحة حيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) والمستقيم (Δ) وبالمستقيمين

اللذين معادلتاهما $x=1$ و $x=e^2$ ، تحقق من أنّ: $A=(U_0-U_1)\,ua$

6) نعتبر الدالة h المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ بالعلاقة: $h(x)=x^2(1+lnx)-3x+2$

أ/ أثبت أنه من أجل كل x من المجال $]0,+\infty[$ فان: $\frac{h(x)}{x}=f\left(\frac{1}{x}\right)-4$ ثم استنتج أن $h(x)\ge 0$

ب/ عين x بحيث يكون $h(x)=0$

انتهى الموضوع الأول

الشعبة : رياضيات — **سلم تنقيط الموضوع الأول للبكالوريا التجريبي في مادة الرياضيات** — **دورة ماي 2024**

العلامة	التمرين الاول (04 نقاط)
0.5	1) أ) بين ان المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين اساسها.
0.25+0.25	ب) استنتج عبارة v_n بدلالة n ثم عبارة u_n بدلالة n .
0.25	2) أ) عين a_1
0.25+0. 5	ب) اكمل الشجرة ثم عين r_1
0.5	ج) تبيين أنّ: $r_n = -\frac{1}{6}a_n + \frac{2}{3}$
0.5	د) تبيين أنّه من أجل كل $n \geq 1$: $A_{n+1} = (A_n \cap R_n) \cup (\overline{A_n} \cap \overline{R_n})$
0.25	هـ) استنتاج أنّ: $a_{n+1} = \frac{1}{6}a_n + \frac{1}{3}$
0.25	ثم عبارة a_n بدلالة n:
0.25+0.25	و) استنتاج عبارة r_n بدلالة n ثمّ $\lim_{n\to+\infty} r_n$

العلامة	التمرين الثاني (04 نقاط)
0.25	1) أ/نبين أن المعادلة (E) تكافئ...
0.5	ب/ نحل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E) :
0.5	2) أ/تعيين قيم العدد الطبيعي n
0.5	ب/تعيين طبيعة المثلث ABC
0.25	3) أ/ كتابة العدد $\frac{z_A - z_C}{z_D - z_C}$ على الشكل الأسي:
0.25	*/استنتاج طبيعة التحويل الذي يحول A إلى D وعناصره
0.25	المميزة:
0.25	ب/تعيين مركز ونصف قطر الدائرة المحيطة بالمثلث ACD
0.5	4) عين قيسا للزاوية الموجهة $(\vec{u}; \overrightarrow{AB})$.
0.5	ثم استنتاج مجموعة النقط (Γ).
0.5	5) أ/ عين قيمة العدد الحقيقي α
0.25	ب/ تعيين (E) مجموعة النقط M
	ج/ استنتج مجموعة نقط تقاطع (E) و (Γ).

العلامة	التمرين الثالث (05 نقاط)
0.25	
0.5	1) نشر وتبسيط العبارة :
0.5	دراسة حسب قيم n بواقي قسمة 3^n على 7
0.5	2) أ/ إيجاد قيمة العدد p
0.5	ب / كتابة كلا من a ، b و c في النظام العشري
	3) أ/ تبيين أنّه إذا كانت الثنائية $(x; y)$ حلّا للمعادلة (1)
0.5	فإنّ $x \equiv 52[53]$
0.5	ب/ استنتاج حلول المعادلة (1)
0.75	4) أ/ عين القيم الممكنة لـ d
0.5	ب/ إيجاد كل الثنائيات $(x; y)$ بحيث يكون $d = 15$
	5) حساب احتمال كي يكون مجموع رقمي القريصتين المسحوبتين من بواقي قسمة 3^n على 7

العلامة	التمرين الرابع (07 نقاط)
	الجزء الأول:
0.5	تحديد وضعية (γ) بالنسبة إلى (φ)
0.25	- اشارة $g(x)$
	الجزء الثاني:
0.25+0.25	1) حساب نهايتي الدالة f عند 0 و $+\infty$
0.25	التفسير
0.5	2) أ/ اثبات انه من أجل كل x من D_f: $f'(x) = \frac{g\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}$
0.25	ب/ $\lim_{h\to 0} \frac{4-f(1+h)}{h} = -f'(1) = 0$
0.25	التفسير
0.5	ج /استنتاج اتجاه تغير الدالة f:
0.25	* جدول تغيرات الدالة f :
0.5	3) أ/ حساب $\lim_{x\to+\infty}[f(x) - 2x]$
0.25	الاستنتاج
0.5	ب/ دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة لـ (Δ):
0.25+0.25	4) رسم كلا من (Δ) و (C_f).
0.25+0. 5	5) أ/ حساب U_n بدلالة n ثم استنتاج طبيعة المتتالية (U_n)
0.25	ب/ التحقق من أنّ: $A = (U_0 - U_1)\, ua$
0.25	6) أ/ إثبات أنّ: $\frac{h(x)}{x} = f\left(\frac{1}{x}\right) - 4$
0.5	استنتاج أن $h(x) \geq 0$
0.25	ب/ تعيين x بحيث يكون $h(x) = 0$

*** انتهـــــــــــى ***

التصحيح المفصّل للموضوع الاوّل

تصحيح التمرين الأول :

1) أ) تبيين ان المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين اساسها.

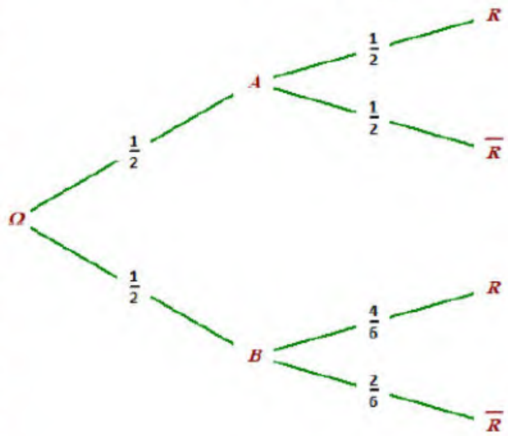
$$v_{n+1} = \frac{1}{6} v_n$$

أي (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{6}$

ب) عبارة v_n بدلالة n : $v_n = \frac{1}{10}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}$ ، عبارة u_n بدلالة n : $u_n = \frac{1}{10}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} + \frac{2}{5}$

2) أ) $a_1 = \frac{1}{2}$

ب) إكمال الشجرة



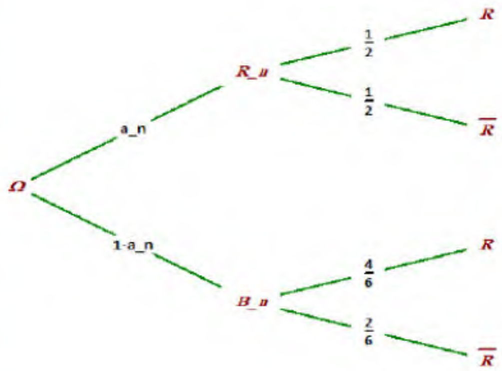
$$r_1 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{4}{6} = \frac{7}{12}$$

ج) تبيين أنّ : $r_n = -\frac{1}{6} a_n + \frac{2}{3}$

لدينا:

$$R_n = (R_n \cap A_n) \cup (R_n \cap \overline{A_n})$$

أي : $r_n = \frac{1}{2} a_n + \frac{4}{6}(1 - a_n) = -\frac{1}{6} a_n + \frac{2}{3}$



د) تبيين أنّه من أجل كل $n \geq 1$:

$$A_{n+1} = (A_n \cap R_n) \cup (\overline{A_n} \cap \overline{R_n})$$

من أجل الرمية $(n+1)$ بالنرد A:

يلعب الرمية n ويتحصل على اللون الأحمر R_n أو يلعب الرمية n بالنرد B ويتحصل على اللون الأبيض $\overline{R_n}$

أي : $A_{n+1} = (A_n \cap R_n) \cup (\overline{A_n} \cap \overline{R_n})$

هـ) استنتاج أنّه من أجل كل $n \geq 1$: $a_{n+1} = \frac{1}{6} a_n + \frac{1}{3}$

لدينا : $A_{n+1} = (A_n \cap R_n) \cup (\overline{A_n} \cap \overline{R_n})$ أي :

$$a_{n+1} = P(A_{n+1}) = \frac{1}{2} a_n + \frac{2}{6}(1 - a_n) = \frac{1}{6} a_n + \frac{1}{3}$$

عبارة a_n بدلالة n:

بما أن : $u_{n+1} = \frac{1}{6} u_n + \frac{1}{3}$ إذن : $a_n = u_n = \frac{1}{10}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} + \frac{2}{5}$

و) استنتاج عبارة r_n بدلالة n ثمّ $\lim_{n \to +\infty} r_n$:

لدينا : $r_n = -\frac{1}{6} a_n + \frac{2}{3}$ أي : $r_n = -\frac{1}{6}\left(\frac{1}{10}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} + \frac{2}{5}\right) + \frac{2}{3}$

ومنه $r_n = -\frac{1}{10}\left(\frac{1}{6}\right)^{n} + \frac{3}{5}$

✓ $\lim_{n \to +\infty} r_n = \lim_{n \to +\infty} \left[= -\frac{1}{10}\left(\frac{1}{6}\right)^{n} + \frac{3}{5}\right] = \frac{3}{5}$

تصحيح التمرين الثاني:

1) أ/نبين أن المعادلة (E) تكافئ $(\overline{z}+1)\left(\ \overline{z}^2-4\overline{z}+7\right)=0$ لدينا:

$$(\overline{z}+1)\left(\ \overline{z}^2-4\overline{z}+7\right)=0\ (E)\ldots\ \ \overline{z}^3-3\overline{z}^2+3\overline{z}+7=0$$

يكافئ $\overline{z}^3-4\overline{z}^2+7\overline{z}+\overline{z}^2-4\overline{z}+7=0$ يكافئ $\overline{z}^3-3\overline{z}^2+3\overline{z}+7=0$

ب/ نحل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E) :

(E) تكافئ $(\overline{z}+1)(\overline{z}^2-4\overline{z}+7)=0$

يكافئ $(z+1)(z^2-4z+7)=0$ يكافئ $\overline{(z+1)}\overline{(z^2-4z+7)}=0$

يكافئ $\begin{cases} z=-1 \\ z^2-4z+7=0 \end{cases}$ ، $\Delta=-12=\left(2\sqrt{3}i\right)^2$

$z_1=2-\sqrt{3}i$ و $z_2=2+\sqrt{3}i$

ومنه: $S=\left\{-1;2-\sqrt{3}i;2+\sqrt{3}i\right\}$

2) أ/تعيين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون العدد المركب $(z_B-z_A)^n$ عددا حقيقيا سالبا: لدينا

$$(z_B-z_A)^n=(2+\sqrt{3}i+1)^n=(3+\sqrt{3}i)^n$$

ومنه $(z_B-z_A)^n=(2\sqrt{3})^n e^{i\frac{n\pi}{6}}$

$(z_B-z_A)^n$ عددا حقيقيا سالبا معناه: $arg(z_B-z_A)^n=\pi+2k\pi$ ومنه $\frac{n\pi}{6}=\pi+2k\pi$

إذن $n=12k+6\ \ ;k\in\mathbb{N}$

ب/تعيين طبيعة المثلث ABC

$$AC=|z_C-z_A|=\left|3-i\sqrt{3}\right|=2\sqrt{3}\quad AB=|z_B-z_A|=\left|3+i\sqrt{3}\right|=2\sqrt{3}$$

$$BC=|z_C-z_B|=\left|-2i\sqrt{3}\right|=2\sqrt{3}$$

بما ان: $AB=AC=BC$ فإن المثلث ABC متقايس الأضلاع

3) أ/ كتابة العدد $\frac{z_A-z_C}{z_D-z_C}$ على الشكل الأسي:

$$\frac{z_A-z_C}{z_D-z_C}=\frac{-1-2+i\sqrt{3}}{3-2+i\sqrt{3}}=\frac{-3+i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}}=\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}$$

*/استنتاج طبيعة التحويل الذي يحول A إلى D وعناصره المميزة:

$\frac{z_A-z_C}{z_D-z_C}=\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}$ معناه $z_A-z_C=\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}(z_D-z_C)$

معناه النقطة A صورة النقطة D بالتشابه المباشر الذي مركزه النقطة C و نسبته $\sqrt{3}$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$

ب/تعيين مركز ونصف قطر الدائرة المحيطة بالمثلث ACD

لدينا: $\frac{z_A-z_C}{z_D-z_C}=\sqrt{3}\ e^{i\frac{\pi}{2}}$ معناه $\begin{cases} \left|\frac{z_A-z_C}{z_D-z_C}\right|=\sqrt{3} \\ (\overrightarrow{CD};\overrightarrow{CA})=\frac{\pi}{2}+2k\pi;k\in\mathbb{Z} \end{cases}$

اذن المثلث ACD قائم في C ومنه مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ACD هو النقطة I منتصف الوتر $[AD]$

لاحقتها $z_I=\frac{z_A+z_D}{2}=\frac{3}{2}-i\frac{1}{2}$

4/ تعيين قيس للزاوية الموجهة $(\vec{u};\overrightarrow{AB})$:

لدينا: $(\vec{u};\overrightarrow{AB})=arg(z_B-z_A)=\frac{\pi}{6}+2k\pi\ ;k\in\mathbb{Z}$

*/استنتاج (Γ) مجموعة النقط $M(z)$ حيث :

$z+1=2\sqrt{3}ke^{i\frac{\pi}{6}}$ معناه $z-z_A=k(z_B-z_A)$ معناه $\overrightarrow{AM}=k\cdot\overrightarrow{AB}$

ومنه :من أجل k يمسح المجال $]0;+\infty[$ المجموعة (Γ) هي نصف مستقيم مبدؤه النقطة A وشعاع توجيهه $\overrightarrow{AB}$ لاحظة: $2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}=3+i\sqrt{3}$

5) أ*/تعيين قيمة العدد α حيث $-\overrightarrow{CA}+2\overrightarrow{CB}+\alpha\overrightarrow{CD}=\vec{0}$

$-\overrightarrow{CA}+2\overrightarrow{CB}+\alpha\overrightarrow{CD}=\vec{0}$ معناه النقطة C هي مرجح الجملة $\{(A;-1),(B;2),(D;\alpha)\}$

$\begin{cases}x_C=\frac{-x_A+2x_B+\alpha x_D}{-1+2+\alpha}\\ y_C=\frac{-y_A+2y_B+\alpha y_D}{-1+2+\alpha}\end{cases}$ يكافئ $\begin{cases}2=\frac{1+4+3\alpha}{1+\alpha}\\ -\sqrt{3}=\frac{0+2\sqrt{3}+0\cdot\alpha}{1+\alpha}\end{cases}$ ومنه $\alpha=-3$

ب*/ تعيين (E) مجموعة النقط M من المستوي حيث :

$(*)\ldots\left\|-\overrightarrow{AM}+2\overrightarrow{BM}-3\overrightarrow{DM}\right\|\leq 2\left\|\overrightarrow{BM}-\overrightarrow{CM}\right\|$

$(*)$ تكافئ $\left\|\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MD}\right\|\leq 2\left\|\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{MC}\right\|$

$(*)$ تكافئ $\left\|-(-\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MD})\right\|\leq 2\left\|\overrightarrow{BC}\right\|$

$(*)$ تكافئ $\left\|(-1+2-3)\overrightarrow{CM}\right\|\leq 2BC$ تكافئ $CM\leq BC$

ومنه مجموعة النقط (E) هي قرص مركزه النقطة C ونصف قطره هو: $BC=2\sqrt{3}$

ج*/ استنتاج مجموعة نقط تقاطع القرص (E) و نصف المستقيم $(AB$: لدينا القرص (E) مركزه C ونصف قطره

$BC=2\sqrt{3}$ و $AC=2\sqrt{3}$ معناه A تنتمي إلى القرص (E)

ومنه تقاطع القرص (E) ونصف المستقيم $(AB$ هو القطعة المستقيمة $[AB]$.

تصحيح التمرين الثالث :

1) نشروتبسيط العبارة : $(t-6)(t^2+1)=t^3-6t^2+t-6$

دراسة حسب قيم n بواقي قسمة 3^n على 7

لدينا : $3^0\equiv 1[7]$ ، $3^1\equiv 3[7]$ ،$3^2\equiv 2[7]$ ،$3^3\equiv 6[7]$ ،$3^4\equiv 4[7]$ ،$3^5\equiv 5[7]$ ،$3^6\equiv 1[7]$

وعليه من أجل $\beta\in\mathbb{N}$: $3^{6\beta}\equiv 1[7]$ ، $3^{6\beta+1}\equiv 3[7]$ ،$3^{6\beta+2}\equiv 2[7]$ ،$3^{6\beta+3}\equiv 6[7]$ ،

$3^{6\beta+4}\equiv 4[7]$ ، $3^{6\beta+5}\equiv 5[7]$

2) أ/ إيجاد قيمة العدد p

لدينا : $a=2\times p^0+0\times p^1+p^2=2+p^2$ ،

$b=5\times p^0+2\times p^1+p^2=5+2p+p^2$ ،

$c=4\times p^0+5\times p^2+p^2+3\times p^3+p^4=4+5p+p^2+3p^3+p^4$

$a\times b=c$ معناه $(2+p^2)(5+2p+p^2)=4+5p+p^2+3p^3+p^4$

يكافئ $p^3-6p^2+p-6=0$ أي : $(p-6)(p^2+1)=0$ ومنه $p=6$

ب / كتابة كلا من a ، b و c في النظام العشري

$a = 2 + 6^2 = 38$ ، $b = 5 + 2.6 + 6^2 = 53$ ، $c = 4 + 5.6 + 6^2 + 3.6^3 + 6^4 = 2014$

3) أ/ تبيين أنّه إذا كانت الثنائية $(x; y)$ حلّا للمعادلة (1) فإنّ $x \equiv 52[53]$

لدينا : $38x - 53y = 15$ يكافئ $38x = 15 + 53y$ أي $38x \equiv 15[53]$

ولدينا $38 \equiv -15[53]$ ومنه $-15x \equiv 15[53]$ أي $x \equiv -1[53]$ وعليه $x \equiv 52[53]$

ب/ استنتاج حلول المعادلة (1)

لدينا : $x = 53k + 52$ حيث $k \in \mathbb{Z}$ وبالتعويض في (1) نجد $y = 38k + 37$

وبالتالي مجموعة حلول المعادلة (1) هي الثنائيات $(x; y)$ من الشكل $(53k + 52; 38k + 37)$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

4) أ/ عين القيم المكنة لـ d

لدينا $d \,/\, x$ و $d \,/\, y$ اذن $d \,/\, 38x - 53y$ أي $d \,/\, 15$ وبالتالي : $d \in \{1; 3; 5; 15\}$

ب/ إيجاد كل الثنائيات $(x; y)$ بحيث يكون $d = 15$

نضع $x = 15x'$ و $y = 15y'$ حيث x' و y' أوليان فيما بينهما

نحصل على $38 \times 15x' - 53 \times 15y' = 15$ أي $38x' - 53y' = 1$

لدينا الثنائية $(7; 5)$ حلا خاصا للمعادلة ومنه $\begin{cases} 38x' - 53y' = 1 \\ 38(7) - 53(5) = 1 \end{cases}$ بالطرح نجد :

$38(x' - 7) = 53(y' - 5)$

لدينا : $53 \,/\, 38(x' - 7)$ و $PGCD(38; 53) = 1$ اذن حسب مبرهنة "غوص" $53 \,/\, (x' - 7)$

ومنه $x' - 7 = 53\alpha$ أي $x' = 53\alpha + 7$ حيث $\alpha \in \mathbb{N}$ وبالتعويض نجد $y' = 38\alpha + 5$

وبالتالي : $x = 15(53\alpha + 7) = 795\alpha + 105$ و $y = 15(38\alpha + 5) = 570\alpha + 75$

حيث $\alpha \in \mathbb{N}$

5) حساب احتمال كي يكون مجموع رقمي القريصتين المسحوبتين من بواقي قسمة 3^n على 7

عدد طرق السحب هو: $C_{10}^2 = 45$ وعدد الحالات الملائمة: 12 وهي

$\{(0; 1), (0; 2), (0; 3), (0; 4), (0; 5), (0; 6), (1; 2), (1; 3), (1; 4), (1; 5), (2; 3), (2; 4)\}$

إذن الاحتمال المطلوب هو: $\frac{4}{15} = \frac{12}{45}$

تصحيح التمرين الرابع:

الجزء الأول: تحديد وضعية (γ) بالنسبة إلى (φ) على $]0;+\infty[$:

على المجال: $]0;1[$ (γ) فوق (φ) ، وعلى المجال: $]1;+\infty[$ (γ) تحت (φ)

- اشارة $g(x)$

x	0		1		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

الجزء الثاني:

1) حساب نهايتي الدالة f عند 0 و $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \quad ; \quad \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)=+\infty$$

التفسير: المستقيم ذو المعادلة $x=0$ مقارب لـ (C_f)

2) أ/ اثبات انه من أجل كل x من D_f: $f'(x)=\frac{g\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}$ الدالة f قابلة الاشتقاق على D_f و دالتها المشتقة f' حيث :

$$f'(x)=\frac{x\left(4x-\frac{1}{x}+1\right)-2x^2-x+\ln x-1}{x^2}=\frac{2x^2-2+\ln x}{x^2}=\frac{g\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}$$

ب/ $\lim_{h\to0}\frac{4-f(1+h)}{h}=-f'(1)=0$

التفسير: (C_f) يقبل مماسا عند 1 يوازي حامل محور الفواصل

ج/ استنتاج اتجاه تغير الدالة f: من أجل كل x من D_f

لدينا : إشارة $f'(x)$ هي من إشارة $g\left(\frac{1}{x}\right)$ وهي :

الدالة f متناقصة تماما على المجال $]0;1]$ ومتزايدة تماما على المجال $[1;+\infty[$

* جدول تغيرات الدالة f :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	↘	4	↗	$+\infty$

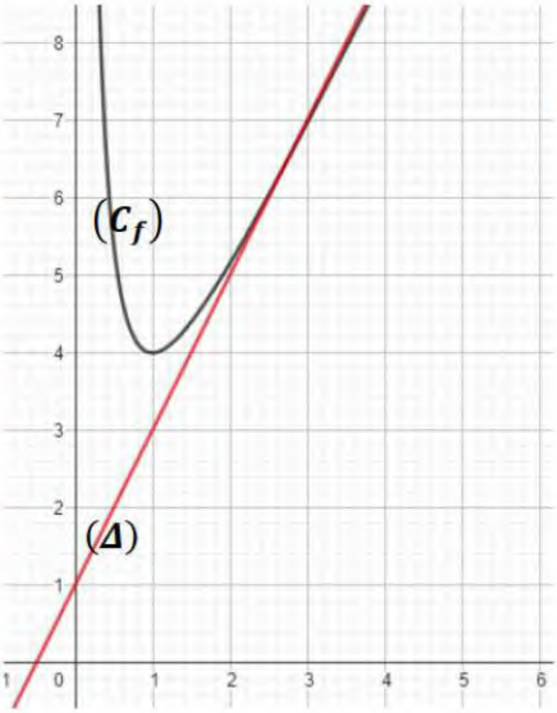
3) أ/ حساب $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-2x]$

$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-2x]=1$ نستنتج أنّ المستقيم ذو المعادلة: $y=2x+1$ مقارب مائل لـ (C_f) جوار $+\infty$

ب/ دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة لـ (Δ):

لدينا $\frac{1-\ln x}{x}=[f(x)-(2x+1)]$ و منه إشارة الفرق هي من إشارة $(1-\ln x)$ وهي :

إذن: (C_f) يقع فوق (Δ) على $]0\ ;e[$ وتحت (Δ) على المجال $]e\ ;+\infty[$ و (C_f) يقطع (Δ) في النقطة ذات الإحداثيات $(e;2e+1)$.



4) رسم كلا من (Δ) و (C_f).

5) من أجل كل عدد طبيعي n : $U_n = \int_{e^n}^{e^{n+1}} (f(x) - (2x+1))dx$

أ/ حساب U_n بدلالة n ثم استنتاج طبيعة المتتالية (U_n)

$$U_n = \int_{e^n}^{e^{n+1}} (f(x) - (2x+1))dx = \int_{e^n}^{e^{n+1}} \frac{1 - lnx}{x} dx$$

$$= \int_{e^n}^{e^{n+1}} \frac{1}{x} dx - \int_{e^n}^{e^{n+1}} \frac{lnx}{x} dx = -n + \frac{1}{2}$$

ومنه (U_n) حسابية أساسها $r = -1$ وحدها الأول $U_0 = \frac{1}{2}$

ب/ التحقق من أنّ : $A = (U_0 - U_1)\ ua$

لدينا : "باستعمال علاقة شال "

$$A = \int_1^e (f(x) - (2x+1))dx - \int_e^{e^2} (f(x) - (2x+1))dx = (U_0 - U_1)\ ua$$

6) أ/ إثبات أنّ : $\frac{h(x)}{x} = f\left(\frac{1}{x}\right) - 4$

لدينا : $f\left(\frac{1}{x}\right) - 4 = 2 \times \frac{1}{x} + 1 + \frac{1 - ln\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} - 4 = \frac{x^2(1 + lnx) - 3x + 2}{x} = \frac{h(x)}{x}$

✓ استنتاج أن $h(x) \geq 0$

لدينا : من جدول التغيرات $f(x) \geq 4$ تكافئ $f(x) \geq f(1)$ ومنه $f\left(\frac{1}{x}\right) \geq 4$ أي $f\left(\frac{1}{x}\right) - 4 \geq 0$

وبالتالي $h(x) \geq 0$

ب/ تعيين x بحيث يكون $h(x) = 0$

$h(x) = 0$ تكافئ $f\left(\frac{1}{x}\right) - 4 = 0$ أي $f\left(\frac{1}{x}\right) = f(1)$ ومنه $\frac{1}{x} = 1$ وبالتالي $x = 1$

انتهى بحمد الله وبفضله تصحيح الموضوع الأول من البكالوريا التجريبي دورة 2024

مادة الرياضيات للأقسام النهاية شعبة الرياضيات

لاتنسونا من صالح دعائكم

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية

مؤسسة التربية والتعليم الزهور الخاصة

امتحان بكالوريا تجريبي التعليم الثانوي

دورة: 2024

الشعبة: رياضيات

اختبار في مادة: الرياضيات

المدة: 04 سا و30 د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين

الموضوع الأوّل

التمرين الأوّل: (04 نقاط)

I) يحتوي صندوق U_1 على ثلاث كريات تحمل الأرقام 0 ، 1 ، 3. ويحتوي صندوق U_2 على أربع كريات تحمل الأرقام 4، 5 ، 8 ، 8. جميع الكريات متماثلة لا نفرق بينها باللّمس.

نسحب عشوائيا كرية واحدة من الصندوق U_1.

– إذا كانت الكرية المسحوبة من U_1 تحمل الرّقم 0 نسحب عشوائيا وفي آن واحد كريتين من الصندوق U_2

– إذا كانت الكرية المسحوبة من U_1 لا تحمل الرّقم 0 نسحب عشوائيا وفي آن واحد 3 كريات من الصندوق U_2

نعتبر الحادثتين التّاليتين: A : " الكرية المسحوبة من الصندوق U_1 تحمل الرقم 0 "

S : " مجموع أرقام الكريات المسحوبة من الصندوق U_2 عدد زوجي"

1) أ) أنجز شجرة الاحتمالات التي تنمذج هذه التّجربة.

ب) احسب $P_A(S)$ و $P(A\cap S)$.

جـ) تحقّق أنّ: $P(\overline{A}\cap S)=\dfrac{1}{6}$ ثمّ استنتج $P(S)$.

2) عِلْماً أنّ مجموع الأرقام التي تحملها الكريات المسحوبة من الصندوق U_2 زوجي ما احتمال أن تكون الكرية المسحوبة من U_1 لا تحمل الرقم 0.

II) نضع محتوى الصندوقين في صندوق جديد U_3 ثمّ نسحب عشوائيا على التّوالي بدون إرجاع 3 كريات.

1) احسب احتمال الحادثة C : " الحصول على كرية واحدة فقط تحمل رقما أوّليا ".

2) نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل عملية سحب لثلاث كريات من U_3 عدد الكريات التي تحمل رقما زوجيا.

أ) عيّن قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X، ثمّ استنتج $P\left(\left|X-1\right|<1\right)$.

ب) احسب الأمل الرياضياتي $E(X)$ للمتغير العشوائي X

التمرين الثاني: (04 نقاط)

1) نعتبر المعادلة $4x-5y=33\cdots(E)$ ذات المجهول $(x;y)$ حيث x و y عددان صحيحان.

أ) عيّن الأعداد الصّحيحة x بحيث: $4x\equiv 33[5]$

ب) استنتج حلا خاصا $(x_0;y_0)$ للمعادلة (E) بحيث: $2<x_0<10$ ثمّ حل المعادلة (E).

جـ) عيّن الثّنائية الوحيدة $(a;b)$ من $\mathbb{N}^2$ حلا للمعادلة (E) بحيث: $PGCD(a;b)=3$ و $PPCM(a;b)=135$.

2) عيّن الأعداد الصّحيحة α حلول الجملة $\begin{cases}\alpha\equiv 55[5]\\ \alpha\equiv 22[4]\end{cases}$.

3) أ) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n باقي القسمة الإقليدية للعدد 5^n على 11.

ب) استنتج باقي القسمة الإقليدية للعدد: $10^{10n}+16^{5n+4}+38^{20n+1}$ على 11.

ج) عيّن قيم العدد الطبيعي n بحيث : $\begin{cases} n-5^n \equiv 0[11] \\ n \equiv 2[5] \end{cases}$

4) N العدد الطبيعي الذي يكتب في نظام التّعداد ذي الأساس أربعة كما يلي: $\overline{abbaba}^4$.

– عيّن a و b حتى يقبل العدد N القسمة على 33 ثمّ اكتب N في النّظام العشري,

التمرين الثالث: (05 نقاط)

α عدد حقيقي يختلف عن -2.

(u_n) المتتالية العددية المعرفة كما يلي: $u_0=\alpha+2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}=\dfrac{(\alpha+2)u_n}{u_n+2-\alpha}$

(v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بِـ: $v_n=\dfrac{u_n}{u_n-2\alpha}$,

I) نضع $\alpha=1$:

1) أ) تحقّق أنّه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}=3-\dfrac{3}{u_n+1}$.

ب) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $2<u_n<4$.

ج) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n). هل المتتالية (u_n) متقاربة؟ برّر إجابتك.

2) أ) برهن بالتّراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n=\dfrac{6}{3-3^{-n}}$ ثمّ احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

ب) استنتج عبارة v_n بدلالة n ثمّ عيّن أصغر عدد طبيعي n يحقّق : $v_n \geq e^{66}$.

3) احسب بدلالة n المجموع S_n بحيث: $S_n=\dfrac{1}{u_0}+\dfrac{1}{u_1}+\cdots+\dfrac{1}{u_n}$.

II) نفرض أنّ: $-2<\alpha<0$

1) أ) بيّن أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\dfrac{2+\alpha}{2-\alpha}$ يطلب تعيين حدّها الأوّل.

ب) أكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة α و n . هل المتتالية (v_n) متقاربة ؟ برّر إجابتك.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I) نعتبر الدّالتين العدديتين g و h المعرفتين على $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=x-1-\ln x$ و $h(x)=x+(x-2)\ln x$

1) أ) ادرس اتجاه تغير الدالة g .

ب) احسب $g(1)$ ثمّ استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.

2) أ) تحقّق أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من $]0;+\infty[$: $h(x)=1+g(x)+(x-1)\ln x$.

ب) بيّن أنّه من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $(x-1)\ln x \geq 0$ ، ثمّ استنتج أنّ: $h(x)>0$ على المجال $]0;+\infty[$.

II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=1+x\ln x-(\ln x)^2$.

نسمي (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$،(وحدة الطول $2cm$).

1) أ) تحقّق أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من $]0;+\infty[$: $f(x)=1+x\ln x\left(1-\dfrac{\ln x}{x}\right)$

ب) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)$ ثمّ فسّر النّتيجة الثّانية هندسيا.

2) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من $]0;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{h(x)}{x}$.

3) استنتج ممّا سبق اتجاه تغيّر الدالة f على $]0,+\infty[$ ، ثمّ شكّل جدول تغيراتها.

4) أ) اكتب معادلة للمستقيم (T) مماس المنحنى (C_f) في النّقطة التي فاصلتها 1.

ب) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من $]0;+\infty[$: $f(x)-x=(-1+\ln x)g(x)$.

ج) ادرس إشارة $[f(x)-x]$ على المجال $]0,+\infty[$ ثمّ استنتج الوضع النّسبي للمنحنى (C_f)والمماس (T) .

5) عيّن العدد الحقيقي β من المجال $]1,+\infty[$ والذي يحقّق $h(\beta)=\beta$ ، ثمّ استنتج أنّ (C_f) يقبل مماسا (T') يوازي (T) يطلب تعيين معادلة له.

6) برهن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $0,4<\alpha<0,5$.

7) أنشئ في المعلم السّابق المماسين (T) و (T') والمنحنى (C_f) .

8) باستعمال المنحنى (C_f)،عيّن قيّم الوسيط الحقيقي m حتى يكون للمعادلة $f(x)=x+m$ ثلاثة حلول مختلفة.

الموضوع الثاني (شعبة رياضيات)

التمرين الأوّل: (04 نقاط)

(u_n) متتالية هندسية متزايدة تماما حدّها الأوّل u_1.

1) أ) تحقّق أنّ: $u_1^2+u_2^2+u_3^2=(u_1-u_2+u_3)(u_1+u_2+u_3)$

ب) عيّن الحدود u_1 ، u_2 و u_3 عِلْماً أنّ: $\begin{cases} u_1^2+u_2^2+u_3^2=2275 \\ u_1+u_2+u_3=65 \end{cases}$

جـ) استنتج أساس المتتالية (u_n) ثمّ بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، $u_n=5\times 3^{n-1}$.

2) أ) ادرس تبعا لقيم العدد الطبيعي n باقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 8 .

ب) بيّن أنّ العدد $u_{2024}-u_{1445}-2$ يقبل القسمة على 8

3) x و y عددان صحيحان، نعتبر المعادلة ذات المجهول $(x;y)$ التّالية: $(E)\cdots 7u_1x-u_3y=u_2$

أ) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E).

ب) عيّن الثّنائية $(x;y)$ حلا المعادلة (E) بحيث: $y<x<10$

4) نفرض أنّ x و y عددان طبيعيان. نضع: $d=PGCD(x;y)$ بحيث، $(x;y)$ حلا لِـ (E)

أ) عيّن القيم الممكنة لِـ d .

ب) عيّن الثنائيات $(x;y)$ من الأعداد الطبيعية حلا لِـ (E) بحيث: $d=3$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

يحتوي صندوق على 12 كرية متماثلة لا نفرق بينها باللّمس، منها α كرية بيضاء و β كرية سوداء، حيث α و β عددان طبيعيان غير معدومان.

1) نسحب من الصندوق وبصفة عشوائية كريتين على التّوالي دون إرجاع .

نعتبر الحادثة E : " الحصول على كريتين من لونين مختلفين " .

– عيّن الثّنائيتين $(\alpha;\beta)$ من الأعداد الطبيعية إذا علمنا أنّ: $P(E)=\dfrac{16}{33}$.

2) نضع: $\alpha=8$ و $\beta=4$

نسحب الآن من الصندوق ثلاث كريات على التّوالي مع إرجاع الكرية المسحوبة إلى الصندوق قبل السّحب الموالي.

احسب احتمال الحوادث التالية: A : " من بين الكريات المسحوبة، الأولى فقط بيضاء "

B : '' من بين الكريات الثلاث المسحوبة، واحدة بالضّبط بيضاء "

C : " من بين الكريات الثلاث المسحوبة توجد واحدة على الأقل بيضاء وواحدة على الأقل سوداء "

3) نقترح اللّعبة التّالية للمشاركة يدفع اللاعب $200DA$ ثمّ يسحب في آن واحد ثلاث كريات من الصندوق.
يربح اللاعب $100DA$ عن كلّ كرية بيضاء تحصل عليها خلال السّحب.
نسمي X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب لثلاث كريات الرّبح الصافي أو خسارة اللاعب.
أ) عيّن القيم الممكنة للمتغير العشوائي X.
ب) عيّن قانون احتمال المتغير العشوائي X واحسب أمله الرياضياتي $E(X)$. هل اللّعبة عادلة ؟

التمرين الثالث: (05 نقاط)

1) أ) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية: $z^2-6z+10=0$.

ب) استنتج في $\mathbb{C}$ حلول المعادلة ذات المجهول z التّالية: $(\overline{z}+2)^2-6(\overline{z}+2)+10=0$

2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، نعتبر النّقط A، B، C، D

التي لاحقاتها على الترتيب: $z_A=3-i$ ، $z_B=3+i$ ، $z_C=1+i$ و $z_D=1-i$

أ) أكتب على الشّكل الأسي العدد المركب $\dfrac{z_D-z_A}{z_B-z_A}$.

ب) بيّن أنّ النّقطة D هي صورة النّقطة B بدوران R يطلب تعيين عناصره المميزة.

3) E النّقطة التي لاحقتها $z_E=7-3i$ و F صورتها بالدوران R.

أ) تحقّق أنّ لاحقة F هي: $z_F=5+3i$

ب) عيّن لاحقة النّقطة H صورة F بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AE}$

ج) استنتج بدقّة طبيعة الرباعي $AEHF$

4) عيّن المجموعة (Γ) للنّقط M ذات اللاحقة z حيث: $z=1-i+ke^{-i\frac{\pi}{4}}$ وذلك عندما k يمسح $\mathbb{R}_+$.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I) g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=1-2(x^2-x)e^{2x}$

1) أ) بيّن أنّ: $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=1$ ثمّ أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

ب) بيّن أنّ: $g'(x)=2(1-2x^2)e^{2x}$ ثمّ استنتج اتجاه تغير الدالة g على $\mathbb{R}$

2) أ) بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $1{,}05<\alpha<1{,}06$

ب) استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x، إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II) f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=x-1+(x+1)^2e^{-2x}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1) أ) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

ب) بيّن أنّ المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ) يطلب تعيين معادلة له.

جـ) أدرس الوضع النّسبي للمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ).

2) أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x)=g(-x)$ ثمّ استنتج إشارة $f'(x)$.

ب) حدّد اتجاه تغير الدالة f على $\mathbb{R}$ ثمّ شكّل جدول تغيراتها

3) أكتب معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_f) في النّقطة التي فاصلتها 0.

4) نضع: $f(-\alpha)\approx -2{,}1$ ، أحسب $f(-2)$ ثمّ أرسم (Δ) و (T) و المنحنى (C_f)

5) عيّن قيم الوسيط الحقيقي m التي من أجلها تقبل المعادلة : $(x+1)^2e^{-2x}-e^m=0$ ذات المجهول الحقيقي x ثلاثة حلول.

6) الدالة h الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h(x)=(x+1)e^{-2x}$

أ) بيّن أنّ: $2h(x)+h'(x)-e^{-2x}=0$ ثمّ أحسب $\int_{-1}^{\lambda} h(x)dx$ حيث λ عدد حقيقي أكبر تماما من -1

ب) باستعمال المكاملة بالتّجزئة ونتيجة السّؤال 6. أ)، أحسب بـ cm^2 مساحة الحيز المستوي المحدّد بالمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) والمستقيمين اللذين معادلتيهما: $x=-1$ و $x=\lambda$.

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية — مديرية التربية لولاية عين الدفلى

امتحان الباكالوريا التجريبي — ثانوية غالمي عبد القادر

الشعبة : رياضيات — دورة ماي 2024

اختبار في مادة الرياضيات — المدة:04 سا و30 د

أجب على أحد الموضوعين التالين على الخيار

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

يحتوي صندوق U_1 على ثلاث كريات تحمل الأرقام 0 ، 1 و 3 ويحتوي صندوق U_2 على أربع كريات تحمل الأرقام 4 ، 5 ، 8 و 8 ، نسحب عشوائيا كرية واحدة من الصندوق U_1.

فإذا كانت تحمل الرقم 0 نسحب عشوائيا وفي آن واحد كريتين من U_2 وإذا كانت لا تحمل الرقم 0 نسحب عشوائيا وفي آن واحد ثلاث كريات من U_2.

ليكن A " الكرية المسحوبة من U_1 تحمل الرقم 0 " و B " مجموع أرقام الكريات المسحوبة من U_2 عدد زوجي " .

1) أحسب الاحتمالين : $P_A(B)$ و $P(A\cap B)$ ثم بين أن $P(\overline{A}\cap B)=\frac{1}{6}$ ثم أحسب $P(B)$.

2) علما أن مجموع الأرقام التي تحملها الكريات المسحوبة من الصندوق U_2 زوجي ، ما احتمال أن تكون الكرية المسحوبة من الصندوق U_1 لا تحمل الرقم 0.

3) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب جداء الأرقام التي تحملها الكريات المسحوبة من U_1و U_2 .

أ) عين قانون إحتمال المتغير العشوائي X ، ثم استنتج قيمة $P(X\leq 160)$.

ب) أحسب الأمل الرياضياتي للمتغير العشوائي X

التمرين الثاني :(05 نقاط)

1) جد العددين المركبين Z_1و Z_2 حيث : $\begin{cases} 2Z_1+iZ_2=1+i\sqrt{3} \\ (\sqrt{3}+2i)Z_1-Z_2=(1-\sqrt{3})i \end{cases}$

2) في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$نعتبر النقطتين Aو B ذات اللاحقتين $Z_A=1-i$ و $Z_B=2+\sqrt{3}+i$.

أ) أكتب z_A على الشكل الأسي . ب) بين أن $\frac{Z_B}{Z_A}=(1+\sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{3}}$ ثم استنتج الشكل الأسي للعدد Z_B .

ج) هل توجد قيم لعدد الطبيعي n حتى تكون صورة العدد $\left(\frac{Z_B}{Z_A}\right)^n$ تنتمي إلى المنصف الأول ؟

3) أوجد لاحقة النقطة B' صورة النقطة B بالدوران r الذي مركزه النقطة O و زاويته $\frac{-\pi}{6}$.

4) نضع $Z_D=(1+\sqrt{3})-i$

أ) أحسب مساحة الدائرة (δ) التي قطرها $[BD]$. (مقدرة بوحدة المساحة)

ب) عين مجموعة النقط $M(Z)$ من المستوي حيث : $\arg\left[(Z-Z_B)^2\right]=\arg(Z_B)-\arg(Z_D)$.

ج) عين Z_C لاحقة النقطة C حتى يكون الرباعي $ADBC$ مستطيلا ، ثم أوجد Z_I لاحقة مركز ثقله I .

5) نعتبر المجموعة (Δ) للنقط M ذات اللاحقات Z من المستوي بحيث : $Z-\sqrt{3}=\lambda e^{\frac{-2\pi}{3}i}$ و λ عدد حقيقي موجب تماما .
تحقق من أن النقطة E ذات اللاحقة $Z_E=-3i$ تنتمي إلى (Δ) .ثم عين المجموعة (Δ).

التمرين الثالث : (04 نقاط)

لتكن (u_n) و (v_n) متتاليتين معرفتين على $\mathbb{N}$ كمايلي بـ : $\begin{cases} u_0=7 \\ u_{n+1}=\frac{1}{3}(2u_n+v_n) \end{cases}$ و $\begin{cases} v_0=1 \\ v_{n+1}=\frac{1}{3}(u_n+2v_n) \end{cases}$

من أجل كل عدد طبيعي نعرف المتتالية (w_n) بـ n : $w_n=u_n-v_n$

1) أ)- بين أن المتتالية (w_n) هندسية ، يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .

ب)- أكتب عبارة w_n بدلالة n هل المتتالية (w_n) متقاربة؟

2)- أدرس اتجاه تغير كل من المتتاليتين (u_n) و (v_n).

ب) استنتج أن (u_n) و (v_n) متجاورتان .

3)- لتكن l النهاية المشتركة لهما ونعرف المتتالية (t_n) على $\mathbb{N}$ بـ $t_n=u_n+v_n$.

بين أن (t_n) ثابتة ثم استنتج قيمة l.

4)- أحسب المجموع $T=S_n+S'_n$ بدلالة n حيث : $S_n=v_0u_0-v_0^2+v_1u_1-v_1^2........+v_nu_n-v_n^2$

و $S_n=u_0^2-u_0v_0+u_1^2-u_1v_1-........+u_n^2-u_nv_n$.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n , نعرّف الدالة f_n على المجال $[0;+\infty[$ بـ: $\begin{cases} f_n(x)=x(1-\ln x)^n & ; \ x>0 \\ f_n(0)=0 \end{cases}$

(C_n) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ حيث $\|\vec{i}\|=2cm$

I)1) أ) أدرس قابلية اشتقاق الدالة f_1 عند 0 من اليمين ثمّ فسّر النتيجة بيانيا.

ب) جد كل من: $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f_2(x)$.

2) أ) أدرس اتجاه تغيّر الدالة f_1 ثمّ شكّل جدول تغيّراتها . ب) استنتج دالة أصلية للدالة $x\mapsto x\ln x$ على المجال $]0;+\infty[$.

3) أ) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما x: $f_2'(x)=(1+\ln x)(-1+\ln x)$.

ب) أدرس اتجاه تغيّر الدالة f_2 ثمّ شكّل جدول تغيّراتها .

4) بيّن أن المنحنى (C_2) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين إحداثييها.

5) أدرس الوضع النسبي للمنحنيين (C_1) و (C_2) ثمّ أرسم كلا منهما في المعلم السابق.

II) من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n نعرف العدد الحقيقي I_n كما يلي: $I_n=\int_1^e f_n(x)\,dx$

1) أحسب I_1 ثمّ فسّر النتيجة هندسيا .

2) بيّن أن المتتالية (I_n) متناقصة ثمّ استنتج تقاربها .

3) باستعمال التكامل بالتجزئة, بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $I_{n+1}=\frac{n+1}{2}I_n-\frac{1}{2}$

أحسب بـ cm^2 مساحة حيّز المستوي المحدّد بالمنحنيين (C_1) , (C_2) و المستقيمين اللذين معادلتين لهما: $x=1$, $x=e$

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (05 نقاط)

تعطى المعادلة: (E). . . $2024x-1444y=24$ حيث x و y عددان صحيحان.

1) أحسب $PGCD(2024;1444)$ ثم بين أن المعادلة (E) تقبل حلولا في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$.

2) جد الحل الخاص $(x_0;y_0)$ للمعادلة (E) علما أن : $y_0-x_0=4$ ثم حل في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ المعادلة (E) .

3) جد القيم الممكنة لـ $PGCD(x;y)$ حيث $(x;y)$ حل المعادلة (E) ثم جد الثنائيات $(x;y)$ من $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ حلول المعادلة (E) بحيث $PGCD(x;y)=6$.

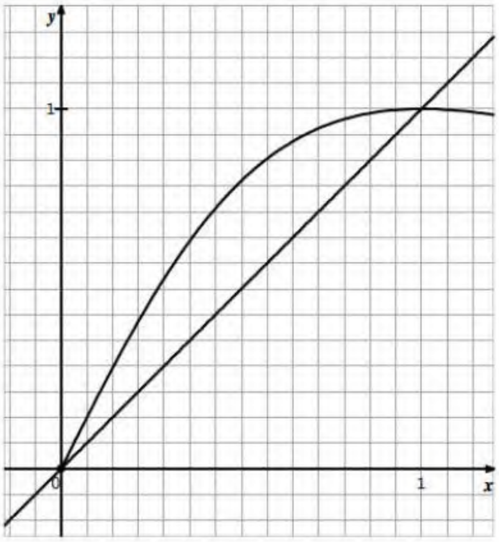
4) نضع : $u_n=361n+16$ و $v_n=506n+10$ حيث $n\in\mathbb{N}$ ، عين الحدود المشتركة للمتتاليتين (u_n) و (v_n) .

5) أ) حلل العدد 2025 الى جداء عوامل أولية و استنتج قواسم 2025 التي مربعاتها قواسم لـ 2025.

ب) جد العددين الطبيعيين a و b حيث $4m^2-171d^2=2025$ حيث $d=PGCD(a;b)$ و $m=PGCD(a;b)$

التمرين الثاني : (04 نقاط)

(u_n) متتالية عددية معرفة بـ: $u_0=\frac{1}{2}$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=\frac{2u_n}{1+u_n^2}$.



1) في مايلي المنحنى البياني الممثل لدالتها المرفقة f حيث $f(x)=\frac{2x}{1+x^2}$

مثل الحدود الأرعة الأولى على حامل محور الفواصل أعط تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها .

2) أ) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $\frac{1}{2}\le u_n<1$.

ب) حدد اتجاه تغير المتتالية (u_n). بين أن (u_n) متقاربة، أحسب نهايتها.

3) أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0<1-u_{n+1}\le\frac{2}{5}(1-u_n)$.

ب) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0<1-u_n\le\frac{1}{2}\times\left(\frac{2}{5}\right)^n$.

ج) استنتج نهاية المتتالية (u_n) مرة أخرى.

4) نعرف المتتالية (v_n) على كمايلي: $v_n=1-u_n$.ونضع $S_n=v_0+v_1+v_2+...v_n$.

بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0<S_n\le\frac{5}{6}\times\left(1-\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}\right)$ ، ثم استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{S_n}{n}$.

التمرين الثالث : (05 نقاط)

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $(z-2)(z^2-2z+4)=0$.

2) نعتبر في المستوي المركب المنسوب الى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ النقط A ، B و C التي لاحقاتها

z_A ، z_B و z_C على الترتيب حيث $z_A = 2$ ، $z_B = 1+i\sqrt{3}$ و $z_C = 1-i\sqrt{3}$

أ) أكتب z_A ، z_B و z_C على الشكل الأسي ثم أنشئ النقط A ، B و C (يطلب ترك أثر الإنشاء) .

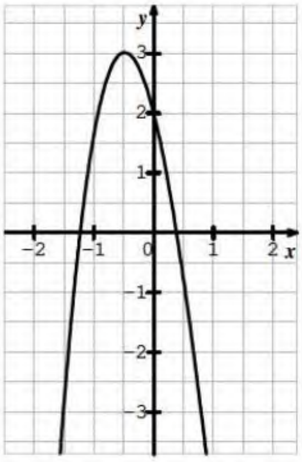
3) أكتب على الشكل الجبري العدد المركب $\left(\dfrac{2}{z_C}\right)^{2024}$ ثم عين قيم العدد الطبيعي n بحيث تكون النقطة H صورة العدد $\left(z_B\right)^n$ تنتمي الى المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y = x\sqrt{3}$.

4) (Γ) مجموعة النقط M ذات اللاحقات z حيث $\arg\left(\overline{z}-2\right) = \dfrac{-2\pi}{3} + 2k\pi$ و k عدد صحيح.

أ) تحقق أن $B \in (\Gamma)$ ثم عين طبيعة (Γ) .

ب) بين أن النقطة C هي صورة النقطة B بدوران مركزه A يطلب تعيين زاويته .

التمرين الرابع :(07 نقاط)



I) m عدد طبيعي معطى نعتبر الدالة f_m و المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f_m(x) = (x^3 - mx)e^{-x} + x + 1$.

(C_m) هو المنحنى الممثل لها في المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1) أ) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f_m(x)$ ، و $\lim\limits_{x\to+\infty} f_m(x)$.

ب) بين أن للمنحنيات (C_m) مستقيما مقاربا مائلا في جوار $+\infty$ يطلب كتابة معادلته.

2) بين أن جميع المنحنيات (C_m) تشمل نقطة ثابتة يطلب تعينها .

II) نضع $\underline{\underline{m=3}}$ ونعرف الدالة f على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = f_3(x)$.

1) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = x^3 - 3x^2 - 3x + 3 - e^x$.(فيما يلي المنحنى الممثل لها في المعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$) .

أ) برر وجود حلين α و β للمعادلة $g(x)=0$ في $\mathbb{R}$ حيث $-1.23 < \alpha < -1.22$ ، $0.38 < \beta < 0.39$.

ب) استنتج اشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

2) أ)بين أنه من أجل كل $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = -e^{-x}g(x)$.

ب) حدد إشارة $f'(x)$ ثم أدرس اتجاهات تغير الدالة f و أنجز جدول تغيراتها .

3) حدد الوضع النسبي للمنحني (C_f) و المستقيم (Δ)الذي معادلته $y = x+1$.

4) أكتب معادلة المماس (T) في النقطة ذات الفاصلة 0 ثم المماس (T') في النقطة ذات الفاصلة 3 .

تحقق من أن (T) و (T') يشملان النقطة $A(0;1)$.

5) أرسم كلا من (T) ، (T') و (Δ) و المنحنى (C_3).

6) أ) نبين أن جميع المستقيمات (Δ_p) التي معادلاتها $y = px+1$ تشمل النقطة $A(0;1)$. (حيث عدد حقيقي) .

ب) ناقش بيانيا حسب قيم p عدد اشارة حلول المعادلة $f(x) = px+1$.

7) نعتبر الدالة h المعرفة بـ $h(x) = (x^3 - 3x)e^{-x}$.

أ) جد الأعداد الحقيقية a ، b ، c ، d بحيث تكون الدالة H المعرفة بـ $H(x) = (-x^3 + ax^2 + bx + c)e^{-x}$ دالة أصلية لـ h.

ب) أحسب مساحة الحيز من المستوي المحدد من المستوى (C_f) و (Δ) و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x = 0$ و $x = \sqrt{2}$.

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية

مديرية التربية لولاية غرداية — **ثانويات المقاطعة التفتيشية غرداية 02**

امتحان بكالوريا التجريبي — **دورة: ماي 2023**

الشعبة: رياضيات

اختبار في مادة: الرياضيات — **المدّة: 04 سا و 30 د**

على المترشّح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04نقاط)

1) حلّ في مجموعة الأعداد المركّبة $\mathbb{C}$ المعادلة: $(z-4)(z^2+4z+16)=0$

2) المستوي المركب مزود بمعلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$. A ، B و C ثلاث نقط لواحقها على الترتيب

$z_A=4$ ، $z_B=-2+2i\sqrt{3}$ و $z_C=\overline{z_B}$

• أكتب الأعداد المركبة z_A ، z_B و z_C على الشكل الأسي ثم بين أن النقط A ، B و C تنتمي إلى نفس الدائرة يطلب تعيين عناصرها المميزة.

3) نعتبر العدد المركب L حيث: $L=\dfrac{z_B-z_A}{z_C-z_A}$

أ- أكتب العدد L على الشكل الأسي ثم فسر النتائج المحصل عليها هندسيا.

ب- استنتج طبيعة المثلث ABC .

ج- عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون العدد المركب L^n حقيقي سالب.

د- ما طبيعة التحويل r الذي مركزه A ويحول B إلى C أوجد عبارته المركبة.

ه- عين z_E لاحقة النقطة E صورة C بالتحويل r.

و- ما طبيعة الرباعي $ABCE$ ؟ علل إجابتك.

4) (γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث $\left|z-4\right|=\left|iz+2i-2\sqrt{3}\right|$

أ- بين أن كلا من النقطتين E و B تنتميان إلى (γ)

ب- عين طبيعة المجموعة (γ).

التمرين الثاني: (04 نقاط)

نعتبر ثنائية $(x_0;q)$ حيث x_0 و q عددين طبيعيين غير معدومين و $p\gcd\left(x_0,q\right)=1$. (x_n) متتالية هندسية أساسها q وحدها الأول x_0 ، وتحقق من أجل كل عدد طبيعي n : $x_{n+1}+2x_{n+3}-44x_0{}^2q^n=0$

1) أ- بين أن: $q+2q^3=44x_0$

ب- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $p\gcd\left(1+2q^2,4\right)=1$ ثم حدد قيمة كل من x_0 و q

2) نأخذ فيما يلي $(x_0;q)=(3;4)$ ونضع من أجل عدد طبيعي غير معدوم n : $S_n=x_0+x_1+x_2+\cdots+x_n$

أ- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n\equiv 0[3]$

ب- تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $S_{n+1}=4S_n+3$ ، ثم حدد قيمة العدد: $p\gcd\left(S_{n+1};S_n\right)$

ج- عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون $S_n\equiv 0[5]$

3) أ- حدد باقي قسمة العدد S_{27} على 17.

ب- استنتج ثلاثة قواسم أولية للعدد S_{27}

التمرين الثالث: (04 نقاط)

يحتوي وعاء U على 5 كريات حمراء و3 كريات صفراء وكريتين خضراوين. الكريات متماثلة لانفرق بينها باللمس، نسحب عشوائيا في آن واحد ثلاث كريات من الوعاء U.

A و B و C ثلاثة أحداث حيث:

- A : " الحصول على ثلاث كريات حمراء"
- B : " الحصول على ثلاث كريات من نفس اللون"
- C : " الحصول على ثلاث كريات مختلفة اللون مثنى مثنى"

1) أحسب $P(A)$ و $P(B)$ و $P(C)$ احتمال الأحداث A و B و C على الترتيب.

2) X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحبة عدد ألوان الكريات المسحوبة.

- عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ثم أحسب أمله الرياضياتي.

3) نظيف $(n-5)$ كرية حمراء إلى الوعاء U حيث $n \geq 5$ ، ثم نسحب عشوائيا كريتين على التوالي دون إرجاع.

D و E حدثين حيث:

- D : " الحصول على كريتين حمراوين"
- E : " الحصول على كريتين من نفس اللون"

أ- برهن أن: $\mathrm{P}(D) = \dfrac{n(n-1)}{(n+5)(n+4)}$.

ب- أحسب بدلالة n العدد $\mathrm{P}(E)$ احتمال الحدث E .

ج- عين قيم العدد الطبيعي n بحيث: $P(E) \geq \dfrac{1}{2}$.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

f_m الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f_m(x) = e^{-2x} - (1+m)e^{-x} + m$ حيث m وسيط حقيقي

(C_m) التمثيل البياني للدالة f_m في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. يث $\|\vec{i}\| = 2\,cm$

I. في هذا الجزء نضع: $m = 1$

1) أدرس تغيرات الدالة f_1

2) أ- برهن أن المنحني (C_1) يقبل A_0 نقطة انعطاف يطلب تعيين إحداثييها.

ب- أكتب معادلة لـ (T) المماس للمنحني (C_1) عند النقطة A_0 ثم أنشئه.

ج- أنشئ المنحني (C_1)

II.

1) أ- بين أن جميع المنحنيات (C_m) تشترك في نقطة ثابتة يطلب تعيين إحداثييها.

ب- ناقش حسب قيم العدد الحقيقي m وجود نقط تقاطع المنحني (C_m) مع حامل محور الفواصل.

2) أدرس تغيرات الدالة f_m ، ثم عين المستقيمات المقاربة للمنحني (C_m).

3) أ- m_1 و m_2 عددين حقيقين حيث: $m_1 < m_2$ أدرس الوضع النسبي للمنحنيين (C_{m_1}) و (C_{m_2})

ب- أنشئ (دون دراسة التغيرات) المنحنيين (C_{-2}) و (C_3) في نفس المعلم السابق.

4) نعتبر y_m القيمة الحدية المحلية للدالة f_m التي تأخذها عند x_m أكتب كل من x_m و y_m بدلالة m.

استنتج معادلة مستقلة عن m للمنحني (P) مجموعة النقط $M(x_m;y_m)$ لما m يمسح $]-1;+\infty[$.

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط).

نعتبر المعادلة التالية: (E) .... $7x-5y=11$ حيث x و y عددان صحيحان

1) أ) بين أنه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حل للمعادلة (E) فإن $x\equiv 3[5]$

ب) استنتج حلول المعادلة (E)

ج) عين الثنائيات $(x;y)$ حلول المعادلة (E) بحيث يكون $PGCD(x;y)=11$

2) أ) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الاقليدية لكل من 5^n و 7^n على 11

ب) عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون 5^n+7^{2023} قابلا للقسمة على 11

3) a و b عددان طبيعيان غير معدومين كلاهما أصغر تماما من 7 ، N عدد طبيعي يكتب $\overline{a01b}$ في النظام العشري

أ) تحقق أن $10^3\equiv -[11]$

ب) عين قيمة العدد N إذا علمت أن باقي قسمته على 11 هو 4

ج) أكتب العدد N في نظام التعداد ذي الاساس 11

التمرين الثاني: (04 نقاط).

يحتوي كيس U على 5 كريات بيضاء و3 كرات حمراء وكرتان خضراوتان،الكريات متماثلة ولانفرق بينها عند اللمس ، نسحب عشوائيا وفي آن واحد ثلاث كريات من هذا الكيس

1) أحسب إحتمال الحادثتين التاليتين :

A : " الكريات الثلاثة المسحوبة من نفس اللون "

B : " من بين الكريات الثلاثة المسحوبة توجد كرة واحدة فقط خضراء "

2) نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل نتيجة سحب عدد الألوان الظاهرة

أ) عين قانون احتمال المتغير X

ب) احسب الأمل الرياضياتي والتباين للمتغير العشوائي X

3) في تجربة مستقلة نعتبر الكيس U وكيس آخر V به كرتين بيضاوين وكرتين حمراوين وكرة خضراء

نرمي حجر نرد غير مزيف مرقم من 1 إلى 6، إذا ظهر الرقم 6 نسحب كرة من الكيس U

وإلا نسحب كرة من الكيس V

أ) بين أن احتمال سحب كرة بيضاء هو $\frac{5}{12}$

ب) علما أن الكرة المسحوبة بيضاء فما احتمال ان تكون من الكيس V

التمرين الثالث: (04 نقاط).

a عدد حقيقي موجب تماما

f الدالة المعرفة والقابلة للاشتقاق على المجال $[0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\sqrt{1+ax^2}$

- بين أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$

(u_n) متتالية عددية معرفة بـحدها الأول $u_0=0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=f(u_n)$

1) نفرض أن $0 \prec a \prec 1$

أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \le u_n \le \frac{1}{\sqrt{1-a}}$

ب) بين أن (u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$ ، واستنتج أنها متقاربة ثم احسب نهايتها

2) نضع $a \succ 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n بــ: $v_n = u_{n+1}^2 - u_n^2$

أ) أثبت أن (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الاول.

ب) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}^2 - u_n^2 = a^n$

ج) من أجل كل عدد طبيعي n نعرف المتتالية (w_n) كالآتي:

$w_0 = 0$ ومن أجل كل $n \succ 1$ ، $w_n = 1 + a + a^2 + ... + a^{n-1}$

- أكتب عبارة الحد العام w_n بدلالة n و a

- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = \sqrt{w_n}$ ثم أحسب $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} u_n$

التمرين الرابع: (08 نقاط)

I) نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي : $g(x) = x + 2 - \ln x$

1) أدرس اتجاه تغير الدالة g

2) أحسب $g(1)$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$

II) لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بالعبارة التالية : $f(x) = \frac{1}{2}\left(-x + e - \frac{\ln(x)}{x}\right)$

(C_f) تمثيلها البياني المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و لمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1) أ) من أجل كل عدد حقيقي x من $]0;+\infty[$ أحسب $f(-x) + f(x)$ وفسر النتيجة بيانيا.

ب) أحسب $\lim\limits_{x \xrightarrow{\succ} 0} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ ثم استنتج $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{\prec} 0} f(x)$

2) أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم، $f'(x) = \frac{-g(x^2)}{2x^2}$

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها

3) بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = -\frac{1}{2}x + \frac{e}{2}$ مقارب لـ (C_f) ثم أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ).

4) أ) أثبت أنه يوجد مماسان (T) و (T') للمنحنى (C_f) يوازيان (Δ) يطلب تحديد معادلة كل منهما.

ب) بين أن (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين فاصلتاهما α و β حيث

$2 < \alpha < 2{,}1$ و $-0{,}5 < \beta < -0{,}4$

ج) أرسم كلاّ من (Δ)، (T)، (T') والمنحني (C_f).

5) عين بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m حتى تقبل المعادلة $x(e-2m) = \ln(x^2)$ حلا وحيدا

6) أحسب $A(\alpha)$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) والمستقيم (Δ) والمستقيمين اللذين معادلتهما: $x = 1$ و $x = \alpha$

انتهى الموضوع الثاني

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04,5 نقاط)

(u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_n = \alpha 2^n + \beta(-3)^n$ حيث α و β عددان صحيحان.

1) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+2} + u_{n+1} - 6u_n = 0$

2) أ- باستعمال خوارزمية إقليدس، أوجد ثنائية $(\alpha;\beta)$ حل للمعادلة $8\alpha - 27\beta = -11$

ب- أوجد العدد الصحيح k حتى تكون الثنائية $(110+27k\ ;\ 33+8k)$ حلا للمعادلة $4\alpha + 9\beta = 17$

جـ- استنتج قيمتي α و β بحيث يكون $u_2 = 17$ و $u_3 = -11$

3) أ- برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n \equiv 3.2^n [5]$

ب- أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n، بواقي القسمة الإقليدية للعدد u_n على 5

4) نضع من أجل كل عدد طبيعي n، $w_n = 2^{n+1} + (-3)^n$ و $S_n = w_0 + w_1 + \ldots + w_n$

أ- برهن أن: $S_n \equiv 2 - 4\times 2^n [5]$

ب- استنتج باقي القسمة الإقليدية للعدد S_{2024} على 5

التمرين الثاني: (04 نقاط)

يحتوي وعاء على 12 بطاقة منها 4 بطاقات تحمل العدد 1 وبطاقتان تحملان العدد e و 6 بطاقات تحمل العدد $\frac{1}{e}$

كل البطاقات متماثلة ولا نفرق بينها باللمس.

نسحب على التوالي بطاقتين من الوعاء مع إرجاع البطاقة المسحوبة إلى الوعاء في كل مرة.

ليكن x الرقم المسجل على البطاقة المسحوبة أولا و y الرقم المسجل على البطاقة المسحوبة ثانيا.

في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، نعتبر النقطة M ذات اللاحقة z حيث: $z = \ln x + i\ln y$ ونعتبر الأحداث التالية:

A : " M نقطة من حامل محور الفواصل"

B : "قيس الزاوية الموجهة $(\overrightarrow{OM};\vec{u})$ هو $-\frac{\pi}{4}$"

C : " M نقطة من الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها 1"

1) أحسب $p(A)$ و $p(B)$

2) بين أن $p(C)=\frac{4}{9}$

3) علما أن النقطة M من حامل محور الفواصل، ما احتمال أن تكون من الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها 1؟

4) X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب لكريتين المسافة OM

أ- برر أن قيم المتغير العشوائي X هي: 0، 1 و $\sqrt{2}$

بـ- عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X واحسب أمله الرياضياتي $E(X)$

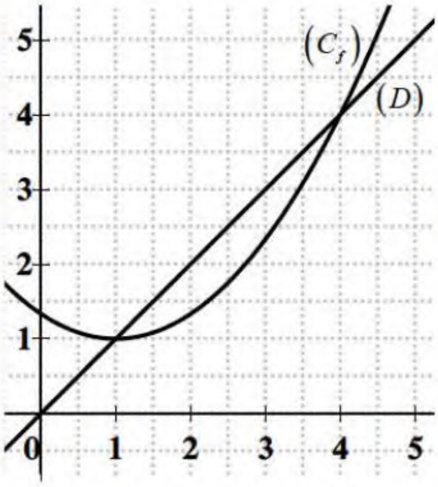
التمرين الثالث: (04,5 نقاط)

f الدالة العددية المعرفة على $[0;+\infty[$ بـ: $f(x)=1+\frac{1}{3}(x-1)^2$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O,\vec{i};\vec{j})$ و (D) المستقيم ذو المعادلة $y=x$

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بحدها الأول $u_0=3$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=f(u_n)$

1) أ- أعد رسم الشكل المقابل ثم مثل على حامل محور الفواصل الحدود u_0، u_1، u_2 و u_3 مبرزا خطوط الإنشاء.



بـ- ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها.

2) أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $1\le u_n\le 4$

بـ- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}-u_n=\frac{1}{3}(u_n-1)(u_n-4)$

استنتج أن المتتالية (u_n) متناقصة.

جـ- استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة.

3) (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n=\ln\left(\frac{u_n-1}{3}\right)$

أ- بين أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها 2 يطلب تعيين حدها الأول.

بـ- عبر عن v_n بدلالة n

4) نضع من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، $w_n=\left(\frac{(u_0-1)(u_1-1)(u_2-1)\dots(u_{n-1}-1)}{3^n}\right)$

أ- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، $\frac{1}{2^n}\ln(w_n)=\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\ln\left(\frac{2}{3}\right)$

بـ- استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{2^n}\ln(w_n)$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I) g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ بـ: $g(x)=\dfrac{x}{x-1}-\ln|x-1|$

1) أ- أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

ب- أحسب $\lim\limits_{x \overset{<}{\longrightarrow} 1} g(x)$ و $\lim\limits_{x \overset{>}{\longrightarrow} 1} g(x)$ (يمكن وضع: $t=x-1$)

2) أدرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

3) بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $4<\alpha<5$

4) استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}-\{1\}$

II) f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ بـ:

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{\ln|x-1|}{x} & ; x>0 \\ f(x)=\dfrac{-6e^x}{e^{2x}+3e^x+2} & ; x\le 0 \end{cases}$$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i};\vec{j})$ (وحدة الطول $2cm$)

1) أ- أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثم فسر النتيجتين بيانيا.

ب- أحسب $\lim\limits_{x \overset{<}{\longrightarrow} 1} f(x)$ و $\lim\limits_{x \overset{>}{\longrightarrow} 1} f(x)$ ثم فسر النتيجتين بيانيا.

2) أ- بين أن: $\lim\limits_{x \overset{<}{\longrightarrow} 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x}=-\dfrac{1}{6}$

ب- أحسب $\lim\limits_{x \overset{>}{\longrightarrow} 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x}$ (إرشاد: $\lim\limits_{x \overset{>}{\longrightarrow} 0} \dfrac{\ln(1-x)+x}{x^2}=-\dfrac{1}{2}$)

جـ- فسر النتيجتين بيانيا.

3) بين أن: $f(\alpha)=\dfrac{1}{\alpha-1}$

4) أ- أحسب $f'(x)$

ب- أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

5) أحسب $f(-1)$ ، $f(0)$ ، $f(2)$ و $f(5)$ ثم أنشئ (C_f) (نأخذ $\alpha\simeq 4{,}5$)

6) أ- أوجد العددين الحقيقيين a و b بحيث من أجل $x\neq -2$ و $x\neq -1$ ، $\dfrac{-6x}{x^2+3x+2}=\dfrac{a}{x+2}+\dfrac{b}{x+1}$

ب- استنتج أن: $\dfrac{-6e^x}{e^{2x}+3e^x+2}=\dfrac{-12e^{-x}}{1+2e^{-x}}+\dfrac{6e^{-x}}{1+e^{-x}}$

جـ- أحسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) وحامل محور الفواصل والمستقيمين $x=-\ln 2$ و $x=0$

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

x عدد طبيعي أكبر أو يساوي 5

M و N عددان طبيعيان يكتبان على الترتيب $\overline{100x}$ و $\overline{x001}$ في نظام التعداد الذي أساسه $x+1$

1) أكتب كلا من M و N في النظام الذي أساسه x

2) أ– أكتب $M+N$ في النظام الذي أساسه $x+1$

ب– استنتج أن $M+N=k\left(x+1\right)$ حيث k عدد طبيعي يطلب تعيينه بدلالة x

جـ– أكتب k في النظام الذي أساسه x

3) برهن أنه يوجد عددين طبيعيين غير معدومين a و b يحققان: $\overline{ab}^{x}\times\overline{aaa}^{x}=k$

4) أوجد جميع الثنائيات $\left(\alpha;\beta\right)$ من الأعداد الطبيعية غير المعدومة التي تحقق: $d+m=\beta+9$

حيث: $d=PGCD\left(\alpha;\beta\right)$ و $m=PPCM\left(\alpha;\beta\right)$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

$\left(I_n\right)$ المتتالية العددية المعرفة بـ: $I_0=\int_0^1 e^{-x}dx$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $I_n=\int_0^1 x^n e^{-x}dx$

1) أ– تحقق أن: $I_0=1-\frac{1}{e}$

ب– باستعمال المكاملة بالتجزئة، برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $I_{n+1}=\left(n+1\right)I_n-e^{-1}$

2) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $\frac{1}{\left(n+1\right)e}\leq I_n\leq\frac{1}{n+1}$ ثم استنتج نهاية المتتالية $\left(I_n\right)$

3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n=\frac{1}{n!}I_n$

أ– برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}-u_n=-\frac{e^{-1}}{\left(n+1\right)!}$

ب– استنتج أن: $e\left(1-u_n\right)=\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+...+\frac{1}{n!}$

التمرين الثالث: (05 نقاط)

1) عين العددين المركبين α و β حيث: $\begin{cases}2\alpha-\beta=-3\\2\overline{\alpha}+\overline{\beta}=-3-2i\sqrt{3}\end{cases}$ مع $\overline{\alpha}$ مرافق α و $\overline{\beta}$ مرافق β

2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$

A، B و C النقط التي لواحقها $z_A=-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ ، $z_B=\overline{z_A}$ و $z_A=z_C e^{i\frac{\pi}{3}}$ على الترتيب.

أ– أكتب z_A و z_C على الشكل الأسي.

ب– عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون $\left(\frac{z_A}{z_C}\right)^n$ حقيقيا سالبا.

جـ– تحقق أن العدد المركب $2\left(\frac{z_A}{\sqrt{3}}\right)^{2024}+\left(\frac{z_B}{\sqrt{3}}\right)^{1962}-\left(\frac{z_C}{\sqrt{3}}\right)^{1445}$ تخيلي صرف.

3) D النقطة ذات اللاحقة $1+i$

أ– حدد نسبة وزاوية التشابه المباشر S الذي مركزه O ويحول D إلى A

ب– أكتب $\frac{z_A}{z_D}$ على الشكل الجبري ثم استنتج القيمة المضبوطة لكل من $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$

4) عين (E) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي تحقق: $z=k(1+i)e^{i\frac{7\pi}{12}}$ حيث k يمسح $\mathbb{R}^+$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I) n عدد طبيعي غير معدوم.

f_n الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f_n(x)=x^ne^{1-x}$

(C_n) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i};\vec{j})$ (وحدة الطول $2cm$)

1) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$

2) بين أن جميع المنحنيات (C_n) تمرّ من نقطتين ثابتتين يطلب تعيين إحداثيتيهما.

3) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x، $f_n'(x)=(n-x)f_{n-1}(x)$

4) أ– أدرس حسب شفعية n اتجاه تغير الدالة f_n ثم شكل جدول تغيراتها.

ب– أدرس الوضع النسبي للمنحنيين (C_n) و (C_{n+1})

جـ– أنشئ في نفس المعلم المنحنيات (C_1)، (C_2) و (C_3)

II) (I_n) المتتالية العددية المعرفة بـ: $I_0=\int_0^1 e^{1-x}\,dx$ ومن أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، $I_n=\int_0^1 f_n(x)dx$

1) أحسب I_0 و I_1

2) أ– بين أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، $I_{n+1}=-1+(n+1)I_n$

ب– استنتج I_2

III) 1) A_n مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنيين (C_n) و (C_{n+1}) والمستقيمين $x=0$ و $x=1$

عبر عن A_n بدلالة n و I_n

2) α عدد حقيقي أكبر تماما من 1

$S(\alpha)$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنيين (C_1) و (C_2) والمستقيمين $x=0$ و $x=\alpha$

أ– برهن أن $S(\alpha)=24-4e-4(\alpha^2+\alpha+1)e^{1-\alpha}$

ب– بين أن $\left[2A_1=S(\alpha)\right]$ تكافئ $\left[e^\alpha=\alpha^2+\alpha+1\right]$ ثم استنتج وجود وحدانية للعدد α

انتهى الموضوع الثاني

مديرية التربية لولاية البويرة
المستوى: السنة الثالثة رياضيات
المادة: رياضيات

المقاطعة رقم: 02
دورة مـــاي 2019
المـــدة: 4 ساعات و30 دقيقة

امتحان البكالوريا التجريبي

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين :

الموضوع الأول:

التمرين الأول: (04 نقاط)

(u_n) متتالية عددية معرفة بحدها الأول u_0 ومن اجل كل عدد طبيعي n : $u_n = 10^n(u_0+1)-1$
حيث u_0 عدد طبيعي

ـ نعتبر المعادلة (E) في المجموعة $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ التالية: $61x-39y=38$

1) حل في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ المعادلة (E) علما ان الثنائية $(23;35)$ حلا خاصا لها .

2) أ) بين ان : $u_{1982}\equiv u_0[33]$

ب) بملاحظة ان: $10^{60}\equiv 1[61]$. بين ان $u_{1982}\equiv(39u_0+38)[61]$

ثم إستنتج ان : $u_{1982}\equiv 0[61]$ يكافئ $u_0\equiv 35[61]$

3) أ) بين انه من اجل كل عدد طبيعي n : $10^{7n}\equiv 10^n[70]$

ب) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n : $10^{7^n}\equiv 10[70]$

4) في هذا السؤال نفرض ان: $u_0=0$.أنشر العدد 2019 وفق الأساس 7 ثم عين باقي u_{2019} على 70 .

التمرين الثاني: (04 نقاط)

في الفضاء منسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$. نعتبر المستقيمان (D_1) و(D_2) المعرفان بتمثيلهما الوسطيان كما يلي:

$$(D_1):\begin{cases}x=m\\y=m-1\\z=1\end{cases};m\in\mathbb{R} \quad \text{و} \quad (D_2):\begin{cases}x=-t+1\\y=t\\z=-2t+4\end{cases};t\in\mathbb{R}.$$

1) أ) بين أن (D_1) و (D_2) متعامدان و ليسا من نفس المستوي .

ب) تحقق أن الشعاع $\vec{n}(-1;1;1)$ هو شعاع عمودي على (D_1) و (D_2) .

2) أ) بين أن المعادلة الديكارتية للمستوي (P) الذي يحوي (D_1) والعمودي على (D_2) هي $x-y+2z-3=0$

ب) بين أن المستقيم (D_2) يقطع المستوي (P) في نقطة B يطلب تعيين إحداثياتها

3) بين أن المستقيم (D) الذي يشمل النقطة B و شعاع توجيهه $\vec{n}$ يقطع المستقيم (D_1) في النقطة $A(1;0;1)$

4) ليكن (Q) المستوي الذي يحوي (D_1) و يكون عموديا على (P) و M نقطة متغيرة على (D_2)

أ) ادرسا لوضع النسبي بين المستوي (Q) و المستقيم (D_2)

ب) استنتج المسافة بين M و (Q).

التمرين الثالث: (05 نقاط)

1) عين العددين المركبين z_1 وz_2 حيث :
$$\begin{cases}2z_1+iz_2=1+i\sqrt{3}\\(\sqrt{3}+2i)z_1-z_2=(1-\sqrt{3})i\end{cases}$$

2) في المستوي المنسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ ، نعتبر النقطتين A و B ذات اللاحقتين $z_A=1-i$ و $z_B=2+\sqrt{3}+i$

أ) أكتب z_A على الشكل الأسي .

ب) بين ان : $\frac{z_B}{z_A}=\left(1+\sqrt{3}\right)e^{i\frac{\pi}{3}}$ ، ثم إستنتج الشكل الأسي للعدد z_B .

3) أ) أوجد لاحقة النقطة D صورة النقطة B بالدوران r الذي مركزه النقطة O و زاويته $-\frac{\pi}{6}$

ب) احسب مساحة الدائرة (γ) التي قطرها $[BD]$ مقدرة بوحدة المساحة .

ج) عين مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي حيث: $\arg\left[\left(z-z_B\right)^2\right]=\arg\left(z_B\right)-\arg\left(z_D\right)$

4) لتكن النقطة C ذات اللاحقة $z_C=1+i$.

- عين طبيعة المثلث ABC ثم استنتج بدقة طبيعة الرباعي $ACBD$.

5) ليكن التحويل النقطي S المعرف كما يلي: $S=r\circ h$ مع h تحاكي مركزه O ونسبته -2

أ) عين طبيعة التحويل S مع تعيين خصائصه المميزة

ب) نعرف من اجل كل عدد طبيعي n حيث $n\geq 2$ ، التحويل النقطي H_n كما يلي: $H_n=\underbrace{S\circ S\circ\ldots\circ S}_{n \text{ مرة}}$

- عين قيم n حتى يكون H_n تحاكي يطلب تعيين خصائصه.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I) 1) لتكن الدالة u المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ : $u(t)=3\ln(1+t)-\frac{t}{1+t}$

- عين اتجاه تغير الدالة u .

2) ليكن الدالة f المعرفة على $[0;1]$ بـ:
$$\begin{cases} f(x)=x^3\left[\ln(1+x)-\ln x\right] & ; x\in\left]0;1\right] \\ f(0)=0 \end{cases}$$

أ) أثبت أن f قابلة للإشتقاق على يمين 0 .

ب) تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي $x\in\left]0;1\right]$ ، $f'(x)=x^2u\left(\frac{1}{x}\right)$

ج) عين اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

II) نعتبر الدالتين g و h المعرفتين على $[0;1]$ بـ: $g(x)=x^3\ln(x+1)$ و $\begin{cases} h(x)=x^3\ln x & ; x\in\left]0;1\right] \\ h(0)=0 \end{cases}$

و ليكن على الترتيب (C_f) ، (C_g) و (C_h) منحنيات الدوال f ، g و h في معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ بحيث : $\|\vec{i}\|=4\ cm$

1) أ) تحقق أنه من اجل كل عدد حقيقي x من $[0;1]$: $f(x)=g(x)-h(x)$

ب) عين الوضع النسبي بين المنحنيين (C_f) و (C_g) .

2) ليكن (T) و (T') مماسين لـ (C_f) و (C_g) عند النقطة ذات الفاصلة $e^{-\frac{1}{3}}$ على الترتيب.

- أثبت أن (T) و (T') متوازيان.

3) أنشئ المنحنى (C_f)

4) لتكن H الدالة الأصلية الوحيدة لـ h على المجال $[0;1]$ والتي تنعدم عند 1 .

أ) ليكن $\alpha\in\left]0;1\right]$ و $A_\alpha=\int_\alpha^1 x^3\ln x\,dx$, عبر عن A_α بدلالة الدالة H

ب) أحسب A_α باستعمال التكامل بالتجزئة ثم أستنتج $H(0)$.

5) عين مساحة الحيز من المستوي المحددة بالمنحنيين (C_f) و (C_g) والمستقيمين ذو المعادلتين $x=0$ و $x=1$.

انتهى الموضوع الاول

وزارة التربية الوطنية	مديرية التربية لولاية البويرة
المقاطعة رقم 02	المستوي: السنة الثالثة رياضيات

التصحيح المفصل للبكالوريا التجريبي ماي 2019 الموضوع 01

تصحيح التمرين الأول (04 نقاط) الاعداد و الحساب + المتتاليات العددية	التنقيط
1) حل في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ المعادلة (E) :	
لتكن الثنائية $(x;y)$ حل للمعادلة (E) يكافئ $61x-39y=38$ (1)	
بما الثنائية $(23;35)$ حل خاص لـ(E) نجد: $61(23)-39(35)=38$ (2)	
بطرح المعادلتين نجد: $61(x-23)=39(y-35)$	
لدينا، 61 يقسم $61(x-23)$ منه نستنتج ان 61 يقسم $39(y-35)$	1ن
بما ان 61 و 39 اوليان فيما بينهمـــا فانه حسب مبرهنة غوص نجد ان 61 يقسم $y-35$	
وعليه نجد: $y=61k+35$ مع $k\in\mathbb{Z}$	
- بتعويض قيمة y في المعادلة (1) نجد: $x=39k+23$ مع $k\in\mathbb{Z}$	
الخلاصة: حلول المعادلة (E) هي : $\boxed{S=\{(x;y)=(39k+23\ ;\ 61k+35)\ ;\ k\in\mathbb{Z}\}}$	
2) أ) تبيان ان: $u_{1982}\equiv u_0[33]$:	
لدينا، $u_{1982}=10^{1982}(u_0+1)$	
لاحظ ان: $10^2\equiv 1[33]$ منه : $(10^2)^{991}\equiv 1[33]$ يكافئ $10^{1982}\equiv 1[33]$	0.5ن
يكافئ $10^{1982}(u_0+1)\equiv u_0+1[33]$	
يكافئ $10^{1982}(u_0+1)-1\equiv u_0[33]$	
يكافئ $u_{1982}\equiv u_0[33]$	
ب) تبيان ان : $u_{1982}\equiv(39u_0+38)[61]$	
بما ان: $10^{60}\equiv 1[61]$ منه $(10^{60})^{33}\equiv 1[61]$ اي $10^{1980}\equiv 1[61]$	
منه $10^2\times 10^{1980}\equiv 10^2[61]$	0.5ن
منه $10^{1982}\equiv 39[61]$	
منه $10^{1982}(u_0+1)\equiv 39(u_0+1)[33]$	
منه $u_{1982}\equiv 39u_0+38[33]$	
- استنتاج ان: $u_{1982}\equiv 0[61]$ يكافئ $u_0\equiv 35[61]$:	
الاستلزام الاول:	
$u_{1982}\equiv 0[61]$ معناه $39u_0+38\equiv 0[61]$ اي $39u_0+38=61t$ مع $t\in\mathbb{Z}$	0.5ن
وعليه: $61t-39u_0=38$ منه الثنائية $(t;u_0)$ حل للمعادلة (E)	
اذن نجد ان : $u_0=61k+35$ اي $u_0\equiv 35[61]$.	
الاستلزام العكسي: اذا كان $u_0\equiv 35[61]$ معناه $u_0+1\equiv 36[61]$	
بما ان $10^{1982}\equiv 39[61]$ نجد: $10^{1982}(u_0+1)\equiv 1404[61]$	
منه $10^{1982}(u_0+1)\equiv 1[61]$	
منه: $u_{1982}\equiv 0[61]$	

3) أ) تبيان انه من اجل كل عدد طبيعي n ، $10^{7^n} \equiv 10^n [70]$:	
لدينا، $10^7 \equiv 10[70]$ منه من اجل كل n من $\mathbb{N}$ ، $(10^7)^n \equiv 10^n [70]$ اي $10^{7n} \equiv 10^n [70]$	0.25
ب) البرهان بالتراجع:	
نضع من اجل كل عدد طبيعي n ، $P(n):\ 10^{7^n} \equiv 10[70]$	
المرحلة01: التحقق من صحة $P(0)$	
من اجل $n=0$: $10 \equiv 10[70]$ منه $P(0)$ محققة.	0.5ن
المرحلة02: من اجل n عدد طبيعي كيفي ، نفرض صحة $P(n)$ و نبرهن صحة	
$P(n+1):\ 10^{7^{n+1}} \equiv 10[70]$	
لدينا ، $10^{7^{n+1}} = 10^{7(7^n)}$ منه حسب السؤال السابق، $10^{7(7^n)} \equiv 10^{7^n} [70]$	
وحسب فرضية التراجع نجد: $10^{7^n} \equiv 10[70]$ نجد: $10^{7(7^n)} \equiv 10[70]$	
منه: $10^{7^{n+1}} \equiv 10[70]$ اي $P(n+1)$ محققة.	
الخلاصة: من اجل كل عدد طبيعي n فان : $10^{7^n} \equiv 10[70]$.	
4) نشر العدد 2019 وفق الاساس 7 :	
$2019 \div 7 = 288$ ، الباقي $\boxed{3}$ ؛ $288 \div 7 = 41$ ، الباقي $\boxed{1}$ ؛ $41 \div 7 = 5$ ، الباقي $\boxed{6}$ ؛ $5 \div 7 = 0$ ، الباقي $\boxed{5}$	0.25
لدينا، منه : $2019 = \overline{5613}^{(7)}$	
تعيين باقي u_{2019} على 70 :	0.5
لدينا ، $u_{2019} = 10^{2019} - 1$. بما ان : $2019 = \overline{5613}^{(7)} = 3 + 7 + 6(7^2) + 5(7^3)$	
منه : $10^{2019} = 10^{3+7+6(7^2)+5(7^3)} = 10^3 \times 10^7 \times 10^{6(7^2)} \times 10^{5(7^3)}$	
حساب السؤال السابق نجد: $10^{2019} \equiv 10^3 \times 10 \times 10^6 \times 10^5 [70]$ ، $\equiv 20[70]$ منه : $u_{2019} \equiv 19[70]$	
تصحيح التمرين الثاني (04 نقاط) — **الهندسة الفضائية**	**التنقيط**
1) أ) تبيان ان (D_1) و (D_2) متعامدان و ليسا من نفس المستوي:	
لدينا، $\vec{u}(1;1;0)$ و $\vec{v}(-1;1;-2)$ اشعة توجيه المستقيمين (D_1) و (D_2) على الترتيب.	0.25
لدينا، $\vec{u}\cdot\vec{v} = (1\times -1) + (1\times 1) + (0\times -2) = -1+1+0 = 0$	
منه: المستقيمين (D_1) و (D_2) متعامدين .	
- تبيان ان (D_1) و (D_2) ليسا من نفس المستوي:	
بما ان المستقيمين (D_1) و (D_2) متعامدين فانهما ليس من نفس المستوي او متقاطعين في نقطة	0.75
وحيدة $H(x;y;z)$ فهي تحقق $\begin{cases} H \in (D_1) \\ H \in (D_2) \end{cases}$ اي $\begin{cases} -t+1 = m & ...(1) \\ t = m-1 & ...(2) \\ -2t+4 = 1 & ...(3) \end{cases}$	

بحل الجملة (1) و (2) نجد: $t=0$ و $m=1$

- من اجل $t=0$ نجد: $H(1;0;4)$ ومن اجل $m=1$ نجد: $H(1;0;1)$

بما النقطة H ليست وحيدة فان المستقيمين (D_1) و (D_2) ليسا من نفس المستوي.

ب) **التحقق ان $\vec{n}(-1;1;1)$ هو شعاع عمودي على (D_1) و (D_2) :**

0.5 لدينا، $\vec{u}(1;1;0)$ و $\vec{v}(-1;1;-2)$ اشعة توجيه المستقيمين (D_1) و (D_2) على الترتيب.

بما ان : $\begin{cases} \vec{u}\cdot\vec{n}=(-1\times1)+(1\times1)+(1\times0)=-1+1+0=0 \\ \vec{v}\cdot\vec{n}=(-1\times-1)+(1\times1)+(1\times-2)=1+1-2=0 \end{cases}$

منه: $\vec{n}(-1;1;1)$ هو شعاع عمودي على (D_1) و (D_2) .

2) أ) **المعادلة الديكارتية للمستوي (P) :**

بما المستقيم (D_2) عمودي على المستوي (P) فان $\vec{v}(-1;1;-2)$ شعاع ناظمي لـ (P)

0.75 و عليه المعادلة الديكارتية للمستوي (P) من الشكل: $-x+y-2z+d=0$

-لتكن $A(1;0;1)$ نقطة من (D_1) فان $A\in(P)$ لان (D_1) محتوى في المستوي (P)

منه: $-x_A+y_A-2z_A+d=0$ اي $-1-2+d=0$ منه: $d=3$

الخلاصة: المعادلة الديكارتية لـ: (P) هي $-x+y-2z+3=0$ اي $\boxed{x-y+2z-3=0}$.

ب) **دراسة الوضع النسبي بين (D_2) و (P) :**

بما ان المستقيم (D_2) عمودي على المستوي (P) فانهما متقاطعان وفق نقطة وحيدة

0.5 $B(x;y;z)$ تحقق : $\begin{cases} B\in(D_2) \\ B\in(P) \end{cases}$ اي : $\begin{cases} x=-t+1 \\ y=t \\ z=-2t+4 \\ x-y+2z-3=0 \end{cases}$ منه: $-t+1-t-4t+8-3=0$

منه: $-6t+6=0$ منه: $t=1$ و عليه نجد: $B(0;1;2)$

3) **دراسة تقاطع (D) مع (D_1) :** التمثيل الوسيطي للمستقيم (D) الذي يشمل B و موجه

0.5 باشعاع $\vec{n}(-1;1;1)$ يكتب على الشكل : $\begin{cases} x=-k \\ y=1+k \\ z=2+k \end{cases} \;/\; k\in\mathbb{R}$

من اجل الثنائية: $(m;k)=(1;-1)$ نجد ان النقطة $A\in(D)$ و $A\in(D_1)$

منه: $(D)\cap(D_1)=\{A\}$.

4) أ **الوضع النسبي بين (Q) و (D_2) :**

بما ان المستوي (Q) و المستقيم (D_2) عموديان على (P) نستنتج ان:

0.5 - (D_2) و (Q) متوازيان او (D_2) محتوي في (Q)

- لدينا، $B\in(D_2)$ وبما $B\notin(D_1)$ اي $B\notin(Q)$ و عليه (D_2) و (Q) متوازيان تماما

ب) **استنتاج $d(M;(Q))$:**

0.25 $$d(M;(Q))=AB=\sqrt{(0-1)^2+(1-0)^2+(2-1)^2}=\sqrt{3}$$

1) تعيين العددين z_1 ، z_2 :

0.5 لدينا ، $\begin{cases} 2z_1 + iz_2 = 1 + i\sqrt{3} \\ \left(\sqrt{3} + 2i\right)z_1 - z_2 = \left(1 - \sqrt{3}\right)i \end{cases}$ تكافئ $\begin{cases} 2z_1 + iz_2 = 1 + i\sqrt{3} \\ \left(-2 + i\sqrt{3}\right)z_1 - iz_2 = -1 + \sqrt{3} \end{cases}$

بالجمع نجد: $i\sqrt{3}z_1 = \sqrt{3} + i\sqrt{3}$ اي $\boxed{z_1 = 1 - i}$.

بتعويض قيمة z_1 نجد ان : $\boxed{z_2 = 2 + \sqrt{3} + i}$.

0.25 2) أ) كتابة z_A على الشكل الأسي: لدينا ، $|z_A| = \sqrt{2}$ و $\arg(z_A) = -\frac{\pi}{4}$ منه: $\boxed{z_A = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}$

ب) تبيان ان : $\frac{z_B}{z_A} = \left(1 + \sqrt{3}\right)e^{i\frac{\pi}{4}}$: لدينا،

0.25
$$\frac{z_B}{z_A} = \frac{2 + \sqrt{3} + i}{1 - i} = \frac{\left(2 + \sqrt{3} + i\right)(1 + i)}{2} = \frac{2 + 2i + \sqrt{3} + \sqrt{3}i + i - 1}{2} = \frac{1 + \sqrt{3} + i\left(3 + \sqrt{3}\right)}{2}$$

$$= \left(1 + \sqrt{3}\right)\left(\frac{1 + \sqrt{3}i}{2}\right) = \left(1 + \sqrt{3}\right)e^{i\frac{\pi}{3}}$$

استنتاج الشكل الاسي لـ z_B :

0.25 لدينا: $\frac{z_B}{z_A} = \left(1 + \sqrt{3}\right)e^{i\frac{\pi}{3}}$ منه: $z_B = \left(1 + \sqrt{3}\right)e^{i\frac{\pi}{3}}z_A = \left(1 + \sqrt{3}\right)e^{i\frac{\pi}{3}}\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} = \boxed{\left(\sqrt{2} + \sqrt{6}\right)e^{i\frac{\pi}{12}}}$

3) أ) ايجاد لاحقة النقطة D :

D صورة النقطة B بالدوران r الذي مركزه O و زاويته $-\frac{\pi}{6}$ معناه: $r(B) = D$

0.5 منه: $z_D = e^{-\frac{\pi}{6}i}z_B$ و عليه: $\boxed{\left(\sqrt{2} + \sqrt{6}\right)e^{-\frac{\pi}{12}i}} = z_D = e^{-\frac{\pi}{6}i}\left(\sqrt{2} + \sqrt{6}\right)e^{i\frac{\pi}{12}}$.

الاستنتاج: $\boxed{z_D = \overline{z_B}}$

ب) مساحة الدائرة (γ) :

لتكن S مساحة الدائرة (γ) التي قطرها $[BD]$ منه: $S = \pi\frac{BD}{2} = \frac{\pi}{2}\left|z_B - z_D\right|$

0.5 بما ان $z_D = \overline{z_B}$ فان $z_B - z_D = 2\text{Im}(z_B) = 2i$ منه: $\boxed{S = \pi \text{ u.a}}$

ج) تعيين مجموعة النقط:

لدينا، $\arg\left[\left(z - z_B\right)^2\right] = \arg(z_B) - \arg(z_D)$ تكافئ $2\arg(z - z_B) = \frac{\pi}{12} - \left(-\frac{\pi}{12}\right) + 2\pi k$

تكافئ $\arg(z - z_B) = \frac{\pi}{12} + \pi k$

0.75 تكافئ $\left(\vec{u}; \overrightarrow{BM}\right) = \frac{\pi}{12} + \pi k$ مع $k \in \mathbb{Z}$.

منه مجموعة النقط (Δ) هي المستقيم الموجه بالشعاع $\vec{w}$ حيث $(\vec{u}; \vec{w}) = \frac{\pi}{12}$ و المار من النقطة B و لا يشملهـــا .

0.25	4)أ) **طبيعة المثلث ABC :** لدينا، $K=\dfrac{z_B-z_C}{z_A-z_C}=\dfrac{2+\sqrt{3}+i-1-i}{1-i-1-i}=\dfrac{1+\sqrt{3}}{-2i}=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}i$ منه: $\lvert K\rvert=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$ و $\arg(K)=\dfrac{\pi}{2}$ اذن: $BC\neq AC$ و $(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB})=\dfrac{\pi}{2}$ منه المثلث ABC قائم في C
0.5	ب) **طبيعة الرباعي ACBD :** لدينا، $\begin{cases} z_C-z_A=2i \\ z_B-z_D=2i \end{cases}$ منه $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{DB}$ اذن الرباعي ACBD متوازي اضلاع بما ام المثلث ABC قائم في C نجد ان هناك ضلعان متتاليان من الرباعي ACBD متعامدان و ليس متساويان منه نستنتج ان ACBD مستطيل .
0.75	5) أ) **طبيعة التحويل S :** r دوران مركزه O و زاويته $-\dfrac{\pi}{6}$: منه r هو تشابه مباشر مركزه O و زاويته $-\dfrac{\pi}{6}$ و نسبته 1 h تحاكي مركزه O و نسبته -2 منه h هو تشابه مباشر مركزه O و زاويته π و نسبته 2 إذن: التحويل $S=r\circ h$ هو تشابه مباشر مركزه O و نسبته 2 و زاويته $\dfrac{5\pi}{6}=\pi-\dfrac{\pi}{6}$
0.25	ب) **تعين قيم n :** لدينا، $H_n=S\circ S\circ ...\circ S$ هو تشابه مباشر مركزه O و نسبته 2^n و زاويته $\dfrac{5\pi n}{6}$ H_n يكون تحاكي اذا كان $5n\equiv 0[6]$ اي $n\equiv 0[6]$ اي $\boxed{n=6\alpha\ \ /\alpha\in\mathbb{N}}$.
0.25	تعيين الخصائص: اذا كان: α عدد زوجي فان H_n تحاكي مركزه O و نسبته 2^n اذا كان: α عدد فردي فان H_n تحاكي مركزه O و نسبته -2^n
التنقيط	تصحيح التمرين الرابع (7نقاط) — الدوال العددية : الدالة اللوغارتمية
0.5	I) 1) **تعيين و اتجاه تغير الدالة u :** لدينا من اجل كل عدد حقيقي t من $]0;+\infty[$: $u'(t)=\dfrac{3}{t+1}-\dfrac{1}{(t+1)^2}=\dfrac{3(t+1)-1}{(t+1)^2}=\dfrac{3t+2}{(t+1)^2}$ من اجل من اجل كل عدد حقيقي t من $]0;+\infty[$: $u'(t)>0$ منه u دالة متزايدة تماما على $]0;+\infty[$.
0.5	2) أ) **إثبات ان f قابلة للاشتقاق على يمين العدد 0 :** $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\dfrac{x^3[\ln(1+x)-\ln x]}{x}$ $=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}x^2[\ln(1+x)-\ln x]$ $=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}x^2\ln(1+x)-x^2\ln x$ $=0$ منه: f دالة قابلة للإشتقاق على يمين العدد 0 و عدد المشتق $f'_d(0)=0$

ب) حساب $f'(x)$: من اجل كل عدد حقيقي x من $]0;1]$:

0.5

$$f'(x)=3x^2\left[\ln(x+1)-\ln x\right]+\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}\right)x^3$$

$$=x^2\left[3\left(\ln(x+1)-\ln x\right)+\frac{x}{x+1}-1\right]$$

$$=x^2\left[3\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)-\frac{1}{x+1}\right]$$

$$=x^2u\left(\frac{1}{x}\right)$$

ج) إتجاه تغير الدالة f :

0.5 لدينا من اجل كل x من $]0;1]$ فان $\frac{1}{x}\geq 1$ منه $u\left(\frac{1}{x}\right)\geq u(1)$ اي $u\left(\frac{1}{x}\right)>0$

منه من اجل كل x من $]0;1]$ نجد: $f'(x)>0$

إذن f دالة متزايدة تماما على المجال $]0;1]$.

- جدول التغيرات:

0.25

x	0 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ 1
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$0 \nearrow \ln 2$

II) 1) أ) التحقق ان : $f(x)=g(x)-h(x)$:

0.25 من اجل كل عدد حقيقي x من $]0;1]$:

$$f(x)=x^3\left[\ln(x+1)-\ln(x)\right]=x^3\ln(x+1)-x^3\ln x=g(x)-h(x)$$

ب) دراسة الوضع النسبي بين (C_f) و (C_g) :

لدينا من اجل كل عدد حقيقي x من $]0;1]$: $f(x)-g(x)=-h(x)$

بما ان $h(x)<0$ على المجال $]0;1]$ منه نجد:

0.75

x	0		1
x^3	0	$+$	0
$\ln x$	$\Vert$	$-$	0
$-h(x)$	0	$+$	0

إذن: (C_f) يقع فوق (C_g) على المجال $]0;1[$.

(C_f) و (C_g) يتقطعان في النقطتين $A(1;\ln 2)$ و O .

2) إثبات ان (T) و (T') متوازيان :

(T) و (T') مماسين لـ (C_f) و (C_g) عند $e^{-\frac{1}{3}}$ على الترتيب

0.5 معامل توجيههما على التوالي $f'\left(e^{-\frac{1}{3}}\right)$, $g'\left(e^{-\frac{1}{3}}\right)$

لدينا، من اجل كل عدد حقيقي x من $]0;1]$: $f(x)-g(x)=h(x)$

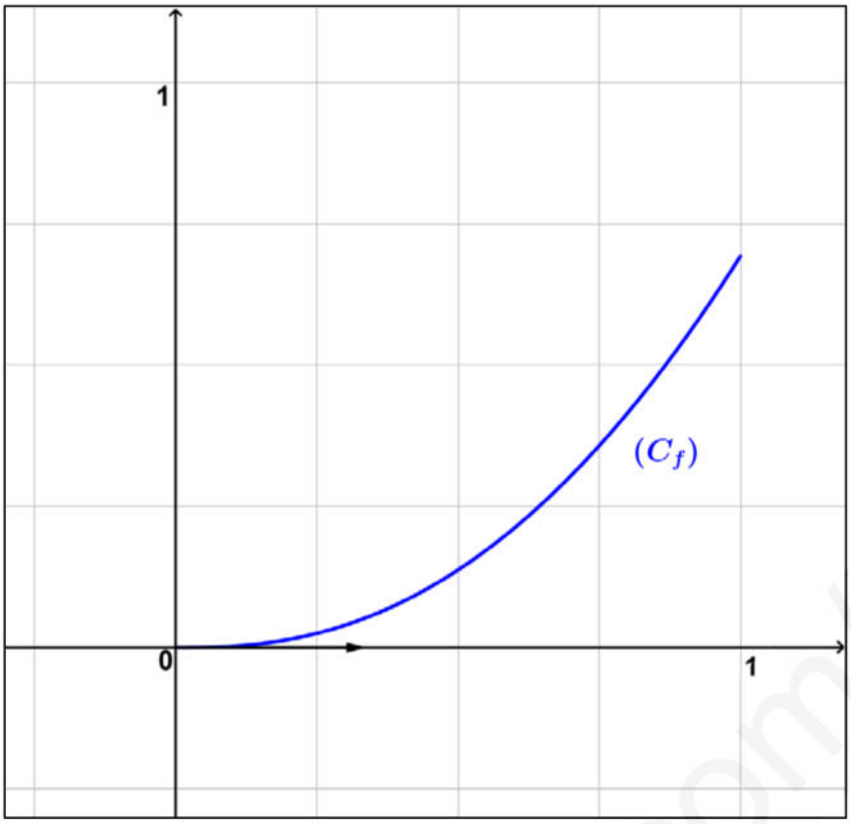
منه: $f'(x)-g'(x)=h'(x)=x^2(3\ln x-1)$

وعليه: $f'\left(e^{-\frac{1}{3}}\right)-g'\left(e^{-\frac{1}{3}}\right)=0$ اي $f'\left(e^{-\frac{1}{3}}\right)=g'\left(e^{-\frac{1}{3}}\right)$

وعليه (T) و (T') متوازيان .

0.75

3) إنشاء (C_f) :



4) أ) التعبير عن A_α بدلالة الدالة H :

0.5

$$A_\alpha = \int_\alpha^1 x^3 \ln x dx = \int_\alpha^1 h(x)dx = [H(x)]_\alpha^1 = H(1) - H(\alpha) = -H(\alpha)$$

ب) حساب A_α باستعمال التكامل بالتجزئة :

0.75

نضع: $\begin{cases} u(x) = \ln x & u'(x) = \frac{1}{x} \\ v'(x) = x^3 & v(x) = \frac{x^4}{4} \end{cases}$ منه:

$$A_\alpha = \left[\frac{x^4 \ln x}{4}\right]_\alpha^1 - \frac{1}{4}\int_\alpha^1 x^3\, dx = \left(0 - \frac{\alpha^4 \ln \alpha}{4}\right) - \frac{1}{4}\left[\frac{x^4}{4}\right]_\alpha^1 = -\left[\frac{\alpha^4 \ln \alpha}{4} + \frac{1}{16}(1-\alpha^4)\right]$$

استنتاج $H(0)$:

0.5

حساب السؤالين السابقين نستنتج ان: $H(\alpha) = \frac{\alpha^4 \ln \alpha}{4} + \frac{1}{16}(1-\alpha^4)$

منه: $H(0) = \lim_{\alpha \xrightarrow{>} 0} H(\alpha) = \lim_{\alpha \xrightarrow{>} 0} \frac{\alpha^4 \ln \alpha}{4} + \frac{1}{16}(1-\alpha^4) = \frac{1}{16}$

5) حساب المساحة:

0.5

$$S = \int_0^1 [f(x) - g(x)]dx = -\int_0^1 h(x)dx = -[H(x)]_0^1 = H(0) - H(1) = \boxed{\frac{1}{16}\ u.a}$$

بما ان : $u.a = \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\| = 16cm^2$ نجد ان : $\boxed{S = 1\ cm^2}$.

0.25

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية — ثانـــــوية : خلفي بلحوت – عزيز -

امتحان بكالوريا تجريبي للتعليم الثانوي — السنة الدراسية : 2019/2018

الشعبة : رياضي و تقني رياضي — دورة مـــــاي:2019

اختبار في مادة: الرياضيات — المدة:04ساو 30 د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول

التمرين الأول:(04 نقـاط)

نعتبر صندوقين متماثلين U_1 و U_2 بحيث كل الكرات لانفرق بينهما عند اللمس و:

U_1 يحتوي على خمس كرات حمراء تحمل الأرقام 1 ، 1 ، 1 ، 2 ، 0 وثلاث كرات خضراء تحمل الأرقام1 ، 1 ، 0 .

U_2 يحتوي على ثلاث كرات حمراء تحمل الأرقام 1 ، 1 ، 2 وكرتين خضراء تحمل الرقمين 1 ، 0 .

I) نختار عشوائيا أحد الصندوقين ، فإذا كان U_1 أحد نسحب منه كرتين على التوالي بدون إرجاع ، وإذا كان U_2 نسحب منه كرتين على التوالي بالإرجاع .

1. احسب احتمال الحوادث التالية :

A:"سحب كرتين من نفس اللون "

B: "سحب كرتين تحملان نفس الرقم "

C:"سحب كرة حمراء على الأقل "

2. هل الحادثتان A و B مستقلتان ؟ علل .

3. إذا علمت أن الكرتين المسحوبتين من لونين مختلفين . فماهو احتمال أن تكون من الصندوق U_1 ؟

II) نأخذ كل الكرات الموجودة في U_1 و U_2 ونضعها في صندوق آخر U_3. نسحب عشوائيا من الصندوق U_3 كرتين في آن واحد .وليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحبة مجموع الأرقام التي تحملها الكريتين المسحوبتين .

1. عين قيم المتغير العشوائي X .

2. عين قانون الاحتمال لـ X ثم احسب أمله الرياضياتي .

التمرين الثاني: (04 نقـاط)

A_0 و B_0 نقطتان من المستوي حيث: $A_0B_0 = 8$ (الوحدة هي السنتيمتر) ، ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه النقطة A_0 ونسبته $\frac{1}{2}$ وزاويته $\frac{3\pi}{4}$.

نعرف متتالية النقط (B_n) كما يلي : $B_{n+1} = S(B_n)$ ، من أجل كل عدد طبيعي n .

1) أنشئ النقط B_1 ، B_2 ، B_3 و B_4.

2) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n المثلثان: $A_0B_nB_{n+1}$ و $A_0B_{n+1}B_{n+2}$ متشابهان.

3) نعرف متتالية (u_n) بـ : $u_n = B_nB_{n+1}$ من أجل كل عدد طبيعي n.

أ/ أثبت أن (u_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$.

ب/ أكتب عبارة u_n بدلالة n.

ج/ نضع المجموع: $\delta_n = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n$ ، أحسب δ_n بدلالة n ثم أوجد $\lim\limits_{n \to +\infty} \delta_n$

4) أ/ حل في $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ المعادلة : $3x - 4y = 2$

ب/ ليكن (Δ) المستقيم العمودي على المستقيم (A_0B_0) في النقطة A_0.

جد قيم العدد الطبيعي n التي من اجلها تكون النقطة B_n تنتمي إلى المستقيم (Δ).

التمرين الثالث:(05 نقـاط)

1) نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z: $\overline{z}^3 - 3\overline{z}^2 + 3\overline{z} + 7 = 0$ ... (E)

حيث: $\overline{z}$ هو مرافق العدد المركب z.

أ /بين أن المعادلة (E) تكافئ المعادلة : $(\overline{z}+1)\left(\overline{z}^2 - 4\overline{z} + 7\right) = 0$.

ب / حـل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E) .

2) في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{u};\vec{v})$ ، نعتبر النقط A, B, C و D لواحقها على الترتيب : $z_A = -1$ ، $z_B = 2 + i\sqrt{3}$ ، $z_C = \overline{z_B}$ ، $z_D = 3$.

أ / عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون $(z_B - z_A)^n$ عددا حقيقيا سـالبا .

ب / عين طبيعة المثلث ABC .

3) أ/أكتب العدد $\frac{z_A - z_C}{z_D - z_C}$ على الشكل الأسي،ثم استنتج أن النقطة A صورة D بتحويل نقطي يطلب تعيينه.

ب/ أوجد مركز ونصف قطر الدائرة المحيطة بالمثلث ACD .

4) (Γ) مجموعة النقط M من المستوي لاحقتها z تحقق: $z + 1 = 2\sqrt{3}.k.e^{i\frac{\pi}{6}}$ حيث k يمسح المجال $[0;+\infty[$

- عين قيسا للزاوية الموجهة $(\vec{u};\overrightarrow{AB})$ ، ثم استنتج مجموعة النقط (Γ).

5) أ/ عين قيمة العدد الحقيقي α بحيث يكون : $-\overrightarrow{CA}+2\overrightarrow{CB}+\alpha\overrightarrow{CD}=\vec{0}$.

ب/ عين (E) مجموعة النقط M من المستوي حيث: $\left\|-\overrightarrow{AM}+2\overrightarrow{BM}-3\overrightarrow{DM}\right\|\leq 2\left\|\overrightarrow{BM}-\overrightarrow{CM}\right\|$

جـ/ استنتج مجموعة نقط تقاطع (E) و (Γ).

التمرين الرابع:(07نقــاط)

1) g الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـــ: $g(x)=x^2e^x$

أ/ أدرس اتجاه تغير الدالة g على المجال $]0;+\infty[$.

ب/ استنتج أنه : إذا كان $0\prec x\prec 1$ فإن $g(x)\prec g\left(\frac{1}{x}\right)$ و إذا كان $x\succ 1$ فإن $g(x)\succ g\left(\frac{1}{x}\right)$

2) نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي :

$$f(x)=(x^2-2x+2)e^x+e^{\frac{1}{x}}-3e$$

(C_f) تمثيـلـها البيــاني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

h دالـة عددية معرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $h(x)=e^{\frac{1}{x}}-3e$. (C_h) تمثيلها البياني (**<u>أنظر الملحق</u>**)

أ/ أحســب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}f(x)$.

ب/ بين أنه من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$: $f'(x)=g(x)-g\left(\frac{1}{x}\right)$ ، ثم احسب $f'(1)$.

ج/ شكل جدول تغيرات الدالة f على المجال $]0;+\infty[$.

3) أ/ بين أن المعادلة: $(x^2-2x+2)e^x=-h(x)$ تقبل حلين α و β حيــث: $1.5\prec\beta\prec 1.6$

و $0.5\prec\alpha\prec 0.6$ ،ثم استنتج أن المنحنى (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطتين .

ب / أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمنحنى (C_h).

ج / بين ان المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) في النقطة التي فاصلتها 1 يطلب كتابة معادلته .

4) أ / أرسم (T) و (C_f). **(الملحــق يعــاد مع ورقة الإجابـــة)**

ب / m عدد حقيقي موجب تماما، أوجد قيمة m حتى تقبل المعادلة (E) حلين متمايزين:

$$(E)...f(x)=(m^2-2m+2)e^m+h(m)$$

5) أ/ بين أنه من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$: $\int_1^x[f(t)-h(t)]dt=(x^2-4x+6)e^x-3e$

ب/ ليكن العدد λ من المجـال $]0;1[$ ، $A(\lambda)$ مسـاحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنيين (C_h) و (C_f)

والمستقيمين اللذين معادلتاهما: $x=\lambda$ و $x=1$

- استنتــج $A(\lambda)$ (مقدرة بوحدة المساحة)، ثم احســب $\lim\limits_{\lambda\xrightarrow{>}0}A(\lambda)$.

الموضوع الثاني:

التمرين الأول:(04 نقــاط)

الفضاء منسوب الى معلم متعامد متجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$،نعتبر النقط $A\,(3;1;0)$ ، $B\,(1;2;0)$ ، $C\,(3;2;1)$

و $D\,(0;0;m)$ حيث m عدد حقيقي موجب، (Q) مستوي معرف بـ: $\begin{cases} x = 2-2\alpha+\beta \\ y = \dfrac{3}{2}-4\alpha+2\beta \ ;(\alpha,\beta)\in \mathbb{R}^2 \\ z = -5\alpha \end{cases}$

1) أ/ أحسب الجداء السلمي $\overline{BA}.\overline{BC}$ ثم استنتج القيمتين المضبوطتين لكل من $Cos ABC$ و $Sin ABC$.

ب/ أحسب مساحة المثلث ABC.

ج/ بين أن $\vec{n}(1;2;-2)$ شعاع نـاظمي للمستوي (ABC) ثم استنتج معادلة ديكــارتية له .

د/ بين أن $ABCD$ رباعي وجوه و أن حجمـه : $V = \dfrac{2m+5}{6}\,uv$

2) أ/ بين أن: (Q) هو المستوي المحوري لقطعة المستقيم $[AB]$ معادلته الديكارتية: $-2x+y=\dfrac{-5}{2}$.

ب/ استنتج أن المستويين (ABC) و (Q) متعامدان وأنهما متقاطعان وفق مستقيم (Δ) يطلب تعيين تمثيلها الوسيــطي.

ج/ أحسب $d\,(D;(Q))$ ثم استنتج بدلالة m المسافة بين النقطة D و المستقيم (Δ) .

3) لتكن (S_m) مجموعة النقط $M\,(x;y;z)$ من الفضاء التي تحقق: $x^2+y^2+z^2-2mz+m^2-9=0$

أ/ بين أنه من اجل عدد حقيقي m فان (S_m) سطح كرة يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها .

ب/عين قيمة m حتى يكون المستوي (ABC) مماسا لسطح الكرة (S_m).

4) أكتب معادلة المستوي (P) الموازي تماما للمستوي (ABC) و يمس سطح الكرة (S_m).

التمرين الثاني:(04 نقــاط)

1) نعتبر المعادلة (E) ذات المجهولين الصحيحين x و y حيث: $11x-5y=2$

أ/ أثبت أنه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ من $\mathbb{Z}^2$ حلا للمعادلة (E) فإن $y\equiv 4[11]$.

ب/ استنتج حلول المعادلة (E).

2) ليكن n عددا طبيعيا غير معدوم ، نضـــع : $a=5n+2$ و $b=11n+4$.

أ/ عين القيم الممكنة للقاسم المشترك الأكبر للعددين a و b.

ب/عين قيم العدد الطبيعي غير المعدوم n بحيث يكون: $PGCD\,(a;b)=2$.

ج/ استنتج قيم العدد الطبيعي غير المعدوم n بحيث يكون العددان a و b أوليان فيما بينهما.

3) من أجل كل عدد طبيعي n، نضع : $A=5n^2+7n+2$ و $B=11n^2+15n+4$.

أ/ بين أن العدد $(n+1)$ يقسم كل من العددين A و B .

ب/استنتج حسب قيم n القاسم المشترك الأكبر للعددين A و B .

التمرين الثالث: (05 نقــاط)

1)عين العددين المركبين z_1 و z_2 حيث : $\begin{cases} 2z_1 + iz_2 = 1 + i\sqrt{3} \\ (\sqrt{3}+2i)z_1 - z_2 = (1-\sqrt{3})i \end{cases}$

2)في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(o;\vec{u};\vec{v})$ ،نعتبر النقطتين A و B ذات اللاحقتين: $z_A = 1-i$ و $z_B = 2+\sqrt{3}+i$.

أ/اكتب z_A على الشكل الأسي .

ب/بين أن: $\frac{z_B}{z_A} = (1+\sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{3}}$ ، ثم استنتج الشكل الأسي للعدد z_B .

ج/هل تـوجد قيم للعددالطبيعي n حتى تكون صورة العدد $\left(\frac{z_B}{z_A}\right)^n$ تنتمي إلى المنصف الأول؟

3)أ/ أوجد لاحقة النقطة B' صورة النقطة B بالدوران r الذي مركزه النقطة O وزاويته $\frac{-\pi}{6}$.

ب/احسب مساحة الدائرة (γ) التي قطرها $[BB']$. (مقـدرة بوحدة المساحة)

ج/ عين مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي حيث: $\arg\left[(z-z_B)^2\right] = \arg(z_B) - \arg(z_{B'})$

د/عين z_C لاحقة النقطة C حتى يكون الرباعي $AB'BC$ مستطيل، ثم اوجد z_I لاحقة مركز ثقله.

4)نضــع: $f = ros$ (يرمز o إلى تركيب التحويلين S و r) .

أ/عين العبارة المركبة للتشابه المباشر S حيث يكون f تشابه مباشر مركزه O ونسبته 2 وزاويته $\frac{\pi}{3}$

ب/ أوجد مساحة صورة الدائرة (γ) بالتشابه المباشر S (مقدرة بوحدة المساحة).

5) أ/ إذا كان $S(M) = M'$ ، ما طبيعة المثلث OMM' ؟

ب/عين مجموعة النقط M من المستوي التي يكون من أجلها : $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AM'} = 0$

التمرين الرابع: (07نقــاط)

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة على ℝ بـ: $f(x) = x - e + \ln\left(1+2e^{-2(x-e)}\right)$

و (C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$

1) أ/ تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x) = -x + e + \ln\left(2+e^{2(x-e)}\right)$

ب / احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ ، $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

ج/ أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

2) أ/ بين أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين (D) و (D') معادلتاهما:

$y = x - e$ و $y = -x + \ln 2 + e$ عند $+\infty$ وعند $-\infty$ على الترتيب.

ب/ ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيمين المقاربين (D) و (D').

ج/ بين أن المستقيم (Δ)ذو المعادلة $x=\frac{1}{2}\ln 2+e$ هو محور تناظر للمنحنى (C_f).

3) أرسم(Δ)، (D)، (D')و (C_f)

4) ليكن (D_m)المستقيم الذي معادلته : $y=mx-m\left(e+\frac{\ln 2}{2}\right)+\frac{\ln 2}{2}$ حيثmوسيط حقيقي.

أ/ بين أن جميع المستقيمات (D_m)تشمل النقطة الثابتة $A\left(\frac{\ln 2}{2}+e\ ;\ \frac{\ln 2}{2}\right)$.

ب/ ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد نقط تقاطع المستقيم (D_m) و المنحنى (C_f) .

5) نضع: $I=\int_{\ln\sqrt{2}+e}^{\ln\sqrt{3}+e}\left[f(x)-(x-e)\right]dx$ ، $I_n=\int_0^1 \ln\left(1+X^n\right)dX$ ، n عدد طبيعي غير معدوم

أ/ فسر هندسيا العدد I واحسب العدد I_1

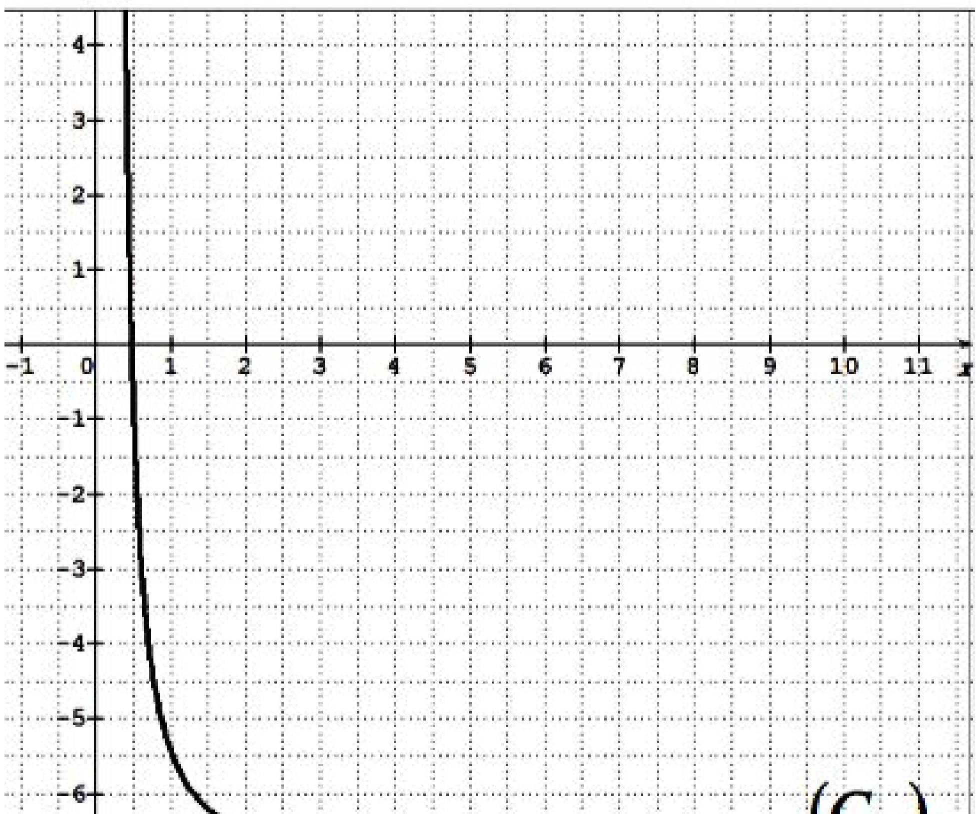
ب/ بين أن: $0\le I_n\le \ln 2$

ج/ عين اتجـاه تغير المتتالية (I_n) ثم استنتج أنها متقاربة.

6) باستعمال : $\ln(1+X)\le X$ ،من أجل كل $X\in]0;+\infty[$

أ/ استنتج أن : $0\le I+I_1\le \int_{\ln\sqrt{2}+e}^{\ln\sqrt{3}+e} 2e^{-2(x-e)}\,dx-1+\ln 4$

ب/ اعط حصرا للعدد $I+I_1$.



الملحق:

الاسم :............

اللقب :...........

القسم :...........

مع تمنياتنا لكم بالنجاح في شهادة البكالوريا-رمضان كريم -

حل التمرين 108

الصندوقان U_1 و U_2 متماثلان معناه $P(U_1)=P(U_2)=\frac{1}{2}$ و $P(U_1)+P(U_2)=1$

$\xrightarrow{\frac{1}{2}} U_1$

$\xrightarrow{\frac{1}{2}} U_2$

I)

عدد الحالات الممكنة لسحب كرتين على التوالي من الصندوق U_1 بدون إرجاع (ترتيبة)

$$A_n^p = A_8^2 = \frac{8!}{(8-2)!} = \frac{8!}{6!} = \frac{8\times7\times6!}{6!} = 56$$

عدد الحالات الممكنة لسحب كرتين على التوالي من الصندوق U_2 بالإرجاع (قائمة)

$$A^p = 5^2 = 25$$

1) A: "سحب كرتين من نفس اللون" معناه

$$P(A)=\underbrace{\frac{1}{2}\times\frac{A_5^2+A_3^2}{56}}_{U_1 \text{ الصندوق}}+\underbrace{\frac{1}{2}\times\frac{3^2+2^2}{25}}_{U_2 \text{ الصندوق}}$$

$$P(A)=\frac{1}{2}\times\frac{20+6}{56}+\frac{1}{2}\times\frac{9+4}{25}=\frac{689}{1400}$$

B: "سحب كرتين تحملان نفس الرقم"

$$P(B)=\frac{1}{2}\times\frac{A_2^2+A_5^2}{56}+\frac{1}{2}\times\frac{1^2+3^2+1^2}{25}=\frac{583}{1400}$$

C: "سحب كرة حمراء على الأقل"

$$P(C)=\frac{1}{2}\times\frac{A_5^1\times A_3^1+A_3^1\times A_5^1+A_5^2}{56}$$

$$+\frac{1}{2}\times\frac{2\times3+3\times2+3^2}{25}=\frac{1213}{1400}$$

2) $A\cap B$: "سحب كرتين من نفس اللون تحملان نفس الرقم"

$$P(A\cap B)=\frac{1}{2}\times\frac{A_3^2+A_2^2}{56}+\frac{1}{2}\times\frac{2^2+1^2+1^2+1^2}{25}$$

$$=\frac{37}{175}\simeq 0,211$$

$$P(A)\times P(B)=\frac{689}{1400}\times\frac{583}{1400}\simeq 0,205$$

ومنه $P(A\cap B)\neq P(A)\times P(B)$

الحادثتان A و B غير مستقلتين

3) $$P_{\bar A}(U_1)=\frac{P(U_1\cap\bar A)}{P(\bar A)}$$

$$P(U_1\cap\bar A)=\frac{1}{2}\times\frac{A_5^1\times A_3^1+A_3^1\times A_5^1}{56}$$

$$=\frac{15}{56}$$

$$P(\bar A)=1-P(A)$$
$$=1-\frac{689}{1400}$$
$$=\frac{711}{1400}$$

$$P(U_1\cap\bar A)=\frac{1}{2}\times\frac{A_5^1\times A_3^1+A_3^1\times A_5^1}{56}=\frac{15}{56}$$

ومنه

$$P_{\bar A}(U_1)=\frac{125}{137}$$

II) عدد الحالات الممكنة لهذا السحب

$$C_n^p=C_{13}^2=78$$

1) $X=\{0;1;2;3;4\}$

2)

x_i	0	1	2	3	4
$P(X=x_i)$	$\frac{3}{78}$	$\frac{24}{78}$	$\frac{34}{78}$	$\frac{16}{78}$	$\frac{1}{78}$

$$E(X)=\sum_{i=1}^{5} x_i p_i$$

$$=0+\frac{24}{78}+\frac{68}{78}+\frac{48}{78}+\frac{4}{78}$$

$$=\frac{144}{78}$$

$P(X=0)$: احتمال سحب كرتين من U_3 مجموع رقميهما 0

$$P(X=0)=\frac{C_3^2}{78}=\frac{3}{78}$$

$P(X=1)$: احتمال سحب كرتين من U_3 مجموع رقميهما 1

$$P(X=1)=\frac{C_3^1\times C_8^1}{78}=\frac{24}{78}$$

$P(X=2)$: احتمال سحب كرتين من U_3 مجموع رقميهما 2

$$P(X=2)=\frac{C_3^1\times C_2^1+C_8^2}{78}=\frac{34}{78}$$

$P(X=3)$: احتمال سحب كرتين من U_3 مجموع رقميهما 3

$$P(X=3)=\frac{C_8^1\times C_2^1}{78}=\frac{16}{78}$$

$P(X=4)$: احتمال سحب كرتين من U_3 مجموع رقميهما 4

$$P(X=4)=\frac{C_2^2}{78}=\frac{1}{78}$$

التمرين الثاني: (04 نقاط) $A_0B_0=8$ ، S التشابه المباشر مركزه A_0 ونسبته $\frac{1}{2}$ وزاويته $\frac{3\pi}{4}$ ، $B_{n+1}=S(B_n)$:

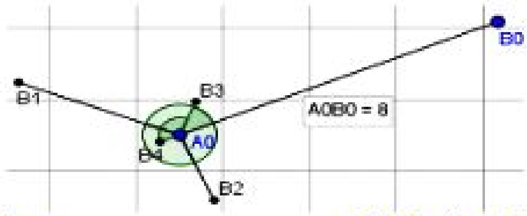
1) انشاء النقط B_1 ، B_2 ، B_3 و B_4 :

$B_1=S(B_0)$ يكافئ $\begin{cases} A_0B_1=\frac{1}{2}A_0B_0=4 \\ (\overrightarrow{A_0B_0},\overrightarrow{A_0B_1})=\frac{3\pi}{4}+2k\pi \end{cases}$ ، $k\in\mathbb{Z}$

$B_2=S(B_1)$ معناه $\begin{cases} A_0B_2=\frac{1}{2}A_0B_1=2 \\ (\overrightarrow{A_0B_1},\overrightarrow{A_0B_2})=\frac{3\pi}{4}+2k\pi \end{cases}$ ، $k\in\mathbb{Z}$

$B_3=S(B_2)$ معناه $\begin{cases} A_0B_3=\frac{1}{2}A_0B_2=1 \\ (\overrightarrow{A_0B_2},\overrightarrow{A_0B_3})=\frac{3\pi}{4}+2k\pi \end{cases}$ ، $k\in\mathbb{Z}$

$B_4=S(B_3)$ معناه $\begin{cases} A_0B_4=\frac{1}{2}A_0B_3=\frac{1}{2} \\ (\overrightarrow{A_0B_3},\overrightarrow{A_0B_4})=\frac{3\pi}{4}+2k\pi \end{cases}$ ، $k\in\mathbb{Z}$



2) اثبات أن المثلثين $A_0B_nB_{n+1}$ و $A_0B_{n+1}B_{n+2}$ **متشابهان من أجل كل عدد طبيعي n :**

$B_{n+1}=S(B_n)$ معناه $A_0B_{n+1}=\frac{1}{2}A_0B_n$

و $(\overrightarrow{A_0B_n},\overrightarrow{A_0B_{n+1}})=\frac{3\pi}{4}+2k\pi$ ، $k\in\mathbb{Z}$ ، بما أن:

$\frac{A_0B_{n+1}}{A_0B_n}=\frac{\frac{1}{2}A_0B_n}{A_0B_n}=\frac{1}{2}$ و $\frac{A_0B_{n+2}}{A_0B_{n+1}}=\frac{\frac{1}{2}A_0B_{n+1}}{A_0B_{n+1}}=\frac{1}{2}$ و

$(\overrightarrow{A_0B_{n+1}},\overrightarrow{A_0B_{n+2}})=\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{A_0B_n},\frac{1}{2}\overrightarrow{A_0B_{n+1}}\right)=(\overrightarrow{A_0B_n},\overrightarrow{A_0B_{n+1}})$

فإن المثلثين $A_0B_nB_{n+1}$ و $A_0B_{n+1}B_{n+2}$ متشابهان

(ضلعان و زاوية محصورة بينهما)ومنه: $\frac{B_{n+1}B_{n+2}}{B_nB_{n+1}}=\frac{1}{2}$

3) أ*/اثبات أن (u_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$: نعرف متتالية (u_n) بـ $u_n=B_nB_{n+1}$ من أجل كل عدد طبيعي n.

$\frac{1}{2}=\frac{B_{n+1}B_{n+2}}{B_nB_{n+1}}=\frac{u_{n+1}}{u_n}$ ومنه: (u_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ و حدها الأول $u_0=B_0B_1$

ب*/ كتابة عبارة u_n بدلالة n:

من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n=u_0\left(\frac{1}{2}\right)^n=B_0B_1\left(\frac{1}{2}\right)^n$

ج*/ نضع المجموع: $\delta_n=u_0+u_1+u_2+....+u_n$ ،

حساب δ_n بدلالة n ثم إيجاد $\lim_{n\to+\infty}\delta_n$: δ_n م.ح.م.هندسية

$$\delta_n=u_0\left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}\right)=2B_0B_1\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$$

ومنه: $\lim_{n\to+\infty}\delta_n=2B_0B_1$

4) أ*/ نحل في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ المعادلة : $3x-4y=2$ ...(1)

(1) يكافئ $3x=4y+2$ يكافئ $3x\equiv2[4]$

يكافئ $7\times3x\equiv7\times2[4]$ يكافئ $x\equiv2[4]$

ومنه: $x=4\lambda+2$ ، $\lambda\in\mathbb{Z}$ بالتعويض في المعادلة (1) نجد

$y=3\lambda+1$ إذن: $S=\{(4\lambda+2;3\lambda+1);\lambda\in\mathbb{Z}\}$

ب*/ تعيين قيم العدد الطبيعي n التي من اجلها تكون النقطة B_n تنتمي إلى المستقيم (Δ):

لدينا: (Δ) العمودي على (A_0B_0) في النقطة A_0 وكذلك

$(\overrightarrow{A_0B_0},\overrightarrow{A_0B_n})=(\overrightarrow{A_0B_0},\overrightarrow{A_0B_1})+(\overrightarrow{A_0B_1},\overrightarrow{A_0B_2})+...$

$....+(\overrightarrow{A_0B_{n-1}},\overrightarrow{A_0B_n})=\frac{3\pi}{4}+\frac{3\pi}{4}+...+\frac{3\pi}{4}=n\frac{3\pi}{4}$

B_n تنتمي إلى (Δ) معناه $(\overrightarrow{A_0B_0},\overrightarrow{A_0B_n})=\frac{\pi}{2}+k\pi$ ، $k\in\mathbb{Z}$

نجد: $n\frac{3\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+k\pi$ يكافئ $3n=4\left(\frac{1}{2}+k\right)$

يكافئ $3n=2+4k$ يكافئ $3n-4k=2$

ومنه قيم n هي $n=4k'+2$ ، $k'\in\mathbb{N}$

التمرين الثالث: (05 نقاط)

1) أ*/نبين أن المعادلة (E) تكافئ: $(\bar{z}+1)(\bar{z}^2-4\bar{z}+7)=0$

لدينا : $\bar{z}^3-3\bar{z}^2+3\bar{z}+7=0$ ...(E)

$(\bar{z}+1)(\bar{z}^2-4\bar{z}+7)=0$ يكافئ $\bar{z}^3-4\bar{z}^2+7\bar{z}+\bar{z}^2-4\bar{z}+7=0$

يكافئ $\bar{z}^3-3\bar{z}^2+3\bar{z}+7=0$

ب*/ نحل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E) :

(E) تكافئ: $(\bar{z}+1)(\bar{z}^2-4\bar{z}+7)=0$

يكافئ $(\overline{z+1})(\overline{z^2-4z+7})=0$ يكافئ $(z+1)(z^2-4z+7)=0$

يكافئ $\begin{cases} z=-1 \\ z^2-4z+7=0 \end{cases}$ ، $\Delta=-12=(2\sqrt{3}i)^2$

$z_1=2-\sqrt{3}i$ و $z_2=2+\sqrt{3}i$

ومنه : $S=\left\{-1;2-\sqrt{3}i\ ;2+\sqrt{3}i\right\}$

2) أ*/تعيين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون العدد المركب $(z_B-z_A)^n$ عددا حقيقيا سالبا: لدينا

$$(z_B-z_A)^n=(2+\sqrt{3}i+1)^n=(3+\sqrt{3}i)^n$$

ومنه $(z_B-z_A)^n=(2\sqrt{3})^n e^{i\frac{n\pi}{6}}$

$(z_B-z_A)^n$ عددا حقيقيا سالبا معناه:

$\arg(z_B-z_A)^n=\pi+2k\pi$ ومنه $\frac{n\pi}{6}=\pi+2k\pi$

إذن $n=12k+6\ ;k\in\mathbb{N}$

ب*/تعيين طبيعة المثلث ABC

$AC=|z_C-z_A|=|3-i\sqrt{3}|=2\sqrt{3}$

$AB=|z_B-z_A|=|3+i\sqrt{3}|=2\sqrt{3}$

$BC=|z_C-z_B|=|-2i\sqrt{3}|=2\sqrt{3}$

بما ان : $AB=AC=BC$ فإن المثلث ABC متقايس الأضلاع

3) أ*/ كتابة العدد $\frac{z_A-z_C}{z_D-z_C}$ على الشكل الأسي:

$$\frac{z_A-z_C}{z_D-z_C}=\frac{-1-2+i\sqrt{3}}{3-2+i\sqrt{3}}=\frac{-3+i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}}=\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}$$

***/استنتاج طبيعة التحويل الذي يحول A إلى D وعناصره المميزة:** $\frac{z_A-z_C}{z_D-z_C}=\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}$ معناه $z_A-z_C=\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}(z_D-z_C)$

معناه النقطة A صورة النقطة D بالتشابه المباشر الذي مركزه النقطة C و نسبته $\sqrt{3}$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$

ب/تعيين مركز ونصف قطر الدائرة المحيطة بالمثلث ACD

لدينا: $\frac{z_A-z_C}{z_D-z_C}=\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}$ معناه $\begin{cases}\left|\frac{z_A-z_C}{z_D-z_C}\right|=\sqrt{3}\\(\overrightarrow{CD};\overrightarrow{CA})=\frac{\pi}{2}+2k\pi;k\in\mathbb{Z}\end{cases}$

اذن المثلث ACD قائم في C ومنه مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ACD هو النقطة I منتصف الوتر $[AD]$

لاحقتها $z_I=\frac{z_A+z_D}{2}=\frac{3}{2}-i\frac{1}{2}$

4 */ تعيين قيس للزاوية الموجهة $(\vec{u};\overrightarrow{AB})$:

لدينا : $(\vec{u};\overrightarrow{AB})=\arg(z_B-z_A)=\frac{\pi}{6}+2k\pi\ ;k\in\mathbb{Z}$

***/استنتاج (Γ) مجموعة النقط $M(z)$ حيث :**

$z-z_A=k(z_B-z_A)$ معناه $z+1=2\sqrt{3}ke^{i\frac{\pi}{6}}$

معناه $\overrightarrow{AM}=k\cdot\overrightarrow{AB}$

ومنه :من أجل k يمسح المجال $]0;+\infty[$ المجموعة (Γ) هي نصف مستقيم مبدؤه النقطة A وشعاع توجيهه $\overrightarrow{AB}$

لاحقته : $2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}=3+i\sqrt{3}$

5) أ*/تعيين قيمة العدد α حيث $-\overrightarrow{CA}+2\overrightarrow{CB}+\alpha\overrightarrow{CD}=\vec{0}$

$$-\overrightarrow{CA}+2\overrightarrow{CB}+\alpha\overrightarrow{CD}=\vec{0}$$

معناه النقطة C هي مرجح الجملة $\{(A;-1),(B;2),(D;\alpha)\}$

$\begin{cases}x_C=\frac{-x_A+2x_B+\alpha x_D}{-1+2+\alpha}\\y_C=\frac{-y_A+2y_B+\alpha y_D}{-1+2+\alpha}\end{cases}$ يكافئ $\begin{cases}2=\frac{1+4+3\alpha}{1+\alpha}\\-\sqrt{3}=\frac{0+2\sqrt{3}+0\cdot\alpha}{1+\alpha}\end{cases}$ ومنه $\alpha=-3$

ب*/ تعيين (E) مجموعة النقط M من المستوى حيث :

$(*)...\left\|-\overrightarrow{AM}+2\overrightarrow{BM}-3\overrightarrow{DM}\right\|\le 2\left\|\overrightarrow{BM}-\overrightarrow{CM}\right\|$

(*)تكافئ $\left\|\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MD}\right\|\le 2\left\|\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{MC}\right\|$

(*)تكافئ $\left\|-\left(-\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MD}\right)\right\|\le 2\left\|\overrightarrow{BC}\right\|$

(*)تكافئ $\left\|(-1+2-3)\overrightarrow{CM}\right\|\le 2BC$ تكافئ $CM\le BC$

ومنه مجموعة النقط (E) هي قرص مركزه النقطة C ونصف قطره هو : $BC=2\sqrt{3}$

جـ*/ استنتاج مجموعة نقط تقاطع القرص (E) و نصف المستقيم $[AB)$: لدينا القرص (E) مركزه C ونصف قطره $BC=2\sqrt{3}$ و $AC=2\sqrt{3}$ معناه A تنتمي إلى القرص (E)

ومنه تقاطع القرص (E) ونصف المستقيم $[AB)$ هو القطعة المستقيمة $[AB]$

التمرين الرابع: (07 نقـاط)

1) g معرفة على $]0;+\infty[$ بـــ : $g(x)=x^2e^x$

أ*/ دراسة اتجاه تغير الدالة g على المجال $]0;+\infty[$:

الدالة g قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$: $g'(x)=(x^2+2x)e^x$

بما ان $g'(x)\succ 0$ فإن الدالة g متزايدة تماما على $]0;+\infty[$

ب*/ استنتاج أنه : إذا كان $0\prec x\prec 1$ فإن $g(x)\prec g\left(\frac{1}{x}\right)$

و إذا كان $x\succ 1$ فإن $g(x)\succ g\left(\frac{1}{x}\right)$

إذا كان $0\prec x\prec 1$ فــإن $x\prec\frac{1}{x}$ و لدينا g متزايدة تماما على $]0;+\infty[$ ، فــإن $g(x)\prec g\left(\frac{1}{x}\right)$

إذا كان $x\succ 1$ فــإن $x\succ\frac{1}{x}$ ولدينا g متزايدة تماما على $]0;+\infty[$ ، فــإن $g(x)\succ g\left(\frac{1}{x}\right)$

2) f معرفة على $]0;+\infty[$: $f(x)=(x^2-2x+2)e^x+e^{\frac{1}{x}}-3e$

أ*/ حساب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to 0} f(x)$:

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ ، $\lim_{x\to 0} f(x)=+\infty$

ب*/ نبين أنه من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$:

$f'(x)=g(x)-g\left(\frac{1}{x}\right)$ ، ثم حساب $f'(1)$:

الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ دالتها المشتقة f' :

$$f'(x)=x^2e^x-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}=g(x)-g\left(\frac{1}{x}\right)$$

ومنه: $f'(1)=g(1)-g\left(\frac{1}{1}\right)=0$

ج*/ تشكيل جدول تغيرات الدالة f على المجال $]0;+\infty[$:

إشارة $f'(x)$:

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

f متزايدة تماما على $]1;+\infty[$

f متناقصة تماما على $]0;1[$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$-e=-2.71$	↗	$+\infty$

3) أ*/ نبين أن المعادلة: $(x^2-2x+2)e^x=-h(x)$ تقبل حلين α و β حيث: $1.5<\beta<1.6$ و $0.5<\alpha<0.6$

$(x^2-2x+2)e^x=-h(x)$ تكافئ $(x^2-2x+2)e^x+h(x)=0$

تكافئ $f(x)=0$ ، لدينا: $f(0.5)\approx1.25$ ، $f(0.6)\approx-0.74$

بما ان الدالة f مستمرة ومتناقصة تماما على $[0.5;0.6]$

$f(0.5)\times f(0.6)<0$ فان حسب مبرهنة القيم المتوسطة

فان المعادلة $(x^2-2x+2)e^x=-h(x)$ تقبل حل وحيد α

حيث: $0.5<\alpha<0.6$ ، $f(\alpha)=0$

لدينا: $f(1.5)\approx-0.60$ ، $f(1.6)\approx0.44$

بما ان الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على $[1.5;1.6]$

$f(1.5)\times f(1.6)<0$ فان حسب مبرهنة القيم المتوسطة

فان المعادلة $(x^2-2x+2)e^x=-h(x)$ تقبل حل وحيد β

حيث: $1.5<\beta<1.6$ ، $f(\beta)=0$

*/ استنتاج أن (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطتين:

بما ان المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين α و β فان (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطتين فاصلتيهما α و β

ب*/ دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمنحنى (C_h) :

ندرس إشارة الفرق $f(x)-h(x)=(x^2-2x+2)e^x$

$x^2-2x+2>0$ من أجل كل $x\in]0;+\infty[$ لأن $\Delta=-4$

ومنه: (C_f) يقع فوق (C_h) على المجال $]0;+\infty[$

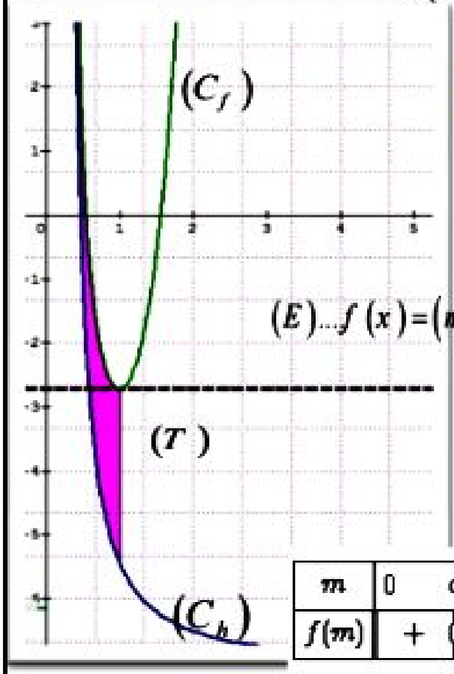
ج*/ نبين ان المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) في النقطة التي فاصلتها 1 يطلب كتابة معادلته :

بما ان الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ فإن تمثيلها (C_f) يقبل عند كل نقطة فاصلتها من $]0;+\infty[$ مماسا

$(T): y=f'(1)(x-1)+f(1)$ ، $f(1)=-e$; $f'(1)=0$

ومنه: $(T): y=-e$

4) أ*/ رسم (T) و (C_f) :



ب*/ إيجاد قيم m حتى تقبل المعادلة (E) حلين متمايزين:

لدينا m وسيط حقيقي حيث $m>0$

$(E)...f(x)=(m^2-2m+2)e^m+h(m)$

المعادلة (E) تكافئ:

$f(x)=f(m)$

إشارة $f(m)$:

m	0		α		1		β		$+\infty$
$f(m)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	

من أجل $m=1$ المعادلة (E) تقبل حلا مضاعفا .

ومنه: المعادلة (E) تقبل حلين متمايزين لما $m\in]0;1[\cup]1;+\infty[$

5) أ*/ نبين أنه من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$:

$$\int_1^x[f(t)-h(t)]dt=(x^2-4x+6)e^x-3e$$

لدينا: $\int_1^x[f(t)-h(t)]dt=\int_1^x(t^2-2t+2)e^t\,dt$

الدالة: $t\to(t^2-2t+2)e^t$ مستمرة على $]0;+\infty[$ فهي تقبل دوالا أصلية على $]0;+\infty[$

$$\left[(t^2-4t+6)e^t-3e\right]'=(t^2-2t+2)e^t$$

$$\int_1^x(t^2-2t+2)e^t\,dt=\int_1^x\left[(t^2-4t+6)e^t-3e\right]'dt$$
$$=(x^2-4x+6)e^x-3e$$

ب*/ استنتاج $A(\lambda)$ مساحة الحيز المستوي المحدد بـ (C_h) و (C_f) و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=\lambda$ و $x=1$ (مقدرة بوحدة المساحة) حيث $\lambda\in]0;1]$:

$$A(\lambda)=\int_1^\lambda[f(t)-h(t)]dt=-\int_\lambda^1[f(t)-h(t)]dt$$

$$A(\lambda)=-\left[(\lambda^2-4\lambda+6)e^\lambda-3e\right]$$

$$=\left(3e-(\lambda^2-4\lambda+6)e^\lambda\right)ua$$

*/ حساب $\lim\limits_{\lambda\to0} A(\lambda)$:

$$\lim_{\lambda\to0}A(\lambda)=\lim_{\lambda\to0}\left[3e-(\lambda^2-4\lambda+6)e^\lambda\right]=3e$$

الموضوع الثاني

التمرين الاول : (04 نقاط)

$A(3;1;0)$ ، $B(1;2;0)$ ، $C(3;2;1)$ و $D(0;0;m)$

1) أ*/ حساب $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$: $\overrightarrow{BA}(2;-1;0)$ ، $\overrightarrow{BC}(2;0;1)$

لدينا : $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=2(2)+0(-1)+1(0)=4$

*/ استنتاج القيمتين المضبوطتين لـ $Cos ABC$ و $Sin ABC$: لدينا $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=\|\overrightarrow{BA}\|\cdot\|\overrightarrow{BC}\|Cos ABC$

ومنه: $Cos ABC=\frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{\|\overrightarrow{BA}\|\cdot\|\overrightarrow{BC}\|}=\frac{4}{\sqrt5\sqrt5}=\frac45$

لدينا: $\sin ABC^2=1-Cos ABC^2$

ومنه $\sin ABC=\frac35$ أو $\sin ABC=-\frac35$

ب*/ حساب مساحة المثلث ABC ولتكن S_{ABC}:

$S_{ABC}=\frac12 BA\times BC\times\sin ABC=\frac12\sqrt5\times\sqrt5\times\frac35=\frac32 ua$

ج*/ نبين أن $\vec n(1;2;-2)$ شعاع ناظمي للمستوي (ABC) :

بما أن $\vec n\cdot\overrightarrow{BC}=1(2)+2(0)-2(1)=0$ وكذلك

$\vec n\cdot\overrightarrow{BA}=1(2)+2(-1)-2(0)=0$

فإن $\vec n(1;2;-2)$ شعاع ناظمي للمستوي (ABC)

*/ استنتاج معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) :

لدينا $(ABC): x+2y-2z+d=0$

$A\in(ABC)$ تكافئ $3+2+d=0$ تكافئ $d=-5$

ومنه: $(ABC): x+2y-2z-5=0$

د*/ تبيان أن $ABCD$ رباعي وجوه:

نبين أن النقطة D لا تنتمي الى المستوي (ABC)

لدينا $0+2(0)-2m-5=0$ أي $m=-\frac52$ إذن: $D\notin(ABC)$

لأن m عدد حقيقي موجب ومنه: $ABCD$ رباعي وجوه

*/ نبين أن حجم رباعي الوجوه $ABCD$ هو $V=\frac{2m+5}{6}uv$

لدينا $V_{ABCD}=\frac13 S_{ABC}\times h$ ، $h=d(D,(ABC))$ هو الارتفاع

$$d(D;(ABC))=\frac{|-2m-5|}{\sqrt{1+4+4}}=\frac{2m+5}{3}$$

ومنه $V=\frac13\times\frac32\times\frac{2m+5}{3}=\frac{2m+5}{6}\ uv$

2) أ*/ نبين أن (Q) هو المستوي المحوري لقطعة المستقيم $[AB]$ معادلته الديكارتية $-2x+y=\frac{-5}{2}$: هناك عدة طرق منها

*إحداثيات $I(2;\frac32;0)$ منتصف $[AB]$ تحقق التمثيل الوسيطي لـ (Q) والشعاع $\overrightarrow{AB}(2,-1,0)$ عمودي على شعاعي توجيهه $\vec{u'}(1;2;0)$ و $\vec u(-2;-4;-5)$ ومنه (Q) مستوي محوري لـ $[AB]$

*/ تعيين معادلة (Q): لدينا

$$(Q):\begin{cases}x=2-2\alpha+\beta....(1)\\ y=\frac32-4\alpha+2\beta....(2)\\ z=-5\alpha.....(3)\end{cases};(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$$

من (1) نجد: $z=-5\alpha$

يكافئ: $\alpha=\frac{z}{-5}$ بالتعويض في (1) نجد: $x=2-2\left(\frac{z}{-5}\right)+\beta$

ومنه: $\beta=x-2-\frac{2z}{5}$ نعوض قيمة β و α في (2) نجد:

$y=\frac32-4\left(\frac{z}{-5}\right)+2\left(x-2-\frac{2z}{5}\right)$ ومنه : $-2x+y=\frac{-5}{2}$

ومنه معادلة (Q) هي: $-4x+2y+5=0$

*/ بطريقة أخرى: (Q) يشمل $I\left(2;\frac32;0\right)$ منتصف $[AB]$

و $\overrightarrow{AB}(-2;1;0)$ شعاع ناظمي له والتمثيل الوسيطي يحقق

ومنه المستوي المحوري لقطعة المستقيم $[AB]$ $(Q): -2x+y=\frac{-5}{2}$

ب*/ استنتاج ان المستويين (ABC) و (Q) متعامدان وهما متقاطعان وفق مستقيم (Δ) يطلب تعيين تمثيله الوسيطي:

بما أن $\vec n\cdot\overrightarrow{AB}=1.(-2)+2.(1)+0.(-2)=0$ فإن (Q) و (ABC) متعامدان فهما متقاطعان وفق مستقيم (Δ) .

*/ تعيين التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ):

$$\begin{cases}x+2y-2z-5=0....(1)\\ -4x+2y+5=0.......(2)\end{cases}$$

بطرح (2) من (1) نجد:

$5x-2z-10=0$ نضع $z=t$ (t وسيط حقيقي) نجد

$x=\frac{2}{5}t+2$ و $y=\frac{4}{5}t+\frac{3}{2}$ إذن: $(\Delta):\begin{cases}x=\frac{2}{5}t+2\\ y=\frac{4}{5}t+\frac{3}{2};t\in\mathbb{R}\\ z=t\end{cases}$

ج*/ حساب $d(D;(Q))$ ثم استنتاج بدلالة m المسافة بين D و (Δ):

$$d(D;(Q))=\frac{|-4(0)+2(0)+5|}{\sqrt{16+4}}=\frac{5}{\sqrt{20}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$$

بما أن (Q) و (ABC) متعامدان فإن حسب مبرهنة فيثاغورس

$$d(D;(\Delta))^2=d(D;(Q))^2+d(D;(ABC))^2$$

ومنه: $d(D;(\Delta))=\sqrt{\frac{5}{4}+\left(\frac{2m+5}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{16m^2+80m+145}}{6}$

3)أ*/تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي m، (S_m) سطح كرة يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها:

لدينا: $x^2+y^2+z^2-2mz+m^2-9=0$

ومنه: $x^2+y^2+(z-m)^2=9$ إذن: (S_m) سطح كرة مركزها النقطة $D(0;0;m)$ و نصف قطرها $r=3$.

ب*/تعيين m حتى يكون المستوي (ABC) مماسا لسطح الكرة (S_m): (ABC) مماس لسطح الكرة (S_m) يعني

$d(D;(ABC))=3$ أي أن: $\frac{2m+5}{3}=3$ ومنه: $m=2$

4) معادلة المستوي (P) الموازي تماما للمستوي (ABC) ويمس (S_m): لدينا: $(P): x+2y-2z+d=0$

المستوي (P) مماس لـ (S_m) يعني:

$d(D;(P))=\frac{|-4+d|}{3}=3$ أي $|-4+d|=9$

ومنه: $d=13$ أو $d=-5$ هو المستوي (ABC)

إذن: $(p): x+2y-2z+13=0$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

1)أ*/إثبات أن: $y\equiv 4[11]$ ، $(E)...11x-5y=2$

$11x-5y=2$ يكافئ $5y=11x+2$ ومنه $5y\equiv -2[11]$ أي $5y\equiv 20[11]$ ومنه: $y\equiv 4[11]$

ب*/استنتاج حلول المعادلة (E):

$y\equiv 4[11]$ معناه $y=11k+4$ مع $k\in\mathbb{Z}$ ،نعوض قيمة y في المعادلة (E) نجد: $x=5k+2$

ومنه: $S=\{(11k+4;5k+5)/k\in\mathbb{Z}\}$

2)أ*/تعيين القيم الممكنة لـ $d=PGCD(a;b)$:

$a=5n+2$ و $b=11n+4$ ، $n\in\mathbb{N}^*$

$11a-5b=11(5n+2)-5(11n+4)=55n+22-55n-20=2$

ومنه: $d/2$ إذن: $d\in D_2=\{1;2\}$.

ب*/تعيين قيم العدد الطبيعي غير المعدوم n بحيث يكون: $PGCD(a;b)=2$ لدينا $PGCD(a;b)=2$

معناه 2 يقسم a و 2 يقسم b معناه 2 يقسم $b-2a$

أي 2 يقسم $(11n+4-2(5n+2))$ وبالتالي 2 يقسم n .

ومنه n عدد زوجي يكتب من الشكل: $n=2\alpha\ /\ \alpha\in\mathbb{N}^*$

ج*/ استنتاج قيم العدد الطبيعي غير المعدوم n بحيث يكون العددان a و b أوليان فيما بينهما: من السؤال السابق

من أجل $PGCD(a;b)=2$ قيم n: $n=2\alpha\ /\ \alpha\in\mathbb{N}^*$

ومنه: قيم n حيث $PGCD(a;b)=1$ هي: $n=2\alpha+1/\alpha\in\mathbb{N}$

3) أ*/نبين أن العدد $(n+1)$ يقسم كل من العددين A و B

$A=5n^2+7n+2$ و $B=11n^2+15n+4$ ، $n\in\mathbb{N}$

$A=(n+1)(5n+2)=a(n+1)$ ، $B=(n+1)(11n+4)=b(n+1)$

ومنه: $(n+1)$ يقسم كل من العددين A و B

ب*/ استنتاج حسب قيم n القاسم المشترك الأكبر للعددين A و B:

$PGCD(A;B)=PGCD(a(n+1);b(n+1))=(n+1)PGCD(a;b)$

ومنه نميز حالتين:

الحالة 1: إذا كان $PGCD(a;b)=2$ معناه $n=2\alpha/\alpha\in\mathbb{N}^*$

نجد: $PGCD(A;B)=(2\alpha+1)2=4\alpha+2$

الحالة 2: إذا كان $PGCD(a;b)=1$ معناه $n=2\alpha+1/\alpha\in\mathbb{N}$

نجد: $PGCD(A;B)=(2\alpha+1+1)1=2\alpha+2$

التمرين الثالث (05 نقاط)

1) تعيين العددين المركبين z_1 و z_2 حيث:

$\begin{cases}2z_1+iz_2=1+i\sqrt{3}...(1)\\ (\sqrt{3}+2i)z_1-z_2=(1-\sqrt{3})i..(2)\end{cases}$ نضرب طرفي المعادلة الأولى في $(-i)$ نجد

$\begin{cases}-2iz_1+z_2=-i+\sqrt{3}......(1')\\ \sqrt{3}z_1+2iz_1-z_2=i-i\sqrt{3}...(2)\end{cases}$

بجمع $(1')$ و (2): $\sqrt{3}z_1=\sqrt{3}(1-i)$ ومنه $z_1=1-i$

بالتعويض في $(1')$ نجد: $z_2=2+\sqrt{3}+i$

2)أ*/كتابة z_A على الشكل الأسي: $z_A=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

ب*/نبين أن: $\frac{z_B}{z_A}=(1+\sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{3}}$:

$$\frac{z_B}{z_A}=\frac{2+\sqrt{3}+i}{1-i}=\frac{(2+\sqrt{3}+i)(1+i)}{2}=\frac{(1+\sqrt{3})+\sqrt{3}(1+\sqrt{3})i}{2}$$

ومنه: $\frac{z_B}{z_A}=(1+\sqrt{3})\frac{(1+\sqrt{3}i)}{2}=(1+\sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{3}}$

*/استنتاج الشكل الأسي للعدد z_B :

$$z_B=z_A(1+\sqrt3)e^{i\frac{\pi}{3}}=\sqrt2e^{-i\frac{\pi}{4}}(1+\sqrt3)e^{i\frac{\pi}{3}}$$

ومنه : $z_B=\sqrt2(1+\sqrt3)e^{i\frac{\pi}{12}}$

ج*/تعيين قيم للعدد الطبيعي n حتى تكون صورة العدد $\left(\frac{z_B}{z_A}\right)^n$ تنتمي إلى المنصف الأول إن وجدت :

لدينا : $\left(\frac{z_B}{z_A}\right)^n=(1+\sqrt3)^ne^{i\frac{n\pi}{3}}$ معناه $\arg\left(\frac{z_B}{z_A}\right)^n=\frac{\pi}{4}+k\pi$

أي : $\arg\left(\frac{z_B}{z_A}\right)^n\equiv\frac{n\pi}{3}[2\pi]$ ومنه : $\frac{n\pi}{3}=\frac{\pi}{4}+k\pi$ ، $k\in\mathbb{Z}$

أي $4n-12k=3$ ، $PGCD(12;4)=4$ و4 لا تقسم 3 ومنه المعادلة لا تقبل حلول اذن لايوجد قيم لـ n تحقق المطلوب .

3) أ*/إيجاد لاحقة النقطة B' صورة النقطة B بالدوران r الذي مركزه النقطة O وزاويته $\frac{-\pi}{6}$

عبارة الدوران r من الشكل : $z'=e^{-i\frac{\pi}{6}}z$

$$z_{B'}=e^{-i\frac{\pi}{6}}z_B=e^{-i\frac{\pi}{6}}\sqrt2(1+\sqrt3)e^{i\frac{\pi}{12}}=\sqrt2(1+\sqrt3)e^{-i\frac{\pi}{12}}$$

$$z_{B'}=\sqrt2(1+\sqrt3)e^{-i\frac{\pi}{12}}=\overline{z_B}=2+\sqrt3-i$$

ب*/حساب مساحة الدائرة (γ) التي قطرها $[BB']$:لدينا

$$S=\pi R^2 \text{ ، } R=\frac{BB'}{2}=\frac{|z_{B'}-z_B|}{2}=\frac{|-2i|}{2}=\frac{2}{2}=1$$

ومنه : $s=\pi\ ua$

ج*/ تعيين مجموعة النقط $M(z)$ من المستوى حيث:

$\arg\left[(z-z_B)^2\right]=\arg(z_B)-\arg(z_{B'})$ أي أن

$2\arg(z-z_B)=\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{12}+2k\pi$ ومنه $\arg(z-z_B)=\frac{\pi}{12}+k\pi$

تفسيرها : $(\vec{u};\overrightarrow{BM})=\frac{\pi}{12}+k\pi / k\in\mathbb{Z}$

ومنه مجموعة النقط هي المستقيم (OB) ماعدا النقطة B .

د*/تعيين z_C لاحقة النقطة C حتى يكون الرباعي $AB'BC$ مستطيل:

$$(\overrightarrow{B'B};\overrightarrow{B'A})=\arg\left(\frac{z_A-z_{B'}}{z_B-z_{B'}}\right)=\arg(z_A-z_{B'})-\arg(z_B-z_{B'})$$

$$(\overrightarrow{B'B};\overrightarrow{B'A})=\arg(1-i-2-\sqrt3+i)-\arg(2i)=\pi-\frac{\pi}{2}+2k\pi$$

ومنه نجد : $(\overrightarrow{B'B};\overrightarrow{B'A})=\frac{\pi}{2}+2k\pi / k\in\mathbb{Z}$

يكفي أن نبين : $\overrightarrow{B'B}=\overrightarrow{AC}$ معناه : $\begin{cases}x_C=1\\y_C=1\end{cases}$ ومنه $z_C=1+i$

بطريقة اخرى :لدينا $z_{B'}=\overline{z_B}$ معناه BB' متناظرتان

بالنسبة لمحور الفواصل ولدينا : $B'(2+\sqrt3;-1)$ و $A(1;-1)$

أي : AB' لهما نفس الترتيب معناه ينتميان إلى المستقيم معادلته $y=-1$ موازي لمحور الفواصل ومنه نجد : $z_C=\overline{z_A}=1+i$.

*/ إيجاد z_I لاحقة مركز ثقل المستطيل $AB'BC$

$z_I=\frac{z_A+z_B+z_{B'}+z_C}{4}$ ومنه $z_I=\frac{1-i+4+2\sqrt3+1+i}{4}=\frac{3+\sqrt3}{2}$

4)أ*/تعيين العبارة المركبة للتشابه المباشر S حيث يكون f تشابه مباشر مركزه O ونسبته 2 و زاويته $\frac{\pi}{3}$: $f=ros$

S تشابه مباشر مركزه O ونسبته k وزاويته θ أي ros تشابه مباشر مركزه O ونسبته k وزاويته $\theta-\frac{\pi}{6}$

ومنه : $k=2$ و $\theta-\frac{\pi}{6}\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$ أي $\theta\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$

ومنه عبارة التشابه S هي : $z'=2e^{i\frac{\pi}{2}}z$ ونكتب $z'=2iz$

ب*/إيجاد مساحة صورة الدائرة (γ) بالتشابه المباشر S :

مساحة صورة الدائرة (γ) هي S' حيث : $s'=k^2s=4\pi\ ua$.

5) أ*/ إذا كان $S(M)=M'$ ،إيجاد طبيعة المثلث OMM':

$z'=2e^{i\frac{\pi}{2}}z$ ومنه : $\frac{z'}{z}=2e^{i\frac{\pi}{2}}$ معناه $\arg\frac{z'}{z}=\frac{\pi}{2}+2k\pi$

معناه $(\overrightarrow{OM};\overrightarrow{OM'})=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ و $\left|\frac{z'}{z}\right|=2$ أي $|z'|=2|z|$

معناه $\|\overrightarrow{OM'}\|=2\|\overrightarrow{OM}\|$ ومنه :المثلث OMM' قائم في O

ب*/تعيين مجموعة النقط M من المستوى التي يكون من أجلها : $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AM'}=0$ ، $\overrightarrow{AM}(z-z_A)$ ، $\overrightarrow{AM}(x-1;y+1)$

و $\overrightarrow{AM'}(z'-z_A)$ أي $\overrightarrow{AM'}(2iz-z_A)$ ومنه $\overrightarrow{AM'}(-2y-1;2x+1)$

$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AM'}=0$ معناه $(x-1)(-2y-1)+(y+1)(2x+1)=0$

معناه $x+3y+2=0$

مجموعة النقط المطلوبة هي مستقيم معادلته $x+3y+2=0$.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

1)أ*/التحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x :

$$f(x)=-x+e+\ln\left(2+e^{2(x-e)}\right)$$

$$f(x)=x-e+\ln\left(1+2e^{-2(x-e)}\right)=x-e+\ln\left(\frac{e^{2(x-e)}+2}{e^{2(x-e)}}\right)$$

$$=x-e+\ln\left(e^{2(x-e)}+2\right)-\ln\left(e^{2(x-e)}\right)=-x+e+\ln\left(2+e^{2(x-e)}\right)$$

ب */ حساب النهايات $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$

ج*/ دراسة اتجاه تغير الدالة f :

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$: $f'(x)=\frac{1-2e^{-2(x-e)}}{1+2e^{-2(x-e)}}$

$f'(x)=0$ معناه $1-2e^{-2(x-e)}=0$ معناه $x=e+\ln\sqrt{2}$

x	$-\infty$		$e+\ln\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

الدالة f متزايدة تماما على $\left[e+\ln\sqrt{2};+\infty\right[$

الدالة f متناقصة تماما على $\left]-\infty;e+\ln\sqrt{2}\right]$

تشكيل جدول تغيراتها :

x	$-\infty$		$\ln2/2+e$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$3\ln2/2+e$	$\nearrow$	$+\infty$

2) أ*/ نبين أن (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين (D) و (D')

معادلتاهما: $y=x-e$ و $y=-x+\ln2+e$ عند $+\infty$ وعند $-\infty$ **على الترتيب**: بما أن

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x-e)\right]=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(1+2e^{-2(x-e)}\right)=\ln1=0$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-(-x+e+\ln2)\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\ln\left(2+e^{2(x-e)}\right)-\ln2\right]=0$$

فإن: (D)مستقيم مقارب لـ (C_f) عند $+\infty$

و (D')مستقيم مقارب لـ (C_f) عند $-\infty$

ب*/ دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة لـ (D) و (D')

لدينا: $f(x)-(x-e)=\ln\left(1+2e^{-2(x-e)}\right)$

$1+2e^{-2(x-e)}\succ1$ معناه $\ln\left(1+2e^{-2(x-e)}\right)\succ\ln1=0$

ومنه: $f(x)-(x-e)\succ0$ إذن (C_f)يقع فوق م.م(D)

لدينا: $f(x)-(-x+e+\ln2)=\ln\left(2+e^{2(x-e)}\right)-\ln2$

$2+e^{2(x-e)}\succ2$ معناه $\ln\left(2+e^{2(x-e)}\right)\succ\ln2$ ومنه:

$f(x)-(-x+e+\ln2)\succ0$ إذن (C_f)يقع فوق م.م(D')

من أجل كل عدد حقيقي x

ج*/ نبين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $x=\frac{1}{2}\ln2+e$ هو محور تناظر للمنحنى (C_f):

من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $\left(2\left(\frac{\ln2}{2}+e\right)-x\right)$ من $\mathbb{R}$، لدينا

$$f\left(2\left(\frac{\ln2}{2}+e\right)-x\right)=f\left(\ln2+2e-x\right)$$

$$=-x+e+\ln(2+e^{2(x-e)})=f(x)$$

ومنه: $(\Delta):x=\frac{1}{2}\ln2+e$محور تناظرللمنحنى$(C_f)$

3) رسم (Δ)، (D)، (D') و (C_f).

4) أ*/ نبين أن جميع المستقيمات (D_m) تشمل النقطة الثابتة : $A\left(\frac{\ln2}{2}+e\,;\frac{\ln2}{2}\right)$

$(D_m):y=mx-m\left(e+\frac{\ln2}{2}\right)+\frac{\ln2}{2}$

حيث m وسيط حقيقي.

$y=mx-m\left(e+\frac{\ln2}{2}\right)+\frac{\ln2}{2}$ معناه

$m\left(x-e-\frac{\ln2}{2}\right)+\frac{\ln2}{2}-y=0$ معناه

$x-e-\frac{\ln2}{2}=0$ و $\frac{\ln2}{2}-y=0$ ومنه: جميع المستقيمات (D_m) تشمل النقطة الثابتة $A\left(\frac{\ln2}{2}+e\,;\frac{\ln2}{2}\right)$

ب*/ مناقشة حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد نقط تقاطع المستقيم (D_m) و المنحنى (C_f) :

المستقيم (D_m) يدور حول النقطة الثابتة $A\left(\frac{\ln2}{2}+e\,;\frac{\ln2}{2}\right)$

إذا كان $m=1$ فإن (D_m) هو (D) لاتوجد نقط تقاطع

إذا كان $m=-1$ فإن (D_m) هو (D') لاتوجد نقط تقاطع

إذا كان $m=0$ فإن (D_m) هو $(D_0):y=\ln\sqrt{2}$ لاتوجد نقط تقاطع

إذا كان $m\in\left]-1;1\right[$ فإنه لاتوجد نقط تقاطع

إذا كان $m\in\left]-\infty;-1\right[$ فإنه توجد نقطة تقاطع واحدة

إذا كان $m\in\left]1;+\infty\right[$ فإنه توجد نقطة تقاطع واحدة

5) أ*/ التفسير الهندسي العدد I: هومساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيم المقارب (D)والمستقيمين اللذيم معادلتيهما $x=\ln\sqrt{2}+e$ ، $x=\ln\sqrt{3}+e$

حساب العدد I_1: $I_1=\int_0^1\ln(1+X)\,dX$ بالمكاملة بالتجزئة

بوضع: $u(X)=\ln(1+X)$ ، $u'(X)=\frac{1}{1+X}$

$v'(X)=1$ ، $v(X)=X$

$$I_1=\left[X\ln(1+X)\right]_0^1-\int_0^1\frac{X+1-1}{X+1}dX$$

$$=\left[X\ln(1+X)\right]_0^1-\int_0^1 1dX+\int_0^1\frac{1}{X+1}dX$$

$$=\left[X\ln(1+X)-X+\ln(1+X)\right]_0^1=\ln4-1$$

ب*/ نبين أن $0\le I_n\le\ln2$: لدينا $I_n=\int_0^1\ln(1+X^n)\,dX$

$0\le X\le1$معناه $1\le X^n+1\le2$ معناه$0\le\ln(X^n+1)\le\ln2$

ومنه: $0\le\int_0^1\ln(X^n+1)dX\le\int_0^1\ln2dX$ اذن $0\le I_n\le\ln2$

ج*/تعيين اتجاه تغير المتتالية (I_n)ثم استنتاج أنها متقاربة:

$\begin{cases}0\le X\le1\ldots(1)\\0\le X^n\le1\end{cases}$ بضرب أطراف المتباينة (1)في X^nنجد

$0 \le X^{n+1} \le X^n$ أي $0 \le X^{n+1}+1 \le X^n+1$

أي أن $0 \le \ln\left(X^{n+1}+1\right) \le \ln\left(X^n+1\right)$ ، $n \in \mathbb{N}^*$

نستنتج أن $0 \le \int_0^1 \ln\left(X^{n+1}+1\right)dX \le \int_0^1 \ln\left(X^n+1\right)dX$

ومنه: $0 \le I_{n+1} \le I_n$ المتتالية (I_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}^*$

بما ان (I_n) محدودة من الاسفل بالصفر $(0 \le I_n \le \ln 2)$

ومتناقصة تماما فإنها متقاربة نحو الصفر

ج*/تعيين اتجاه تغير المتتالية (I_n)ثم استنتاج أنها متقاربة:

$\begin{cases} 0 \le X \le 1 \ldots(1) \\ 0 \le X^n \le 1 \end{cases}$ بضرب أطراف المتباينة (1)في X^nنجد

$0 \le X^{n+1} \le X^n$ أي $0 \le X^{n+1}+1 \le X^n+1$

أي أن $0 \le \ln\left(X^{n+1}+1\right) \le \ln\left(X^n+1\right)$ ، $n \in \mathbb{N}^*$

نستنتج أن $0 \le \int_0^1 \ln\left(X^{n+1}+1\right)dX \le \int_0^1 \ln\left(X^n+1\right)dX$

ومنه: $0 \le I_{n+1} \le I_n$ المتتالية (I_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}^*$

بما ان (I_n) محدودة من الاسفل بالصفر $(0 \le I_n \le \ln 2)$

ومتناقصة تماما فإنها متقاربة نحو الصفر

6) باستعمال: $\ln(1+X) \le X$ ،من اجل كل $X \in]0;+\infty[$

أ*/ استنتاج أن : $0 \le I + I_1 \le \int_{\ln\sqrt{2}+e}^{\ln\sqrt{3}+e} 2e^{-2(x-e)}dx - 1 + \ln 4$

$\ln(1+X) \le X$ ،من اجل كل $X \in]0;+\infty[$

لدينا: $0 \prec 1+2e^{-2(x-e)}$ بوضع: $X = 1+2e^{-2(x-e)}$ نجد:

$0 \le \ln\left(1+2e^{-2(x-e)}\right) \le 2e^{-2(x-e)}$ وبالتالي

$$0 \le \int_{\ln\sqrt{2}+e}^{\ln\sqrt{3}+e} \ln\left(1+2e^{-2(x-e)}\right)dx \le \int_{\ln\sqrt{2}+e}^{\ln\sqrt{3}+e} 2e^{-2(x-e)}dx$$

ومنه: $0 \le -1+\ln 4 \le I + I_1 \le \int_{\ln\sqrt{2}+e}^{\ln\sqrt{3}+e} 2e^{-2(x-e)}dx - 1 + \ln 4$

اذن: $0 \le I + I_1 \le \int_{\ln\sqrt{2}+e}^{\ln\sqrt{3}+e} 2e^{-2(x-e)}dx - 1 + \ln 4$

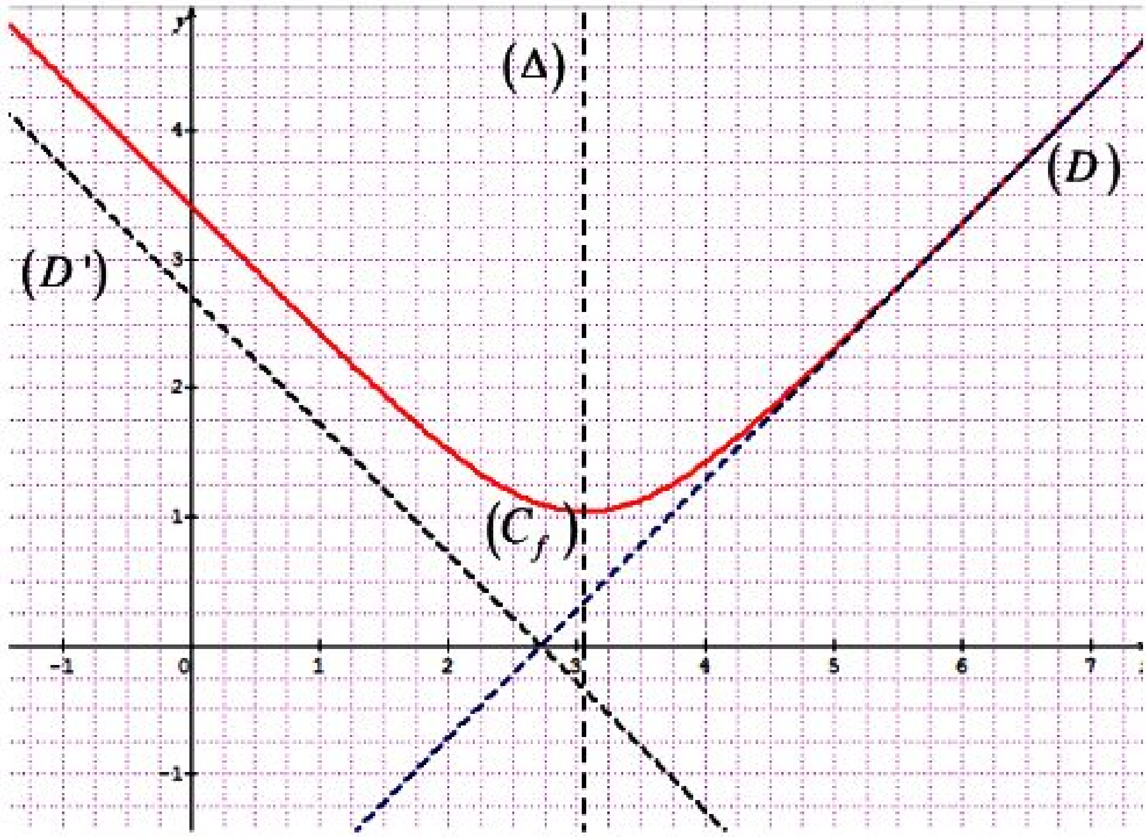
ب*/ اعطاءحصرا للعدد $I + I_1$:

$$0 \le I + I_1 \le \int_{\ln\sqrt{2}+e}^{\ln\sqrt{3}+e} 2e^{-2(x-e)}dx - 1 + \ln 4$$

$$\int_{\ln\sqrt{2}+e}^{\ln\sqrt{3}+e} 2e^{-2(x-e)}dx = -\int_{\ln\sqrt{2}+e}^{\ln\sqrt{3}+e} -2e^{-2(x-e)}dx = -\left[e^{-2(x-e)}\right]_{\ln\sqrt{2}+e}^{\ln\sqrt{3}+e} = \frac{1}{6}$$

$0 \le I + I_1 \le \frac{1}{6} - 1 + \ln 4$ ومنه: $0 \le I + I_1 \le \frac{-5}{6} + \ln 4$

3) رسم (Δ) ، (D) ، (D') و (C_f):



وزارة التربية الوطنية — ثانوية الشيخ أمود ولاية تمنراست

امتحان بكالوريا تجريبي التعليم الثانوي — دورة : مايو 2019

الشعبة : رياضيات + تقني رياضي

اختبار في مادة الرياضيات — المدة 4 سا و 30 د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الأتيين

الموضوع الأول

التمرين الأول (04 نقاط)

نعتبر المعادلة (E) ......$7x-3y=10$ ذات المجهول $(x;y)$ حيث x ; y عددين صحيحين.

1) عين الحل الخاص $(x_0;y_0)$ للمعادلة الذي يحقق $\begin{cases} x_0-1\equiv 0[3] \\ -2<x_0<4 \end{cases}$

ثم حل المعادلة (E).

2) بفرض أن الثنائية $(x;y)$ حل المعادلة (E) حيث x ; y عددان طبيعيان .

عين مجموعة الأعداد الطبيعية n التي تحقق الجملة $\begin{cases} 2^x+y+n^2-2\equiv 0[7] \\ 0<n<18 \end{cases}$

3) جد الثنائية الوحيدة $(x;y)$ حل المعادلة (E) بحيث المضاعف المشترك الأصغر للعددين x ; y هو 2139

التمرين الثاني (04 نقاط)

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ نعتبر النقط $A(4;2;2)$ و $B(5;-2;3)$ و $C(1;1;1)$ و المستقيم (Δ) المعرف بالتمثيل الوسيطي $t\in IR$: $\begin{cases} x=1+2t \\ y=1+t \\ z=1+2t \end{cases}$.

(P) المستوي الذي يمر من النقطة A و عمودي على المستقيم (Δ).

1. أ.أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P)

ب. تحقق أن النقطة B تنتمي إلى المستوي (P) و أن النقطة C لا تنتمي إلى المستوي (P) .

ج.تحقق أن النقطة C تنتمي إلى المستقيم (Δ) و أن النقطة A لا تنتمي إلى المستقيم (Δ) .

2. أ. عين إحداثيات النقطة D المسقط العمودي للنقطة C على المستوي (P) .

ب.بين أن النقط A ; B ; C ; D ليست من نفس المستوي .

ج.عين طبيعة المثلث ABD ثم أحسب حجم رباعي الوجوه $ABCD$.

3. عين مركز سطحي الكرتين اللذين يمسان المستوي (P) في النقطة D و نصف قطر كل منهما 3 .

4. m عدد حقيقي و (P_m) المستوي المعرف بمعادلته $mx-2(m-1)y-z+m-1=0$ أثبت أن جميع المستويات (P_m) تشمل مستقيم ثابتاً (يطلب تعيين تمثيل وسيطي له) و ذلك مهما يكن الوسيط الحقيقي m

التمرين الثالث (05 نقاط)

ليكن α عدد حقيقي من المجال $[0;\pi]$ و z عدد مركب نعتبر كثير $P(z)$ معرف كما يلي:

$$P(z)=z^3-(1-2\sin\alpha)z^2+(1-2\sin\alpha)z-1$$

1. احسب $P(1)$ ثم استنتج انه يوجد عددين حقيقين a و b يطلب تعيينهما بحيث: $P(z)=(z-1)(z^2+az+b)$.
2. حل في $\mathbb{C}$ مجموعة الأعداد المركبة المعادلة $P(z)=0$.
3. أكتب حلول المعادلة $P(z)=0$ على الشكل المثلثي ثم على الشكل الآسي.
4. في المستوي المركب المنسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\overrightarrow{u};\overrightarrow{v})$ نعتبر النقط A ; B ; C لواحقها على الترتيب

$z_A=1$ و $z_B=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i$ و $z_C=\overline{z_B}$

أ- علم النقط A ; B ; C ما **طبيعة** المثلث ABC ؟

ب- لتكن النقطة D نظيرة O بالنسبة **إلى النقطة** B و ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه O و يحول C إلى D .

عين العناصر المميزة للتشابه المباشر S .

5. أكتب العدد المركب $\left(\dfrac{1}{-z_B}\right)$ على الشكل ألأسي ثم عين مجموعة الأعداد الطبيعية n حتى يكون $\left(\dfrac{1}{-z_B}\right)^n$ عددا حقيقيا سالبا .

التمرين الرابع (07 نقاط) :

I - نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x)=-2+(-x+2)e^{-x+2}$

1. أدرس تغيرات الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.
2. بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1{,}14<\alpha<1{,}15$ ثم استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$.

II - نعتبر f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=-2x+(x-1)e^{-x+2}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\overrightarrow{i};\overrightarrow{j})$.

1. أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$
2. أ.بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=-2x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f).

ب .ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ).

3. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x)=g(x)$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .
4. أنشئ (Δ) و (C_f) على المجال $[0;+\infty[$ (تعطى $f(\alpha)=-1{,}95$)
5. لتكن h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $h(x)=(x-1)e^{-x+2}$ باستخدام التكامل بالتجزئة عين دالة أصلية للدالة h ثم استنتج حساب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيمات التي معادلتها $x=0$ و $x=1$ و $y=-2x$

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول (04 نقاط) خاص بشعبة التقني رياضي

تتكون مجموعة من ثمانية رجال و أربع نساء من بينهم رجل أسمه عبد القادر و امرأة واحدة اسمها هاجر .

نريد تكوين لجنة مشكلة من ثلاث أعضاء لهم نفس المهام .

1. أحسب احتمال كل من الأحداث التالية : A " اللجنة تضم ثلاث رجال " B " اللجنة تضم رجل و إمرتين "
   C " اللجنة تضم عبد القادر " D " اللجنة تضم إما هاجر أو عبد القادر "
2. ليكن المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل اختيار بعدد الرجال في اللجنة المكونة .
   عين القيم الممكنة للمتغير العشوائي X ثم عرف قانون احتماله ثم احسب أمله ألرياضياتي.

التمرين الأول (04 نقاط) خاص بشعبة الرياضيات

اجريت دراسة إحصائية على عدد من التلاميذ الذين يملكون هواتف نقالة و حواسب بإحدى الثانويات فكانت نتائج الدراسة الاحصائية كما يلي : 70% من التلاميذ يملكون هواتف نقالة

احتمال ان يكون التلميذ يملك حاسوب علما أنه يملك هاتف نقال هو $\frac{1}{16}$ و احتمال ان يكون التلميذ لا يملك حاسوب علما أنه لا يملك هاتف نقال هو $\frac{3}{14}$.

نرمز إلى T حادثة " التلميذ يملك هاتف نقال " و $\boldsymbol{M}$ حادثة " التلميذ يملك حاسوب "

1. شكل شجرة الاحتمال التي تمذج هذه الوضعية .
2. أحسب احتمال أن يملك التلميذ هاتف نقال و حاسوب $P(T\cap \boldsymbol{M})$.
3. أحسب احتمال أن يملك التلميذ حاسوب $P(M)$.
4. أحسب احتمال ان يملك التلميذ هاتف نقال و لا يملك حاسوب $P(T\cap\overline{M})$ ثم استنتج $P_{\overline{M}}(T)$.

التمرين الثاني (04 نقاط)

نعتبر (u_n) متتالية المعرفة بـ $u_0=2$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=\frac{2}{3}u_n+\frac{1}{3}n+1$

1 - أحسب الحدود u_1 , u_2 ; u_3 ثم ضع تخمينا حول اتجاه تغيرات المتتالية (u_n)

2 - أ-برهن بالتراجع أنه من اجل كل عدد طبيعي n فإن $u_n\le n+3$.

ب-ادرس اتجاه تغيرات المتتالية (u_n)

ج-استنتج ان (u_n) محدودة من الأسفل هل يمكن القول أن (u_n) متقاربة ؟

3 - نعتبر (v_n) متتالية المعرفة بالعلاقة : $v_n=u_n-n$

أ - برهن أن المتتالية (v_n) هي متتالية هندسية يطلب تعيين حدها الأول و أساسها .

ب -عبر عن v_n ثم u_n بدلالة n و أحسب نهاية المتتالية (u_n)

ج-احسب بدلالة n المجموع $S_n=u_0+u_1+u_2+...+u_n$

4 - لتكن (t_n) متتالية المعرفة على $\mathbb{N}$: $t_n=\ln(v_n)$

أ. برهن أن (t_n) المتتالية حسابية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول

ب. أحسب بدلالة n المجموع $A_n = t_0 + t_1 + t_2 + ... + t_n$ و استنتج بدلالة n الجداء $p_n = v_0 \times v_1 \times v_2 \times ... \times v_n$

التمرين الثالث (05 نقاط)

نعتبر في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O; \overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})$ و النقطتين A و B لاحقتيهما $z_A = 4+2i$ و $z_B = 3-i$

1. أكتب على الشكل الجبري ثم على الشكل المثلثي العدد المركب $\frac{z_B - z_A}{z_B}$ ثم أستنتج طبيعة المثلث ABO .
2. نعتبر التحويل النقطي r في المستوي الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z النقطة M' لاحقتها z' والذي يحول النقطة A إلى B ويحول النقطة B إلى O .
   أ. بيّن أنّ العبارة المركبة للتحويل النقطي r هي $z' = -iz + 1 + 3i$.
   ب. عيّن طبيعة التحويل r و عناصره المميزة .
   ج.عيّن z_C لاحقة النقطة C صورة النقطة O بالتحويل r
3. أستنتج طبيعة الرباعي $ABOC$
4. عيّن مجموعة النقط M من المستوي لاحقتها z حيث $|z-4-2i| = |z|$
5. من أجل $z \neq 2+i$ نضع $L = \frac{z'-2-i}{z-2-i}$
   أ. بيّن أنّ : $L = -i$.
   ب. عيّن قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون L^n عددًا حقيقيًا .
   ج.بيّن أنّ $(z'-2-i)^2 + (z-2-i)^2 = 0$

التمرين الرابع (07 نقاط) :

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ : $f(x) = \frac{\ln(x+1)+|x|}{x+1}$ و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j})$ (وحدة الطول 2cm)

1. أحسب : $\lim_{x \xrightarrow{>} -1} f(x)$ و $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ ثم فسر النتيجتين بيانيا
2. أ- أحسب $f'(x)$ من أجل $x \in]-1; 0[$ ثم أستنتج اتجاه تغير الدالة f على المجال $]-1; 0[$
   ب-أحسب $f'(x)$ من أجل $x \in]0; +\infty[$ ثم أستنتج اتجاه تغير الدالة f على المجال $]0; +\infty[$
3. أحسب $\lim_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{f(x)}{x}$ و $\lim_{x \xrightarrow{<} 0} \frac{f(x)}{x}$ هل f قابلة للاشتقاق عند 0 ؟
4. أكتب معادلتي المماسين لـ (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0
5. شكل جدول تغيرات f
6. أحسب $f(e-1)$ ثم أنشئ (C_f)
7. أوجد دالة أصلية للدالة f على المجال $[0,+\infty[$ ثم أستنتج مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و محور الفواصل والمستقيمين ذا المعادلتين : $x = 0$ و $x = e^2 - 1$

انتهى الموضوع الثاني

التصحيح المفصل   الموضوع الأول

التمرين الأول (04 نقاط)

نعتبر المعادلة (E).....$7x-3y=10$ ذات المجهول $(x;y)$ حيث $x\ ;\ y$ عددين صحيحين.

1) تعين الحل الخاص $(x_0;y_0)$ للمعادلة الذي يحقق $\begin{cases} x_0-1\equiv 0[3] \\ -2<x_0<4 \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} x_0\equiv 1[3] \\ -2<x_0<4 \end{cases}$ يعني أن

$\begin{cases} x_0=1+3k\ :\ k\in Z \\ -2<x_0<4 \end{cases}$ أي أن $\begin{cases} x_0=1+3k\ :\ k\in Z \\ -2<1+k<4 \end{cases}$ و منه $\begin{cases} x_0=1+3k\ :\ k\in Z \\ -3<k<3 \end{cases}$ بتعويض

$k=$	-2	-1	0	1	2
$x_0=$	-5	-2	1	4	7
$y_0=$	-15	-8	-1	6	13

نختار واحد من الحلول الخاصة و ليكن $(4;6)$ .... (1)

حل المعادلة (E) لدينا $\begin{cases} 7x-3y=10 \\ 7(4)-3(6)=10 \end{cases}$ بالطرح نجد $7(x-4)=3(y-6)$ و العددان 3 و 7 أوليان فيما بينهما فحسب مبرهنة

قوس نجد أن $k\in Z$: $\begin{cases} x-4=3k \\ y-6=7k \end{cases}$ و منه $\begin{cases} x=4+3k \\ y=6+7k \end{cases}$: $k\in Z$

مجموعة الحلول $S=\{(4+3k;6+7k):k\in Z\}$... (1)

2) بفرض أن الثنائية $(x;y)$ حل المعادلة (E) حيث $x\ ;\ y$ عددان طبيعيان .

تعين مجموعة الأعداد الطبيعية n التي تحقق الجملة $\begin{cases} 2^x+y+n^2-2\equiv 0[7] \\ 0<n<18 \end{cases}$ أي أن $\begin{cases} 2^{4+3k}+6+7k+n^2-2\equiv 0[7] \\ 0<n<18 \\ k\in N \end{cases}$ أي أن

$\begin{cases} 2^{4+3k}+n^2+4\equiv 0[7] \\ 0<n<18 \\ k\in N \end{cases}$ و لدينا $2^3=1[7]$ و منه $\begin{cases} 2+n^2+4\equiv 0[7] \\ 0<n<18 \\ k\in N \end{cases}$ أي أن $\begin{cases} n^2\equiv 1[7] \\ 0<n<18 \\ k\in N \end{cases}$ و منه $\begin{cases} n^2\equiv 1[7] \\ 0<n<18 \end{cases}$

$n=$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	
$n^2\equiv$	1	4	2	1	4	1	0	1	4	2	1	4	1	0	1	4	2	$[7]$

القيم هي $15\ ;13\ ;11\ ;8\ ;6\ ;4\ ;1$ .... (1)

3) إيجاد الثنائية الوحيدة $(x;y)$ حل المعادلة (E) بحيث المضاعف المشترك الأصغر للعددين $x\ ;\ y$ هو 2139 لدينا

$2139=3\times 23\times 31$ و العددان $4+3k\ ;\ 6+7k$ قاسمان للعدد 2139 و قواسم 2139 هي 1 و 3 و 23 و 31 و 69 و 93 و 713 و 2139 :

$4+3k=1$ يعني أن $k=-1$ و منه $\begin{cases} x=1 \\ y=15 \end{cases}$ و 15 ليست قاسم للعدد 2139 إذن الحل مرفوض

$4+3k=31$ يعني أن $k=9$ و منه $\begin{cases} x=31 \\ y=39 \end{cases}$ و $PPCM(39;31)=2139$ و منه $(x;y)=(31;\ 39)$ هي الثنائية الوحيدة..(1)

و $4+3k=23$ ليس لها حل صحيح و $4+3k=3$ ليس لها حل صحيح و $4+3k=69$ ليس لها حل صحيح و $4+3k=93$ ليس لها حل صحيح و $4+3k=713$ ليس لها حل صحيح و $4+3k=2139$ ليس لها حل صحيح .

التمرين الثاني (04 نقاط)

1. أ. كتابة معادلة ديكارتية للمستوي (P) : شعاعه الناظمي هو $\vec{n}(2;1;2)$ معادلته من الشكل $2x+y+2z+d=0$ و بما أن A نقطة منه فإن $2(4)+2+2(2)+d=0$ و منه $d=-14$ إذن $2x+y+2z-14=0$ ....$(0{,}5)$

ب. التحقق أن النقطة B تنتمي إلى المستوي (P) : $2(5)+(-2)+2(3)-14=0$ محققة ومنه $B\in(P)$

و أن النقطة C لا تنتمي إلى المستوي (P) : $2(1)+2(1)+2(1)-14=0$ غير محققة و منه $C\notin(P)$.....................$2\times(0{,}25)$

ج. التحقق أن النقطة C تنتمي إلى المستقيم (Δ) : تنتمي لأنه من أجل $t=0$ في التمثيل الوسيطي نجد $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z=1 \end{cases}$...........$(0{,}25)$

النقطة A لا تنتمي إلى المستقيم (Δ) : $\begin{cases} 4=1+2t \\ 2=1+t \\ 2=1+2t \end{cases}$ يعني أن $\begin{cases} t=\frac{3}{2} \\ t=1 \\ t=\frac{1}{2} \end{cases}$ و منه A لا تنتمي إلى المستقيم (Δ)...............$(0{,}25)$

2. أ. تعيين إحداثيات النقطة D المسقط العمودي للنقطة C على المستوي (P) : لتكن $D(x;y;z)$ و هي تنتمي إلى (P) أي أن $2x+y+2z-14=0$ و $\overrightarrow{CD}(x-1;y-1;z-1)$ مرتبط خطيا مع $\vec{n}(2;1;2)$ أي أن

$$\begin{cases} 2x+y+2z-14=0 \\ \frac{x-1}{2}=y-1 \\ y-1=\frac{z-1}{2} \end{cases}$$ يكافئ

و منه $\begin{cases} 2x+y+2z-14=0 \\ \frac{x-1}{2}=\frac{z-1}{2} \\ y-1=\frac{z-1}{2} \end{cases}$ و منه $\begin{cases} 2x+y+2z-14=0 \\ x=z \\ z=2y-1 \end{cases}$ إذن $\begin{cases} 2(2y-1)+y+2(2y-1)-14=0 \\ x=z \\ z=2y-1 \end{cases}$ $9y-18=0$

و منه $y=2$ إذن $x=z=3$ و منه $D(3;2;3)$...................................$(0{,}5)$

ب. إثبات أن النقط $A\ ;B\ ;C\ ;D$ ليست من نفس المستوي : بما ان النقط $A\ ;B\ ;D$ تنتمي إلى المستوي (P) و النقطة C لا تنتمي للمستوي (P) فإن النقط $A\ ;B\ ;C\ ;D$ ليست من نفس المستوي . ...$(0{,}25)$

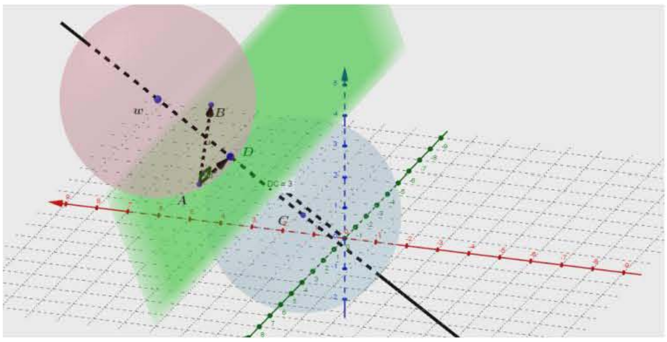
ج. تعيين طبيعة المثلث ABD لدينا $\overrightarrow{AB}(1;-4;1)$ و $\overrightarrow{AD}(-1;0;1)$ و منه $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}=0$

و منه المثلث ABD قائم في A ....$(0{,}25)$

حساب حجم رباعي الوجوه $ABCD$: مساحة المثلث ABD هي $3=\frac{\sqrt{18}\times\sqrt{2}}{2}=\frac{AB\times AD}{2}=S$ ....$(0{,}25)$

هو $3=\frac{3\times 3}{3}=\frac{S\times CD}{3}=v$ الحجم هو 3 وحدة حجم...$(0{,}25)$

3. تعيين مركز سطحي الكرتين اللذين يمسان المستوي (P) في النقطة D و نصف قطر كل منهما 3 و ليكن احدهما $w(x_0;y_0;z_0)$



أي أن $wD=3$ و الشعاع $\overrightarrow{wD}$ و $\overrightarrow{n}(2;1;2)$ مرتبطان خطياً

يكافئ $(x_0-3)^2+(y_0-2)^2+(z_0-3)^2=9$ و

$\frac{x_0-3}{2}=\frac{y_0-2}{1}=\frac{z_0-3}{2}$ و منه

$4(y_0-2)^2+(y_0-2)^2+4(y_0-2)^2=9$ أي أن $(y_0-2)^2=1$

و منه $y_0=3$ او $y_0=1$

لما $y_0=3$ فإن $x_0=5$ و $z_0=5$ و لما $y_0=1$ فإن

$x_0=1$ و $z_0=1$

المركزين هما $C(1;1;1)$ و $w(5;3;5)$..$2\times(0{,}25)$

4. m عدد حقيقي و (P_m) المستوي المعرف بمعادلته $mx-2(m-1)y-z+m-1=0$ أثبت أن جميع المستويات (P_m) تشمل مستقيم ثابتاً $mx-2(m-1)y-z+m-1=0$ يكافئ $m(x+2y+1)+2y-z-1=0$ مستقلة عن m يعني الجملة $\begin{cases}x+2y+1=0\\2y-z-1=0\end{cases}$

تعين مستقيم لأنها للمستويين غير متوازيان..$(0{,}25)$

نضع $\begin{cases}x+2y+1=0\\y=t\\2y-z-1=0\end{cases}$ و منه $t\in R:$ $\begin{cases}x=-2t-1\\y=t\\z=2t-1\end{cases}$ هو التمثيل الوسيطي المطلوب..$(0{,}25)$.

التمرين الثالث (05 نقاط)

1. حساب $P(1)$ نجد $P(1)=0$ ....$(0{,}25)$

استنتج انه يوجد عددين حقيقين a و b يطلب تعيينهما بحيث : $P(z)=(z-1)(z^2+az+b)$ بالتحليل نجد

$P(z)=(z-1)(z^2+2\sin\alpha.z+1)$..$(0{,}5)$

2. حل في $\mathbb{C}$ مجموعة الأعداد المركبة المعادلة $P(z)=0$ يكافئ . $\begin{cases}z=1\\z^2+2\sin\alpha.z+1=0\end{cases}$..............................$(0{,}25)$

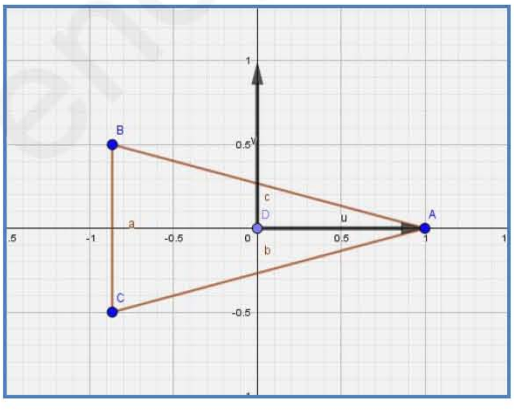
نحل $z^2+2\sin\alpha.z+1=0$ حساب المميز $\Delta=4\sin^2\alpha-4=-4\cos^2\alpha$ للمعادلة حلين هما $z_1=-\sin\alpha+i\cos\alpha$

و $z_2=-\sin\alpha-i\cos\alpha$..$2\times(0{,}25)$

3. كتابة حلول المعادلة $P(z)=0$ على الشكل المثلثي $z_1=i(\cos\alpha+i\sin\alpha)=\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)$ و

$z_2=-i(\cos\alpha-i\sin\alpha)=\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$.

الشكل الآسي : $z_1=e^{\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)i}$ و $z_2=e^{\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)i}$..$2\times(0{,}5)$



4. نعتبر النقط A ; B ; C لواحقها على الترتيب $z_A=1$ و

$z_B=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$ و $z_C=\overline{z_B}$

أ - تعليم النقط A ; B ; C ....$3\times(0{,}25)$

طبيعة المثلث ABC هو مثلث متساوي الساقين

لأن $AB=AC$..$(0{,}25)$

ب -لتكن النقطة D نظيرة O بالنسبة إلى النقطة B و ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه O و يحول C إلى D .

$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{OB}$ يعني أن $z_D=2z_B$ أي $z_D=-\sqrt{3}+i$ ....(0,25)

تعيين العناصر المميزة للتشابه المباشر S : لدينا $\frac{z_D-z_O}{z_C-z_O}=\frac{2z_B}{\overline{z_B}}=\frac{2(z_B)^2}{1}=2\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ و $z_B=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$ و

$\left|\frac{z_D}{z_C}\right|=2$ و $\arg\left(\frac{z_D}{z_C}\right)=-\frac{\pi}{6}$ منه التشابه S نسبته 2 و زاويته $-\frac{\pi}{6}$..$3\times(0,25)$

5. كتابة العدد المركب $\left(\frac{1}{-z_B}\right)$ على الشكل الأسي $\left(\frac{1}{-z_B}\right)=e^{\frac{\pi}{6}i}$ ....(0,25)

تعيين مجموعة الأعداد الطبيعية n حتى يكون $\left(\frac{1}{-z_B}\right)^n$ عددا حقيقيا سالبا يعني أن $\arg\left(\left(\frac{1}{-z_B}\right)^n\right)\equiv\pi[2\pi]$ أي أن

$\frac{n\pi}{6}\equiv\pi[2\pi]$ و منه $\frac{n}{6}\equiv1[2]$ أي أن $n\equiv6[12]$ إذن $n=12k+6\ :\ k\in\mathbb{N}$........................(0,25)

التمرين الرابع (07 نقاط) :

I - نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x)=-2+(-x+2)e^{-x+2}$

1. دراسة تغيرات الدالة g : النهايات : $\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[-2-xe^{-x}\right]=-2$ و $\lim_{x\to-\infty}g(x)=+\infty$ ....$2\times(0,25)$

المشتقة $\mathbf{g'}(x)=(x-3)e^{-x+2}$ موجبة على المجال $]3\,;+\infty[$ و منه الدالة g متزايدة على هذا المجال و سالبة على المجال $]-\infty\,;3[$ و منه الدالة g متناقصة على هذا المجال...$2\times(0,5)$

جدول تغيراتها:................................**(0,5)**

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-2-\frac{1}{e}$	$\nearrow$	-2

2. إثبات أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1{,}14<\alpha<1{,}15$ بما أن:

$g(1{,}15)=-0{,}01$ و $g(1{,}14)=0{,}03$ و

الدالة مستمرة و متناقصة على المجال $[1{,}14;\ 1{,}15]$

فحسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل حل وحيد α .... (0,5)

استنتاج حسب قيم x إشارة $g(x)$: $g(x)$ موجبة على المجال $]-\infty;\alpha[$

و سالبة على المجال $]\alpha;+\infty[$...**(0,5)**

II - نعتبر f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=-2x+(x-1)e^{-x+2}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i}\,;\vec{j})$.

1. حساب $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}x\left[-2+\frac{x-1}{x}e^{-x+2}\right]=-\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}(-2x)=-\infty$.....................**$2\times(0,5)$**

2. أ.إثبات أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=-2x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f): لدينا

$\lim_{x\to+\infty}[f(x)+2x]=\lim_{x\to+\infty}(x-1)e^{-x+2}=0$ و منه محققة...(0,25)

ب .دراسة الوضع النسبي للمنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) : $f(x)-y=[f(x)+2x]=(x-1)e^{-x+2}$

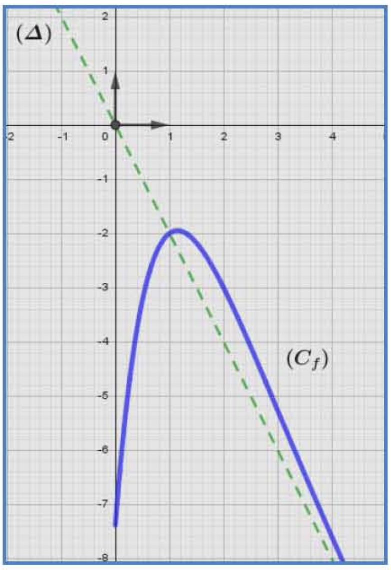
اشارة الفرق من إشارة $x-1$ و منه (C_f) يقع فوق (Δ) على المجال $]1;+\infty[$ و (C_f) يقع تحت (Δ) على المجال $]-\infty;1[$ و يتقاطع في النقطة ذات الفاصلة 1 ....(0,5)

3. إثبات أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x)=g(x)$: لدينا $f'(x)=-2+e^{-x+2}-(x-1)e^{-x+2}$ أي أن $f'(x)=-2+(-x+2)e^{-x+2}=g(x)$ شارتها من إشارة $g(x)$..(0,5)

جدول تغيرات الدالة f ....(0,5)

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f(\alpha)$	↘	$-\infty$

4. إنشاء (Δ) و (C_f) على المجال $[0;+\infty[$ (تعطى $f(\alpha)=-1,95$)...(0,75)



5. لتكن h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $h(x)=(x-1).e^{-x+2}$ باستخدام التكامل بالتجزئة تعين دالة أصلية للدالة h : $\int_0^x h(t)dt=\left[-(t-1).e^{-t+2}\right]_0^x+\int_0^x e^{-t+2}dt$ أي أن

$\int_0^x h(t)dt=\left[-(t-1)e^{-t+2}-e^{-t+2}\right]_0^x=\left[-te^{-t-2}\right]_0^x$ و منه $\int_0^x h(t)dt=-xe^{-x+2}$

الدالة الأصلية H حيث $H(x)=-xe^{-x+2}$.........................(0,25)

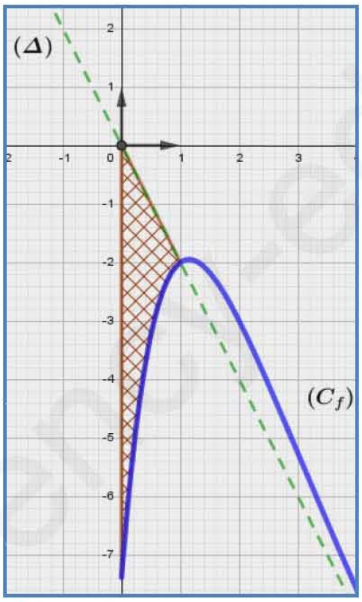
استنتاج حساب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيمات التي معادلتها $x=0$ و $x=1$ و $y=-2x$

نحسب التكامل

$$\int_0^1[-2x-f(x)]dx=-\int_0^1(x-1)e^{-x+2}dx=-[H(x)]_0^1=e$$

و منه المساحة هي $e\ u.a$...............................(0,25)

المساحة هي التكامل مضروب في وحدة مساحة



انتهى الموضوع الأول

التصحيح المفصل الموضوع الثاني

التمرين الأول (04 نقاط) خاص بشعبة التقني رياضي

تتكون مجموعة من ثمانية رجال و أربع نساء من بينهم رجل أسمه عبد القادر و امرأة واحدة اسمها هاجر .

نريد تكوين لجنة مشكلة من ثلاث أعضاء لهم نفس المهام .

1. حساب احتمال كل من الأحداث التالية : نحسب عدد الحالات الممكنة الكلية $C_{12}^{3} = 220$ ....$(0,5)$

A " اللجنة تضم ثلاث رجال " $P(A) = \dfrac{C_8^3}{220} = \dfrac{56}{220} = \dfrac{14}{55}$ ....$(0,25)$

B " اللجنة تضم رجل و إمرتين " $P(B) = \dfrac{C_8^1 \times C_4^2}{220} = \dfrac{48}{220} = \dfrac{12}{55}$ ....$(0,25)$

C " اللجنة تضم عبد القادر " $P(C) = \dfrac{C_{11}^2}{220} = \dfrac{55}{220} = \dfrac{1}{4}$ ....$(0,25)$

D " اللجنة تضم إما هاجر أو عبد القادر " $P(D) = \dfrac{C_{10}^2 + C_{10}^2}{220} = \dfrac{90}{220} = \dfrac{9}{22}$ ....$(0,25)$

2. ليكن المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل اختيار بعدد الرجال في اللجنة المكونة .

القيم الممكنة للمتغير العشوائي X هي 0 و 1 و 2 و 3 ....(1)

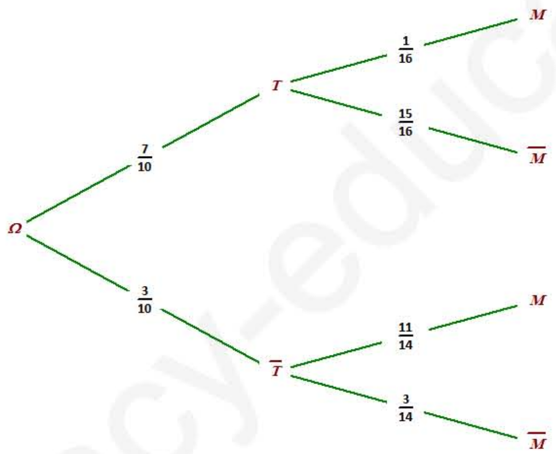
تعريف قانون احتمال $P(X = 0) = \dfrac{C_4^3}{220} = \dfrac{4}{220}$ و $P(X = 1) = \dfrac{C_8^1 \times C_4^2}{220} = \dfrac{48}{220}$ و $P(X = 2) = \dfrac{C_8^2 \times C_4^1}{220} = \dfrac{112}{220}$ و

$P(X = 3) = \dfrac{C_8^3}{220} = \dfrac{56}{220}$ ....(1)

x_i	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\dfrac{4}{220}$	$\dfrac{48}{220}$	$\dfrac{112}{220}$	$\dfrac{56}{220}$

حساب أمل ألرياضياتي $E(X) = \dfrac{0 + 48 + 224 + 168}{220} = 2$ ....$(0,5)$

التمرين الأول (04 نقاط) خاص بشعبة الرياضيات



1. شجرة الاحتمال التي تنمذج هذه الوضعية ....(1)
2. حساب احتمال أن يملك التلميذ هاتف نقال و حاسوب

(1).............$P(T \cap M) = \dfrac{7}{10} \times \dfrac{1}{16} = \dfrac{7}{160}$

3. حساب احتمال أن يملك التلميذ حاسوب

(1).............$P(M) = P(M \cap T) + P(M \cap \overline{T}) = P(M \cap T) + P(\overline{T}) \times P_{\overline{T}}(M) = \dfrac{7}{160} + \dfrac{3}{10} \times \dfrac{11}{14} = \dfrac{313}{1120} = 0,28$

4. حساب احتمال إن يملك التلميذ هاتف نقال و لا يملك حاسوب $P(T \cap \overline{M}) = \dfrac{7}{10} \times \dfrac{15}{16} = \dfrac{21}{32} = 0,65625$ ....$(0,5)$

استنتاج $P_{\overline{M}}(T)=\dfrac{P(T\cap\overline{M})}{P(\overline{M})}$ لدينا $P(\overline{M})=1-P(M)=1-\dfrac{313}{1120}=\dfrac{807}{1120}$ و منه

$$P_{\overline{M}}(T)=\dfrac{\left(\dfrac{21}{32}\right)}{\left(\dfrac{807}{1120}\right)}=\dfrac{21\times1120}{32\times807}=\dfrac{23520}{25824}=\dfrac{245}{269}=0{,}91$$ ....(0,5)

التمرين الثاني (04 نقاط) :

نعتبر (u_n) متتالية المعرفة بـ $u_0=2$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=\dfrac{2}{3}u_n+\dfrac{1}{3}n+1$

1 - حساب الحدود u_1 , u_2 ; u_3 : $u_1=\dfrac{2}{3}u_0+0+1=\dfrac{4}{3}+1=\dfrac{7}{3}$ و $u_2=\dfrac{2}{3}u_1+\dfrac{1}{3}+1=\dfrac{14}{9}+\dfrac{4}{3}=\dfrac{14+12}{9}=\dfrac{26}{9}$

و $u_3=\dfrac{2}{3}u_2+\dfrac{1}{3}(2)+1=\dfrac{52}{27}+\dfrac{2}{3}+1=\dfrac{52+18+27}{27}=\dfrac{97}{27}$ ....$3\times(0{,}25)$

اتجاه تغيرات المتتالية (u_n) : **المتتالية** متزايدة...(0,25)

2 - أ-البرهان بالتراجع أنه من اجل كل عدد طبيعي n فإن $u_n\le n+3$: لدينا $3\le 3$ u_0 محققة ....(0,25)

نفرض أن $u_n\le n+3$ صحيحة و لنبرهن أن $u_{n+1}\le n+4$ صحيحة

$u_n\le n+3$ بالضرب في $\dfrac{2}{3}$ نجد $\dfrac{2}{3}u_n\le\dfrac{2}{3}n+2$ بإضافة $\dfrac{1}{3}n+1$ نجد $\dfrac{2}{3}u_n+\dfrac{1}{3}n+1\le n+3$ أي أن

$u_{n+1}\le n+3$ و منه $u_{n+1}\le n+4$ صحيحة ومنه من اجل كل عدد طبيعي n فإن $u_n\le n+3$............(0,25)

ب-دراسة اتجاه تغيرات المتتالية (u_n): $u_{n+1}-u_n=-\dfrac{1}{3}u_n+\dfrac{1}{3}n+1=\dfrac{-u_n+n+3}{3}$ الفرق موجب

و منه المتتالية متزايدة...(0,25)

ج-استنتاج أن (u_n) محدودة من الأسفل : بما أن المتتالية (u_n) متزايدة فهي محدود من الأسفل بالحد u_0 ....(0,25)

لا يمكن الحكم على تقارب المتتالية (u_n). ....(0,25)

3 - نعتبر (v_n) متتالية المعرفة بالعلاقة : $v_n=u_n-n$

أ - البرهان أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين حدها الأول و أساسها :

$v_{n+1}=u_{n+1}-n-1=\dfrac{2}{3}u_n+\dfrac{1}{3}n+1-n-1$ أي أن $v_{n+1}=\dfrac{2}{3}u_n-\dfrac{2}{3}n$ و منه $v_{n+1}=\dfrac{2}{3}(u_n-n)$ إذن

$v_{n+1}=\dfrac{2}{3}v_n$ متتالية هندسية أساسها $\dfrac{2}{3}$ و حدها الأول $v_0=2$.........................**(0,5)**

ب -التعبير عن v_n بدلالة n: $v_n=2\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ و لدينا $u_n=v_n+n$ و منه $u_n=2\left(\dfrac{2}{3}\right)^n+n$..........**(0,25)**

حساب نهاية المتتالية (u_n): $\lim u_n=\lim\left[2\left(\dfrac{2}{3}\right)^n+n\right]=+\infty$..............(0,25)

ج-حساب بدلالة n المجموع $S_n=u_0+u_1+u_2+\ldots+u_n$ لدينا

$S_n=(v_0-0)+(v_1-1)+(v_2-2)+\ldots+(v_n-n)$ و منه

أي أن $S_n=[v_0+v_1+v_2+...+v_n]-[0+1+2+....+n]$ و منه $S_n=v_0\left[\dfrac{\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+1}-1}{\dfrac{2}{3}-1}\right]-\dfrac{(n+1)n}{2}$

$S_n=-6\left[\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+1}-1\right]-\dfrac{(n+1)\,n}{2}$ ....(0,25)

4 - لتكن (t_n) متتالية المعرفة على $\mathbb{N}$: $t_n=\ln(v_n)$

أ. البرهان أن (t_n) المتتالية حسابية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول :لدينا $t_n=\ln(v_n)=\ln\left[2\left(\dfrac{2}{3}\right)^n\right]$ و منه

$t_{n+1}=\ln\left[2\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+1}\right]$ أي أن $t_{n+1}=\ln\left[2\left(\dfrac{2}{3}\right)^n\right]+\ln\left(\dfrac{2}{3}\right)$ و منه $t_{n+1}=t_n+\ln\left(\dfrac{2}{3}\right)$ إذن المتتالية (t_n)

حسابية أساسها $\ln\left(\dfrac{2}{3}\right)$ ....(0,25)

ب. حساب بدلالة n المجموع $A_n=t_0+t_1+t_2+...+t_n$:

$A_n=\dfrac{n+1}{2}[t_0+t_n]=\dfrac{n+1}{2}\left[\ln 2+\ln\left[2\left(\dfrac{2}{3}\right)^n\right]\right]=\dfrac{n+1}{2}\ln\left[4\left(\dfrac{2}{3}\right)^n\right]$ ....(0,25)

و استنتاج بدلالة n الجداء $p_n=v_0\times v_1\times v_2\times...\times v_n$ لدينا $v_n=e^{t_n}$ و

$p_n=e^{t_0}\times e^{t_1}\times e^{t_2}\times...\times e^{t_n}=e^{A_n}=e^{\frac{n+1}{2}\ln\left[4\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]}$

التمرين الثالث (05 نقاط)

نعتبر في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ و النقطتين A و B لاحقتيهما $z_A=4+2i$ و $z_B=3-i$

1) الكتابة على الشكل الجبري للعدد $\dfrac{z_B-z_A}{z_B}=\dfrac{-1-3i}{3-i}=\dfrac{-i(-i+3)}{3-i}=-i$ ....(0,5)

و منه الشكل المثلثي هو $\dfrac{z_B-z_A}{z_B}=\cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)$ ....(0,5)

استنتاج طبيعة المثلث ABO قائم متساوي الساقين...(0,5)

2) نعتبر التحويل النقطي r في المستوي الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z النقطة M' لاحقتها z' والذي يحول النقطة A إلى B ويحول النقطة B إلى O .

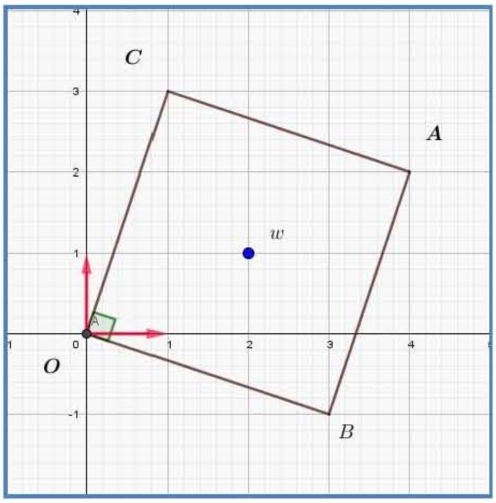
أ. بيّن أنّ العبارة المركبة للتحويل النقطي r هي $z'=-iz+1+3i$ ....(0,25)

- الطريقة 1 : لدينا العبارة المركبة لـ r هي من الشكل $z'=az+b$ حيث $a=\dfrac{z_B-z_A}{z_B}=-i$ و

$b=z_O-az_B=i(3-i)=3i+1$ و منه $z'=-iz+3i+1$ محققة .

- الطريقة 2 : لدينا $z_B=-iz_A+1+3i$ أي أن $3-i=-i(4+2i)+1+3i$ نحسب
$3-i=-4i+2+1+3i$ محققة
و $z_O=-iz_B+1+3i$ أي أن $0=-i(3-i)+1+3i$ نحسب $0=-3i-1+1+3i$ محققة .
و العبارة صحيحة .

ب. تعيّن طبيعة التحويل r و عناصره المميزة : بما أن $|-i|=1$ فإن r دوران زاويته $\arg(-i)=-\frac{\pi}{2}$ و مركزه النقطة الصامدة ذات اللاحقة $z_0=\frac{b}{1-a}=\frac{3i+1}{1+i}=\frac{(1+3i)(1-i)}{2}$ أي أن $z_0=\frac{4+2i}{2}=2+i$ ....(0,5)



ج.تعيّن z_C لاحقة النقطة C صورة النقطة O بالتحويل r :
$z_C=-iz_O+1+3i=1+3i$ ....(0,25)

3) استنتاج طبيعة الرباعي $ABOC$ لدينا $r(A)=B$ و $r(B)=O$ و $r(O)=C$ و منه $AB=BO$ و $OA=BC$ القطران متناصفان و مُتقايسان و $(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{OB})=-\frac{\pi}{2}$ أي $(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BO})=\frac{\pi}{2}$
ومنه $ABOC$ مربع . ...(0,5)

4) تعيّن مجموعة النقط M من المستوي ذات لاحقتها z حيث
$|z-4-2i|=|z|$ يعني أن $MA=MO$ مجموعة النقط هي محور القطعة المستقيمة $[OA]$. ....(0,5)

5) من أجل $z\neq 2+i$ نضع $L=\frac{z'-2-i}{z-2-i}$

أ. بيّن أنّ : $L=-i$: $L=\frac{-iz+3i+1-2-i}{z-2-i}$ أي $L=\frac{-iz-1+2i}{z-2-i}$
و منه $L=\frac{-i(z-i-2)}{z-2-i}=-i$ . ...(0,5)

ب. تعيّن قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون L^n عددًا حقيقيًا: $L=-i$ أي أن $L=e^{-i\frac{\pi}{2}}$ و منه $L^n=e^{-i\frac{n.\pi}{2}}$ يكون L^n عددًا حقيقيًا لما $-\frac{n\pi}{2}=\pi k:k\in Z$ و منه $n=-2k\ :\ k\in Z^-$ هي القيم المطلوبة . ...(0,5)

ج.بيّن أنّ $(z'-2-i)^2+(z-2-i)^2=0$ لدينا $\frac{z'-2-i}{z-2-i}=-i$ و منه $\left(\frac{z'-2-i}{z-2-i}\right)^2=-1$
أي أن $(z'-2-i)^2+(z-2-i)^2=0$ ....(0,5)

التمرين الرابع (07 نقاط) :

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ : $f(x)=\frac{\ln(x+1)+|x|}{x+1}$ و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ (وحدة الطول 2cm)

1. حساب : $\lim_{x\xrightarrow{>}-1}f(x)=-\infty$ لأن $\lim_{x\xrightarrow{>}-1}\frac{1}{x+1}=+\infty$ و $\lim_{x\xrightarrow{>}-1}\ln(1+x)=-\infty$ ....(0,5) .

و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x+1}=1$ .... (0,5)

التفسير البياني هو $x=-1$; $y=1$ معادلتي المستقيمان المقاربان للمنحنى (C_f)............................... (0,25)

2. أ- حساب $f'(x)$ من أجل $x\in\left]-1;0\right[$: $f(x)=\dfrac{\ln(x+1)-x}{x+1}$ و منه

$f'(x)=\dfrac{\left(\dfrac{1}{1+x}-1\right)(1+x)-\ln(1+x)+x}{(x+1)^2}$ أي أن $f'(x)=\dfrac{-\ln(1+x)}{(x+1)^2}$............................... (0,5)

استنتاج اتجاه تغير الدالة f على المجال $\left]-1;0\right[$: بما أن $\left]-1;0\right[$ $x\in$ فإن $\ln(1+x)<0$

و منه f متزايدة على المجال $\left]-1;0\right[$ . ... (0,25)

ب-حسب $f'(x)$ من أجل $x\in\left]0;+\infty\right[$: $f(x)=\dfrac{\ln(x+1)+x}{x+1}$ ومنه $f'(x)=\dfrac{\left(\dfrac{1}{1+x}+1\right)(1+x)-\ln(1+x)-x}{(x+1)^2}$

أي أن $f'(x)=\dfrac{2-\ln(1+x)}{(x+1)^2}$ إشارتها من إشارة $2-\ln(1+x)$: تنعدم عند e^2-1 و موجبة على المجال $\left[0;e^2-1\right]$ و سالبة على المجال $\left[e^2-1;+\infty\right[$............................... **(0,5)**

استنتاج اتجاه تغير الدالة f على المجال $\left]0;+\infty\right[$: f متزايدة على المجال $\left[0;e^2-1\right]$ و متناقصة على المجال $\left[e^2-1;+\infty\right[$......(0,25)

3. حساب $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\dfrac{\ln(x+1)+x}{x(x+1)}$ لدينا $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\dfrac{\ln(x+1)}{x}=1$ (باستخدام العدد المشتق) و منه

$\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\dfrac{\ln(x+1)}{x(x+1)}=1$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\left[\dfrac{\ln(x+1)}{x(x+1)}+\dfrac{1}{x+1}\right]=2$ .... (0,25)

$\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0}\dfrac{\ln(x+1)-x}{x(x+1)}$ و منه $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0}\left[\dfrac{\ln(x+1)}{x(x+1)}-\dfrac{1}{x+1}\right]=0$ .... (0,25)

f غير قابلة للاشتقاق عند 0 لان $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0}\dfrac{f(x)}{x}\neq\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\dfrac{f(x)}{x}$ . ... (0,25)

4. كتابة معادلتي المماسين لـ (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0 :

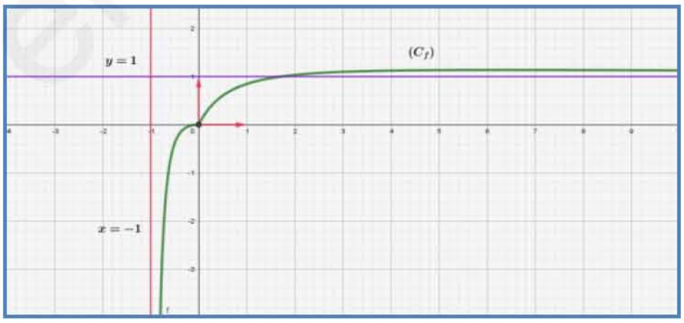
المماس على اليمين معدلته $y=2x$ و المماس على اليسار معادلته $y=0$............................... $2\times$**(0,25)**

5. جدول تغيرات f .... (0,5)

x	-1		0		e^2-1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	0	↗	$\dfrac{1+e^2}{e^2}$	↘	1

6. حساب $f(e-1)=1$ .... (0,5)

إنشاء (C_f):............................... (1)



7. أيجاد دالة أصلية للدالة f على المجال $\left[0,+\infty\right[$:

أي أن $f(x)=\dfrac{\ln(x+1)+x}{x+1}$

$f(x)=\frac{\ln(x+1)}{x+1}+1-\frac{1}{x+1}$ و منه F الدالة الأصلية للدالة f :

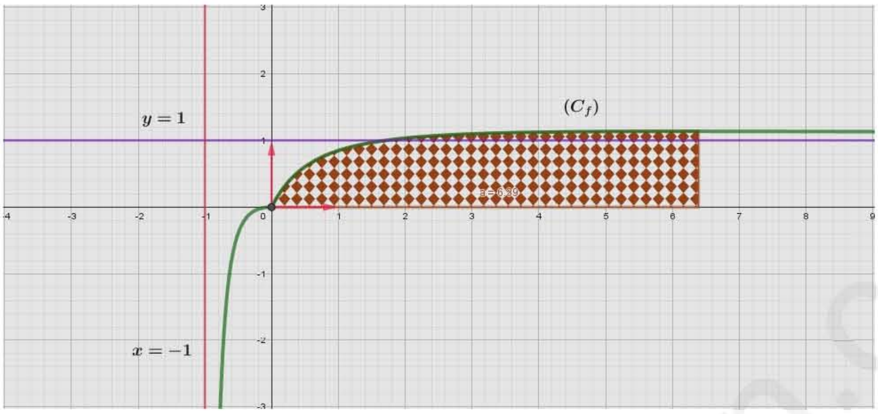
$F(x)=\frac{[\ln(x+1)]^2}{2}+x-\ln(x+1)+c$................................$(0,5)$

استنتاج مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f)

و محور الفواصل والمستقيمين ذا المعادلتين : $x=0$ و $x=e^2-1$

نحسب التكامل $\int_0^{e^2-1} f(x)dx=\int_0^{e^2-1}\frac{\ln(x+1)+x}{x+1}dx$ أي أن $\int_0^{e^2-1} f(x)dx=\left[\frac{1}{2}(\ln(x+1))^2+x-\ln(x+1)\right]_0^{e^2-1}$

$\int_0^{e^2-1} f(x)\boldsymbol{dx}=\boldsymbol{e^2}+1$ و منه المساحة هي $4(e^2+1)cm^2$..$(0,5)$



انتهى الموضوع الثاني

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة الدفاع الوطني
أركان الجيش الوطني الشعبي
دائرة الاستعمال و التحضير
مديرية مدارس أشبال الأمة

السنة الدراسية : 2020 / 2021
دورة جوان 2021

امتحان البكالوريا التجريبي
الشعبة: رياضيات

اختبار مادة الرياضيات — المدة : 04 ساعات و نصف

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04.5 نقاط)

نعتبر v_1 و q عددان طبيعيان ، (v_n) هي المتتالية الهندسية التي أساسها q و حدها الأول v_1.

I) عين v_1 و q علما أن v_1 و q أوليان فيما بينهما و $2v_1^2 = v_4 - v_2$.

II) نفرض أن: $v_1 = 3$ و $q = 2$.

1) أكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n ، ثم عين كل الحدود المحصورة بين العددين: 2020 و 1441.

2) نضع: $S_n = v_1^2 + v_2^2 + ... + v_n^2$ و $P_n = \ln(S_n)$.

– أحسب كلا من S_n و P_n بدلالة n ، ثم أحسب: $\lim_{n\to+\infty} S_n$ و $\lim_{n\to+\infty} P_n$.

3) نعتبر α و β عددان طبيعيان حيث: $v_\alpha < v_\beta$.

أ) حلل العدد 2304 إلى جداء عوامل أولية.

ب) عين كل الثنائيات الطبيعية (α,β) بحيث يكون: $\begin{cases} v_\alpha \times v_\beta = 2304 \\ PGCD(\alpha,\beta) = 2 \end{cases}$.

ج) نسجل قيم الحدود السته الأولى للمتتالية (v_n) على 6 بطاقات متماثلة ونخلطها جيدا ثم نسحب منها بصفة عشوائية بطاقتان في آن واحد.

– ما هو احتمال سحب بطاقتين تحملان حدين رقميهما أوليان فيما بينهما ؟

التمرين الثاني : (04 نقاط)

1) أ) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 5^n على 7.

ب) استنتج باقي قسمة العدد $1440^{2019^{2020}}$ على 7.

2) عين قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون: $4(5^{n-2} + 5^{n-3} + ... + 1) \equiv 3[7]$.

3) أ) تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون: $2C_{n+1}^2 + A_{n+3}^2 = 2n^2 + 6n + 6$.

ب) عين قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها العدد: $2C_{n+1}^2 + A_{n+3}^2$ مضاعفا للعدد 7.

4) فيما يلي نفرض: $n = 9$.

نعتبر x و y عددين صحيحين ولتكن المعادلة (E) حيث: (E)..... $C_{10}^2 x - A_{12}^2 y = 15$.

أ) عين $PGCD(C_{10}^2; A_{12}^2)$ ، ثم استنتج أن المعادلة (E) تقبل على الأقل حلا (x,y).

ب) بين أنه إذا كانت الثنائية (x,y) حلا للمعادلة (E) فإن: $y \equiv 0[5]$ ، ثم حل المعادلة (E).

5) أ) إذا كان x و y عددين طبيعيين ، ما هي القيم الممكنة لـــ d حيث: $d = PGCD(x,y)$.

ب) عين الثنائيات (x,y) حلول المعادلة (E) بحيث يكونا العددين x و y أوليان فيما بينهما.

التمرين الثالث: (04 نقاط)

المستوي منسوب إلى معلم متعامد متجانس $\left(O,\vec{u};\vec{v}\right)$. نعتبر النقطتين M و M' التين لاحقتاهما z و z' على الترتيب . نضع $z=x+iy$ و $z'=x'+iy'$ حيث x ، y ، x' و y' أعداد حقيقية .

نذكر أن $\overline{z}$ هو مرافق العدد المركب z و $|z|$ هي طويلة العدد المركب z .

1) بين أن الشعاعين $\overrightarrow{OM}$ و $\overrightarrow{OM'}$ متعامدين إذا وفقط إذا كان $\text{Re}\left(z'\overline{z}\right)=0$.

2) بين أن النقط O ، M و M' في استقامية إذا وفقط إذا كان $IM\left(z'\overline{z}\right)=0$.

3) لتكن N النقطة ذات اللاحقة z^2-1 . عين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي يكون من أجلها الشعاعين $\overrightarrow{OM}$ و $\overrightarrow{ON}$ متعامدين .

4) لتكن P النقطة ذات اللاحقة $\frac{1}{z^2}-1$ حيث $z\neq 0$.

أ) بين أن $\left(\frac{1}{z^2}-1\right)\left(\overline{z^2-1}\right)=-\overline{z}^{2}\left|\frac{1}{z^2}-1\right|^2$.

ب) عين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي تكون من أجلها النقط O ، N و P في استقامية .

التمرين الرابع : (07.5 نقاط)

I) نعتبر g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي: $g(x)=x^2-\ln\left(x^2\right)$.

1) أدرس اتجاه تغير الدالة g وشكل جدول تغيراتها.

2) استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي غير معدوم x يكون: $g(x)>0$.

II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـــ: $f(x)=\frac{2}{x}+x+\frac{\ln\left(x^2\right)}{x}$. وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) أ) أحسب: $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

ب) أحسب: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\<}}f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\>}}f(x)$ ، ثم فسر النتائج بيانيا.

2) أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}^*$ تكون: $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$.

ب) أدرس اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها.

ج) برهن أن المنحني (C_f) يقبل مستقيم مقارب (Δ) ذوالمعادلة $y=x$، ثم أدرس وضعية (C_f) بالنسبة لـــ(Δ).

3) أ) تحقق أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$ ، $-x\in\mathbb{R}^*$ و $f(x)+f(-x)=0$ ، ماذا تستنتج ؟ فسر النتيجة بيانيا.

ب) بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $0,3<\alpha<0,4$ ، ثم استنتج أنها تقبل حلا آخر β يطلب تعيين حصر له.

4) أ) بين أن المنحني (C_f) يقبل مماسين (T_1) و (T_2) يوازيان المستقيم (Δ) يطلب كتابة معادلتيهما.

ب) أنشئ كلا من: (T_1) ، (T_2) ، (Δ) و المنحني (C_f).

5) نعتبر الدالة h المعرفة على $]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$ بالعبارة: $h(x)=\left[\frac{\ln(x+1)^2}{x+1}+(x+1)+\frac{2}{x+1}\right]+2$

وليكن (C_h) تمثيلها البياني في المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

– بين أنه يوجد تحويل نقطي يحول المنحني (C_f) إلى المنحني (C_h). (الإنشاء غير مطلوب)

6) أ) بين أن الدالة F المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـــ: $F(x)=\left[\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4}(\ln x^2)^2+2\ln|x|\right]$ هي دالة أصلية لـــ f على $\mathbb{R}^*$.

ب) عين دالة أصلية للدالة f والتي تنعدم من أجل $x=1$.

ج) نعتبر λ عدد حقيقي حيث $\lambda>1$. أحسب التكامل: $I=\int_1^{\lambda} f(x)\,dx$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا.

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

يحتوي كيس على أربع كريات بيضاء تحمل الأرقام 1 ، 2 ، 3 ، 5 و ست كريات حمراء تحمل الأرقام 1 ، 2 ، 3 ، 3 ، 4 ، 4 . لا نفرق بينها عند اللمس .

نسحب من الكيس كريتان على التوالي دون إرجاع .

1) ما هو عدد الحالات الممكنة للسحب.

2) أحسب احتمال سحب كريتان من نفس اللون .

3) أحسب احتمال سحب كريتان تحملان رقمان زوجيان .

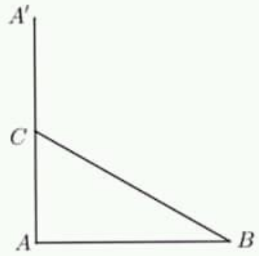
4) نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل حالة سحب عدد الكريات البيضاء المسحوبة .

أ) عين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X .

ب) أحسب الأمل الرياضي $E\left(X\right)$.

التمرين الثاني : (04 نقاط)

I . ABC مثلث مباشر قائم في A حيث $\left(\overline{BC};\overline{BA}\right)=\frac{\pi}{6}+2k\pi$ و $k\in\mathbb{Z}$ (أنظر الشكل)



A' نظيرة A بالنسبة للنقطة C. ليكن S التشابه المباشر الذي يحول A' إلى C و C إلى B .

1)عين نسبة وزاوية التشابه S .

2)أنشئ D صورة A بواسطة S.

3)ليكن Ω مركز التشابه المباشر S .

أ) أثبت أن المستقيمين (ΩC) و (BC) متعامدان.

ب) أثبت أن المستقيمين $(\Omega A')$ و (CA') متعامدان.

جـ) استنتج طريقة لإنشاء النقطة Ω .

II . فيما يلي المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(A;\vec{u};\vec{v}\right)$ حيث لاحقة B هي 1.

1) عين لاحقة كل من C و A' .

2) بين أن العبارة المركبة للتشابه المباشر S هي $z'=\left(1+i\sqrt{3}\right)z+\frac{6-i\sqrt{3}}{3}$ ، ثم استنتج لاحقة Ω.

3) عين ثم أنشئ $\left(E\right)$ مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث $\arg\left(z-2i\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$.

التمرن الثالث: (05 نقاط)

متتاليتا الأعداد الطبيعية (x_n) و (y_n) معرفتان على $\mathbb{N}$ كما يلي $\begin{cases} x_0 = 3 \\ x_{n+1} = 2x_n - 1 \end{cases}$ و $\begin{cases} y_0 = 1 \\ y_{n+1} = 2y_n + 3 \end{cases}$

1) أثبت بالتراجع من أجل كل طبيعي n أن $x_n = 2^{n+1} + 1$.

2) أ) احسب $\text{pgcd}(x_2; x_3)$ و $\text{pgcd}(x_8; x_9)$

ب) هل x_n و x_{n+1} أوليان فيما بينهما من أجل كل طبيعي n.

3) أ) أثبت من أجل كل طبيعي n أن $2x_n - y_n = 5$.

ب) أكتب y_n بدلالة n.

ج) أدرس حسب قيم الطبيعي n بواقي قسمة 2^n على 5.

4) نضع $d_n = \text{pgcd}(x_n; y_n)$.

أ) ما هي القيم الممكنة لــــــــ d_n.

ب) عين مجموعة قيم n التي يكون من أجلها x_n و y_n أوليين فيما بينهما.

التمرين الرابع : (07 نقاط)

I. لتكن g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$بـــــــــ : $g(x) = e^x(x-1)+1$

1)أدرس تغيرات g ثم أنجز جدول تغيراتها.

2)استنتج أن $g(x) \geq 0$ من أجل كل عدد حقيقي x.

II. لتكن الدالة العددية I المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي $I(x) = \int_0^x (x-t)e^t \, dt$

1)أثبت بواسطة مكاملة بالتجزئة أن: $I(x) = e^x - (1+x)$

2) ليكن x عدد حقيقي موجب . أثبت من أجل كل t من $[0;x]$ أن: $1 \leq e^t \leq e^x$.

ثم استنتج أن: $\frac{x^2}{2} \leq I(x) \leq \frac{x^2 e^x}{2}$.

3) ليكن x عدد حقيقي سالب. أثبت من أجل كل t من $[x;0]$ أن: $e^x \leq e^t \leq 1$، ثم استنتج أن: $\frac{x^2 e^x}{2} \leq I(x) \leq \frac{x^2}{2}$.

4) استنتج أن: $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - (1+x)}{x^2} = \frac{1}{2}$.

III. لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$بــــ : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{e^x - 1}{x} & x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1) أحسب نهايات الدالة f عند $+\infty$ و $-\infty$.

2) أدرس قابلية اشتقاق f عند 0.

3) أحسب $f'(x)$ ثم استنتج تغيرات الدالة f .

4) عين معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0.

5) أرسم (T) و (C_f).

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة الدفاع الوطني
أركان الجيش الوطني الشعبي
مديرية مدارس أشبال الأمة

السنة الدراسية : 2020 / 2021

المستوى الثالثة رياضيات

التصحيح النموذجي للبكالوريا التجريبي مادة الرياضيات

الموضوع الأول

محاور الموضوع	عناصر الإجابة	العلامة مجزأة	العلامة كاملة
التمرين الأول	I) تعيين العددين v_1 و q: لدينا: $2v_1^2 = v_4 - v_2$ و نعلم أن: $v_2 = v_1.q$ و $v_4 = v_1.q^3$ أي تصبح: $2v_1^2 = v_1.q^3 - v_1.q$ أي: $2v_1^2 = v_1.q(q^2-1)$ ومنه: $\boxed{2v_1 = q(q^2-1)}$. لدينا: q يقسم $2v_1$ و q أولي مع v_1 إذن: q يقسم 2 (حسب مبرهنة غوص) أي أن: $q \in \{1,2\}$. - في حالة $q=1$ يكون: $2v_1 = 0$ أي: $v_1 = 0$ (مرفوض). - في حالة $q=2$ يكون: $2v_1 = 6$ أي: $v_1 = 3$. إذن نتحصل على: $\boxed{q=2}$ و $\boxed{v_1=3}$.	0.75 ن	04.5 ن
	II) نفرض أن: $v_1 = 3$ و $q = 2$. 1) كتابة عبارة الحد العام للمتتالية (v_n): نعلم أن: $v_n = v_1 \times q^{n-1}$ ومنه: $\boxed{v_n = 3\times 2^{n-1}}$.	0.25 ن	
	*) تعيين كل الحدود المحصورة بين 2020 و 1441: لدينا: $1441 \le 3\times 2^{n-1} \le 2020$ أي: $481 \le 2^{n-1} \le 673$ أي نجد: $\ln 481 \le \ln 2^{n-1} \le \ln 673$ أي: $\ln 481 \le (n-1)\ln 2 \le \ln 673$ و منه: $\frac{\ln 481}{\ln 2} \le n-1 \le \frac{\ln 673}{\ln 2}$ أي: $8{,}9 \le n-1 \le 9{,}39$ ومنه: $9{,}9 \le n \le 10{,}39$ ، إذن: $\boxed{n=10}$ وبالتالي يوجد حد وحيد محصور بين العددين 2020 و 1441 هو: $\boxed{v_{10} = 1536}$	0.75 ن	
	2) لدينا: $S_n = v_1^2 + v_2^2 + ... + v_n^2$ و $P_n = \ln(S_n)$. المجموع S_n هو عبارة عن مجموع لمتتالية هندسية أساسها q^2 و حدها الأول v_1^2 وعدد حدودها n حدا. أي يكون: $S_n = v_1^2 \times \frac{1-(q^2)^n}{1-q^2} = 9\times\frac{1-(4)^n}{1-4}$ ومنه: $\boxed{S_n = 3(4^n - 1)}$.	01 ن	
	*) لنحسب $\lim_{n\to+\infty} S_n$: $\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty}\left[3(4^n-1)\right] = +\infty$ لأن: $\lim_{n\to+\infty} 4^n = +\infty$.		

*) لنحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n$: $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \ln(S_n) = +\infty$ لأن: $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$. — 0.25 ن

0.25 ن

3) لدينا: α و β عددان طبيعيان حيث: $v_\alpha < v_\beta$.

أ) تحليل العدد 2304 إلى جداء عوامل أولية فنتحصل على: $\boxed{2304 = 2^8 \times 3^2}$. — 0.25 ن

ب) تعيين كل الثنائيات (α, β):

لدينا: $\begin{cases} v_\alpha \times v_\beta = 2304 \\ PGCD(\alpha,\beta) = 2 \end{cases}$ أي يكون: $\begin{cases} (3\times 2^{\alpha-1})(3\times 2^{\beta-1}) = 2^8\times 3^2 \\ PGCD(\alpha,\beta)=2 \end{cases}$ ومنه:

$\begin{cases} 2^{\alpha+\beta-2}\times 3^2 = 2^8\times 3^2 \\ PGCD(\alpha,\beta)=2 \end{cases}$

أي: $\begin{cases} \alpha+\beta = 10 \\ PGCD(\alpha,\beta)=2 \end{cases}$. لدينا: $\alpha = 2\alpha'$ و $\beta = 2\beta'$ و منه: $2\alpha' + 2\beta' = 10$ أي نجد:

$\boxed{\alpha' + \beta' = 5}$.

لكن لدينا: $\alpha < \beta$ لأن: $v_\alpha < v_\beta$ (المتتالية (v_n) متزايدة) ومنه يكون: $\alpha' < \beta'$.

أي نجد أن هناك ثنائيتان تحقق: $(\alpha', \beta') = (1,4)$ و $(\alpha', \beta') = (2,3)$.

إذن الثنائيات (α, β) المطلوبة هي: $\boxed{(\alpha,\beta) = (2,8)}$ و $\boxed{(\alpha,\beta) = (4,6)}$. — 0.5 ن

4) الأعداد المسجلة على البطاقات الست هي: 3 ، 6 ، 12 ، 24 ، 48 ، 96 .

نلاحظ أنه توجد بطاقة وحيدة تحمل حدا رقميه أوليان فيما بينهما و هو v_3 .

لكن السحب هنا يتم دفعة واحدة وفي هذا الأخير لا يوجد تكرار أي ليس باستطاعتنا سحب البطاقة التي تحمل الحد v_3 مرتين في آن واحد إذن هذا حدث مستحيل واحتماله يساوي 0 . — 0.5 ن

التمرين الثاني — 04 ن

1) أ) بواقي قسمة العدد 5^n على 7.

نجد: $5^0 \equiv 1[7]$ ، $5^1 \equiv 5[7]$ ، $5^2 \equiv 4[7]$ ، $5^3 \equiv 6[7]$ ، $5^4 \equiv 2[7]$ ، $5^5 \equiv 3[7]$ و $5^6 \equiv 1[7]$

و نلخصها في الجدول التالي: — 0.5 ن

قيم العدد الطبيعي n	$6k$	$6k+1$	$6k+2$	$6k+3$	$6k+4$	$6k+5$
بواقي قسمة 5^n على 7	1	5	4	6	2	3

ب) نعلم أن: $1440 \equiv 5[7]$ أي أن: $1440^{(2019)^{2020}} \equiv 5^{(2019)^{2020}}[7]$. — 0.25 ن

*) لنعين باقي قسمة العدد 2019^{2020} على 6: $2019 \equiv 3[6]$ أي: $2019^{2020} \equiv 3^{2020}[6]$

لكن نعلم أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون: $\boxed{3^n \equiv 3[6]}$ و منه: $2019^{2020} \equiv 3[6]$ أي:

$2019^{2020} = 6k+3$.

إذن: $1440^{(2019)^{2020}} \equiv 5^{6k+3}[7]$ أي: $1440^{(2019)^{2020}} \equiv 6[7]$.

و منه باقي قسمة العدد $1440^{(2019)^{2020}}$ على 7 هو 6. — 0.25 ن

2) لدينا: $4\left(5^{n-2}+5^{n-3}+.....+1\right)\equiv 3[7]$ ، نلاحظ أن: $\left(5^{n-2}+5^{n-3}+.....+1\right)$

هو مجموع حدود لمتتالية هندسية أساسها 5 عدد حدودها $(n-1)$ حدا و منه:

$4\left(1\times\frac{5^{n-1}-1}{5-1}\right)\equiv 3[7]$ أي: $5^{n-1}-1\equiv 3[7]$ أي: $5^{n-1}\equiv 4[7]$

ومنه يكون: $n-1=6k+2$ إذن: $\boxed{n=6k+3}$ مع $(k\in\mathbb{N})$. **0.5 ن**

3) أ) لنبين أن: $2C_{n+1}^{2}+A_{n+3}^{2}=2n^{2}+6n+6$.

*) لنحسب $2C_{n+1}^{2}+A_{n+3}^{2}$:

$$2C_{n+1}^{2}+A_{n+3}^{2}=2\times\frac{(n+1)!}{(n+1-2)!\times 2!}+\frac{(n+3)!}{(n+3-2)!}$$
$$=\frac{(n+1)\times n\times(n-1)!}{(n-1)!}+\frac{(n+3)(n+2)(n+1)!}{(n+1)!}$$

و منه: $2C_{n+1}^{2}+A_{n+3}^{2}=(n+1)n+(n+3)(n+2)=n^{2}+n+n^{2}+2n+3n+6$

إذن: $\boxed{2C_{n+1}^{2}+A_{n+3}^{2}=2n^{2}+6n+6}$ هو المطلوب. **0.5 ن**

ب) لنعين قيم n بحيث يكون: $2C_{n+1}^{2}+A_{n+3}^{2}\equiv 0[7]$.

لدينا: $2n^{2}+6n+6\equiv 0[7]$ أي: $2\left(n^{2}+3n+3\right)\equiv 0[7]$ بما أن 2 أولي مع 7 يكون:

$n^{2}+3n+3\equiv 0[7]$ أي: $n^{2}+3n\equiv -3[7]$ و منه: $n^{2}+3n\equiv 4[7]$.

يمكن الاستعانة بالجدول التالي (الموافقة بترديد 7):

$n\equiv$	0	1	2	3	4	5	6	[7]
$n^{2}\equiv$	0	1	4	2	2	4	1	[7]
$3n\equiv$	0	3	6	2	5	1	4	[7]
$n^{2}+3n\equiv$	0	4	3	4	0	5	5	[7]

وبالتالي يكون: $n\equiv 1[7]$ أو $n\equiv 3[7]$ أي: $\boxed{n=7k+1}$ أو $\boxed{n=7k+3}$ مع $(k\in\mathbb{N})$. **0.75 ن**

4) لدينا: $C_{10}^{2}x-A_{12}^{2}y=15\,.....(E)$.

أ) لنعين $PGCD\left(C_{10}^{2};A_{12}^{2}\right)$:

نعلم أن: $C_{10}^{2}=\frac{10!}{8!\times 2!}=45$ و $A_{12}^{2}=\frac{12!}{10!}=132$ ومنه $PGCD\left(C_{10}^{2};A_{12}^{2}\right)=3$.

إذن المعادلة (E) تصبح: $45x-132y=15$

هذه الأخيرة تقبل على الأقل حلا في $\mathbb{Z}^{2}$ لأن: $PGCD(45,132)=3$ و 3 يقسم 15. **0.25 ن**

ب) لدينا: $45x-132y=15$ أي تصبح: $15x-44y=5$ أي: $44y=15x-5$ أي:

$44y=5(3x-1)$

لدينا: 5 يقسم $44y$ و 5 أولي مع 44 حسب مبرهنة غـــوص فإن: 5 يقسم y

وبالتالي يكون: $y=5k$ أي: $\boxed{y\equiv 0[5]}$ هو المطلوب.

*) لنحل المعادلة (E): **0.25 ن**

نبحث أولا عن الحل الخاص أي: $y=5$ و منه: $44\times 5=5(3x-1)$ أي: $44=3x-1$ إذن:

التمرين الثالث	$x=15$. ومنه: $(x_0,y_0)=(5,15)$. لدينا: $\begin{cases}15x-44y=5\\15(15)-44(5)=5\end{cases}$ بالطرح نجد: $15(x-15)=44(y-5)$ بما أن 15 أولي مع 44 وحسب مبرهنة غوص نستنتج أن: $\begin{cases}x-15=44k\\y-5=15k\end{cases}$ إذن: $\boxed{x=44k+15}$ و $\boxed{y=15k+5}$. ومنه: $\boxed{(x,y)=(44k+15,15k+5)}$ مع $(k\in\mathbb{Z})$. 5) أ) لدينا الثنائية (x,y) حل للمعادلة (E) أي يكون: $15x-44y=5$ و بما أن: $PGCD(x,y)=d$ فإن: d يقسم $(15x-44y)$ و d يقسم 5 ، إذن قيم d هي: 1 ، 5 . ب) لندرس حالة $d=5$ أي: $x\equiv 0[5]$ أي: $44k+15\equiv 0[5]$ أي: $4k\equiv 0[5]$ و منه: $k\equiv 0[5]$ أي يكون: $\boxed{k=5\alpha}$ مع $(\alpha\in\mathbb{Z})$. إذن: $d=5$ لما $k=5\alpha$ و بالتالي يكون: $d=1$ لما $k\neq 5\alpha$ و منه: $\boxed{(x,y)=(44k+15,15k+5)}$ مع $(k\neq 5\alpha)$.	0.25 ن 0.25 ن 0.25 ن	04 ن
التمرين الرابع	1) لدينا : $\overrightarrow{OM}(x;y)$ و $\overrightarrow{OM'}(x';y')$ متعامدين معناه $xx'+yy'=0$. $z'\bar{z}=(x'+iy').(x-iy)=(xx'+yy')+i(xy'-yx')$. ومنه : $xx'+yy'=0$ تكافئ $\mathrm{Re}(z'\bar{z})=0$. 2) النقط O ، M و M' في استقامية معناه $\overrightarrow{OM}(x;y)$ و $\overrightarrow{OM'}(x';y')$ مرتبطان خطيا أي $xy'+yx'=0$ وهذا يكافئ $IM(z'\bar{z})=0$. 3) لدينا : $(z^2-1)\bar{z}=\|z\|z-\bar{z}=(x^2+y^2)(x+iy)-(x-iy)$ $=x(x^2+y^2-1)+iy(x^2+y^2+1)$ $\overrightarrow{OM}$ و $\overrightarrow{ON}$ متعامدين يكافئ $\mathrm{Re}((z^2-1)\bar{z})=0$ أي $x(x^2+y^2-1)$ ومنه $x=0$ أو $x^2+y^2=1$. مجموعة النقط M هي اتحاد محور التراتيب مع الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها 1 4) لتكن P النقطة ذات اللاحقة $\frac{1}{z^2}-1$ حيث $z\neq 0$. أ) $\left(\frac{1}{z^2}-1\right)\left(\overline{z^2-1}\right)=\left(\frac{1}{z^2}-1\right)\left(\overline{-z^2}\right)\left(\overline{\frac{1}{z^2}-1}\right)=-\bar{z}^2\left\|\frac{1}{z^2}-1\right\|^2$. ب) O ، N و P في استقامية تكافئ $IM\left(\left(\frac{1}{z^2}-1\right)\left(\overline{z^2-1}\right)\right)=0$ أي $IM\left(-\bar{z}^2\left\|\frac{1}{z^2}-1\right\|^2\right)=0$.أي $IM(-\bar{z}^2)=0$ ومنه $2xy=0$ أي $x=0$ أو $y=0$. ومجموعة النقط M هي اتحاد محور الفواصل مع محور التراتيب باستثناء المبدأ O .	0.75 ن 0.75 ن 01ن 0.75 ن 0.75 ن	07.5 ن

I) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـــ: $g(x) = x^2 - \ln(x^2)$.

1) دراسة إتجاه تغير الدالة g و تشكيل جدول تغيراتها:

*) الدالة المشتقة: الدالة g قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}^*$ و عبارة دالتها المشتقة هي: $g'(x) = 2x - \frac{2}{x} = \frac{2x^2-2}{x}$.

نلاحظ أن إشارة $g'(x)$ من إشارة $x.(2x^2-2)$ و عليه نلخص الإشارة في الجدول التالي: إذن جدول التغيرات يكون: 0.5 ن

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
x		$-$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	
$2x2-2$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	||	$-$	0	$+$	

0.25 ن

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	||	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

0.75 ن

*) النهايات: $\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ و $\lim_{x \underset{>}{\overset{<}{\to}} 0} g(x) = +\infty$. 0.25 ن

2) نلاحظ من جدول التغيرات أنه من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم تكون: $g(x) > 0$.

II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـــ: $f(x) = \frac{2}{x} + x + \frac{\ln(x^2)}{x}$.

1) أ) حساب النهايات:

*) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x\left(\frac{2}{x^2} + 1 + \frac{\ln(x^2)}{x^2}\right) = -\infty$ لأن: $\lim_{x\to-\infty} \frac{2}{x^2} = 0$ و $\lim_{x\to-\infty} \frac{\ln(x^2)}{x^2} = 0$

فبوضع: $x^2 = t$

هذه الأخيرة تصبح: $\boxed{\lim_{t\to+\infty} \frac{\ln t}{t} = 0}$.

*) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ لأن: $\lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x} = 0$ و $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x^2)}{x} = 0$. 0.5 ن

ب) حساب النهايات وتفسير النتائج بيانيا:

*) $\lim_{x \overset{<}{\to} 0} f(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} 0} \left(\frac{2}{x} + x + \frac{\ln(x^2)}{x}\right) = +\infty$ و 0.5 ن

$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \left(\frac{2}{x} + x + \frac{\ln(x^2)}{x}\right) = -\infty$. 0.25 ن

*) التفسير البياني: المنحني (C_f) يقبل مستقيما مقاربا عموديا معادلته: $x = 0$.

2) أ) بيان أنه من أجل كل $x \in \mathbb{R}^*$ يكون: $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.

الدالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}^*$ ودالتها المشتقة هي:

$f'(x) = \frac{-2}{x^2} + 1 + \frac{2 - \ln(x^2)}{x^2} = \frac{x^2 - \ln(x^2)}{x^2}$ ، إذن: $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ و هو المطلوب. 0.25 ن

ب) دراسة إتجاه تغير الدالة f : نلاحظ أن إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ إذن الدالة f

متزايدة تماما على كل من المجالين $]-\infty;0[$ و $]0;+\infty[$ وعليه جدول تغيراتها يكون: 0.25 ن

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$ $+\infty$	‖	$-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$	

0.25 ن

ج) برهان أن المستقيم (Δ) مقارب للمنحني (C_f):

أي نحسب: $\lim\limits_{|x|\to\infty}\left[f(x)-x\right]=\lim\limits_{|x|\to\infty}\left[\frac{2}{x}+\frac{\ln(x^2)}{x}\right]=0$ ، إذن: المستقيم (Δ) هو مقارب مائل للمنحني (C_f).

0.25 ن

*) دراسة الوضع النسبي: أي ندرس إشارة الفرق $\left[f(x)-x\right]=\frac{2+\ln(x^2)}{x}$.

نلخص الإشارة في الجدول التالي:

x	$-\infty$		$-e^{-1}$		0		e^{-1}		$+\infty$
x		$-$		$-$	‖	$+$	0	$+$	
$2+ln(x2)$		$+$	0	$-$	0	$-$		$+$	
$f(x)-x$		$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	
الوضعية		(C_f) تحت (Δ)	(C_f) يقطع	(C_f) فوق (Δ)	‖	(C_f) تحت (Δ)	يقطع	(C_f) فوق (Δ)	

0.25 ن

3) أ) التحقق أنه من أجل كل $x\in\mathbb{R}^*$ ، $-x\in\mathbb{R}^*$ يكون: $f(x)+f(-x)=0$.

لدينا: $f(x)+f(-x)=\frac{2}{x}+x+\frac{\ln(x^2)}{x}-\frac{2}{x}-x-\frac{\ln(x^2)}{x}=0$.

إذن و بما أنه من أجل $x\in\mathbb{R}^*$ ، $-x\in\mathbb{R}^*$ و $f(x)+f(-x)=0$ فإن الدالة f فردية و منحناها البياني (C_f) يقبل مبدأ المعلم O كمركز التناظر.

0.25 ن

ب) باستعمال مبرهنة القيم المتوسطة نجد أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $0,3<\alpha<0,4$. و بما أن الدالة f فردية إذن يوجد حل آخر β محصور بين $-0,4$ و $-0,3$ أي يكون: $-0,4<\beta<-0,3$.

0.25 ن

4) أ) المنحني (C_f) يقبل مماسين يوازيان المستقيم (Δ) يعني أن: $f'(x)=1$ ، لنحل في $\mathbb{R}^*$ هذه الأخيرة.

لدينا: $\frac{x^2-\ln(x^2)}{x^2}=1$ أي: $\frac{x^2-\ln(x^2)}{x^2}-1=0$ أي تصبح: $\frac{-\ln(x^2)}{x}=0$ أي:

$$\begin{cases}-\ln(x^2)=0\\ x^2\neq 0\end{cases}$$

0.25 ن

هذا يكافئ: $x^2=1$ أي: $x=1$ أو $x=-1$ و منه فعلا المنحني (C_f) يقبل مماسين موازيان للمستقيم (Δ).

0.25 ن

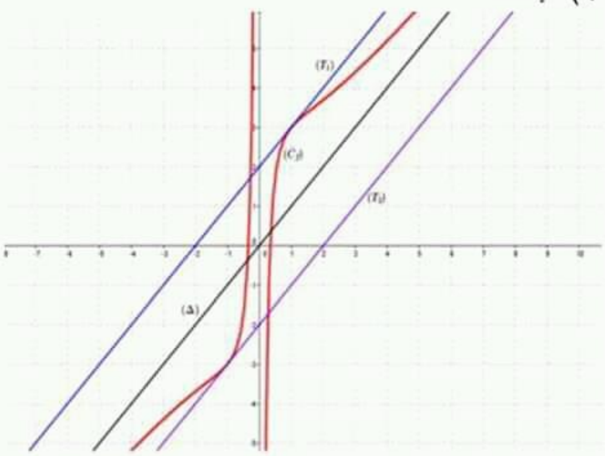
*) كتابة معادلة المماس (T_1) عند $x_0=1$: $(T_1): y=f'(1)(x-1)+f(1)$ ومنه: $(T_1): y=x+2$.

*) كتابة معادلة المماس (T_2) عند $x_0=-1$: $(T_2): y=f'(-1)(x+1)+f(-1)$ ومنه:

0.25 ن

$(T_2): y=x-2$.

ب) الإنشاء:



0.75 ن

5) لدينا: $h(x)=\left[\frac{\ln(x+1)^2}{x+1}+(x+1)+\frac{2}{x+1}\right]+2$ أي يكون: $h(x)=f(x+1)+2$.

إذن: يوجد تحويل نقطي يحول المنحني (C_f) إلى (C_h) و هو الإنسحاب الذي شعاعه $\vec{v}\binom{-1}{2}$. 0.25 ن

6) أ) بيان أن الدالة F أصلية للدالة f على $\mathbb{R}^*$:

لدينا: $F'(x)=x+\frac{2}{4}\times\frac{2}{x}\times\ln x^2+\frac{2}{|x|}=x+\frac{\ln(x^2)}{x}+\frac{2}{|x|}$.

*) إذا كان $x>0$ فإن: $F'(x)=\frac{2}{x}+x+\frac{\ln(x^2)}{x}$ وإذا كان $x<0$ فإن: 0.25 ن

$F'(x)=\frac{-2}{x}+x+\frac{\ln(x^2)}{x}$. 0.25 ن

ب) الدالة الأصلية للدالة f والتي تنعدم من أجل $x=1$ هي:

$F(x)=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4}\left[\ln(x)^2\right]^2+2\ln|x|-\frac{1}{2}$. 0.25 ن

ج) حساب التكامل $I=\int_1^{\lambda} f(x)dx$ مع $\lambda>1$:

لدينا: $I=\int_1^{\lambda} f(x)dx=\left[F(x)\right]_1^{\lambda}=F(\lambda)-F(1)$ و منه: $I=F(\lambda)$ لأن: $F(1)=0$. 0.25 ن

*) التفسير الهندسي: I هي مساحة الحيز المستوي المحصور بالمنحني (C_f) والمستقيم (Δ) والمستقيمين اللذين معادلتهما: $x=1$ و $x=\lambda$. 0.25 ن

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة الـــدفـــاع الوطـــــني — السنة الدراسية : 2020 / 2021

أركان الجيش الوطني الشعبي

مديرية مدارس أشبال الأمـــة — المستوى الثالثة رياضيات

التصحيح النموذجي للبكالوريا التجريبي مادة الرياضيات

الموضوع الثاني

<table>
<tr><th rowspan="2">محاور الموضوع</th><th rowspan="2">عناصـــــر الإجـــــابة</th><th colspan="2">العلامـــــة</th></tr>
<tr><th>مجزأة</th><th>كاملة</th></tr>
<tr><td>التمرين الأول</td><td>

1) عدد الحالات الممكنة للسحب : $A_{10}^2 = 90$.

2) لتكن A حادثة سحب كريتان من نفس اللون:

$P(A) = \frac{A_4^2 + A_6^2}{90} = \frac{42}{90} = \frac{7}{15}$.

3) لتكن B حادثة سحب كريتان تحملان رقمان زوجيان :

$P(B) = \frac{A_4^2}{90} = \frac{12}{90} = \frac{2}{15}$.

4) نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل حالة سحب عدد الكريات البيضاء المسحوبة .

أ) قيم X الممكنة : $X(\omega) = \{0;1;2\}$.

قانون احتمال X : $P(X=0) = \frac{A_6^2}{A_{10}^2} = \frac{30}{90} = \frac{1}{3}$.

$P(X=1) = \frac{A_4^1 \times A_6^1 \times C_2^1}{A_{10}^2} = \frac{48}{90} = \frac{8}{15}$.

$P(X=2) = \frac{A_4^2}{A_{10}^2} = \frac{12}{90} = \frac{2}{15}$.

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{2}{15}$

</td><td>0.5 ن
0.75 ن
0.75 ن
0.75 ن
0.75 ن</td><td>04 ن</td></tr>
</table>

ب) الأمل الرياضياتي:

$.E\left(X\right)=0\times\frac{1}{3}+1\times\frac{8}{15}+2\times\frac{2}{15}=\frac{12}{15}=0,8$ **0.5 ن**

التمرين الثاني **04 ن**

1) لدينا $\begin{cases}S(A')=C\\S(C)=B\end{cases}$ يعني $\begin{cases}CB=k\,A'C\\\left(\overrightarrow{A'C};\overrightarrow{CB}\right)=\theta+2k\pi\end{cases}$

ومنه $\begin{cases}k=\dfrac{CB}{A'C}=\dfrac{CB}{AC}=\dfrac{1}{\sin\frac{\pi}{6}}=2\\[2ex]\theta=\left(\overrightarrow{CA'};\overrightarrow{CB}\right)+\pi=-\dfrac{2\pi}{3}+\pi=\dfrac{\pi}{3}\end{cases}$. **01.5 ن**

2) بما أن C مصف$[AA']$ فإن B منتصف$[CD]$. **0.25 ن**

أ) $C\Omega^2+CB^2=C\Omega^2+\left(\overrightarrow{C\Omega}+\overrightarrow{\Omega B}\right)^2$

$=2C\Omega^2+\Omega B^2-4\times\Omega C\times\Omega C\times\frac{1}{2}=\Omega B^2$

و منه $(C\Omega)$يعامد(CB) **0.25 ن**

ب) $A'\Omega^2+A'C^2=A'\Omega^2+\left(\overrightarrow{A'\Omega}+\overrightarrow{\Omega C}\right)^2$

$=2A'\Omega^2+\Omega C^2-4\times\Omega A'\times\Omega A'\times\frac{1}{2}=\Omega C^2$

و منه $(A'\Omega)$يعامد$(A'C)$ **0.25 ن**

ج) Ω هي تقاطع المستقيم الذي يعامد(BC) في C مع المستقيم الذي يعامد$(A'C)$ في A' . **0.25 ن**

II .1) $\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{CA}{AB}$ إذن $CA=AB\times\tan\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

و منه $C\left(0;\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ و $A'\left(0;\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ **0.5 ن**

2) بما أن $k=2$ و $\theta=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ فإن عبارة S من الشكل

$z'=\left(1+i\sqrt{3}\right)z+b$

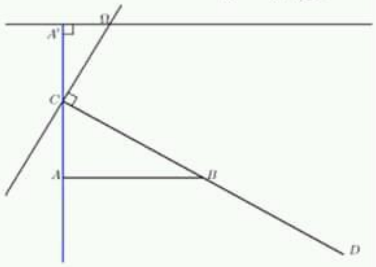
و بما أن $S(A')=C$ فإن $\frac{i\sqrt{3}}{3}=\left(1+i\sqrt{3}\right)\frac{2i\sqrt{3}}{3}+b$ إذن $b=\frac{6-i\sqrt{3}}{3}$ **0.75 ن**

و منه $z_{\Omega}=\frac{6-i\sqrt{3}}{-3i\sqrt{3}}=\frac{1}{3}+i\frac{2\sqrt{3}}{3}$

3) $\arg\left(z-2i\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=-\frac{\pi}{2}$ يعني $\arg\left(z-z_{A'}\right)=-\frac{\pi}{2}$

يعني $\left(\vec{u},\overrightarrow{A'M}\right)=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$ و منه مجموعة النقط M هي نصف المستقيم **0.25 ن**

المفتوح $[A'A)$



التمرين الثالث — 05 ن

1) $x_0 = 3 = 2^1 + 1$

لنفرض أن $x_n = 2^{n+1} + 1$ ، $n \geq 0$ إذن

01 ن — $x^{n+1} = 2x_n - 1 = 2\left(2^{n+1}+1\right) - 1 = 2^{n+2} + 2 - 1 = 2^{n+2} + 1$

0.25 ن — و منه من أجل كل طبيعي n ، $x_n = 2^{n+1} + 1$

0.25 ن — 2) أ) $p\gcd\left(x_2; x_3\right) = p\gcd(7;17) = 1$

0.25 ن — $\text{pgcd}\left(x_8; x_9\right) = \text{pgcd}(513;1025) = 1$

ب) $2x_n - x_{n+1} = 2^{n+2} + 2 - 2^{n+2} - 1 = 1$ و منه حسب بيزو فإن x_n و x_{n+1} أوليان فيما بينهما

01 ن — 3) أ) $2x_0 - y_0 = 6 - 1 = 5$ لنفرض أن $2x_n - y_n = 5$

0.25 ن — $2x_{n+1} - y_{n+1} = 2\left(2x_n - 1\right) - 2y_n - 3 = 2\left(2x_n - y_n\right) - 5 = 2\times 5 - 5 = 5$

و منه من أجل كل طبيعي n ، $2x_n - y_n = 5$

ب) $y_n = 2x_n - 5$ يعني $y_n = 2^{n+2} - 3$

01 ن — ج) لدينا $\begin{cases} 2 \equiv 2[5] \\ 2^2 \equiv 4[5] \\ 2^3 \equiv 3[5] \\ 2^4 \equiv 1[5] \end{cases}$ و منه من أجل كل p من $\mathbb{N}$: $\begin{cases} 2^{4p} \equiv 1[5] \\ 2^{4p+1} \equiv 2[5] \\ 2^{4p+2} \equiv 4[5] \\ 2^{4p+3} \equiv 3[5] \end{cases}$

0.25 ن

4) أ) بما أن $2x_n - y_n = 5$ فإن $d_n = 1$ أو $d_n = 5$ — 0.5

0.5 ن — ب) $d_n = 5$ يكافئ $\begin{cases} x_n \equiv 0[5] \\ y_n \equiv 0[5] \end{cases}$ يعني $\begin{cases} 2^{n+1} + 1 \equiv 0[5] \\ 2^{n+2} - 3 \equiv 0[5] \end{cases}$

0.25 ن — يعني $\begin{cases} 2^{n+1} \equiv 4[5] \\ 2^{n+2} \equiv 3[5] \end{cases}$ يعني $n = 4p + 1$ — 0.5

و أخيرا يكون x_n و y_n أوليين فيما بينهما إذا و فقط إذا كان

$n = 4p$ أو $n = 4p + 2$ أو $n = 4p + 3$

التمرين الرابع — 07 ن

I . 1) من أجل كل x من $\mathbb{R}$ $g'(x)=xe^{x}$ — 0.25 ن

g متناقصة تماما على المجال $]-\infty;0]$ و متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$. — 0.25 ن

x	$-\infty$ 0 $+\infty$
xe^{x}	$-$ 0 $+$

2) $g(0)$ قيمة حدية صغرى و بما أن $g(0)=0$ نستنتج أن g موجبة على $\mathbb{R}$ — 0.25 ن

II . 1) حساب $I(x)=\int_{0}^{x}(x-t)e^{t}\,dt$

نضع $\left\{\begin{array}{l}u(t)=x-t\\ v'(t)=e^{t}\,dt\end{array}\right.$ إذن $\left\{\begin{array}{l}u'(t)=-dt\\ v(t)=e^{t}\end{array}\right.$ و حسب قانون التكامل بالتجزئة نجد — 01 ن

$$I(x)=\left[(x-t)e^{t}\right]_{0}^{x}+\int_{0}^{x}e^{t}\,dt=\left[(x-t)e^{t}+e^{t}\right]_{0}^{x}=e^{x}-x-1=e^{x}-(x+1)$$

2) ليكن x حقيقي موجب و t حقيقي من المجال $[0;x]$ معناه $0\le t\le x$ أي

$1\le e^{t}\le e^{x}$ وبعد الضرب في $(x-t)$ نجد $(x-t)\le e^{t}(x-t)\le e^{x}(x-t)$ واخيرا

بعد المرور إلى التكامل نصل إلى $\int_{0}^{x}(x-t)\,dt\le\int_{0}^{x}e^{t}(x-t)\,dt\le\int_{0}^{x}e^{x}(x-t)\,dt$

يعني $\left[xt-\frac{t^{2}}{2}\right]_{0}^{x}\le I(x)\le\left[e^{x}\left(xt-\frac{t^{2}}{2}\right)\right]_{0}^{x}$ يعني $\frac{x^{2}}{2}\le I(x)\le\frac{x^{2}e^{x}}{2}$. — 0.5 ن

3) ليكن x حقيقي سالب و t حقيقي من المجال $[x;0]$ معناه $x\le t\le 0$ أي

$e^{x}\le e^{t}\le 1$ وبعد الضرب في $(x-t)$ نجد $(x-t)\le e^{t}(x-t)\le e^{x}(x-t)$

لأن $(x-t)$ **سالب** واخيرا بعد المرور إلى التكامل نصل إلى

$\int_{x}^{0}(x-t)\,dt\le\int_{x}^{0}e^{t}(x-t)\,dt\le\int_{x}^{0}e^{x}(x-t)\,dt$ لأن x **حقيقي سالب** يعني

$$\left[\left(xt-\frac{t^{2}}{2}\right)\right]_{x}^{0}\le -I(x)\le\left[e^{x}\left(xt-\frac{t^{2}}{2}\right)\right]_{x}^{0}$$ — 0.5 ن

يعني $-\frac{x^{2}e^{x}}{2}\le -I(x)\le-\frac{x^{2}}{2}$ و منه $\frac{x^{2}e^{x}}{2}\le I(x)\le\frac{x^{2}}{2}$.

4) لدينا مما سبق من أجل كل x موجب $\frac{x^{2}}{2}\le I(x)\le\frac{x^{2}e^{x}}{2}$ أي

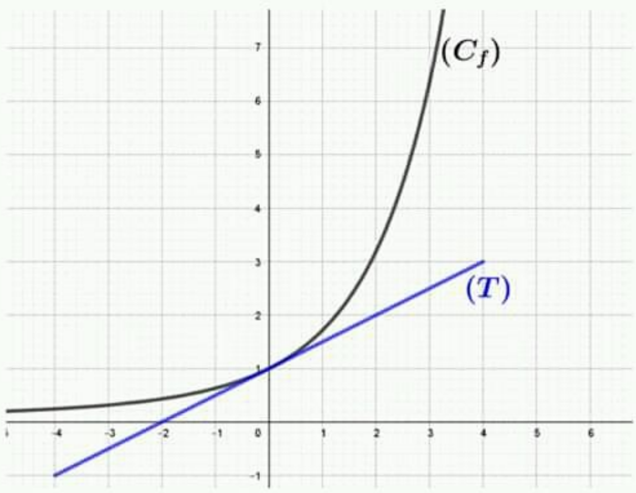
$\frac{x^{2}}{2}\le e^{x}-(1+x)\le\frac{x^{2}e^{x}}{2}$ و منه

من أجل كل x موجب تماما $\frac{1}{2}\le\frac{e^{x}-(1+x)}{x^{2}}\le\frac{e^{x}}{2}$ و بما أن $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\frac{e^{x}}{2}=\frac{1}{2}$ فإن

$$\lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{e^{x}-(1+x)}{x^{2}}=\frac{1}{2}...(1)$$

من أجل كل x سالب $\frac{x^{2}e^{x}}{2}\le I(x)\le\frac{x^{2}}{2}$ أي $\frac{x^{2}e^{x}}{2}\le e^{x}-(1+x)\le\frac{x^{2}}{2}$ و منه

من أجل كل x سالب

تماما $\frac{1}{2} \leq \frac{e^x-(1+x)}{x^2} \leq \frac{e^x}{2}$ و بما أن $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 0} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}$ فإن		
$\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 0} \frac{e^x-(1+x)}{x^2} = \frac{1}{2} ...(2)$		
من (1) و (2) نستنتج أن $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \frac{e^x-(1+x)}{x^2} = \frac{1}{2}$	0.5 ن	
III . 1) حساب النهايات		
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0^+$	0.25 ن	
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x}\left(1-e^{-x}\right) = +\infty$	0.25 ن	
2) من السؤال II. 4نجد $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x-x-1}{x^2} = \frac{1}{2}$		
و منه f قابلة للاشتقاق عند 0 و $f'(0) = \frac{1}{2}$.	0.75 ن	
من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$ فإن $f'(x) = \frac{xe^x - e^x + 1}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$ و منه $f' > 0$ على ℝ . إذن f متزايدة تماما على ℝ.	01 ن	
$(T): y = \frac{1}{2}x + 1$	0.5 ن	
	01 ن	