امتحان بكالوريا تجريبي — دورة ماي : 2025

الشعبة : تقني رياضي — ثانوية زروقي الشيخ بن الدين – مستغانم

اختبار في مادة : الرياضيات — المدة : 04 سا و 30 د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين :

الموضوع الأول

التمرين الأول (04 نقاط)

عين الاقتراح الصحيح الوحيد من بين الاقتراحات الثلاثة في كل حالة من الحالات الآتية مع التبرير :

1) في لجنة الخدمات الإجتماعية يراد تشكيل لجنة تتكون من رئيس و نائبين (نائب أول و نائب ثاني) من بين ثلاث رجال واحد اسمه هشام و امرأتين ، احتمال أن يكون هشام هو النائب الأول هو :

أ) $\frac{7}{6}$ ب) $\frac{1}{5}$ جـ) $\frac{3}{2}$

2) يحتوي صندوق على ثلاث كرات حمراء و أربع كرات بيضاء ، نسحب منه عشوائيا n كرة على التوالي مع الإرجاع ، احتمال أن تكون في السحب كرة بيضاء على الأقل هو :

أ) $1-\left(\frac{3}{7}\right)^n$ ب) $\left(\frac{3}{7}\right)^n$ جـ) $\left(\frac{4^{n+1}}{7^n}\right)$

3) الشكل الأسي للعدد المركب $z=\frac{\left(\sqrt{3}+i\right)^{4n+1}}{\left(1-i\sqrt{3}\right)^{4n}}$ حيث n عدد طبيعي هو :

أ) $2e^{i\frac{\pi}{6}}$ ب) $\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{3}}$ جـ) $\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}$

4) حلا المعادلة $z\overline{z}+2z-5-2i=0$ ذات المجهول z و مرافقه $\overline{z}$ في $\mathbb{C}$ هما :

أ) $-1+\sqrt{5}+i$ و $-1-\sqrt{5}+i$ ب) $\sqrt{5}+i$ و $\sqrt{5}-i$ جـ) $2i$ و $-2i$

التمرين الثاني (04.75 نقاط)

✍ نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $5x-6y=3\cdots\cdots(E)$.

1) بين أنه إذا كانت الثنائية (x,y) حلا للمعادلة (E) فإن x مضاعف للعدد 3 ثم حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E).

2) عين الثنائيات الطبيعية (x,y) حلول المعادلة (E) التي من أجلها يكون x و y أوليان فيما بينها.

3) أ) عين حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 9.

ب) عين قيم العدد الطبيعي n بحيث $5\times1983^{5x-6y}-10n+1448^{2025}\equiv2[9]$ حيث (x,y) حلول المعادلة (E).

4) عين قيمة α بحيث : $\overline{12551}^{10}=\overline{30407}^{\alpha}$.

التمرين الثالث: (04.25 نقاط)

(u_n) و (v_n) المتتاليتان العدديتان المعرفتان على $\mathbb{N}^*$ كما يلي $u_1=\frac{5}{2}$ و من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n :

$u_{n+1}=3+\frac{n}{\alpha(n+1)}\times(3-u_n)$ حيث $\alpha\in\mathbb{R}_-^*$ و $v_n=n(3-u_n)$.

1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $u_n<3$.

2) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $u_{n+1}-u_n=\frac{n+\alpha(n+1)}{\alpha(n+1)}\times(3-u_n)$ ثم استنتج اتجاه تغير (u_n).

3) أ) أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\left(-\frac{1}{\alpha}\right)$ ثم احسب حدها الأول.

ب) أكتب عبارة v_n بدلالة n و u_n بدلالة n ثم احسب $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

جـ) عين قيم α حتى تكون المتتالية (v_n) متقاربة.

4) من أجل $\alpha=-2$ ، احسب بدلالة n الجداء : $P_n=(3-u_1)\times(3-u_2)\times\cdots\cdots\times(3-u_n)$.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I) الجدول المقابل يمثل تغيرات الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـــ : $g(x)=(2x+4)e^{\frac{x}{2}}-x-4$

x	$-\infty$ α β 0 $+\infty$
$g(x)$	$+\infty$ ↘ 0 ↘ $f(\beta)$ ↗ 0 ↗ $-\infty$

1) تحقق أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين أحدهما معدوم و الآخر $-5<\alpha<-4$.

2) استنتج إشارة $g(x)$.

II) لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـــ : $f(x)=x\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)^2$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ) احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

ب) بين أن المستقيم $(\Delta): y=x$ مقارب لــ (C_f) بجوار $-\infty$ ثم ادرس وضعه النسبي مع (C_f) .

2) أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x)=\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)^2+xe^{\frac{x}{2}}\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)$

ب) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $xe^{\frac{x}{2}}\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)\geq 0$ ، استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

جـ) تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f''(x)=\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}g(x)$ ثم استنتج أن (C_f) يقبل نقطتي انعطاف عينهما.

3) أ) أرسم (Δ) و (C_f) .

ب) عين بيانيا مجموعة قيم الأعداد الحقيقة m التي من أجلها يكون للمعادلة : $f(x)=\ln(m)x$ ثلاث حلول.

4) أ) تحقق أن الدالة F المعرفة على $\mathbb{R}$ بـــ : $F(x)=(x-1)e^x+(8-4x)e^{\frac{x}{2}}$ أصلية للدالة $x\mapsto x\left(e^x-2e^{\frac{x}{2}}\right)$.

ب) بين أن : $\int_{\ln 4}^{2} x\left(e^x-2e^{\frac{x}{2}}\right)dx=e^2-12+4\ln(4)$ ثم فسر النتيجة هندسيا.

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول (4 نقاط)

يحتوي كيس على خمس كريات خضراء تحمل الأرقام 0، 1، 1، 2، 2 و أربع كريات حمراء تحمل الأرقام 0، 1، 2، 3.

و كريتين بيضاوين تحملان الرقمين 1 و 2 ، كل الكريات متماثلة و لا نفرق بينها عند اللمس.

I) نسحب عشوائيا من الكيس ثلاث كريات في آن واحد .

1) نعتبر الحدثين : A "الحصول على ثلاث كريات مختلفة اللون مثنى مثنى و تحمل أرقاما فردية ".

B "الحصول على كرية خضراء واحدة فقط تحمل الرقم 2 ".

- بين أن $p(A)=\dfrac{4}{165}$ و $p(A)=\dfrac{24}{55}$.

2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب عدد الأرقام الأولية المتبقية في الكيس.

أ) برر أن مجموعة قيم المتغير العشوائي X هي $\{2;3;4;5\}$.

ب) عين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ثم بين أن أمله الرياضياتي $E(x)=\dfrac{40}{11}$.

II) ننزع من الكيس الكريتين البيضاوتين و نسحب منه عشوائيا ثلاث كريات على التوالي و بدون إرجاع.

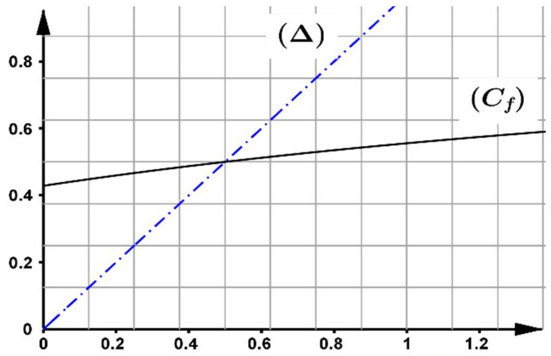
- بين احتمال أن تكون الكرية الأولى المسحوبة تحمل الرقم 0 و الثانية و الثالثة لها نفس الرقم هو $\dfrac{1}{21}$.

التمرين الثاني (05 نقاط)

I) لتكن الدالة f المعرفة على المجال $[0,+\infty[$ كما يلي : $f(x)=\dfrac{2x+3}{2x+7}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ و المستقيم $(\Delta): y=x$.

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بحدها الأول $u_0=1$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=f(u_n)$.

1) أ) أعد رسم الشكل على ورقة الإجابة ثم مثل الحدود u_0، u_1 و u_2 على حامل محور الفواصل دون حسابها.



ب) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $\dfrac{1}{2}\le u_n \le 1$.

جـ) بين أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما ثم استنتج أنها متقاربة.

2) أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}-\dfrac{1}{2}\le\dfrac{1}{8}\left(u_n-\dfrac{1}{2}\right)$.

ب) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $\left|u_n-\dfrac{1}{2}\right|\le\left(\dfrac{1}{2}\right)^{3n+1}$ ثم استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

II) (v_n) المتتالية الحسابية المتزايدة تماما حدودها تحقق : $log(v_4)+log(v_7)=2-2log(2)$.

- بين أن : $v_4=1$ و $v_7=25$ ثم استنتج عبارة الحد العام لـ v_n. (ارشاد حدد قواسم العدد 25).

التمرين الثالث: (04.5 نقاط)

I) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $(\overline{z}+1-\sqrt{2}+3i)(z^2-5z+25)=0$.

II) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ نعتبر النقط C,B,A التي لواحقها على الترتيب :

$z_A=\frac{5}{2}-i\frac{5\sqrt{3}}{2}$ ، $z_B=\overline{z_A}$ ، $z_C=z_A+z_B$.

1) اكتب العدد $\left(\frac{z_C-z_A}{z_C-z_B}\right)$ على الشكل الآسي ثم استنتج بدقة طبيعة المثلث ABC و الرباعي $AOBC$.

2) عين (Γ) مجموعة النقط M لاحقة z (M تختلف عن A و C) من المستوي بحيث : $\arg\left(\frac{z-z_A}{z-z_C}\right)=\pi+2k\pi$.

3) أ) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 5^n على 7.

ب) استنتج باقي قسمة العدد $\left(|Z_A|^{2025}+|Z_B|^{1447}\right)$ على 7.

جـ) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n=1+|z_A|+|z_A|^2+\cdots\cdots+|z_A|^n$.

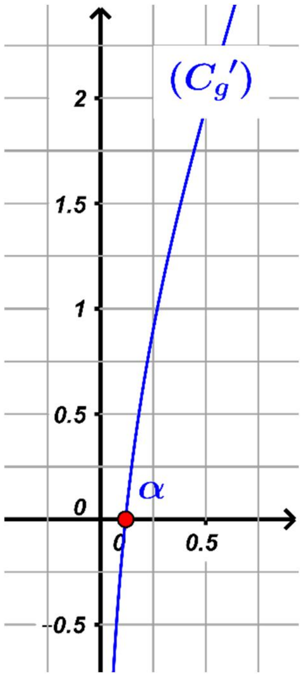
- احسب المجموع S_n بدلالة n ثم عين قيم العدد الطبيعي n بحيث : $4S_n\left(n^2+3\right)\equiv 0[7]$.

التمرين الرابع: (06.5 نقاط)

I) المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

g دالة معرفة و قابلة للإشتقاق على المجال $]0,+\infty[$ بـ : $g(x)=xlnx+e^x-1$

$(C_{g'})$ التمثيل البياني للدالة المشتقة g' للدالة g.



1) بقراءة بيانية استنتج اتجاه تغير الدالة g.

2) بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $0.3<\beta<0.4$.

3) استنتج إشارة $g(x)$.

II) لتكن الدالة f المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ بـ : $f(x)=\left(e^{-x^2}-1\right)lnx$.

(C_f) تمثيلها البياني في المعلم المتعامد و المتجانس.

1) بين أن $\lim_{x\to 0} f(x)=0$ ثم احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

2) أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0,+\infty[$: $f'(x)=-\frac{e^{-x^2}}{x}g\left(x^2\right)$

ب) استنتج أن الدالة f متزايدة تماما على $]0;\sqrt{\beta}]$ و متناقصة تماما على $[\sqrt{\beta};+\infty[$ ثم شكل جدول تغيراتها .

3) أ) بين أن $y=\left(\frac{1}{e}-1\right)x+1-\frac{1}{e}$ هي معادلة لـ (T) مماس المنحنى (C_f) في نقطة تقاطعه مع محور الفواصل.

ب) أرسم (T) و (C_f) ، نأخذ $f\left(\sqrt{\beta}\right)\approx 0.56$.

4) من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم نضع : $I_n=\int_{e^{-1}}^{1} x^n \ln x dx$.

- باستعمال التكامل بالتجزئة بين أن : $I_n=\frac{(n+2)e^{-n-1}-1}{(n+1)^2}$.

5) علما أنه من أجل كل x من المجال $\left[e^{-1},1\right]$: $-x^2\le e^{-x^2}-1\le -x^2+\frac{x^4}{2}$.

- استنتج حصرا لمساحة الحيز المستوي المحدد بـ (C_f) و المستقيمات التي معادلاتها $y=0$ ، $x=1$ و $x=e^{-1}$.

انتهى الموضوع الثاني

تصحيح الاختبار التجريبي في الرياضيات
« تقني رياضي »

الموضوع (I)

التمرين ①: 4 نقاط

① رئيس - نائب 1 - نائب 2 .

احتمال أن تكون هشام هو النائب الأول:

$P(H_1) = \frac{A_4^1 \cdot A_1^1 \cdot A_3^1}{A_5^3} = \frac{1}{5}$ 0,5

الإجابة (ب) 0,5

② $3R \_ 4B$

احتمال أن تكون كرة بيضاء على الأقل: $P(A)$

$\bar{A}$: حادثة الحصول على 0 كرة بيضاء

$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{3^n}{7^n}$ 0,5

$= 1 - \left(\frac{3}{7}\right)^n$

الإجابة (أ) 0,5

③ $Z = \frac{(\sqrt{3}+i)^{4n+1}}{(1-i\sqrt{3})^{4n}} = \frac{(\sqrt{3}+i)^{4n}(\sqrt{3}+i)}{(1-i\sqrt{3})^{4n}}$

$= \left(\frac{\sqrt{3}+i}{1-i\sqrt{3}}\right)^{4n} \cdot (\sqrt{3}+i) = (i)^{4n}(\sqrt{3}+i)$

$= (i^4)^n(\sqrt{3}+i)$ 0,5

$= 2e^{i\frac{\pi}{6}}$ 0,5 الإجابة (أ)

④ $Z\bar{Z} + 2Z - 5 - 2i = 0$

نضع: $Z = x+iy$ و $\bar{Z} = x - iy$

$(x+iy)(x-iy) + 2(x+iy) - 5 - 2i = 0$

$x^2+y^2+2x+2iy-5-2i=0$

$(x^2+y^2+2x-5)+(2y-2)i=0$

معناه: $2y-2=0$ و $x^2+y^2+2x-5=0$

منه $y=1$: $x^2+2x-4=0$ 0,5

$x_1 = -1+\sqrt{5}$ أو $x_2 = -1-\sqrt{5}$

ومنه حلول المعادلة:

$z_1 = -1+\sqrt{5}+i$ أو $z_2 = -1-\sqrt{5}+i$

الإجابة (أ) 0,5

التمرين ②: 4,75

① $5x - 6y = 3 \quad \ldots (E)$

$5x = 6y+3$

$5x = 3(2y+1)$

أي: $3|5x$ حيث $3 \wedge 5 = 1$

منه: $3|x$ إذن $x = 3k \,/\, k \in \mathbb{Z}$

$x \equiv 0[3]$ 0,25

إذن: x مضاعفا للعدد 3 .

. حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة:

لدينا من السؤال السابق $5x \equiv 3[6]$

$5x \equiv 15[6]$

$x \equiv 3[6] \Rightarrow x = 6k+3 \,/\, k\in\mathbb{Z}$

نعوضها في (E) نجد: $5(6k+3) - 6y = 3$

$6y = 30k+12$

منه: $y = 5k+2 \,/\, k \in \mathbb{Z}$ 0,5

$(x,y) = \{(6k+3\,;\,5k+2) \,/\, k \in \mathbb{Z}\}$.

② x و y أوليان فيما بينهما معناه:

$PGCD(x,y) = 1$

لدينا: $d|x$ و $d|y$ منه $d|5x-6y$

أي $d|3$ منه: $d \in \{1,3\}$ 0,25

. إذا كان $d=3$

أي: $\begin{cases} x \equiv 0[3] \\ y \equiv 0[3] \end{cases}$ و $\begin{cases} 6k+3 \equiv 0[3] \\ 5k+2 \equiv 0[3] \end{cases}$

منه: $k+1 \equiv 0[3]$

$k \equiv -1[3]$

$k \equiv 2[3]$

بالتالي: $k = 3p+2 \,/\, p \in \mathbb{N}$.

. إذا كان $d=1$ فإن: $k \neq 3p+2$

أي: $k=3p$ و $k=3p+1$ 0,25 0,25

إذن: الثنائيات الطبيعية:

$(x,y) = \{(18p+3\,;\,15p+2);(18p+9\,;\,15p+7) \,/\, p \in \mathbb{N}\}$ 0,25 0,25

③ بواقي قسمة 2^n على 9:

n	$6k$	$6k+1$	$6k+2$	$6k+3$	$6k+4$	$6k+5$
البواقي	1	2	4	8	7	5

6×0,25

ب- تعيين قيم العدد الطبيعي n:

$5 \times 1983^{5x-6y} - 10n + 1448^{2025} \equiv 2[9]$

لدينا: $1983 \equiv 3[9]$ 0,25

$1983^{5x-6y} \equiv 3^{5x-6y}[9]$

$\equiv 3^3[9]$

$\equiv 0[9]$ 0,25

$1448 \equiv 8\ [9]$

$1448 \equiv -1\ [9]$ (0,25)

$1448^{20225} \equiv (-1)^{20225}\ [9]$

$\equiv -1\ [9]$

$5 \times 1983^{5n-64} - 10n + 1448^{20225} \equiv 2\ [9]$

يكافئ:

$-10n - 1 \equiv 2\ [9]$

$-10n \equiv 3\ [9]$

$10n \equiv -3\ [9]$

$10n \equiv 6\ [9]$ (0,25)

$10n \equiv 60\ [9] \Rightarrow n \equiv 6\ [9]$

منه: $n = 9m+6$ حيث $m \in \mathbb{N}$

4) $\overline{12551}^{10} = \overline{30407}^{\alpha}$

$12551 = 7 + 4\alpha^2 + 3\alpha^4 \ ; \ \alpha > 8$ (0,25)

منه: $3\alpha^4 + 4\alpha^2 - 12544 = 0$

نضع: $\alpha^2 = t$

$3t^2 + 4t - 12544 = 0$

$t_1 = +64$ أو $t_2 = -\frac{196}{3}$ (مرفوض)

(0,25) منه: $\alpha_1 = 8$ أو $\alpha_2 = -8$

بالتالي: قيمة α هي: 8.

التمرين 3: (04,25)

$u_1 = \frac{5}{2}$

$u_{n+1} = 3 + \frac{n}{\alpha(n+1)}(3 - u_n) \ / \ \alpha \in \mathbb{R}^*_-$

$v_n = n(3 - u_n)$

1) البرهان بالتراجع: $u_n < 3$

التحقق من صحة الخاصية من أجل $n=1$

$u_1 = \frac{5}{2} < 3$ (محققة)

- نفرض صحة $P(n)$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ ونبرهن صحة $P(n+1)$.

لدينا: $u_n < 3$

$-u_n > -3$

$3 - u_n > 0$ (0,75)

$\frac{n}{\alpha(n+1)}(3-u_n) < 0$ لأن $\left(\frac{n}{\alpha(n+1)} < 0\right)$

$3 + \frac{n}{\alpha(n+1)}(3-u_n) < 3$

بالتالي: $u_{n+1} < 3$

ومنه: $P(n+1)$ صحيحة.

اذن: $P(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم.

2) $u_{n+1} - u_n = 3 + \frac{n}{\alpha(n+1)}(3-u_n) - u_n$

$= (3-u_n) + \frac{n}{\alpha(n+1)}(3-u_n)$

(0,5) $= (3-u_n)\left(1 + \frac{n}{\alpha(n+1)}\right)$

$= (3-u_n)\left(\frac{\alpha(n+1)+n}{\alpha(n+1)}\right)$

لدينا:

$3 - u_n > 0$

و $n + \alpha(n+1) < 0$ لأن $\alpha \in \mathbb{R}^*_-$

و $\alpha(n+1) < 0$ و $n+1 > n$

و $\alpha(n+1) < 0$

منه: $u_{n+1} - u_n > 0$ (0,25)

اذن: (u_n) متزايدة تماما

3) أ- $v_{n+1} = (n+1)(3 - u_{n+1})$

$= (n+1)\left(3 - 3 - \frac{n}{\alpha(n+1)}(3-u_n)\right)$

$= (n+1)\left(\frac{-n}{\alpha(n+1)}(3-u_n)\right)$ (0,5)

$= -\frac{n}{\alpha}(3-u_n)$

$= -\frac{1}{\alpha} v_n$

اذن: v_n هندسية أساسها $q = -\frac{1}{\alpha}$ وحدها الأول $v_1 = 3 - \frac{5}{2} = \frac{1}{2}$. (0,25)

ب- عبارة v_n بدلالة n:

$v_n = v_1 \times q^{n-1}$

$v_n = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{\alpha}\right)^{n-1}$ (0,5)

- عبارة u_n بدلالة n:

$v_n = 3n - nu_n$

$n \cdot u_n = 3n - v_n$

$u_n = 3 - \frac{1}{n} v_n = 3 - \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{\alpha}\right)^{n-1}$

$u_n = 3 - \frac{1}{2n}\left(-\frac{1}{\alpha}\right)^{n-1}$ (0,5)

$\lim_{n \to +\infty} u_n = 3 - \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{\alpha}\right)^{n-1}}{n} = 3$ (0,25)

جـ) قيمة α حتى تكون v_n متقاربة.

v_n متقاربة معناه $\lim_{n \to +\infty} v_n = 0$

أي $-1 < -\frac{1}{\alpha} < 1$ (0,25)

منه $-1 < \frac{1}{\alpha} < +1$

منه : $\frac{1}{\alpha} < 1$ و $\frac{1}{\alpha} > -1$

أي: $\underbrace{\alpha > 1}_{\text{مرفوض}}$ و $\alpha < -1$

و منه $\alpha \in \mathbb{R}^*_-$. اذن: $\alpha \in]-\infty;-1[$

4) من أجل $\alpha = -2$: $v_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

لدينا: $v_n = n(3-u_n)$

$3-u_n = \frac{v_n}{n}$

$$\left.\begin{array}{l} 3-u_1 = v_1 \\ 3-u_2 = \frac{v_2}{2} \\ \vdots \\ 3-u_n = \frac{v_n}{n} \end{array}\right\} \Rightarrow (3-u_1)(3-u_2)\cdots(3-u_n) = v_1 \times \frac{v_2}{2} \cdots \frac{v_n}{n}$$

$P_n = \frac{v_1 \times v_2 \times \dots \times v_n}{1 \times 2 \times \dots \times n}$ (0,5)

$P_n = \frac{\left(\frac12\right)\cdot\left(\frac12\right)^2 \cdots \left(\frac12\right)^n}{n!} = \frac{\left(\frac12\right)^{1+2+\dots+n}}{n!}$

$P_n = \frac{1}{n!}\left(\frac12\right)^{\frac{n}{2}(1+n)} = \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{2}^{\frac12}\right)^{n^2+n} = \frac{1}{n!}\left(\frac{\sqrt2}{2}\right)^{n^2+n}$

التمرين 4 : 7 نقاط

$g(x) = (2x+4)e^{\frac{x}{2}} - x - 4$

$g(0) = 0$. (0,25)

g دالة مستمرة ورتيبة (متناقصة) على $[-5;-4]$

و $g(-5) \times g(-4) < 0$ (0,5)

حسب مبرهنة القيم المتوسطة $g(x)=0$ تقبل حل وحيد α حيث $\alpha \in]-5;-4[$

إشارة $g(x)$: (0,25)

x	$-\infty$		α		0	
إشارة $g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$

II) $f(x) = x\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)^2$

1) أ- • $\lim_{x\to+\infty} x\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)^2 = +\infty$ (0,5)

• $\lim_{x\to-\infty} x\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)^2 = -\infty$ (0,5)

ب- $\lim_{x\to-\infty}(f(x)-y) = \lim_{x\to-\infty}\left(x\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)^2 - x\right)$

$\lim_{x\to-\infty}\left(x\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)^2 - 1\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(x\left(e^{x} - 2e^{\frac{x}{2}} + 1 - 1\right)\right)$

$\lim_{x\to-\infty}\left(x\left(e^{x} - 2e^{\frac{x}{2}}\right)\right) = \lim_{x\to-\infty} xe^{x} - 2xe^{\frac{x}{2}}$ (0,5)

$= 0$

اذن: $y = x$: (Δ) مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $-\infty$.

الوضع النسبي: $f(x) - y = x\left(e^{x} - 2e^{\frac{x}{2}}\right)$

$x\left(e^{x} - 2e^{\frac{x}{2}}\right) = 0$ معناه $x = 0$ أو $e^{x}\left(1-2e^{-\frac{x}{2}}\right) = 0$

$-2e^{-\frac{x}{2}} + 1 = 0$

أي $e^{-\frac{x}{2}} = 1/2$ منه: $-\frac{x}{2} = \ln\frac12$ (0,25)

$x = -2\ln\frac12 = -\ln\frac14 = \ln 4$

(0,75)

x	$-\infty$		0		$\ln 4$		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$1-2e^{-\frac{x}{2}}$		$-$		$-$	0	$+$	
		$+$	0	$-$	0	$+$	
الوضع النسبي		(C_f) فوق (Δ)	(C_f) يقطع (Δ) $(0,0)$	(C_f) تحت (Δ)	(C_f) يقطع (Δ) $(\ln4, \ln4)$	(C_f) فوق (Δ)	

2) أ- المشتقة :

$f'(x) = \left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)^2 + 2\left(\frac12 e^{\frac{x}{2}}\right)\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)x$

$= \left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)^2 + xe^{\frac{x}{2}}\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)$ (0,5)

ب- اشارة $xe^{\frac{x}{2}}\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)$ (0,25)

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x		$-$	0	$+$	
$e^{\frac{x}{2}}-1$		$-$	0	$+$	
$xe^{\frac{x}{2}}\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)$		$+$	0	$+$	

منه: $f'(x) \geq 0$

اذن: f متزايدة تماما (0,25)

- جدول التغيرات :

(0,5)

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

ج- حساب $f''(x)$

$f'(x) = \left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)^2 + x\left(e^{x} - e^{\frac{x}{2}}\right)$

$f''(x) = 2\left(\frac12 e^{\frac{x}{2}}\right)\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right) + \left(e^{x} - e^{\frac{x}{2}}\right) + \left(e^{x} - \frac12 e^{\frac{x}{2}}\right)x$

$= 1e^{\frac{x}{2}}\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right) + e^{x} - e^{\frac{x}{2}} + xe^{x} - \frac12 xe^{\frac{x}{2}}$

$= \frac12\left(2e^{x} - 2e^{\frac{x}{2}} + 2e^{x} - 2e^{\frac{x}{2}} + 2xe^{x} - xe^{\frac{x}{2}}\right)$

$= \frac12\left(4e^{x} - 4e^{\frac{x}{2}} + 2xe^{x} - xe^{\frac{x}{2}}\right)$ (تحذف)

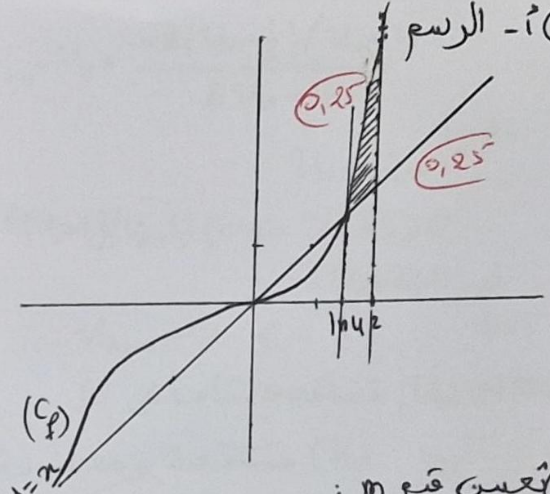
$= \frac12 e^{\frac{x}{2}}\left(4e^{\frac{x}{2}} - 4 + 2xe^{\frac{x}{2}} - x\right)$

$= \frac12 e^{\frac{x}{2}}\left[(2x+4)e^{\frac{x}{2}} - x - 4\right]$

$= \frac12 e^{\frac{x}{2}} \cdot g(x)$

3)

③ أ- الرسم



ب) تعيين قيم m :

المعادلة: $f(x)=\ln(m)x$ تقبل 3 حلول لما

$0<\ln m<1$ أي: $\boxed{1<m<e}$ 0,25

④ - أ- التحقق:

$F'(x)=e^x+(x-1)e^x-4e^{\frac{x}{2}}+\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}(8-4x)$

0,5 $=\cancel{e^x}+xe^x-\cancel{e^x}-4\cancel{e^{\frac{x}{2}}}+4\cancel{e^{\frac{x}{2}}}-2xe^{\frac{x}{2}}$

$=x(e^x-2e^{\frac{x}{2}})=f(x)-y$ (سؤال 1-ب)

$\int_{\ln4}^{2}x(e^x-2e^{\frac{x}{2}})dx=\left[(x-1)e^x+(8-4x)e^{\frac{x}{2}}\right]_{\ln4}^{2}$

0,75 $=e^2-4\ln4+4-16+8\ln4$

$=e^2+4\ln4-12$

التفسير الهندسي: مساحة الحيز من المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) والمستقيمين $x=\ln4$ ، $x=2$

الموضوع II

B₁ B₂ R₁ R₂ R₃ R₄ V₁ V₂ V₃ V₄ V₅

التمرين ①: 4 نقاط

I- عدد الإمكانيات: C_{11}^3

$P(A)=\frac{C_2^1\times C_2^1\times C_1^1}{C_{11}^3}=\frac{4}{165}$ 0,5

$P(B)=\frac{C_2^1\times C_9^2}{C_{11}^3}=\frac{24}{55}$ 0,5

② مجموعة قيم X :

أرقام أولية: 5 .

غير أولية : 6 .

1

سحب ثلاث أرقام أولية ← $X=2$

سحب رقمين أوليين ← $X=3$

سحب رقم أولي ← $X=4$

عدم سحب رقم أولي ← $X=5$

x_i	2	3	4	5
$P(X=x_i)$	$\frac{2}{33}$	$\frac{4}{11}$	$\frac{5}{11}$	$\frac{4}{33}$

1

$P(X=2)=\frac{C_5^3}{C_{11}^3}=\frac{2}{33}$

$P(X=3)=\frac{C_5^2\times C_6^1}{C_{11}^3}=\frac{4}{11}$

$P(X=4)=\frac{C_5^1\times C_6^2}{C_{11}^3}=\frac{5}{11}$

$P(X=5)=\frac{C_6^3}{C_{11}^3}=\frac{4}{33}$

ب- الأمل الرياضياتي:

$E(X)=\sum_{i=1}^{4}x_ip_i=2\cdot\frac{2}{33}+3\cdot\frac{4}{11}+4\cdot\frac{5}{11}+5\cdot\frac{4}{33}$

$=\frac{40}{11}$ 0,5

II -

V: 0, 1, 1, 2, 2

R: 0, 1, 2, 3 .

$P(C)=\frac{A_2^1\times A_3^2+A_2^1\times A_3^2}{A_9^3}=\frac{1}{21}$ 0,5

التمرين ②: 6 نقاط

I 1- أ- الرسم: 0,75

I 1- ب: البرهان بالتراجع:

- نتحقق من صحة $P(0)$:

0,75 $\frac{1}{2}<u_0=1\leq1$ (محققة)

- نفرض صحة $P(n)$ من أجل كل عدد طبيعي n أي

$\frac{1}{2}<u_n\leq1$

ونبرهن صحتها من أجل $n+1$

- لدينا: $\frac{1}{2}<u_n\leq1$

منه: $f(\frac{1}{2})<f(u_n)\leq f(1)$ (f متزايدة تماما)

$\frac{1}{2}<u_{n+1}\leq\frac{5}{9}<1$

بالتالي: الخاصية صحيحة من أجل $n+1$.

ومنه: $P(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n.

جـ- اتجاه تغير المتتالية:

$u_{n+1}-u_n=\frac{2u_n+3}{2u_n+7}-u_n=\frac{2u_n+3-2u_n^2-7u_n}{2u_n+7}$ 0,5

$=\frac{-2u_n^2-5u_n+3}{2u_n+7}$

$$U_{n+1}-U_n=\frac{-2(U_n-\frac{1}{2})(U_n+3)}{2U_n+7}$$

لدينا: $U_n-\frac{1}{2}\geqslant 0$

$-2(U_n-\frac{1}{2})(U_n+3)\leqslant 0$ منه $U_n+3\geqslant 0$

و $2U_n+7\geqslant 0$

اذن: $U_{n+1}-U_n\leqslant 0$

بالتالي (U_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$.

• التقارب: (U_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل فهي متقاربة. 0,25

2) أ- $U_{n+1}-\frac{1}{2}=\frac{2U_n+3}{2U_n+7}-\frac{1}{2}$

$$=\frac{4U_n+6-2U_n-7}{2(2U_n+7)}=\frac{2U_n-1}{2(2U_n+7)}$$ 0,5

$$=\frac{2(U_n-\frac{1}{2})}{2(2U_n+7)}=\frac{U_n-\frac{1}{2}}{2U_n+7}$$

• لدينا: $\frac{1}{2}\leqslant U_n\leqslant 1$ منه: $1\leqslant 2U_n\leqslant 2$

و $8\leqslant 2U_n+7\leqslant 9$

بالتالي: $\frac{1}{9}\leqslant\frac{1}{2U_n+7}\leqslant\frac{1}{8}$

ولدينا: $U_n-\frac{1}{2}\geqslant 0$

اذن: $\frac{U_n-\frac{1}{2}}{2U_n+7}\leqslant\frac{1}{8}(U_n-\frac{1}{2})$

بالتالي: $U_{n+1}-\frac{1}{2}\leqslant\frac{1}{8}(U_n-\frac{1}{2})$

ب- الاستنتاج:

لدينا: $U_{n+1}-\frac{1}{2}\leqslant\frac{1}{8}(U_n-\frac{1}{2})$

$n=0$: $|U_1-\frac{1}{2}|\leqslant\frac{1}{8}\;U_0-\frac{1}{2}$

$n=1$: $|U_2-\frac{1}{2}|\leqslant\frac{1}{8}\;U_1-\frac{1}{2}$

$\vdots$

$|U_n-\frac{1}{2}|\leqslant\frac{1}{8}\;U_{n-1}-\frac{1}{2}$

بالضرب طرفا لطرف نجد:

$$|U_n-\frac{1}{2}|\leqslant\left(\frac{1}{8}\right)^n|U_0-\frac{1}{2}|$$ 0,5

$$\leqslant\left(\frac{1}{8}\right)^n\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\leqslant\left(\frac{1}{2^3}\right)^n\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^{3n}\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$|U_n-\frac{1}{2}|\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^{3n+1}$$

استنتاج النهاية:

$\lim\limits_{n\to+\infty}U_n$

$$\lim_{n\to+\infty}|U_n-\frac{1}{2}|=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{3n+1}=0.$$

$$\lim_{n\to+\infty}|U_n-\frac{1}{2}|=0$$ 0,25

منه: $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=\frac{1}{2}$.

II

(v_n) حسابية متزايدة

$\log(v_4)+\log(v_7)=2-2\log 2$

$\log(v_4)+\log(v_7)+2\log 2=2$

$\log(v_4)+\log(v_7)+\log 4=2$

$\log(v_4\times v_7\times 4)=2$ حيث $v_4>0$ و $v_5>0$

$\frac{\ln(v_4\times v_7\times 4)}{\ln 10}=2$ log معرفة على المجال $]0,+\infty[$.

$\ln(4v_4\times v_7)=2\ln 10$ 0,25

$\ln(4v_5\cdot v_7)=\ln 100$

منه: $4v_5\cdot v_7=100$

$v_5\cdot v_7=25$

$\begin{cases}v_5=25\\ v_7=1\end{cases}$ أو $\begin{cases}v_5=1\\ v_7=25\end{cases}$ أو $\begin{cases}v_5=5\\ v_7=5\end{cases}$

بما أن المتتالية حسابية متزايدة فإن: العبارة: 0,75

$v_5=1$ 0,25 و $v_7=25$ 0,25

التمرين ③: 4,5 نقاط

I- حل المعادلة:

$(\bar{Z}+1-\sqrt{2}+3i)(z^2-5z+25)=0$ $\Delta=5\sqrt{3}i$ 0,25

$\bar{Z}=-1+\sqrt{2}-3i$; $z_2=\frac{5-5\sqrt{3}i}{2}$; $z_3=\frac{5+5\sqrt{3}i}{2}$

$z_1=-1+\sqrt{2}+3i$ 0,25 0,25 0,25

$S=\left\{-1+\sqrt{2}+3i;\ \frac{5-5\sqrt{3}i}{2};\ \frac{5+5\sqrt{3}i}{2}\right\}$

$(5^{n+1}-1)(n^2+3)\equiv 0[7]$

$5^{n+1}\equiv 1[7]$ أو $n^2\equiv 4[7]$

$5^{n+1}\equiv 5^{6k}[7]$

$n+1=6k$ 0,25

$n=6k-1 / k\in\mathbb{N}^*$

0,25

n	0	1	2	3	4	5	6
n^2	0	1	4	2	2	4	1

$n\equiv 2[7]$; $n\equiv 4[7]$

$n=7k+2 / k\in\mathbb{N}$ 0,25

$n=7k+5$ أو $k\in\mathbb{N}$

التمرين ④ : 6,5

$g(x)=x\ln x+e^x-1$

①

x	0	α	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$

. الدالة g متناقصة تماما على $]0;\alpha]$ 0,5

وتزايدية تماما على $[\alpha;+\infty[$.

② بما أن g مستمرة وتزايدية تماما على $[0,3;0,4]$

$g(0,3)\times g(0,4)<0$ 0,5

فإن حسب مبرهنة القيم المتوسطة $g(x)=0$

تقبل حلا وحيدا β حيث $g(\beta)=0$

$-$	β	$+$	

0,5

(II) $f(x)=(e^{-x^2}-1)\ln x$

• $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \underbrace{\left(\frac{e^{-x^2}-1}{-x^2}\right)}_{1}\underbrace{(-x^2)\ln x}_{0}=0$ 0,25

• $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^{-x^2}-1)\underbrace{\ln x}_{+\infty}=-\infty$ 0,25

③ أ- بواقي قسمة 5^n على 7 . 0,5

n	6k	6k+1	6k+2	6k+3	6k+4	6k+5
البواقي	1	5	4	6	2	3

ب- استنتاج باقي قسمة $|z_A|^{2025}+|z_B|^{1447}$ على 7

$|z_A|=5=|z_B|$

$|z_A|^{2025}=5^{2025}$

$5^{2025}\equiv 5^{6k+3}[7]$ 0,25

$5^{1447}\equiv 5^{6k+1}[7]$ 0,25

$|z_A|^{2025}+|z_B|^{1447}\equiv 5^{6k+3}+5^{6k+1}[7]$

$\equiv 6+5[7]$

$\equiv 11[7]$

$\equiv 4[7]$ 0,25

الباقي هو: 4 .

جـ- المجموع

$S_n=1+|z_A|+|z_A|^2+\dots+|z_A|^n$

$S_n=1+5+5^2+\dots+5^n$

متتالية هندسية أساسها 5 حدها الأول 1 .

$S_n=\frac{1-5^{n+1}}{1-5}=-\frac{1}{4}(1-5^{n+1})$

$S_n=\frac{1}{4}(5^{n+1}-1)$. 0,25

- قيم العدد الطبيعي n :

$4S_n(n^2+3)\equiv 0[7]$

$4\times\frac{1}{4}(5^{n+1}-1)(n^2+3)\equiv 0[7]$

(II) $z_A=\frac{5}{2}-i\frac{5\sqrt3}{2}$; $z_B=\overline{z_A}$; $z_C=z_A+z_B$

① الشكل الأسي للعدد: $\frac{z_C-z_A}{z_C-z_B}$

$\frac{z_C-z_A}{z_C-z_B}=\frac{z_B}{z_A}=\frac{\overline{z_A}}{z_A}$

$\left|\frac{z_B}{z_A}\right|=\frac{|\overline{z_A}|}{|z_A|}=1$

$\left(\frac{z_B}{z_A}\right)=\frac{\frac{5}{2}+i\frac{5\sqrt3}{2}}{\frac{5}{2}-i\frac{5\sqrt3}{2}}=\frac{5\left(\frac12+i\frac{\sqrt3}{2}\right)}{5\left(\frac12-i\frac{\sqrt3}{2}\right)}$

$=\frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{e^{-i\frac{\pi}{3}}}=e^{i\frac{2\pi}{3}}$ 0,5

حيث:

$\begin{cases}\arg\left(\frac{z_B}{z_A}\right)=\frac{2}{3}\pi+2k\pi\\ \left|\frac{z_B}{z_A}\right|=1\end{cases}$ 0,25

منه المثلث متساوي الساقين .

طبيعة الرباعي: AOBC

$\begin{cases}AO=BO\\ \frac{z_O+z_C}{2}=\frac{z_A+z_B}{2}\end{cases}$; $\vec{AB}\perp\vec{OC}$ 0,25

الرباعي AOBC معين .

② مجموعة النقط :

$\arg\left(\frac{z-z_A}{z-z_C}\right)=\pi+2k\pi$ 0,25

مجموعة النقط هي القطعة $[AC]$

باستثناء النقطتين A و C .

6

2) أ- المشتقة:

$f'(x) = (-2xe^{-x^2})\ln x + \frac{1}{x}(e^{-x^2}-1)$

$= -2xe^{-x^2}\ln x + \frac{e^{-x^2}}{x} - \frac{1}{x}$

$= -\frac{1}{x}(2x^2e^{-x^2}\ln x - e^{-x^2} + 1)$

$= -\frac{1}{x}e^{-x^2}(2x^2\ln x - 1 + e^{x^2})$

$= -\frac{1}{x}e^{-x^2}(x^2\ln x^2 + e^{x^2} - 1)$

$= -\frac{e^{-x^2}}{x}\, g(x^2)$ 0,75 $\boxed{2\ln x = \ln x^2}$

ب- استنتاج اتجاه التغير:

لدينا: $x\in]0;+\infty[$

$g(x^2)=0$ أي $x^2=\beta \Rightarrow \begin{cases} x=\sqrt{\beta} \\ x=-\sqrt{\beta} \text{ مرفوض} \end{cases}$ 0,5

$x>\sqrt{\beta}$ أي $x^2>\beta$ لما $g(x^2)>0$

$x<\sqrt{\beta}$ أي $x^2<\beta$ لما $g(x^2)<0$

منه: f متزايدة تماما على $]0;\sqrt{\beta}]$ و متناقصة على $[\sqrt{\beta};+\infty[$ 0,5

جدول التغيرات:

x	0		$\sqrt{\beta}$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	0	↗	$f(\sqrt{\beta})$	↘	$-\infty$

0,5

3- أ- معادلة المماس (T):

تقاطع (C_f) مع محور الفواصل معناه $f(x)=0$

$(e^{-x^2}-1)\ln x = 0$

$\ln x = 0$ أو $e^{-x^2}-1=0$

$x=1$ أو $x=0 \notin]0;+\infty[$

منه: $\boxed{x=1}$

معادلة المماس عند الفاصلة 1:

$y=f'(1)(x-1)+f(1)$

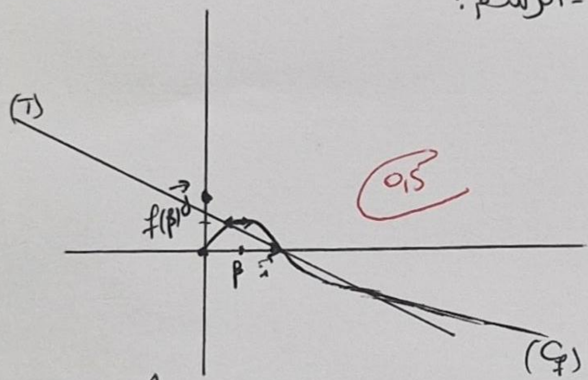
$= -e^{-1}(e-1)(x-1)+0$

$= -\frac{1}{e}(e-1)(x-1) = (-1+\frac{1}{e})(x-1)$

$= -x+1+\frac{x}{e}-\frac{1}{e}$

$(T): y=(\frac{1}{e}-1)x+1-\frac{1}{e}$ 0,5

ب- الرسم:



0,5

4- $I_n = \int_{e^{-1}}^{1} x^n \ln x\,dx$

نضع: $u(x)=\ln x \longmapsto u'(x)=\frac{1}{x}$

$v(x)=\frac{1}{n+1}x^{n+1} \longrightarrow v'(x)=x^n$

$I_n = \left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\ln x\right]_{e^{-1}}^{1} - \frac{1}{n+1}\int_{e^{-1}}^{1} \frac{x^{n+1}}{x}\,dx$

$= \frac{e^{-n-1}}{n+1} - \frac{1}{n+1}\int_{e^{-1}}^{1} x^n\,dx$

$I_n = \frac{e^{-n-1}}{n+1} - \left[\frac{1}{(n+1)^2}x^{n+1}\right]_{e^{-1}}^{1}$

$= \frac{e^{-n-1}}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{e^{-n-1}}{(n+1)^2}$

$= \frac{(n+1)e^{-n-1} - 1 + e^{-n-1}}{(n+1)^2}$

$= \frac{(n+2)(e^{-n-1})-1}{(n+1)^2}$ 0,75

5) $-x^2 \le e^{-x^2}-1 \le -x^2+\frac{x^4}{2}$

نعلم أن:

x	0		1		$+\infty$
إشارة $\ln x$		−	0	+	

$[e^{-1};1]\subset[0;1]$

$(-x^2+\frac{x^4}{2})\ln x \le (e^{-x^2}-1)\ln x \le -x^2\ln x$

$(-x^2+\frac{x^4}{2})\ln x \le f(x) \le -x^2\ln x$

$\int_{e^{-1}}^{1}(-x^2+\frac{x^4}{2})\ln x \le \int_{e^{-1}}^{1} f(x)\,dx \le \int_{e^{-1}}^{1}(-x^2\ln x)\,dx$

لدينا: $\int_{e^{-1}}^{1} +x^2\ln x\,dx = I_2$. 0,75

$\int_{e^{-1}}^{1}(-x^2\ln x+\frac{1}{2}x^4\ln x)\,dx = -I_2+\frac{1}{2}I_4$

$-I_2+\frac{1}{2}I_4 \le \int_{e^{-1}}^{1} f(x)\,dx \le -I_2$

7) $-\frac{4e^{-3}-1}{9} + \frac{6e^{-5}-1}{50} \le \int_{e^{-1}}^{1} f(x)\,dx \le -\frac{4e^{-3}-1}{9}$

ومنه: $0{,}007 \le \int_{e^{-1}}^{1} f(x)\,dx \le 0{,}009$