BEM2025

في الرياضيات

مع الأستاذ هلال خالد

مُلخص الرياضيات في اجتياز
شهادة التعليم المتوسط BEM2025

✓ لمزيد من المعلومات:

- فايسبوك: الرياضيات مع الأستاذ هلال خالد
- انستغرام: Prof_khaled_mathpro

زكاة العلم نشره
دعواتكم للوالد بالرحمة والمغفرة

الرياضيات ليست مُجرّد ضرورة
نقطة وإنما ضرورة حياة

1) القاسم المُشترك الأكبر لعددين طبيعيين (انتبه عددين طبيعيين!)

حسابه توجد ثلاث طُرق أفضلها خوارزمية اقليدس.

في كل طريقة نحسب الـ PGCD للعددين 1053 و 832.

☺ الطريقة الأولى خوارزمية اقليدس(الأكثر استعمالا)

مثال $1053 = 832 \times 1 + 221$

$832 = 221 \times 3 + 169$

$221 = 169 \times 1 + 52$

$169 = 52 \times 3 + 13$

$52 = 13 \times 4 + 0$

آخر باق غير معدوم هو 13 ومنه

$PGCD(1053; 832) = 13$

☺ الطريقة الثانية خوارزمية الفروق المُتتالية

مثال حساب الـ $PGCD(1053; 832)$

$1053 - 832 = 221$ ؛ $832 - 221 = 611$

$611 - 221 = 390$ ؛ $390 - 221 = 169$

$221 - 169 = 52$ ؛ $169 - 52 = 117$

$117 - 52 = 65$ ؛ $65 - 52 = 13$ ؛

$52 - 13 = 39$ ؛ $39 - 13 = 26$ ؛

$26 - 13 = 13$ ؛ $13 - 13 = 0$.

فحسب الخوارزمية فإن $PGCD(13; 39) = 13$.

☺الطريقة الثالثة إيجاد القواسم المُشتركة

مثال نحسُب الـ $PGCD(12; 21)$.

لدينا... $\sqrt{12} = 3,464$، فنقسم إذن العدد 12 على الأعداد 1؛2 و 3 ونجد *قواسم* 12 *هي:* 1؛ 2؛ 3؛ 4؛ 6؛12.

لدينا... $\sqrt{21} = 4,582$، فنقسم إذن العدد 21 على الأعداد 1؛2؛3و4 ونجد *قواسم* 21 *هي:* 1؛ 3 ؛ 7؛ 21.

القواسم المشتركة هي 1 و3 إذن: $PGCD(12; 21) = 3$.

ملاحظة أحيانا في طريقة إقليدس أول مُساواة في القسمة الإقليدية يكون باقيها يساوي 0، فنقول أن القاسم المُشترك الأكبر للعددين هو أصغرهما.

مثال: نحسُب الـ$PCD(21,4200)$ باستعمال طريقة إقليدس، نجد: $4200 = 21 \times 200 + 0$. إذن: $PGCD(21; 4200) = 21$.

توظيفه يُستعمل القاسم المُشترك الأكبر لعددين في اختزال كسر(تبسيط كسر)، فاختزال كسر $\frac{a}{b}$ ، نقسم a و b على القاسم المُشترك الأكبر لهما. مثال نُريد اختزال الكسر $\frac{832}{1053}$

لدينا الـ $PGCD(1053; 832) = 13$ إذن، $\frac{832}{1053} = \frac{832 \div 13}{1053 \div 13} = \frac{64}{81}$

ملاحظة توجد كسور لا يُمكن اختزالها، إذا كان الـ $PGCD(a; b) = 1$

مثال نُريد اختزال الكسر $\frac{31}{61}$: لدينا الـ $PGCD(31; 61) = 1$، إذن الكسر $\frac{31}{61}$ غير قابل للاختزال.

2) قواعد قابلية القسمة

يقبل عدد القسمة على 2 إذا كان رقم آحاده عدد زوجي.

مثال العدد 124 يقبل القسمة على 2،لأن رقم آحاده 4

يقبل عدد القسمة على 5 إذا كان رقم آحاده 0 أو 5

مثال العدد 186930 يقبل القسمة على 5 لأن رقم آحاده 0

يقبل عدد القسمة على 4 إذا كان العدد المُشكل من رقمي آحاده وعشراته من مضاعفات العدد 4.

مثال العدد 77952 يقبل القسمة على 4 لأن 52 من مضاعفات 4.

يقبل عدد القسمة على 3 إذا كان مجموع أرقامه من مضاعفات 3.

مثال العدد 405 يقبل القسمة على 3 لأن مجموع أرقامه $(5 + 0 + 4)$ يُساوي 9 وهو مضاعف لـلعدد 3.

يقبل عدد القسمة على 9 إذا كان مجموع أرقامه من مضاعفات 9 .

مثال العدد 2565 يقبل القسمة على 9 لأن مجموع أرقامه $(5 + 6 + 5 + 2)$ هو مضاعف للعدد 9.

على فايسبوك: مع الأستاذ هلال خالد الرياضيات	على انستغرام: Prof_khaled_mathpro

لا تُجامل في أمر يخص سعادتك ووقتك ..

لا تُجالس المُتذمر ولو لثانية ..

يقبل عدد القسمة على 6 إذا كان يقبل القسمة على 2 و 3معا

أمثلة 12576 قابل للقسمة على 2 لأن آخر أرقامه و هو 6 زوجي.

12576 قابل للقسمة على 3 لأن مجموع أرقامه يُساوي 21 وهو قابل للقسمة على 3 إذن 12576 يقبل القسمة على 6.

3) معرفة العددين الأوليان فيما بينهما

العددان الأوليان فيما بينهما هما كل عددين قاسمهما المُشترك الأكبر يُساوي 1.

كيف أعرف أن عددين غير أوليان فيما بينهما؟!

الطريقة الأولى ممكنة دوما (حساب القاسم المُشترك الأكبر للعددين) مثال 126 و 75 غير أوليان فيما بينهما لأن الـ $PGCD(75;126)=3\neq 1$	**الطريقة الثانية** ممكنة إذا عرف للعددين قاسم مشترك يختلف عن 1 (استعمال قواعد قابلية القسمة) مثال 126 و 75 غير أوليان، لأنهما يقبلان قاسما مُشتركا آخر هو العدد 3.

4) قواعد الحساب على قوى العدد 10(3 قواعد)

$10^n\times 10^m=10^{n+m}$ مثال $10^4\times 10^{-1}=10^{4+(-1)}$ $=10^3$	$(10^n)^m=10^{n\times m}$ مثال $(10^7)^3=10^{7\times 3}$ $=10^{21}$	$\frac{10^n}{10^m}=10^{n-m}$ مثال $\frac{10^6}{10^{-23}}=10^{6-23}=10^{6+23}=10^{29}$

5) الكتابة العلمية

لعدد عدد عشري A هي من الشكل $a\times 10^n$ حيث n عدد صحيح نسبي و a عدد عشري برقم قبل الفاصلة غير معدوم (لا يُساوي 0).

أمثلة $51000=5{,}1\times 10^4$ ؛ $14{,}07=1{,}407\times 10^1$ ؛ $0{,}000085=8{,}5\times 10^{-5}$

تطبيق اكتُب العددين A و B كتابة علمية، حيث $A=\frac{25\times 10^{33}\times 5\times 10^{-6}}{80\times 10^{44}\times 5}$ ؛ $B=0{,}00000026\times 10^3$

حل مختصر	$A=\frac{25\times 5}{80\times 5}\times\frac{10^{33}\times 10^{-6}}{10^{44}}$ $=3{,}125\times 10^{-18}$	$B=0{,}00000026\times 10^3=2{,}6\times 10^{-4}$

6) قواعد الحساب على القوى (5 قواعد)

$a^n\times a^m=a^{n+m}$ مثال $8^3\times 8^{-5}=8^{3+(-5)}=8^{-2}$	
$(a^n)^m=a^{n\times m}$ مثال $(7^{-3})^6=7^{-3\times 6}=7^{-18}$	$\frac{a^n}{a^m}=a^{n-m}$ مثال $\frac{12^{-2}}{12^6}=12^{-2-6}=12^{-8}$
$a^n\times b^n=(a\times b)^n$ مثال $5^4\times 9^4=(5\times 9)^4=45^4$	$\frac{a^n}{b^n}=\left(\frac{a}{b}\right)^n$ مثال $\frac{-6^7}{3^7}=\left(\frac{-6}{3}\right)^7=(-2)^7$

7) العلاقات الخاصة في الحساب على القوى (5 قواعد)

$a^0=1$ مثال $(-2)^0=1$ $(41)^0=1$	$a^1=a$ مثال $4^1=4$ $(-5)^1=-5$	$a^n\times a^{-n}=1$ مثال $3^9\times 3^{-9}=1$ $40^{-10}\times 40^{10}=1$	$\frac{a^n}{a^n}=1$ مثال $\frac{30^5}{30^5}=1$ ؛ $\frac{12^{-60}}{12^{-60}}=1$

إذا كان n عددا زوجيا فإن $(-1)^n=1$ مثال $(-1)^6=1$ ؛ $(-1)^{20}=1$	إذا كان n عددا فرديا فإن $(-1)^n=-1$ مثال $(-1)^3=-1$ ؛ $(-1)^{27}=-1$

كُلّما ازداد الإنسان غباوة، كلما ازداد يقينا أنه أفضل من غيره في كل شيئ، فلا تكن هذا الإنسان.

أُطلب العلم ولا تكسل به * فما أبعد العلم عن أهل الكسل

8) العمليات على الكسور

جمع (أو طرح) كسرين

أ) لهما نفس المقام

لجمع(أو لطرح) كسرين لهما نفس المقام، نجمع البسطين ونحتفظ بنفس المقام.

a و b و c أعداد عُشرية حيث $(c \neq 0)$

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}$$

مثال1

$$\frac{5}{11}+\frac{23}{11}=\frac{5+23}{11}=\frac{28}{11}$$

مثال2

$$\frac{3}{7}-\frac{2}{7}=\frac{3-2}{7}=\frac{1}{7}$$

ب) ليس لهما نفس المقام

لجمع(أو لطرح) كسرين ليس لهما نفس المقام، نُوحد المقامين وبعد ذلك ثم نجمع البسطين ونحتفظ بنفس المقام.

أ. مقام أحدهما مُضاعف للآخر

a و b و c و d أعداد عُشرية $(d \neq 0$ و $c \neq 0)$

$$\frac{a}{d}+\frac{b}{c}$$

d مُضاعف لـ c:

$$\frac{a}{d}+\frac{b}{c}=\frac{a}{d}+\frac{b\times k}{c\times k} \quad (\text{حيث } k=\frac{d}{c})$$

مثال1

$$\frac{17}{108}-\frac{2}{18}=\frac{17}{108}-\frac{2\times 6}{18\times 6}=\frac{17}{108}-\frac{12}{108}=\frac{17-12}{108}=\frac{5}{108}$$

$$\frac{108}{18}=6$$

c مُضاعف لـ d:

$$\frac{a}{d}+\frac{b}{c}=\frac{a\times k}{d\times k}+\frac{b}{c} \quad (\text{حيث } k=\frac{c}{d})$$

مثال2

$$\frac{7}{4}+\frac{10}{36}=\frac{7\times 9}{4\times 9}+\frac{10}{36}=\frac{63}{36}+\frac{10}{36}=\frac{63+10}{36}=\frac{73}{36}$$

$$\frac{36}{4}=9$$

ب. مقام أحدهما ليس مُضاعف للآخر

a و b و c و d أعداد عُشرية $(d \neq 0$ و $c \neq 0)$

$$\frac{a}{d}+\frac{b}{c}=\frac{a\times c}{d\times c}+\frac{b\times d}{c\times d}$$

مثال1

$$\frac{7}{6}+\frac{5}{13}=\frac{7\times 13}{6\times 13}+\frac{5\times 6}{13\times 6}=\frac{91}{78}+\frac{30}{78}=\frac{91+30}{78}=\frac{121}{78}$$

13 على 6 ليس عدد طبيعيا!

مثال2

$$\frac{2}{31}+\frac{1}{8}=\frac{2\times 8}{31\times 8}+\frac{1\times 31}{8\times 31}=\frac{16}{248}+\frac{31}{248}=\frac{16+31}{248}=\frac{47}{248}$$

31 على 8 ليس عدد طبيعيا!

9) العمليات على الأعداد الناطقة

تعريف العدد الناطق هو كل عدد كتابة العُشرية منتهية أو غير منتهية دورية والتي يُمكن كتابتهما على الشكل $\frac{p}{q}$ حيث p و q عددان صحيحان مع $q \neq 0$.

جمع عددين ناطقين لهما نفس المقام

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}$$ نأخذ " $c \neq 0$ "

مثال $\frac{-1}{5}+\frac{4}{5}=\frac{-1+4}{5}=\frac{3}{5}$

طرح عددين ناطقين لهما نفس المقام

$$\frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a-b}{c}$$ مع " $c \neq 0$ "

مثال $\frac{-1{,}2}{44}-\frac{0{,}5}{44}=\frac{-1{,}2-0{,}5}{44}=\frac{-1{,}7}{44}$

جمع عددين ناطقين ليس لهما نفس المقام

$\frac{a}{c}+\frac{b}{d}=\frac{a\times d}{c\times d}+\frac{b\times c}{d\times c}$ (توحيد المقام)

حيث $c \neq 0$ و $d \neq 0$.

طرح عددين ناطقين لهما نفس المقام

$\frac{a}{c}-\frac{b}{d}=\frac{a\times d}{c\times d}-\frac{b\times c}{d\times c}$ (توحيد المقام)

حيث $c \neq 0$ و $d \neq 0$.

العلم أن تعرف أن الطماطم من الفاكهة والحكمة أن لا تضعها في سلة الفاكهة.

دعواكم للوالد بالرحمة والمغفرة

من فاته التعليم وقت شبابه * فكبّر عليه أربعا لوفاته

قسمة عددين ناطقين الأستاذ هلال خالد BEM2025	ضرب عددين ناطقين
" $c \neq 0$ و $d \neq 0$ و $b \neq 0$ " $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{a\times d}{b\times c}$ (نضرب في مقلوب العدد الناطق الثاني) أمثلة $\frac{3}{11} \div \frac{5}{9} = \frac{3}{11} \times \frac{9}{5} = \frac{3\times 9}{11\times 5} = \frac{27}{55}$ $\frac{25}{7} \div 6 = \frac{25}{7} \div \frac{6}{1} = \frac{25\times 1}{7\times 6} = \frac{25}{42}$	$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a\times c}{b\times d}$ مع $b \neq 0$ و $d \neq 0$. مثال $\frac{5}{11} \times \frac{3}{4} = \frac{5\times 3}{11\times 4} = \frac{15}{44}$ (البسط في البسط و...) حذار $\frac{a}{c} \times \frac{b}{c} \neq \frac{a\times b}{c}$ مثال $\frac{2}{7} \times \frac{13}{7} \neq \frac{2\times 13}{7}$ وإنما الصحيح $\frac{2}{7} \times \frac{13}{7} = \frac{2\times 13}{7\times 7} = \frac{26}{49}$ كل عدد نسبي k يُكتب على الشكل $\frac{k}{1}$ مثال $17 = \frac{17}{1}$

قواعد حساب أساسية جدا حيث a و b و c و d أعداد معلومة

$\frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{b} \times \frac{1}{c}$ حيث $b \neq 0$؛ $c \neq 0$. مثال $\frac{\frac{3}{-2}}{8} = \frac{3}{-2} \times \frac{1}{8} = \frac{3}{-16}$	$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$ حيث $\frac{c}{d} \neq 0$؛ $b \neq 0$؛ $c \neq 0$ مثال $d \neq 0$ $\frac{\frac{-6}{5}}{\frac{11}{7}} = \frac{-6}{5} \times \frac{7}{11} = \frac{-42}{55}$
$\frac{a}{\frac{b}{c}} = a \times \frac{c}{b}$ حيث $\frac{b}{c} \neq 0$ و $c \neq 0$. مثال $\frac{13}{\frac{-5}{2}} = 13 \times \frac{2}{-5} = \frac{26}{-5}$	

أولوية الحساب في سلسلة عمليات

مثال $A = \left(\frac{27}{25} - \left(\frac{4}{5}\right)^2\right) \div 4$ $= \left(\frac{27}{25} - \frac{4^2}{5^2}\right) \div 4$ $= \left(\frac{27}{25} - \frac{16}{25}\right) \div 4$ $= \left(\frac{27-16}{25}\right) \div 4$ $= \frac{11}{25} \div 4 = \frac{11}{25} \times \frac{1}{4} = \frac{11\times 1}{25\times 4} = \frac{11}{100}$	عند حساب سلسلة عمليات، يجب مُراعاة ما يلي: 1. الأولوية لحساب القوى والعمليات داخل الأقواس بدءا بالأقواس الداخلية. 2. ثم للضرب والقسمة حسب الترتيب. 3. ثم للجمع والطرح حسب الترتيب. مُلاحظة العمليات (الجمع، الطرح، الضرب والقسمة) هي على الأعداد الناطقة.

☺ بين أن العدد A طبيعي حيث $A = \left[\left(\frac{4}{3}\right)^2 + 2\right] \div \frac{2}{9}$.

10) بعض أمثلة حل مُشكلات بوظيف القاسم المُشترك الأكبر لعددين طبيعيين

- في تقسيم مُحيط مُستطيل الشكل إلى قطع مُتقايسة ذات أكبر طول ضلع ممكن، والقاسم المُشترك الأكبر في هذه الحالة يمثل طول القطعة الواحدة.
- في تقسيم قطعة مُستطيلة الشكل إلى قطع مربعة الشكل مُتقايسة ذات أكبر طول ضلع ممكن، والقاسم المُشترك الأكبر في هذه الحالة يمثل طول ضلع المربع الواحد.
- في توزيع مُتناسب لعدد من نوعين مُختلفين من الزهور في أقل عدد ممكن من الباقات، والقاسم المُشترك الأكبر في هذه الحالة عدد المزهريات.
- في تثبيت أعمدة أو غرس شجيرات بحيث تكون المسافة بين كل عمودين أو شجيرتين مُتساوية وأكبر ما يمكن والقاسم المُشترك الأكبر في هذه الحالة هو المسافة بين كل عمودين متتاليين أو شجيرتين متتاليتين.

إذا غذّ السّير ذو عزم تأتّى * له الفتح ولو جاوز السبعين

أهم ما يُراجع في: الحساب على الجذور الأستاذ هلال خالد $BEM2025$

تبسيط أو حساب عبارة تتضمن جذورا هو كتابتها على أحد الأشكال الآتية:

على الشكل $a\sqrt{b}$		على الشكل $c+a\sqrt{b}$		على شكل عدد ناطق
b معلوم	b غير معلوم	b معلوم	b غير معلوم	في أغلب الأحيان نوظف المتطابقة الشهيرة الثالثة $(a+b)(a-b)=(a)^2-(b)^2$

وقبل تبسيط أو حساب أي عبارة تتضمن جذورا لابد لك من أهم شيئ تقوم به وهو التمكن من القواعد السِّت الآتية:

$\sqrt{a^2}=a$ أمثلة $\sqrt{13^2}=13$ $\sqrt{4}=\sqrt{2^2}=2$	$\sqrt{a^2\times b}=a\sqrt{b}$ أمثلة $\sqrt{11^2\times 2}=11\sqrt{2}$ $\sqrt{9\times 5}=\sqrt{3^2\times 5}=3\sqrt{5}$	$\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{a\times b}$ أمثلة $\sqrt{2}\times\sqrt{8}=\sqrt{16}=4$ $\sqrt{36\times 7}=\sqrt{36}\times\sqrt{7}=6\sqrt{7}$
$(\sqrt{a})^2=a$ أمثلة $(\sqrt{17})^2=17$ $\left(\sqrt{\left(\frac{7}{11}\right)}\right)^2=\frac{7}{11}$	$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$ أمثلة $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{8}{2}}=\sqrt{4}=2$ $\sqrt{\frac{49}{36}}=\frac{\sqrt{49}}{\sqrt{36}}=\frac{7}{6}$	$\sqrt{a}\times\sqrt{a}=a$ مثال $\sqrt{17}\times\sqrt{17}=17$

1) أهم خطوتين في تبسيط عبارة تتضمن جذور:

1. النشر إن وُجد ثم إنجاز عمليات الضرب والقسمة بين الجذور إن وجدت أولا؛ وهذا باستعمال أحد القواعد الواردة في الجدول أعلاه.
2. التأكد بالآلة الحاسبة من وجود جذور تامة اي التي قيمته مضبوطة في حالة شكل التبسيط $c+a\sqrt{b}$.
3. تبسيط ما تحت الجذر باستعمال أحد القاعدتين $\sqrt{a^2\times b}=a\sqrt{b}$ أو $\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{a\times b}$).

2) تبسيط العبارات التي تتضمن جذورا ينقسم إلى نوعين:

تبسيط عبارات لا تتضمن عمليات ضرب أو قسمة بين الجذور:

✎ تبسيط عبارة على الشكل $a\sqrt{b}$ حيث b معلوم (ما تحت الجذر معلوم من السؤال)

مثال بسط العبارة $B=\sqrt{252}-6\sqrt{28}+2\sqrt{175}$ على الشكل $a\sqrt{7}$ (العدد b معلوم ويُساوي 7).

$$B=\sqrt{252}-6\sqrt{28}+2\sqrt{175}$$
$$=\sqrt{36\times 7}-6\sqrt{4\times 7}+2\sqrt{25\times 7}$$
$$=\sqrt{36}\times\sqrt{7}-6\sqrt{4}\times\sqrt{7}+2\sqrt{25}\times\sqrt{7}$$
$$=6\sqrt{7}-12\sqrt{7}+10\sqrt{7}=(6-12+10)\sqrt{7}=4\sqrt{7}$$

✎ تبسيط عبارة على الشكل $a\sqrt{b}$ حيث b غير معلوم (ما تحت الجذر غير معلوم من السؤال)، ونميز حالتين:

أ) العدد b غير معلوم ولكنه موجود في العبارة المُراد تبسيطها (أصغر ما تحت الجذر)

مثال بسط العبارة $B=11\sqrt{6}-6\sqrt{24}+2\sqrt{384}$ على الشكل $a\sqrt{b}$ (العدد b يُساوي 6)

$$B=11\sqrt{6}-6\sqrt{24}+2\sqrt{384}$$
$$=11\sqrt{6}-6\sqrt{4\times 6}+2\sqrt{64\times 6}$$
$$=11\sqrt{6}-6\sqrt{4}\times\sqrt{6}+2\sqrt{64}\times\sqrt{6}$$
$$=11\sqrt{6}-12\sqrt{6}+16\sqrt{6}=15\sqrt{6}$$

ب) العدد b غير معلوم، فنستعمل قواعد قابلية القسمة

مثال بسط العبارة $A=\sqrt{80}-3\sqrt{45}+\sqrt{20}$ على الشكل $a\sqrt{b}$.

نُلاحظ أن الأعداد 20 و 45 و 80 تقبل القسمة على 5 أرقام آحادها 0 أو 5

$$A=\sqrt{80}-3\sqrt{45}+\sqrt{20}$$
$$=\sqrt{16\times5}-3\sqrt{9\times5}+\sqrt{4\times5}$$
$$=\sqrt{16}\times\sqrt{5}-3\sqrt{9}\times\sqrt{5}+\sqrt{4}\times\sqrt{5}$$
$$=4\sqrt{5}-9\sqrt{5}+2\sqrt{5}=(4-9+2)\sqrt{5}=-3\sqrt{5}$$

تبسيط عبارة على الشكل $c+a\sqrt{6}$ حيث b معلوم (ما تحت الجذر معلوم من السؤال):

مثال بسط العبارة $\mathrm{B}=\sqrt{486}+5\sqrt{24}+\sqrt{36}+3$ على الشكل $c+a\sqrt{6}$

$b=6$	$\mathrm{B}=-\sqrt{486}+5\sqrt{24}+\sqrt{36}+3$
كتابة ما بداخل على شكل جُداء عددين أحدهما 6	$=-\sqrt{81\times6}+5\sqrt{4\times6}+6+3$
كتابة جداء العددين على الشكل $\sqrt{a}\times\sqrt{b}$	$=-\sqrt{81}\times\sqrt{6}+5\sqrt{4}\times\sqrt{6}+6+3$
	$=-9\sqrt{6}+10\sqrt{6}+9$
التبسيط	$=9+\sqrt{6}$

تبسيط عبارة على الشكل $c+a\sqrt{b}$ حيث b غير معلوم (ما تحت الجذر غير معلوم من السؤال):

مثال بسط العبارة $\mathrm{B}=4\sqrt{12}-\sqrt{108}-4$ على الشكل $c+a\sqrt{b}$ (قواعد قابلية القسمة)

$b=3$	$\mathrm{B}=4\sqrt{12}-\sqrt{108}-4$
كتابة ما بداخل على شكل جُداء عددين أحدهما 3 لأنهما يقبلان القسمة على 3 وناتجي القسمة مُربعين تامين 36 و4.	$=4\sqrt{4\times3}-\sqrt{36\times3}-4$
تطبيق الخاصية $\sqrt{a\times b}=\sqrt{a}\times\sqrt{b}$.	$=4\sqrt{4}\times\sqrt{3}-\sqrt{36}\times\sqrt{3}-4$
	$=8\sqrt{3}-6\sqrt{3}-4$
	$=2\sqrt{3}-4$

تبسيط عبارة على الشكل $c+a\sqrt{b}$ حيث b غير معلوم (ما بداخل الجذر غير معلوم من السؤال):

مثال بسط العبارة $\mathrm{B}=\sqrt{325}-\sqrt{13}-1+6\sqrt{52}$ على الشكل $c+a\sqrt{b}$ (b معلوم في العبارة)

$b=13$	$\mathrm{B}=\sqrt{325}-\sqrt{13}-1+6\sqrt{52}$
كتابة ما بداخل على شكل جُداء عددين أحدهما13 b معلوم في العبارة يساوي 13.	$=\sqrt{25\times13}-\sqrt{13}-1+6\sqrt{4\times13}$
تطبيق الخاصية $\sqrt{a\times b}=\sqrt{a}\times\sqrt{b}$.	$=\sqrt{25}\times\sqrt{13}-\sqrt{13}-1+6\sqrt{4}\times\sqrt{13}$
	$=5\sqrt{13}-\sqrt{13}-1+12\sqrt{13}$
	$=16\sqrt{13}-4$

ما دُمت تتعلم فأنت بخير، فالجهل رأس كل شر.

زكاة العلم نشره

دعواتكم للوالد بالرحمة والمغفرة

تبسيط عبارات تتضمن عمليات ضرب أو قسمة بين الجذور

أ) إنجاز عمليات الضرب والقسمة التي بين الجذور بتطبيق القواعد السابقة.

ب) فنحصل إما على عدد ناطق وإما على عبارة من الجذور لا تتضمن بينها عمليات القسمة والضرب.

وهي ثلاث أنواع:

1) تبسيط عبارة ليست على أحد الشكلين الآتيين: $(a+b)(a-b)$ أو $(a+b)(c+d)$.

2) تبسيط عبارة من الشكل $(a+b)(c+d)$.

3) تبسيط عبارة من الشكل $(a+b)(a-b)$ (المتطابقة الشهيرة الثالثة).

1. تبسيط عبارة ليست على أحد الشكلين الآتيين $(a+b)(a-b)$ أو $(a+b)(c+d)$:

مثال بسط العبارة $G=\sqrt{8}\times\sqrt{2}+6\sqrt{108}-\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{6}}+\sqrt{144}$ على الشكل $c+a\sqrt{b}$

$G=\sqrt{8}\times\sqrt{2}+\sqrt{108}-\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{6}}+\sqrt{144}$	تطبيق الخاصيتان $\sqrt{a\times b}=\sqrt{a}\times\sqrt{b}$
$=\sqrt{8\times2}+\sqrt{36\times3}-\sqrt{\frac{24}{6}}+12$	و $\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.
$=4+\sqrt{36}\times\sqrt{3}-\sqrt{4}+12$	$\sqrt{4}=2$ و $\sqrt{16}=4$.
$=\mathbf{4+6\sqrt{3}-2+12=14+6\sqrt{3}}$	

2. تبسيط عبارة من الشكل $(a+b)(c-d)$

مثال بسط العبارة $F=(\sqrt{7}-2)(3+\sqrt{7})$ على الشكل $c+a\sqrt{b}$:

$F=(\sqrt{7}-2)(3+\sqrt{7})$	
$=\sqrt{7}\times3+\sqrt{7}\times\sqrt{7}-2\times3-2\times\sqrt{7}$	النشر
$=3\sqrt{7}+7-6-2\sqrt{7}$	إنجاز عمليات الضرب
$=1+\sqrt{7}$	

3. تبسيط عبارة من الشكل $(a+b)(a-b)$ (تطبيق المتطابقة الشهيرة الثالثة)

مثال بين أن E عدد طبيعي حيث $E=(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)$

$E=(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)$	كتابة العبارة دون خطأ هي بداية الإجابة.. لا تستهن بهذا أبدا
$=(\sqrt{5})^2-(2)^2$	توظيف المتطابقة الشهيرة $(a+)(a-b)=(a)^2-(b)^2$
$=\mathbf{5-4=1}$	

كتابة مقام نسبة عدد ناطق

طريقة لكتابة مقام نسبة $\frac{a}{c\sqrt{b}}$ على شكل عدد ناطق، أولا نضع العدد a بين قوسين ثم نضرب بسط النسبة ومقامها في $\sqrt{b}$

أي: $\frac{(a)\times\sqrt{b}}{c\sqrt{b}\times\sqrt{b}}=\frac{a}{c\sqrt{b}}$. **مُلاحظة** **وضع العدد a بين قوسين لأنه يمكن أن يكون عبارة عن عملية جمع أو طرح.**

مثال1 نكتُب مقام النسبة $\frac{5}{\sqrt{7}}$ على شكل عدد ناطق $\frac{5\sqrt{7}}{7}=\frac{(5)\times\sqrt{7}}{\sqrt{7}\times\sqrt{7}}=\frac{6}{\sqrt{7}}=\frac{5}{\sqrt{7}}$.

مثال2 نكتُب مقام النسبة $\frac{6}{11\sqrt{3}}$ على شكل عدد ناطق $\frac{6\sqrt{3}}{33}=\frac{6\sqrt{3}}{11\times3}=\frac{(6)\times\sqrt{3}}{11\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\frac{6}{11\sqrt{3}}=\frac{6}{11\sqrt{3}}$.

مثال3 نكتُب مقام النسبة $\frac{7\sqrt{2}}{\sqrt{13}}$ على شكل عدد ناطق $\frac{7\sqrt{26}}{13}=\frac{7\sqrt{2}\times\sqrt{13}}{\sqrt{13}\times\sqrt{13}}=\frac{7\sqrt{2}}{\sqrt{13}}$.

مثال4 نكتُب مقام النسبة $\frac{3+\sqrt{6}}{\sqrt{6}}$ عددا ناطقا $\frac{3\sqrt{6}+6}{6} = \frac{(3+\sqrt{6})\times\sqrt{6}}{\sqrt{6}\times\sqrt{6}} = \frac{(3+\sqrt{6})}{\sqrt{6}} = \frac{3+\sqrt{6}}{\sqrt{6}}$.

مثال5 نكتُب مقام النسبة $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{8}}{2\sqrt{2}}$ عددا ناطقا $\frac{(\sqrt{3}+\sqrt{8})\times\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\times\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{3}+\sqrt{8})}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{8}}{2\sqrt{2}}$

$$= \frac{\sqrt{3}\times\sqrt{2}+\sqrt{8}\times\sqrt{2}}{2\times 2} = \frac{4+\sqrt{6}}{4}$$

الأستاذ هلال خالد BEM2025

حل معادلة من الشكل $x^2 = b$

1. لحل المُعادلة $x^2 = b$ نُميز ثلاث حالات:

الحالة الأولى: b عدد موجب	الحالة الثانية: b عدد يُساوي صفر	الحالة الثالثة: b عدد سالب
للمُعادلة $x^2 = b$ حلان هما: $x = -\sqrt{b}$ أو $x = \sqrt{b}$ **مثال** للمُعادلة $x^2 = 81$ حلين هما: $x = -\sqrt{81} = -9$ أو $x = \sqrt{81} = 9$ **مثال آخر** للمُعادلة $x^2 = 2$ حلين: $x = -\sqrt{2}$ أو $x = \sqrt{2}$	للمُعادلة $x^2 = 0$ في هذه الحالة حل واحد هو $x = 0$. **مثال** للمُعادلة $x^2 = 0$ حل وحيد هو $x = 0$	ليس للمعادلة حل في هذه الحالة! **مثال** المُعادلة $x^2 = -16$ ليس لها حل، لأن $-16 < 0$

2. حل معادلات يؤول حلها إلى حل معادلة من الشكل $x^2 = b$

مثال	مثال آخر
حل المعادلة $x^2 + 4 = 20$ لدينا $x^2 + 4 = 20$ معناه $x^2 = 20 - 4$ أي $x^2 = 16$ إذن $x = -\sqrt{16} = -4$ أو $x = \sqrt{16} = 4$	حل المعادلة $\frac{\sqrt{2}-1}{9x} = \frac{x}{\sqrt{2}-1}$ معناه $x \times 9x = (\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}-1)$ أي $9x^2 = 1$ أي $x^2 = \frac{1}{9}$ إذن $x = \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}$ أو $x = -\sqrt{\frac{1}{9}} = -\frac{1}{3}$

للتطبيق حل المعادلة $(x+3)^2 - 36 = 0$

3. حل مُشكلات يؤول حلها إلى حل معادلة من الشكل $x^2 = b$

مثال	مثال آخر
قطعة أرض مُستطيلة الشكل، مساحتها $160m^2$. عُرضها خمسي طولها. جد بُعداها. نرمز للطول بـ x ، فيكون العرض $\frac{2}{5}x$ ونحل المُعادلة $\frac{2}{5}x \times x = 160$	جُداء عدد طبيعي وضعفُه يساوي 32 جد هذا العدد. نرمز لهذا العدد بـ x ، فيكون ضعفه $2x$ ونحل المُعادلة $2x \times x = 32$

بعض المربعات التامة

4، 9، 16، 25، 36، 49، 64، 81، 100، 121، 144، 169، 196، 225، ....

زكاة العلم نشره * دعواتكم للوالد بالرحمة والمغفرة

الإنضباط هو أن تشرح لعقلك أنّك بحاجة إلى التضحية بالملذات الفورية مُقابل مكافآت أكبر في المُستقبل.

أهم ما يُراجع في: خاصية طاليس وحساب المثلثات الأستاذ هلال خالد BEM2025

1) خاصية طاليس ⟵ حساب طول

نأخذ الشكل المُقابل كمثال

شروط تطبيقها(نأخذ المثال أمامنا)

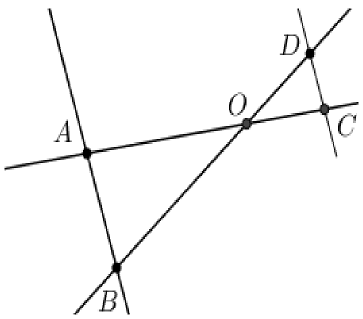
1. **استقامية النقط** B و O و D والنقط A و O و C .
2. **التوازي** $(AB) \parallel (DC)$.

النتيجة تساوي النسب الثلاث مُحقق $\frac{OD}{OB} = \frac{OC}{OA} = \frac{DC}{AB}$

و هذه النسب أحسُب بها الطول المطلوب منا.

مثال في الشكل المُقابل $(AB)//(DC)$ وحدة الطول الـ cm و $OD = 5$؛ $OB = 11$؛ $OC = 4$. احسُب OA.

لدينا لنقط B و O و D والنقط A و O و C . و $(AB) \parallel (DC)$ فحسب خاصية طالس $\frac{OD}{OB} = \frac{OC}{OA} = \frac{DC}{AB}$ وبالتعويض $\frac{5}{11} = \frac{4}{OA}$ ومنه $OA = \frac{11\times4}{5} = 8{,}8cm$



2) خاصية طاليس العكسية ⟵ إثبات توازي

نأخذ الشكل المُقابل كمثال

الشروط: النقط L و E و N **بنفس ترتيب** النقط L و F و M ، والنقط L و E و N في **استقامية** وكذلك النقط L و F و M .

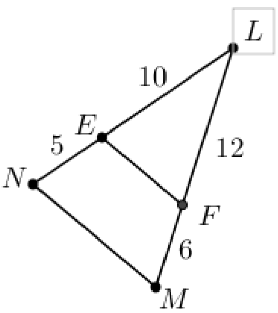
و **تساوي النسبتان** $\frac{LE}{LN}$ و $\frac{LF}{LM}$ أي: $\frac{LE}{LN} = \frac{LF}{LM}$.

النتيجة: $(MN) \parallel (EF)$.

مثال في الشكل المقابل وحدة الطول الــ cm.

أثبت أن: $(MN) \parallel (EF)$.

لدينا $\frac{2}{3} = \frac{LF}{LM} = \frac{LE}{LN}$ والنقط L و E و N بنفس ترتيب النقط L و F و M ، و L و E و N في استقامية وكذلك النقط L و F و M فحسب خاصية طاليس العكسية $(DC)//(AB)$.



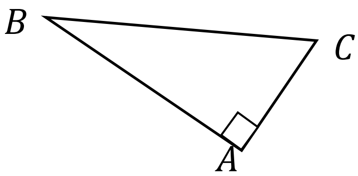
3) خاصية فيثاغورس ⟵ حساب طول ضلع في مثلث قائم.

ABC مثلث قائم في **A**، إذن حسب خاصية فيثاغورس فإن مُربع طول الوتر BC^2 (الضلع المُقابل للزاوية القائمة) يُساوي مجموع الطولين الآخرين $AC^2 + AB^2$ ونكتُب:

$$BC^2 = AC^2 + AB^2$$

مثال ABC **مثلث قائم في** A. $AB = 4cm$ و $AC = 3cm$.

احسُب AC



لدينا ABC **مثلث قائم في** B، **إذن حسب خاصية فيثاغورس فإن** $BC^2 = AB^2 + AC^2$ **وبالتعويض** $BC^2 = 4^2 + 3^2$ **أي أن** $BC^2 = 16 + 9$ **أي** $BC^2 = 25$ **ومنه** $BC = \sqrt{25} = 5cm$.

4) الخاصية العكسية لخاصية فيثاغورس ⟵ إثبات أن مثلث قائم

إذا كان في مثلث مربع طول ضلعه الأكبر يساوي مجموع مربعي طولي ضلعيه الآخرين، فهو قائم.

← تُستعمل لإثبات أن مثلث عُلمت أطوال أضلاعه الثلاثة قائم

مثال مثلث EFG أطوال أضلاعه $EF = 13cm$ و $FG = 12cm$ و $EG = 5$، هو مثلث قائم

لأن: $EF^2 = 13^2 = 169$ و $FG^2 = 12^2 = 144$ و $EG^2 = 5^2 = 25$

☺ فالمساواة التالية $EF^2 = EG^2 + FG^2$ ، فحسب الخاصية العكسية لخاصية فيثاغورس فالمثلث قائم.

5) الخاصية الثانية للدائرة المحيطة بالمثلث القائم ⟵ إثبات أن مثلث قائم

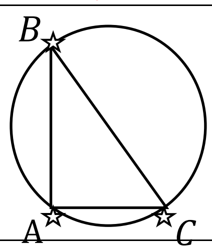
نصها

في مثلث ABC إذا كان الضلع $[AB]$ هو قطر لدائرة، و C نقطة من هذه الدائرة، فإن هذا المثلث قائم في C.

مثال في الشكل الآتي

(C) دائرة و ABC مثلث، فنقول أن:

ABC مثلث قائم في A لأن ضلعه [BC] قطر للدائرة (C) ورأسه الثالث A ينتمي إلى (C)



6) النسب المثلثية لزاوية حادة في مثلث قائم

📖 ***النسب الثلاث:***

1. جيب تمام زاوية حادة الـ cos: جيب تمام زاوية حادة $= \dfrac{\text{طول الضلع المُجاور للزاوية الحادة}}{\text{وتر المثلث القائم}}$

2. جيب زاوية حادة الـsin: جيب زاوية حادة $= \dfrac{\text{طول الضلع المُقابل للزاوية الحادة}}{\text{وتر المثلث القائم}}$

3. ظل زاوية حادة الـ tan: ظل زاوية حادة $= \dfrac{\text{طول الضلع المُقابل للزاوية الحادة}}{\text{طول الضلع المُقابل للزاوية الحادة}}$

📖 كيف نكتُب النسب الثلاث لزاوية حادة؟!

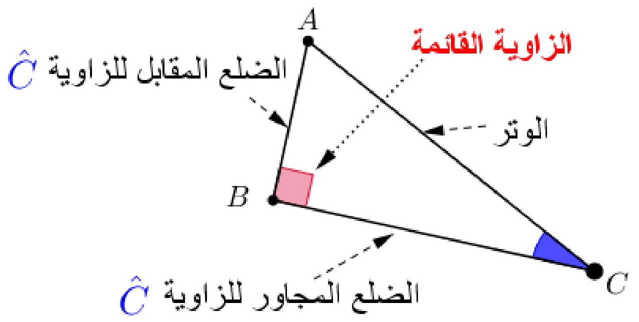
مثال

في المثلث القائم ABC نكتُب نسب الزاوية الحادة $\widehat{ACB}$.

1. أولا نكتُب البيانات الموضحة على الشكل.
2. ثانيا القانون المُوافق لكل نسبة من النسب الثلاث الآتية لها.

$cos\hat{ACB} = \dfrac{\text{المُجاور}}{\text{الوتر}} = \dfrac{BC}{AC}$ و $sin\hat{ACB} = \dfrac{\text{المُقابل}}{\text{الوتر}} = \dfrac{AB}{AC}$

و $tan\hat{ACB} = \dfrac{\text{المُقابل}}{\text{المُجاور}} = \dfrac{AB}{BC}$.



📖 توظيفُها في

✎ في حساب قيس زاوية في مثلث قائم.	✎ في حساب طول ضلع في مثلث قائم عُلم منه طول ضلع واحد.

📖 متى أوظفها في حساب قيس زاوية أو طول بإحدى النسب؟!

حساب قيس زاوية	طول الوتر في المثلث القائم معلوم طوله	والمُجاور لهذه الزاوية معلوم	نستعمل الـ cos
		والمُقابل لهذه الزاوية معلوم	نستعمل الـ sin
	طول الوتر في المثلث القائم غير معلوم طوله		نستعمل الـ tan
حساب طول ضلع	هذا الضلع هو الوتر في المثلث القائم	والمُقابل للزاوية الحادة المعلوم قيسها معلوم طوله	نستعمل الـ sin
		والمُجاور للزاوية الحادة المعلوم قيسها معلوم طوله	نستعمل الـ cos
	هذا الضلع هو المُقابل للزاوية الحادة المعلوم قيسها في المثلث القائم	والوتر معلوم طوله في المثلث القائم	نستعمل الـ sin
		والمُجاور للزاوية الحادة المعلوم قيسها معلوم طوله	نستعمل الـ tan
	هذا الضلع هو المُجاور للزاوية المعلوم قيسها في المثلث القائم	والوتر معلوم طوله في المثلث القائم	نستعمل الـ cos
		والمُقابل لهذه الزاوية الحادة معلوم طوله	نستعمل الـ tan

استعمال الآلة الحاسبة في حساب قيس زاوية عُلم جيبها أو ظلها أو جيب تمامها:

مثال نحسُب قيس زاوية $\hat{Z}$ جيبها 0,8 أي أن $sin\hat{Z} = 0,8$

✎ اللمسة **2ndf** (الحاسبة ذات اللمسة 2ndf)	✎ اللمسة **Shift** (الحاسبة ذات اللمسة Shift):
0 | , | 8 | **2ndf** | sin | **53,13....**	**Shift** | sin | 0 | , | 8 | **53,13....**
✎ بالتدوير إلى الوحدة من الدرجة 53°	✎ بالتدوير إلى الوحدة من الدرجة 53°

7) العلاقات المُثلثية لزاوية حادة في مثلث قائم(اثنتان)

نأخذ كمثال الزاوية الحادة $\hat{C}$ في المثلث القائم ABC في A، فيكون لدينا: $\tan\hat{C} = \frac{\sin\hat{C}}{\cos\hat{C}}$ ؛ $(\sin\hat{C})^2 + (\cos\hat{C})^2 = 1$.

فيما أستعمل هذه العلاقات؟!

أستعملها في حساب جيب تمام زاوية حادة الــ cos أو جيب زاوية حادة الـ sin أو ظل زاوية حادة الــ tan ومن ثم حساب قيس هذه الزاوية الحادة دون الحاجة لاستعمال إحدى نسبها المثلثية الثلاث.

متى أستعملها؟!

لحساب جيب تمام زاوية حادة (الـ cos) ومن ثم قيسها

معلوم جيبها(الـ sin) ← نستعمل العلاقة: $\cos\hat{C} = \sqrt{1-(\sin\hat{C})^2}$

مثال

إذا علمت أن $\sin\hat{C} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ، فاحسُب $\cos\hat{C}$.

لدينا $\cos\hat{C} = \sqrt{1-(\sin\hat{C})^2}$

وبالتعويض

$\cos\hat{C} = \sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{\sqrt{3}^2}{2^2}} = \sqrt{1-\frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$

معلوم ظلها (الـ tan) و جيبها (الـ sin) ← نستعمل هذه العلاقة أفضل $\cos\hat{C} = \frac{\sin\hat{C}}{\tan\hat{C}}$ كما يمكن استعمال الأولى.

مثال

احسب $\cos\hat{C}$ إذا علمت أن

$\tan\hat{C} = \frac{3}{2}$ و $\sin\hat{C} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

لدينا $\cos\hat{C} = \frac{\sin\hat{C}}{\tan\hat{C}}$ وبالتعويض: $\cos\hat{C} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{3}{2}}$

وبالحساب $\cos\hat{C} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{6} = \frac{\sqrt{2}}{3}$

لحساب جيب زاوية حادة (الـ sin) ومن ثم قيسها

معلوم جيبها تمامها (الـ cos) ← نستعمل العلاقة $\sin\hat{C} = \sqrt{1-(\cos\hat{C})^2}$

مثال إذا علمت أن $\cos\hat{C} = \frac{1}{2}$ فاحسُب $\sin\hat{C}$

لدينا $\sin\hat{C} = \sqrt{1-(\cos\hat{C})^2}$

وبالتعويض $\sin\hat{C} = \sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}$

وبالحساب $\sin\hat{C} = \sqrt{1-\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

معلوم ظلها(الـ tan) و جيبها تمامها (الـ cos) ← نستعمل هذه العلاقة أفضل $\sin\hat{C} = \tan\hat{C} \times \cos\hat{C}$ كما يمكن استعمال الأولى.

مثال

إذا علمت أن $\tan\hat{C} = \frac{5}{4}$ و $\cos\hat{C} = \frac{\sqrt{2}}{3}$

✎ احسُب $\sin\hat{C}$

لدينا $\sin\hat{C} = \tan\hat{C} \times \cos\hat{C}$

وبالتعويض $\sin\hat{C} = \frac{5}{4} \times \frac{\sqrt{2}}{3} = \frac{5\sqrt{2}}{12}$

وبالحساب $\sin\hat{C} = \frac{5\sqrt{2}}{12}$

الأخلاق كالأرزاق الناس فيها بين غني وفقير

لا تحسبنّ العلم ينفع وحده ما لم يُتوّج ربُّه بخلاق

زكاة العلم نشره

دعواتكم للوالد بالرحمة والمغفرة

1) تبسيط ونشر عبارة جبرية

معرفة الأدوات الثمانية في فك الأقواس(النشر):

قاعدة فك الأقواس المسبوقة بإشارة $(-)$	قاعدة فك الأقواس المسبوقة بإشارة $(+)$
$-(a-b+c)=-a+b-c$ أي إذا كانت الأقواس مسبوقة بإشارة ناقص تتغير إشارة الحدود. **مثال** $-(x^2-4x+3)=-1x^2+4x-3$	$+(a-b+c)=a-b+c$ أي إذا كانت الأقواس مسبوقة بإشارة زائد تتغير إشارة الحدود. **مثال** $+(x^2-4x+3)=x^2-4x+3$
نشر عبارة من الشكل $k\times(a+b)$ الخاصية التوزيعية على الجمع $k\times(a+b)=k\times a+b\times k$ **مثال** $x\times(4x+4)=x\times 4x+4\times x=4x^2+4x$	**نشر عبارة من الشكل $k\times(a-b)$** الخاصية التوزيعية على الطرح $k\times(a-b)=k\times a-b\times k$ **مثال** $2x(x-1)=2x\times x-1\times 2x=2x^2-2x$
نشر عبارة من الشكل $(a+b)(c-d)$ $(a+b)(c-d)=a\times c-a\times d+b\times c-b\times d$ **مثال** $(x-2)(4x+4)$ $=x\times 4x+4\times x-2\times 4x+4\times(-2)$ $=4x^2+4x-8x-8$ $=4x^2-4x-8$	**نشر عبارة من الشكل $(a+b)(a-b)$** المُتطابقة الشهيرة الثالثة (فرق عددين في مجموعهما) $(a+b)(a-b)=(a)^2-(b)^2$ **مثال** $(2x+3)(2x-3)=(2x)^2-(3)^2=4x^2-9$
نشر عبارة من الشكل $(a+b)^2$ المُتطابقة الشهيرة الأولى(مربع مجموع عددين) $(a+b)^2=(a)^2+2\times a\times b+(b)^2$ **مثال** $(5x+3)^2=(5x)^2+2\times 5x\times 3+(3)^2$ $=25x^2+30x+9$	**نشر عبارة من الشكل $(a-b)^2$** المُتطابقة الشهيرة الثانية (مربع فرق عددين) $(a-b)^2=(a)^2-2\times a\times b+(b)^2$ **مثال** $(3x-6)^2=(3x)^2-2\times 3x\times 6+(6)^2$ $=9x^2-36x+36$

مثال شامل بين أن: $A=-(6x-5)+(x-2)(4x+4)-2x(x-1)+(3x-6)^2=11x^2-44x+33$

2) حل مُتراجحة من الدرجة الأولى بمجهول واحد من الدرجة الأولى

يتم حل كل مُتراجحة بنفس خطوات حل مُعادلة فقط في الخطوة ما قبل الأخيرة نميز حالتين:

مثلا الحل المتراجحة $ax+b\leq cx+d$ يؤول إلى حل المتراجحة $a'x\leq b'$ $(a'\neq 0)$

✍ فإذا كان a' عدد موجب فإن $x\leq\frac{b'}{a'}$ (لا يتغير اتجاه المُتباينة $a'x\leq b'$) .

مثال نحل المُتراجحة $5x-3\leq 2x+1$ يؤول إلى حل $3x\leq 4$ (3 عدد موجب) ومنه $x\leq\frac{4}{3}$

✍ إذا كان a' عدد سالب فإن $x\geq\frac{b'}{a'}$ (يتغير اتجاه المُتباينة $a'x\leq b'$).

مثال حل المُتراجحة $6x-3<7x-1$ يؤول إلى حل $-x<2$ (-1 عدد سالب) ومنه $x>-2$.

التمثيل البياني

تمثيل الحلول $x>-2$ (الجزء غير المُشطب) أي الحلول هي كل قيم x الأكبر تماما من -2.	

3) تحليل عبارات جبرية

الأستاذ هلال خالد **BEM2025**

نقصد بتحليل عبارة جبرية كتابتها على شكل مجموع جُداءين أو فرق جُداءين في هذا المُستوى.

1. التحليل باستعمال العامل المُشترك	
العامل المُشترك ظاهر **مثال** $\boldsymbol{B = (2x+1)(-3x+1) - (2x+1)(x-1)}$ $\boldsymbol{= (2x+1)[(-3x+1) - (x-1)]}$ $\boldsymbol{= (2x+1)(-3x+1-x+1)}$ $\boldsymbol{= (2x+1)(-4x+2)}$	**العامل المُشترك غير ظاهر** **مثال** $\boldsymbol{G = (8x-3)(5x-3) - 5x + 3}$ نعلم أن $-5x+3 = -(5x-3)$ وبالتعويض $G = (8x-3)(5x-3) - (5x-3)$ $G = (5x-3)[(8x-3) - 1]$ $G = (5x-3)[8x-4]$
2. التحليل باستعمال المتطابقة الشهيرة الثالثة $\boldsymbol{(a)^2 - (b)^2 = (a+b)(a-b)}$	
المتطابقة $\boldsymbol{(a)^2 - (b)^2 = (a+b)(a-b)}$ ***ظاهرة*** ***مثال*** $\boldsymbol{E = (3x-3)^2 - (x+1)^2}$ $\boldsymbol{= (3x-3+x+1)\big(3x-3-(x+1)\big)}$ $\boldsymbol{= (4x-2)(2x-3-x-1)}$ $\boldsymbol{= (4x-2)(x-4)}$	***المتطابقة*** $\boldsymbol{(a)^2 - (b)^2 = (a+b)(a-b)}$ ***غير ظاهرة*** ***مثال*** $F = (2x-1)^2 - 16$ *نعلم أن* $16 = (4)^2$ *وبالتعويض* $F = (2x-1)^2 - (4)^2$ *أي* $= (2x-1+4)(2x-1-4)$ *ونجد* $\boldsymbol{= (2x+3)(2x-5)}$
3. التحليل باستعمال المتطابقتين الأولى والثانية $\boldsymbol{(a)^2 + 2\times a\times b + (b)^2 = (a+b)^2}$ ؛ $\boldsymbol{(a)^2 - 2\times a\times b + (b)^2 = (a-b)^2}$	
مثال $\boldsymbol{9x^2 + 6x + 1 = (3x)^2 + 2\times 3x\times 1 + 1^2}$ $\boldsymbol{= (3x+1)^2}$	***مثال*** $\boldsymbol{25x^2 + 10\sqrt{7}x + 7 = (5x)^2 + 2\times 5x\times\sqrt{7} + \sqrt{7}^2}$ $\boldsymbol{= (5x+\sqrt{7})^2}$

4) حل معادلة من الشكل $\boldsymbol{ax+b=cx+d}$:

☺ كل مُعادلة من الشكل $ax+b=cx+d$ يؤول حلها إلى حل مُعادلة من الشكل $a'x=b'$

مثال حل المعادلة $3x-7=x+1$ يؤول إلى حل المعادلة $2x=8$ ومنه $x=4$.

5) حل مُعادلة جُداء معدوم $\boldsymbol{(ax+b)(cx+d)=0}$ حيث $\boldsymbol{a}$ و $\boldsymbol{b}$ و $\boldsymbol{c}$ و $\boldsymbol{d}$ أعداد معلومة

يؤول إلى حل مُعادلتين من الدرجة الأولى $cx+d=0$ أو $ax+b=0$

وحلي المُعادلة هما $x=-\frac{d}{c}$ أو $x=-\frac{b}{a}$.

مثال حل المُعادلة $(x-6)(2x+14)=0$

لدينا $(x-6)(2x-14)=0$

معناه $2x+14=0$ أو $x-6=0$ ومنه $x=-7$ أو $x=6$

ومنه حلا المُعادلة هما: -7 و 6.

دربُ الكُسالى نعيم في مسالكه
أمّا الطموح فتُدمي دونه المُقل

من أراد النجاح في هذه الحياة فعليه التغلب عى أسباب الفشل الستة وهي: النوم، التراخي، الخوف، الغضب، الكسل والمُماطلة.

على فايسبوك: مع الأستاذ هلال خالد الرياضيات	على انستغرام: Prof_khaled_mathpro

6) حساب قيمة عبارة حرفية من أجل قيمة لمتغيرها

نُعوض المُتغير(مثلا x) بقيمته في العبارة ثم نُكمل الحساب بتطبيق أولوية الحساب

مثال نحسُب قيمة العبارة $B=(x-5)^2-(3x+1)^2$ من أجل $x=2$.

بالتعويض

$$B=(2-5)^2-(3\times 2+1)^2$$
$$=(-3)^2-(6+1)^2=9-(7)^2=9-49=-40$$

7) تربيض مُشكل

1. قراءة مُعمقة لنص المُشكلة.
2. اختيار المجهول المُناسب.
3. صياغة مُعادلة أو متراجحة أو معادلة من الشكل $x^2=b$ تتضمن هذا المجهول أو حل جملة معادلتين.
4. الحل (إيجاد المجهول أو المجهولين في حالة جملة معادلتين).
5. التحقق من الحل.
6. الإجابة عن السؤال.

أمثلة عن أنواع تربيض مُشكل

تربيض مُشكل يؤول حله إلى حل المُعادلة $x^2=b$ ورث أحمد ومُصطفى قطعة أرض مساحتها 486 متر مربع. طولها يساوي ثلاثة أضعاف عُرضها. ☺ جد عُرضها وطولها.	**تربيض مُشكل يؤول حله إلى حل مُعادلة من الدرجة الأولى** مجموع أوزان ثلاث إخوة فاطمة ومنير و سليم هو $178kg$ تزن فاطمة ثلاثة أرباع وزن منير، ويزيد وزن سليم بـ $13kg$ عن وزن منير. ☺ جد وزن كل واحد من الأخوة.
مُشكل يؤول حله إلى حل متراجحة من الدرجة الأولى يقترح صاحب قاعة مسرح على زبائنه خيارين: **الخيار الأول** يُسدد الزبون 400DA لمُشاهدة مسرحية واحدة. **الخيار الثاني** يُسدد الزبون 150DA لمُشاهدة مسرحية واحدة مع اشتراك سنوي قيمته 2500DA. ☺ متى يكون الخيار الثاني أفضل من الخيار الأول؟	**مُشكل يؤول حله إلى حل مُعادلة جُداء معدوم** قطعتي أرض إحداهما مُستطيلة الشكل بُعداها $x+3$ و $2x+1$ والأخرى مُربعة الشكل بُعدها $2x+1$. إذا علمت أن فرق مساحتيهما معدوم دون استعمال النشر والتبسيط. ☺ جد أبعادهما $(x\geq 0)$.

مُشكل يؤول حله إلى حل جملة مُعادلتين في مطعم دفعت عائلة عمر $2240DA$ مقابل ثلاث وجبات للكبار ووجبة واحدة للصغار، أما عائلة علي فقد دفعت 1880DA مقابل وجبتين للأطفال. ✍ جد ثمن وجبة الكبار وثمن وجبة الصغار.

انتبه

- المُعادلة من الشكل $(ax+b)-(cx+d)=0$ أو $(ax+b)+(cx+d)=0$ ليست مُعادلة جداء معدوم وإنما معادلة من الدرجة الأولى.

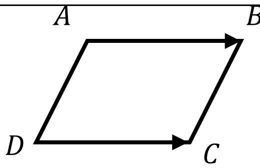
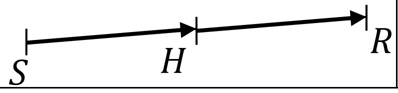
مثال بحل المُعادلة $(-4x+1)-(x+6)=0$.

تعلّم القواعد باحتراف ثم تجاوزها بفن

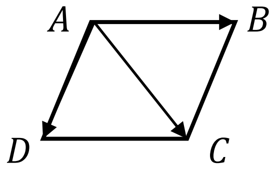
البريد الإلكتروني: khaledhellal1993@gmail.com

على فايسبوك: مع الأستاذ هلال خالد الرياضيات	على انستغرام: Prof_khaled_mathpro

1. إنشاء نقطة صورة نُقطة بانسحاب شُعاعه معلوم (أكتفي بذكر حالتين من ثلاث هما الأهم)

المطلوب	المقصود حسب تعريف الانسحاب	الانشاء
نعتبر A و B و D ثلاث نقط متمايزة وليست في استقامية. القول أن C صورة النقطة D بالانسحاب الذي يُحول A إلى B (أي أنشئ C حيث $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}$)	الرباعي ABCD متوازي أضلاع.	
نعتبر S و H نقطتان متمايزتان أنشئ R حيث $\overrightarrow{SH}=\overrightarrow{HR}$	يعني أن H منتصف [SR]	

2. إنشاء نقطة صورة نقطة بانسحاب باستعمال قاعدة متوازي اضلاع(مجموع شعاعين لهما نفس المبدأ)

المطلوب	المقصود حسب قاعدة متوازي أضلاع	الانشاء
نعتبر A و B و D ثلاث نقط متمايزة ليست في استقامية. انشئ C حيث $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$	فالرباعي ABCD متوازي أضلاع.	

3. إثبات ما تُساويه مجاميع شُعاعية علاقة شال(مجموع شعاعين نهاية الأول هي بداية الثاني)

المطلوب

مثال أثبت أن $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CN}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AN}$

الاثبات دون وجود شكل هندسي مُنجز

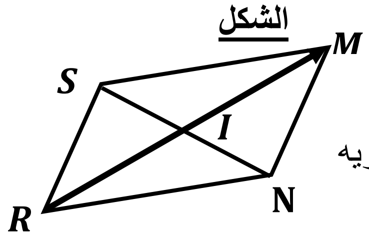
لدينا $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ (حسب علاقة شال) .... (1)

و $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CN}=\overrightarrow{AN}$ (حسب علاقة شال) .... (2)

من (1) و(2) نستنتج أنه بالفعل $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CN}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AN}$

الشكل

الرباعي SMNR متوازي أضلاع I نقطة تقاطع قطريه



الاثبات بوجود شكل هندسي مُنجز (نوظف علاقة شال و قاعدة متوازي أضلاع وخواص متوازي اضلاع ومنتصف قطعة مُستقيم)

أثبت أن $\overrightarrow{RI}-\overrightarrow{SI}+\overrightarrow{RI}+\overrightarrow{IN}=\overrightarrow{RM}$.

نعلم أن $\overrightarrow{RI}+\overrightarrow{IN}=\overrightarrow{RN}$ (حسب علاقة شال)......(1)

وأن $-\overrightarrow{SI}=\overrightarrow{IS}$ و $\overrightarrow{RI}+\overrightarrow{IS}=\overrightarrow{RS}$.........(2)

من (1) و(2) ينتج $\overrightarrow{RN}+\overrightarrow{RS}=\overrightarrow{RM}$ (حسب قاعدة متوازي أضلاع)

4. حساب مُركبتي شُعاعين

في المُستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس نعتبر النقطتان A و B

حيث $A(x_A\,;y_A)$ و $B(x_B\,;y_B)$. فمركبتي الشعاع $\overrightarrow{AB}$ هما $\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix}$ ونكتُب $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix}$

مثال أول(حساب مُباشر بحساب المركبتين)	مثال ثان(أوظف حساب مُركبتي شُعاع في إثبات أن رباعي هو متوازي أضلاع)
نعتبر النقطتين $(5;-6)$ و$B(-1;2)$ من مستو مزود بمعلم متعامد ومتجانس. احسُب مركبتي الشعاع $\overrightarrow{AB}$. بعد أن نكتُب القانون الذي حفظناه، لابد أن نقوم بهذا العمل على النقطتين $A(\underset{x_A}{5}\;;\underset{y_A}{-6})$ و $B(\underset{x_B}{-1}\;;\underset{y_B}{2})$ لدينا $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix}$ وبالتعويض $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1-5\\2-(-6)\end{pmatrix}$ أي $\overrightarrow{AB}\binom{-6}{8}$.	نعتبر النقط $A(-2;2)$ و $B(2;3)$ و $C(2;-1)$ و $D(-2;-2)$ في المُستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس. هل الرباعي ABCD متوازي أضلاع؟ لدينا $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix}=\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2-(-2)\\3-2\end{pmatrix}=\overrightarrow{AB}\binom{4}{1}$ $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}x_C-x_D\\y_C-y_D\end{pmatrix}=\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}2-(-2)\\-1-(-2)\end{pmatrix}=\overrightarrow{DC}\binom{4}{1}$ إذن $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ ومنه الرباعي ABCD متوازي أضلاع.

يقول أحد أشهر جراحي العظام في العالم: أن أكبر نقطة تحوّل في حياتي حي منعت عني أمي التلفاز والهاتف وأجبرتني على القراءة.

5. حساب المسافة بين نقطتين في معلم للمستوي

المسافة بين نقطتين A و B في معلم للمستوي م.م.م تُحسب بهذا القانون $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

مثال أول (حساب مباشر)

نعتبر $A(5\,;-6)$ و $B(-1\,;2)$ نقطتان من م.م.م

احسُب المسافة بين النقطتين A و B

لدينا $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

ولدينا $A(\underset{x_A}{5}\,;\underset{y_A}{-6})$ و $B(\underset{x_B}{-1}\,;\underset{y_B}{2})$

وبالتعويض

$$AB = \sqrt{(-1-5)^2 + \left(2-(-6)\right)^2}$$

إذن $AB = \sqrt{(-6)^2 + (8)^2}$

$= \sqrt{36+64} = 10$

مثال ثان (توظيفه مثلا لمعرفة أن مثلث هو متساوي ساقين)

$(\mathbf{O};\vec{\mathbf{I}},\vec{\mathbf{J}})$ *معلم متعامد ومتجانس للمستوي .*

1) نعتبر هذه النقط $A\ (2;\ -1)$ و $B\ (-2\ ;\ 3)$ و $C\ (-4;\ -3)$.

2) **احسب** AC **واستنتج نوع** ABC **علما أن** $BC = 2\sqrt{10}$

لدينا $AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2}$

ولدينا $A(\underset{x_A}{2}\,;\underset{y_A}{-1})$ و $C(\underset{x_B}{-4}\,;\underset{y_B}{-3})$

وبالتعويض $AC = \sqrt{(-4-2)^2 + \left(-3-(-1)\right)^2}$

إذن $AC = \sqrt{(-6)^2 + (-2)^2} = \sqrt{36+4} = \sqrt{40}$

نوع المثلث $\boldsymbol{ABC}$ مثلث متساوي الساقين لأن:

$AC = \sqrt{40} = \sqrt{4\times 10} = \sqrt{2^2\times 10} = 2\sqrt{10} = BC$

5. حساب إحداثيتي منتصف قطعة مُستقيم

6. نعتبر نقطتان C و D من معلم متعامد ومتجانس للمُستوي حيث $C(x_C\,;\ y_C)$ و $D(x_D\,;\ y_D)$ ، القول أن M منتصف $[DC]$ فإحداثياها هما: $M(\frac{x_C+x_D}{2}\,;\frac{y_C+y_D}{2})$.

☺ **مثال أول (حساب مُباشر لأن قطعة المُستقيم المُراد حساب منتصفها معروفة)**

نعتبر C و D نقطتان من مستو مزود بمعلم متعامد ومتجانس، حيث $C(5\,;\ -6)$ و $D(-1\,;2)$

احسُب إحداثيتي النقطة M منتصف $[DC]$

لدينا $M(\frac{x_C+x_D}{2}\,;\frac{y_C+y_D}{2})$

ولدينا $C(\underset{x_C}{5}\,;\underset{y_C}{-6})$ و $D(\underset{x_D}{-1}\,;\underset{y_D}{2})$

وبالتعويض $M(\frac{5+(-1)}{2}\,;\frac{(-6)+2}{2})$

إذن $M(2\,;-2)$

مثال ثان (حساب إحداثيتا مركز تناظر رباعي أو مركز دائرة مُحيطة بمثلث قائم)

نعتبر النقط $A(-2;2)$ و $B(2;3)$ و $C(2;-1)$

و $D(-2;-2)$ في المُستوي المنسوب إلى م.م.م

اِحسُب إحداثيتا N مركز تناظر متوازي الأضلاع ABCD.

لدينا N مركز تناظر متوازي الأضلاع ABCD، إذن N منتصف قُطراه $[AC]$ و$[BD]$ (قطرا متوازي أضلاع متناصفان).

لدينا $N(\frac{x_C+x_A}{2}\,;\frac{y_C+y_A}{2})$ ولدينا $C\ (\underset{x_C}{2}\,;\underset{y_C}{-1})$ و $A\ (\underset{x_A}{-2};\underset{y_A}{2})$

وبالتعويض $N(\frac{-2+2}{2}\,;\frac{2+(-1)}{2})$، إذن $N(2\,;-2)$.

7. تساوي شعاعين

☺ نعتبر الشعاعان $\vec{U}$ و $\vec{V}$ حيث أن $\binom{x}{y}$ و $\binom{x'}{y'}$ مركبتاهما على الترتيب أي $\vec{U}\binom{x}{y}$ و $\vec{V}\binom{x'}{y'}$.

✓ فالقول أنهما متساويان $\vec{U} = \vec{V}$ يعني أن $x = x'$ و $y = y'$ (أي أن مركبتاهما متساويتان).

مثال أول (حساب مُباشر)

نعتبر النقط $A(-2;2)$ و $B(2;3)$ و $C(2;-1)$

و $D(-2;-2)$ في المُستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس.

هل الرباعي الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{DC}$ متساويان؟

لدينا $\overrightarrow{AB}\binom{x_B-x_A}{y_B-y_A} = \overrightarrow{AB}\binom{2-(-2)}{3-2} = \overrightarrow{AB}\binom{4}{1}$

و $\overrightarrow{DC}\binom{x_C-x_D}{y_C-y_D} = \overrightarrow{DC}\binom{2-(-2)}{-1-(-2)} = \overrightarrow{DC}\binom{4}{1}$

إذن $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ (أي ان الشعاعان متساويان)

مثال ثان (توظيف تساوي شُعاعين في حساب إحداثيتا نقطة)

$(O;\vec{I},\vec{J})$ ***م.م.م للمستوي.***

نعتبر هذه النقط $\boldsymbol{A}\ (\boldsymbol{1}\ ;\ \boldsymbol{-}3)\ ,\ \boldsymbol{B}\ (\boldsymbol{-5}\ ;\ 2)\ ,\ \boldsymbol{D}\ (\boldsymbol{-2};\ 1)$.

احسُب إحداثيتا **C** *صورة* **D** *بالانسحاب الذي شُعاعه* $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$.

إذن الرباعي $\boldsymbol{ABCD}$ متوازي أضلاع، إذن: $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = \overrightarrow{\boldsymbol{DC}}$.

لدينا $\overrightarrow{\mathbf{AB}}\binom{x_B-x_A}{y_B-y_A} = \overrightarrow{\mathbf{AB}}\binom{-5-1}{2-(-3)} = \overrightarrow{\mathbf{AB}}\binom{-6}{5}$

و $\overrightarrow{\mathbf{DC}}\binom{x_C-x_D}{y_C-y_D} = \overrightarrow{\mathbf{DC}}\binom{x_C-(-2)}{y_C-1} = \overrightarrow{\mathbf{DC}}\binom{x_C+2}{y_C-1}$

إذن نحل المُعادلتين $\boldsymbol{x_C+2=-6}$ و $\boldsymbol{y_C-1=5}$

فنجد $\boldsymbol{x_C=-8}$ و $\boldsymbol{y_C=6}$

زكاة العلم نشره * دعواتكم للوالد بالرحمة والمغفرة

7. حساب إحداثيتي إحدى طرفي قطعة مستقيم عُلم منتصفها

نعتبر A و I نقطتان من مستو مزود بمعلم متعامد ومتجانس، حيث $A(0\,;\,-3)$ و I منتصف [AB] بحيث $I(-1\,;2)$. احسُب إحداثيتي النقطة B : لدينا $x_I=\frac{x_A+x_B}{2}$; $y_I=\frac{y_A+y_B}{2}$	ولدينا $A\,(0\,;\,-3)$ و $I(\,-1\,;\,2)$ $x_A \quad y_A$ و $x_I \quad y_I$ وبعد حل المعادلتين $-1=\frac{0+x_B}{2}$; $2=\frac{-3+y_B}{2}$ نجد: $x_B=-2$ و $y_B=7$ إذن $B(\,-2\,;7)$

8. إثبات انتماء نقطة لدائرة مُحيطة بمثلث قائم

نحسُب المسافة بين هذه النقطة ومركز الدائرة المُحيطة بهذا المُثلث فإذا كانت تُساوي طول نصف قطر هذه الدائرة فإن هذه النقطة تنتمي بالفعل إلى هذه الدائرة.

9. مُتوازي الأضلاع

يكون رباعي ABCD متوازي أضلاع إذا تحققت على الأقل واحدة من الستة (6) المقابلة	**1.** ضلعين منه متقابلان متقايسان حاملاهما متوازيان. مثلا: $AB=DC$ و $(AB)//\,(DC)$ التعبير الشعاعي ✓ حسب تعريف الانسحاب C صورة D بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AB}$ أي $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}$ بحيث A ، B و D متمايزة ليست في استقامية ✓ حسب قاعدة متوازي أضلاع C نقطة بحيث $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$ بحيث A ، B و D متمايزة ليست في استقامية
	2. قُطراه متناصفان($[AC]$ و $[BD]$ لهما نفس المُنتصف نسميه مثلا O). التعبير الشعاعي $\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{OC}$ و $\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{OD}$ بحيث A ، B ، C و D و O متمايزة ليست في استقامية
	3. زاويتان متتاليتان منه متكاملتان. مثلا: $\hat{A}+\hat{B}=180°$.
	4. زاويتان مُتقابلتان مُتقايستان. مثلا: $\hat{A}=\hat{C}$.
	5. كل ضلعان متقابلان حاملاهما متوازيان. أي: $(AB)//\,(DC)$ و $(AD)//\,(BC)$.
	6. كل ضلعان متقابلان متقايسان. أي: $AB=DC$ و $AD=BC$.

10. مُتوازيات الأضلاع الخاصة

مُتوازي أضلاع $ABCD$	ضلعان مُتتاليان منه حاملاهما مُتعامدان. مثلا: $(AB)\perp(BC)$. أو قُطراه مُتقايسان أي $AC=BD$	مُستطيل
	ضلعان مُتتاليان منه متقايسان. مثلا: $AB=BC$ أو قُطراه مُتعامدان أي $(AC)\perp(BD)$.	مُعين
	ضلعان مُتتاليان منه متقايسان حاملاهما مُتعامدان. مثلا: $AB=BC$ و $(AB)\perp(BC)$. أو قُطراه مُتقايسان مُتعامدان أي $AC=BD$ و $(AC)\perp(BD)$	مُربع

زكاة العلم نشره	دعواتكم للوالد بالرحمة والمغفرة

ترجو النجاة من لم تسلُك طريقتها * إن السفينة لا تجري على اليَبس

العلم مغرس كل فخر فافتخر * واحذر يفوتك فخر ذاك المغرس

1. التناسبية

أ) العلاقة الأولى: $y = \frac{p}{100} \times x$

حساب مقدار y معبر عنه بنسبة P% معلومة مأخوذة من مقدار آخر معلوم x: $y = \frac{p}{100} \times x$.	
مثال سعر معطف هو 10500 دج جد ثمن سروال علما أنه ثمنه هو 35% من سعر المعطف. حله: $y = \frac{35}{100} \times 10500 = 3675$	**مثال آخر** عند تاجر سعر حذاء هو 4500 دج و ثمن معطف هو 140% من سعر هذا الحذاء. فجد ثمن المعطف. حله: $y = \frac{140}{100} \times 4500 = 6300$
حساب مقدار x مأخوذ منه سعر لمقدار y ونسبته (P%) معلومة: $y = \frac{p}{100} \times x$ (تعويض y و p ثم حل مُعادلة) أو التعويض مباشرة في العلاقة التالية $x = \frac{100}{p} \times y$	
مثال سعر ساعة يد هو 6500 دج و هو ما يمثل ما نسبته 20% من ثمن جهاز حاسوب. جد ثمن الحاسوب. حله: $x = \frac{100}{20} \times 6500 = 32500$	**مثال آخر** سعر حضور ثلاثة عروض مسرحية هو 8000 دج و هو ما يمثل ما نسبته 250% من ثمن عرض مسرحي واحد. فجد سعر حضوره . حله: $x = \frac{100}{250} \times 8000 = 3200$

ب) العلاقات الثانية والثالثة والرابعة

y هو المقدار الجديد (بعد التخفيض، بعد الزيادة بعد الارتفاع...) x هو المقدار الأصلي (قبل التخفيض، قبل الارتفاع، قبل الزيادة...) $1 - \frac{p}{100}$ معامل الدالة الخطية في حالة تخفيض p النسبة المئوية للتخفيض أو الزيادة	$y = \left(1 + \frac{p}{100}\right)x$ $y = \left(1 - \frac{p}{100}\right)x$	مُلاحظة كل علاقة من العلاقتين بها أربعة مجاهيل يُطلب حساب أحدها في كل تمرين.
	$y' = \frac{p}{100}x$	y' هو المقدار المُخفَّض أو المقدار المُرتفع

حساب المقدار الأصلي (حل مُعادلة)

تخفيض (نسبة الزيادة معلومة)

المقدار الجديد معلوم ← أستعمل هذا القانون $y = \left(1 + \frac{p}{100}\right)x$

مثال تلفاز بعد ارتفاع سعره بنسبة 20% هو 45000 دج.

احسُب سعر التلفاز قبل الارتفاع. حل مُختصر 37500 دج

المقدار المرتفع معلوم ← أستعمل هذا القانون $y' = \frac{p}{100}x$

مثال نسبة ارتفاع أسعار ملابس في محل هي 20%.

احسُب سعر معطف زاد ثمنه بـ 3000 دج؟ حل مُختصر 15000دج

زيادة (نسبة التخفيض معلومة)

المقدار الجديد معلوم ← أستعمل هذا القانون $y = \left(1 - \frac{p}{100}\right)x$

مثال سعر هاتف نقال بعد تخفيض ثمنه بنسبة 30% هو 35000 دج.

احسُب سعر الهاتف قبل التخفيض. حل مُختصر 50000دج

المقدار المُنخفض معلوم ← أستعمل هذا القانون $y' = \frac{p}{100}x$

مثال نسبة تخفيض في محل لبيع الأثاث المنزلي 15%.

ما هو سعر ثلاجة خُفض ثمنها بـ 1200 دج؟ حل مُختصر 8000دج

إن صغير القوم إن كان عالما .. كبيرا إذا رُدّت إليه المحافل

أكبر خوف في العالم هو الخوف من أراء الآخرين **فلا تكُن سجين الآراء غير المُحفزة**	**زكاة العلم نشره** **دعواتكم للوالد بالرحمة والمغفرة**

حساب المقدار الجديد (تعويض x فقط)

نسبة الارتفاع أو الزيادة معلومة ← أستعمل هذا القانون $y=\left(1+\frac{p}{10}\right)x$

مثال

ارتفع مُستوى ماء سد الذي هو 50m بنسبة 5% بعد سقوط الأمطار.

✍ احسُب ارتفاعه الجديد. حل مُختصر 52,5m.

نسبة التخفيض معلومة ← أستعمل هذا القانون $y=\left(1-\frac{p}{10}\right)x$

مثال

سعر معطف قبل تخفيض ثمنه بنسبة 60% هو 12000 دج.

✎ احسُب سعره بعد التخفيض. حل مُختصر 4800دج

حساب المقدار المُنخفض أو المقدار المُرتفع

مثال أول سعر معطف 12000 دج ارتفع ثمنه بنسبة 15%. فاحسُب سعره المرتفع؟ *حل مُختصر* $y'=180$	**مثال ثان** سعر حذاء 8000 دج انخفض ثمنه بنسبة 5% فاحسُب سعره المنخفض؟ *حل مُختصر* $y'=400$

ج) العلاقة الخامسة

إذا ارتفع مقدار بـ p% ثم انخفض بـ t% ثم ارتفع بـ $m\%$ ثم ارتفع بـ $s\%$ ثم انخفض بـ $k\%$ وهكذا دواليك…

فإننا نحسُب المقدار الجديد y بالعلاقة $y=\left(1+\frac{p}{10}\right)\left(1-\frac{t}{10}\right)\left(1+\frac{m}{10}\right)\left(1+\frac{s}{10}\right)\left(1-\frac{k}{10}\right)x$

مثال

ثمن بدلة رياضية 7500 دج، ارتفع ثمنها بـ 10% ثم انخفض بـــ 10%. كم أصبح ثمنها؟ حل مُختصر7425دج

مُلاحظة ارتفاع مقدار بنسبة ثم تخفيظه بنفس النسبة لايعني عودته لثمنه الأول –والعكس صحيح-

2. التعبير عن وضعية تناسبية بدالة الخطية

العلاقة	مدلولها
$z=\frac{p}{100}\times k$	المقدار الجديد z مُعطى بدلالة عبارة دالة خطية مُعاملها $\frac{p}{100}$ ومتغيرها المقدار الأصلي k مثال سعر مقدار z هو 20% من سعر مقدار آخر k. ✎ جد عبارة الدالة الخطية التي تُعطي سعر المقدارz. حل مختصر $z=0,2k$
$y=\left(1+\frac{p}{100}\right)x$	المقدار الجديد y مُعطى بدلالة عبارة دالة خطية مُعاملها $1+\frac{p}{100}$ ومتغيرها المقدار الأصلي x مثال ✎ ارتفع سعر سلعة x بنسبة 5%.فعبر بدلالة x عن سعرها الجديد y.حل مختصر $y=1,05x$
$y=\left(1-\frac{p}{100}\right)x$	المقدار الجديد y مُعطى بدلالة عبارة دالة خطية مُعاملها $1-\frac{p}{100}$ ومتغيرها المقدار الأصلي x مثال ✎ انخفض سعر سلعة x بنسبة 30%.فعبر بدلالة x عن سعرها الجديد y.حل مختصر $y=0,7x$
$y'=\frac{p}{100}x$	المقدار الجديد y' مُعطى بدلالة عبارة دالة خطية مُعاملها $\frac{p}{100}$ ومتغيرها المقدار الأصلي x مثال سعر سلعة 1800 دج خُفِّض ثمنها بـ 15%. ما هو السعر المُخفَّض؟ حل مُختصر 270 دج

وإن كبير القوم لا علم عنده ... صغير إذا التفّت عليه الجحافل

المعرفة قوّة.. لا تنسى هذا

وما نيل المطالب بالتمني **ولكن تُؤخذ الدنيا غِلابا**	**زكاة العلم نشره** **دعواتكم للوالد بالرحمة والمغفرة**

1) تعيين عبارة دالة خطية جبريا انطلاقا من معلومية صورة عدد بهذه الدالة

☺ كل دالة تُكتب على الشكل: $f(x) = ax$ هي دالة خطية حيثُ a عدد مُعطى وهو معامل توجيهها.

هذا يعني أن إيجاد عبارتها هو إيجاد قيمة المُعامل a وهو يُحقق $a = \frac{f(x')}{x'}$ حيث x' عدد معلوم لا يُساوي صفر وصورته $f(x')$ معلومة.

مثال f دالة خطية حيث $f(3) = -12$ جد عبارتها. لدينا f دالة خطية معناه: $f(x) = ax$ حيث $a = \frac{f(x')}{x'}$. ولدينا أيضا $f(3) = -12$ نضع $x' = 3$ فيكون $f(x') = -12$ وبالتعويض: $a = \frac{f(x')}{x'} = \frac{-12}{3} = -4$ إذن عبارة الدالة الخطية f هي $f(x) = -4x$.

2) تعيين عبارة دالة تآلفية جبريا انطلاقا من معلومية صورة عددين بهذه الدالة

☺ كل دالة عبارتها من الشكل: $f(x) = ax + b$ هي عبارة دالة تآلفية وهذا يعني أننا لتعيينها نعيّن قيمتي معامليها a و b حيثُ $a = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ و $b = f(x_2) - ax_2$.

مُلاحظة يمكن حساب a و b أيضا بالعلاقتين $a = \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$ و $b = f(x_1) - ax_1$ أو بتوظيف جملة مُعادلتين.

مثال f دالة تآلفية حيث $f(-5) = 28$ و $f(1) = 4$ **حل المثال** f دالة تآلفية معناه $f(x) = ax + b$ حيث $a = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ وبوضع $x_1 = 4$ فيكون $f(x_1) = 4$ وبوضع $x_2 = -5$ فيكون $f(x_2) = 28$ وبالتعويض في العلاقة $a = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ نجد $a = \frac{28-4}{-5-1}$ وبعد الحساب $a = -4$ وبالتعويض في العلاقة $b = f(x_2) - ax_2$ نجد $b = 28 - (-4) \times (-5)$ وبعد الحساب $b = 8$. إذن عبارة الدالة f هي: $f(x) = -4x + 8$.

3) تعيين صورة عدد بدالة خطية جبريا

لحساب صورة عدد c بدالة خطية f عُلمت عبارتها $f(x) = ax$ نُعوض x بهذا العدد في عبارتها أي: $f(c) = a \times c$

مثال	مثال آخر
نعتبر f دالة خطية حيث $f(x) = -3x$. • احسُب صورة العدد 5 بالدالة f. لدينا $c = 5$ وبالتعويض نجد: $f(5) = -3 \times 5 = -15$	g دالة خطية، حيث $g(x) = \frac{2}{5}x$ احسُب صورة العدد 10 بالدالة g. لدينا $c = 10$ وبالتعويض $g(5) = \frac{2}{5} \times 10 = 4$

4) تعيين صورة عدد بدالة تآلفية جبريا

لحساب صورة عدد c بدالة تآلفية g عُلمت عبارتها $g(x) = ax + b$، نعوض x بهذا العدد في عبارتها. أي: $g(c) = a \times c + b$ ونُكمل الحساب بعدها.

مثال	مثال آخر
مثال نعتبر g دالة تآلفية، حيث: $g(x) = \frac{1}{2}x - 6$ ☺ احسُب صورة العدد 8 بالدالة g . لدينا $c = 8$ وبالتعويض والحساب: $g(8) = \frac{1}{2} \times 8 - 6 = \frac{8}{2} - 6 = 4 - 6 = -2$	**مثال آخر** لتكن f دالة تآلفية، حيث: $f(x) = -4x + 2$ ☺ احسُب صورة العدد $\frac{1}{4}$ بالدالة f . لدينا $c = -3$ وبالتعويض والحساب: $f(-3) = -4 \times \frac{1}{4} + 2 = -1 + 2 = 1$

5) تعيين عدد عُلمت صورته بدالة خطية جبريا

لحساب العدد x الذي صورته k بدالة خطية g عبارتها من الشكل $g(x) = ax$، نحل المُعادلة: $g(x) = k$

مثال	مثال آخر
مثال نعتبر الدالة الخطية g حيث: $g(x) = -9x$. • احسُب العدد الذي صورته بالدالة g هي 36 لدينا $ax = k$ حيث $a = -9$ و $k = 36$ بالتعويض $-9x = 36$ ومنه $x = \frac{36}{-9} = -4$	**مثال آخر** نعتبر الدالة الخطية f حيث: $f(x) = \frac{1}{3}x$. • احسُب العدد الذي صورته بالدالة f هي 2. لدينا $ax = k$ وبالتعويض $\frac{1}{3}x = 2$ ومنه $x = 6$

6) تعيين عدد عُلمت صورته بدالة تآلفية جبريا

لحساب العدد x الذي صورته k بدالة تآلفية عبارتها من الشكل $f(x) = ax + b$ نحل المُعادلة $f(x) = k$.

مثال أول f دالة تآلفية حيث: $f(x) = -3x + 1$ ✎ احسُب العدد الذي صورته 22 بالدالة f . لدينا $f(x) = -3x + 1$ و $k = 22$ وبالتعويض $-3x + 1 = 22$ أي: $-3x = 22 - 1$ أي $-3x = 21$ ومنه: $x = -7$	**مثال ثاني** g دالة تآلفية حيث: $g(x) = x - 4$ ✎ احسُب العدد الذي صورته 6 بالدالة f . لدينا $g(x) = x - 4$ و $k = 6$ $x - 4 = 6$ أي $x = 6 + 4$ ومنه $x = 1$

7) إثبات انتماء نقطة إلى تمثيل بياني لدالة خطية أو تآلفية

تعريف القول أن نقطة $A(x_A; y_A)$ تنتمي إلى التمثيل البياني لدالة f يعني أن: $f(x_A) = y_A$
(أي أن ترتيبتها هي صورة فاصلتها بالدالة f)

مثال f دالة تآلفية حيث: $f(x) = -6x + 1$. هل النقطتين $A(-3; 19)$ و $B(0; -1)$ تنتمي إلى التمثيل البياني للدالة f ؟

- نضع $A(x_A; y_A)$ حيث $x_A = -3$ و $y_A = 19$ ونحسب $f(x_A)$ أي $f(-3)$:
$f(x_A) = f(-3) = -6 \times (-3) + 1 = 18 + 1 = 19 = y_A$ ، إذن A تنتمي إلى التمثيل البياني للدالة f
- نضع $B(x_B; y_B)$ حيث $x_B = 0$ و $y_B = -1$ ونحسُب $f(x_B)$ أي $f(0)$:
$f(x_B) = f(0) = -6 \times 0 + 1 = 0 + 1 = 1 \neq -1 = y_B$، إذن B لا تنتمي إلى التمثيل البياني للدالة f

8) توظيف انتماء نقطة إلى تمثيل بياني لدالة خطية أو تآلفية لإثبات أن ثلاث نقط في استقامية

الحالة الأولى: تُعطى عبارة دالة تآلفية أو خطية تمثيلها البياني يشمل نقطتين من الثلاث فنُثبت فقط أن النقطة الثالثة تنتمي للتمثيل البياني:

مثال f دالة تآلفية تمثيلها البياني يشمل النقطتين $A(-2; 8)$ و $B(-1; 5)$ حيث: $f(x) = -3x + 2$

✍ نعتبر النقطة C حيث $C(1; -1)$.

- هل النقط A و B و C في استقامية؟علل.

الإجابة في هذه الحالة يكفي أن نُثبت أن C تنتمي إلى التمثيل البياني للدالة f وهو المستقيم (AB).

لدينا f دالة تآلفية، تمثيلها البياني يشمل النقطتين A و B، يعني أن المُستقيم (AB) هو التمثيل البياني للدالة f .

إذن نُثبت أن C تنتمي إلى (AB) ومن أجل هذا لابد أن تُحقق إحداثيتا النقطة C: $f(x_C) = y_C$ وهذا محقق لأن:
$f(x_C) = f(1) = -3 \times 1 + 2 = -3 + 2 = -1 = y_C$ إذن النقط A و B و C في استقامية.

الحالة الثانية: لا تُعطى عبارة دالة تآلفية (أو خطية) تمثيلها البياني يشمل نقطتين من الثلاث فنفرض وجود تمثيل بياني لدالة تآلفية (أو تآلفية) يشمل نقطتين من الثلاث ونُعين عبارته التآلفية (أو الخطية) ثم نُثبت أن الثالثة تنتمي للتمثيل البياني.

مثال نعتبر E ، F و G ثلاث نقط من معلم متعامد للمستوي حيث: $E(2; -3)$ ؛ $F(3; -5)$ و $G(-2; 5)$.

✍ هل النقط E ، F و G في استقامية؟ علل

الإجابة نفرض أن (EF) التمثيل البياني لدالة تآلفية نُسميها f، نقوم بتعيين عبارتها.

$a = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{-3-(-5)}{2-3} = \frac{2}{-1} = -2$ و $b = f(x_2) - ax_2$ فنجد $b = 1$.

إذن عبارة الدالة التآلفية f هي $f(x) = -2x + 1$ والآن نُثبت أن: $f(x_G) = y_G$.

$f(-2) = -2 \times (-2) + 1 = 4 + 1 = 5 = y_C$ إذن النقط E ، F و G في استقامية.

9) الدالة تآلفية والدالة الخطية والدالة الثابتة

الدالة التآلفية هي كل دالة عبارتها من الشكل $f(x) = ax + b$. الدالة الخطية هي كل دالة عبارتها من الشكل $f(x) = ax$. الدالة الثابتة هي كل دالة عبارتها من الشكل $f(x) = b$	$f(x) = -3x + 1$ هي عبارة دالة تآلفية f $f(x) = -3x$ هي عبارة دالة خطية f $f(x) = 1$ هي عبارة دالة خطية f

10) التمثيل البياني لدالة ثابتة

عبارتها $f(x) = b$	هو مستقيم يُوازي محور الفواصل
	لا نحتاج جدول مُساعد في إنشاء تمثيلها البياني وإنما نرسُم مستقيم يوازي محور الفواصل ويشمل محور التراتيب في النقطة ذات الترتيبة b.

خير جليس في الزمان كتاب

• على فايسبوك: الرياضيات مع الأستاذ هلال خالد	• على انستغرام: Prof_khaled_mathpro

11) التمثيل البياني لدالة خطية

التمثيل البياني لدالة خطية هو كل مستقيم يشمل المبدأ ونعلم أن كل مستقيم يمكن إنشاءه انطلاقا من تعيين نقطتين على الأقل.

جدول مُساعد لإنشاء تمثيل بياني لدالة خطية

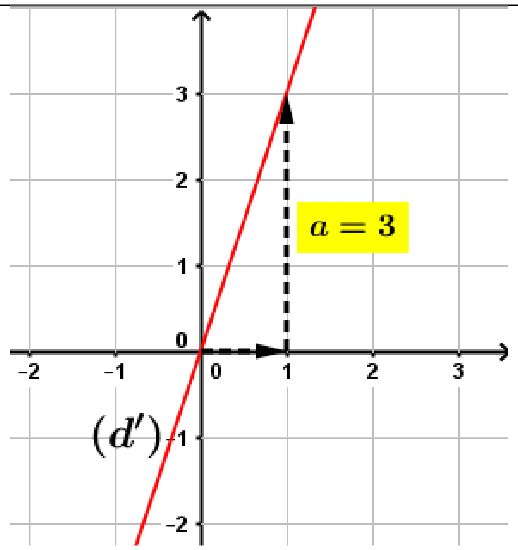
x	0	b (اختيار)
$f(x)$	0	$f(b)$
$(x;\ f(x))$	$(0;\ 0)$ مبدأ المعلم	$(b;\ f(b))$

العدد b (الفاصلة) نحن من نختاره ثم نحسُب الصورة $f(b)$ (الترتيبة). كمثال:

نُنشئ (d') التمثيل البياني للدالة الخطية $f(x)=3x$

جدول مُساعد		
x	0	1
$f(x)$	0	3
$(x;\ f(x))$	$(0;\ 0)$	$(1;\ 3)$

$f(1)=3\times 1=3$



12) تعيين إحداثيتا نقطة تقاطع تمثيلين بيانيين لدالتين تآلفيتين

نعتبر f و g دالتين تآلفيتان، القول أن التمثيلين البيانيين للدالتين متقاطعتان معناه أن المعادلة: $f(x)=g(x)$ محققة و x حل هذه المعادلة هو فاصلة نقطة التقاطع وترتيبة النقطة هي صورة هذه الفاصلة بأحد عبارتي الدالتين.

مثال نعتبر f و g دالتين تآلفيتان حيث $f(x)=-x+2$ و $g(x)=2x-1$

✍ تعيين إحداثيتا M نقطة تقاطع التمثيلين البيانيين للدالتين f و g حسابيا:

حساب x_M (فاصلة M):

لدينا $f(x)=g(x)$ وبتعويض عبارتيهما: $-x+2=2x-1$ فنجد أن $x=1$ ومنه $x_M=1$

حساب y_M (ترتيبة M):

$y_M=f(x_M)=f(1)=-1+2=1$ أو $y_M=g(x_M)=(1)=2\times1-1=1$، إذن $y_M=1$

ومنه إحداثيا M هما $(x_M;y_M)=(1;1)$

تعيين إحداثيتا M نقطة تقاطع التمثيلين البيانيين للدالتين f و g بيانيا:

جدول مُساعد لإنشاء (Δ) التمثيل البياني للدالة التآلفية f

x	3	0
$f(x)$	-1	2
$(x;\ f(x))$	$(3;-1)$	$(0;2)$

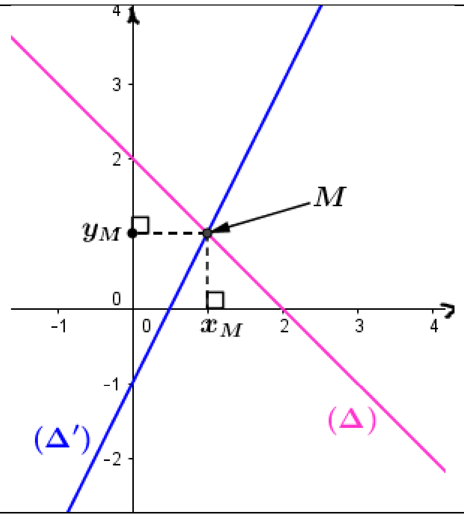
$f(0)=-0+2=2$ و $f(3)=-3+2=-1$

جدول مُساعد لإنشاء (Δ') التمثيل البياني للدالة g

x	2	0
$g(x)$	3	-1
$(x;\ g(x))$	$(2;3)$	$(0;-1)$

$g(2)=2\times2-1=3$ $g(0)=2\times0-1=-1$

بقراءة بيانية نجد أن: $(x_M;y_M)=(1;1)$



والله إن ذات الفتى بالعلم والتقى فإذا لم يكونا فلا اعتبار لذاته	زكاة العلم نشره دعواتكم للوالد بالرحمة والمغفرة
• على فايسبوك: الرياضيات مع الأستاذ هلال خالد	• على انستغرام: Prof_khaled_mathpro

عندما تزدهر المدارس يزدهر كل شيئ

الحل الجبري

نُميز ثلاث طرُق لحل جملة مُعادلتين، ونأخذ كمثال حل الجملة الآتية: $\begin{cases} x+y=10 \\ 2x+5y=32 \end{cases}$

طريقة التعويض	طريقة الجمع	طريقة الجمع والتعويض

1. ترقيم الجملتين $\begin{cases} x+y=10 \ \dots (1) \\ 2x+5y=32 \ \dots (2) \end{cases}$

طريقة التعويض

2. نستنتج عبارة x (أو عبارة y) من إحدى المُعادلتين ونضعها بين قوسين: من المعادلة (1) مثلا: $x = (10-y)$

3. نُعوض x بعبارته في المعادلة (2) فنجد قيمة y بحل مُعادلة من الدرجة الأولى:

$$2(10-y)+5y=32$$
$$20-2y+5y=32$$
$$3y=12 \text{ إذن: } y=4$$

4. نعوض قيمة y في عبارة x فنجد قيمة x : $x=(10-4)=6$

طريقة الجمع والتعويض (والخطوتان 2 و 3 مشتركتان مع طريقة الجمع)

2. نضرب طرفي المُعادلة (1) في -2 (لأنه معاكس معامل x في المعادلة (2)) فنحصل على المعادلة (3): $-2x-2y=-20 \dots (3)$

(الهدف في هذه الخطوة هو جعل معاملي x في المعادلتين متعاكسين أو معاملي y في المعادلتين متعاكسين).

3. نجمع المُعادلتين (2) و (3) فنحصل على قيمة y بحل هذه المعادلة:

$-2x-2y+2x+5y=-20+32$ إذن: $y=4$

طريقة الجمع

4. نضرب طرفي المُعادلة (1) في -5 (لأنه معاكس معامل y في المعادلة (2))، فنحصل على المعادلة (4):

$$-5x-5y=-50 \dots (4)$$

5. نجمع المُعادلتين (2) و (4) فنحصل على قيمة x بحل هذه المعادلة:

$$-5x-5y+2x+5y=-50+32$$

إذن: $x=6$

طريقة الجمع والتعويض

4. نعوض قيمة y في أحد المُعادلتين (1) أو (2) فنجد: (نختار المعادلة (1)):

قيمة x: $x+4=10$

إذن $x=10-4=6$

المرحلة قبل الأخيرة من الحل بإحدى الطرق الثلاث التحقق(مرحلة اختيارية)

$$x+y=6+4=10$$
$$2x+5y=2\times 6+5\times 4=32$$

المرحلة الأخيرة وهي التصريح بالحل الثنائية $(6;4)$ هي حل للجملة.

مُلاحظة اختيار الطريقة المُناسبة يعتمد على معاملات x و y في الجملة.

مثال حل الجملة $\begin{cases} 3x+4y=70 \\ -3x+11y=40 \end{cases}$ بطريقة الجمع والتعويض أفضل، لأن معاملي x متعاكسين.

الحل البياني

نأخذ كمثال حل الجملة $\begin{cases} x-3y=5 \\ 2x+y=2 \end{cases}$.

1. أول خطوة هي أن نستنتج عبارتي y في كلتا المُعادليتن، ونجد: $\begin{cases} y=\frac{1}{3}x-\frac{5}{3} \\ y=-2x+2 \end{cases}$.

2. نُسمي كل عبارة بدالة كالآتي: $f(x)=\frac{1}{3}x-\frac{5}{3}$ و $g(x)=-2x+2$.

3. نرسُم (d) و (d') التمثيلين البيانيين للدالتين f و g على الترتيب(توظيف التمثيل البياني للدالة التآلفية).

4. الحل البياني للجملة هو إحداثيا نقطة تقاطعهما.

جدول مُساعد لإنشاء (d) التمثيل البياني للدالة f :

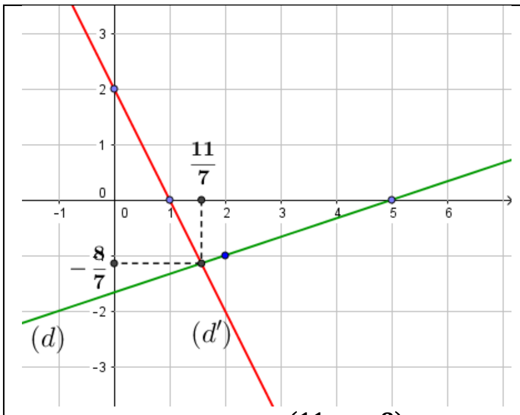
x	5	2
y	0	-1
$(x;y)$	$(5;0)$	$(2;-1)$

$$f(5)=\frac{1}{3}\times 5-\frac{5}{3}=\frac{5}{3}-\frac{5}{3}=\frac{5-5}{3}=0$$
$$f(2)=\frac{1}{3}\times 2-\frac{5}{3}=\frac{2}{3}-\frac{5}{3}=\frac{2-5}{3}=-1$$

جدول مُساعد لإنشاء (d') التمثيل البياني للدالة g:

x	0	1
y	2	0
$(x;y)$	$(0;2)$	$(1;0)$

$g(x)=-2\times 0+2=2$ ؛ $g(1)=-2\times 1+2=0$



إذن حل الجملة هو الثنائية $\left(\frac{11}{7};-\frac{8}{7}\right)$ (في هذه الحالة قراءة إحداثيا نقطة التقاطع صعب جدا!).

1. إنشاء نُقطة بدوران:

لإنشاء نقطة صورة نقطة بدوران يكفي أن نعلم ثلاثة نقاط أساسية:

المركز(مركز الدوران) ؛ الزاوية (قيس زاوية الدوران) ؛ الاتجاه(اتجاه الدوران).

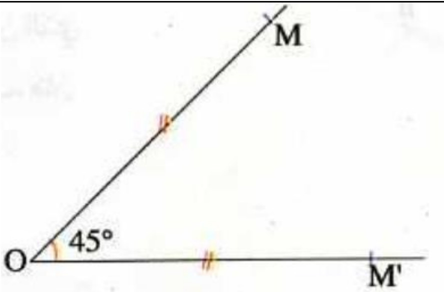
ملاحظة في اتجاه الدوران نُميّز اتجاهين:

أ) الاتجاه المُباشر(أو الاتجاه الموجب أو اتجاه عكس عقارب الساعة).

ب) الاتجاه غير المُباشر(أو الاتجاه السالب أو اتجاه عقارب الساعة).

مثال

نعتبر M و O نقطتان متمايزتان.
أنشئ النقطة M′ صورة النقطة M بالدوران الذي مركزه O وزاويته 45° في الاتجاه غير المباشر.



مُلاحظة

صورة نقطة بدوران مركزه معلوم وزاويته 180° هو تناظر مركزي -لا نحتاج لإضافة شرط الاتجاه-.

مثال

إنشاء نقطة A′ صورة نقطة A بالدوران الذي مركزه نقطة O معناه إنشاء A′ نظيرة A بالنسبة إلى O .

2. خواص الدوران

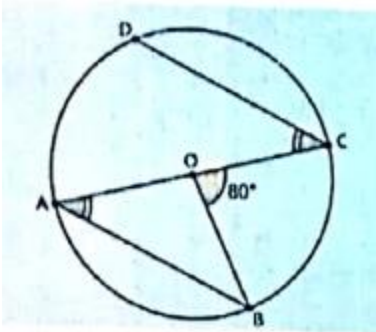
يحفظ الدوران الأطوال وأقياس الزوايا والمساحات والتوازي والاستقامية.

3. الزاوية المُحيطية والزاوية المركزية:

- ✓ كل زاوية رأسها مركز دائرة هي زاوية مركزية.
- ✓ كل زاوية رأسها ينتمي إلى الدائرة وضلعاها يقطعان الدائرة هي زاوية مُحيطية .

الزاوية $\widehat{COB}$ مركزية والزاوية $\widehat{CAB}$ مُحيطية وكلاهما تحصران نفس القوس $\widehat{BC}$ فإن
$\widehat{CAB} = 0,5 \times \widehat{COB}$ أو $\widehat{COB} = 2 \times \widehat{CAB}$

مثال



الزاويتان $\widehat{ACD}$ و $\widehat{DBA}$ مُحيطيتان وكلاهما تحصران نفس القوس $\widehat{AD}$ فهما مُتقايستان.

4. خاصية الزاويتان المُحيطيتان

في دائرة إذا كانتا زاويتان مُحيطيتان يحصران نفس القوس فإنهما متقايستان.

5. خاصية الزاويتان المُحيطية والمركزية:

في دائرة إذا كانتا زاويتان مركزية ومُحيطية يحصران نفس القوس فإنهما متقايستان.

السنابل الملئ تنحني تواضعا
والفارغات رؤوسهن شوامخ

زكاة العلم نشره
دعواتكم للوالد بالرحمة والمغفرة

6. الإحصاء #التكرار

- **التكرار** في سلسلة إحصائية هو عدد مرّات ظهور قيمة ما.
- **التكرار المُجمّع الصاعد** لقيمة في سلسلة إحصائية هو مجموع تكرار هذه القيمة وتكرارات القيم **الأصغر** منها في نفس السلسلة.
- **التكرار المُجمّع النّازل** لقيمة في سلسلة إحصائية هو مجموع تكرار هذه القيمة وتكرارات القيم **الأكبر** منها في نفس السلسلة.
- **التكرار النسبي** لقيمة في سلسلة إحصائية هو تكرار هذه القيمة على المجموع الكلي للتكرارات.
- **التكرار النسبي المُجمّع الصاعد** لقيمة في سلسلة إحصائية هو مجموع التكرار النسبي لهذه القيمة والتكرارات النسبية للقيم **الأصغر** منها في نفس السلسلة.
- **التكرار النسبي المُجمّع النّازل** لقيمة في سلسلة إحصائية هو مجموع التكرار النسبي لهذه القيمة والتكرارات النسبية للقيم **الأكبر** منها في نفس السلسلة.

مثال أول

نعتبر **السلسلة الإحصائية الآتية** في شكل قيم كما: (قد تكون ممثلة في مخطط أعمدة أو مخططات إحصائية أخرى)

2	6	2	4	4	4	7	5	7	4	5	4	5	5
4	2	2	5	4	4	11	6	4	4	2	2	7	4

القيمة	2	4	5	6	7	11	المجموع
تكرارها	6	11	5	2	3	1	28
تكرارها المجمّع الصاعد	6	17	22	24	27	28	/
تكرارها المجمع النازل	28	22	11	6	4	1	/
تكرارها النسبي (تواترها)	$\frac{6}{28}$	$\frac{11}{28}$	$\frac{5}{28}$	$\frac{2}{28}$	$\frac{3}{28}$	$\frac{1}{28}$	1
تكرارها النسبي المجمّع الصاعد (تواترها المُجمع الصاعد)	$\frac{6}{28}$	$\frac{17}{28}$	$\frac{22}{28}$	$\frac{24}{28}$	$\frac{27}{28}$	$\frac{28}{28}$	/
تكرارها النسبي المجمع النازل (تواترها المُجمع النازل)	$\frac{28}{28}$	$\frac{22}{28}$	$\frac{11}{28}$	$\frac{6}{28}$	$\frac{4}{28}$	$\frac{1}{28}$	/

مثال ثاني

نعتبر **السلسلة الإحصائية** في شكل فئات كما يأتي، حيث x يُمثل علامات تلاميذ أحد أقسام السنة الرابعة متوسط:

العلامة x	$0 \le x < 5$	$5 \le x < 10$	$10 \le x < 15$	$15 \le x \le 20$
التكرار	2	14	12	10
التواتر	$\frac{2}{38}$	$\frac{14}{38}$	$\frac{12}{38}$	$\frac{10}{38}$
التواتر المجمع الصاعد	$\frac{2}{38}$	$\frac{16}{38}$	$\frac{28}{38}$	$\frac{38}{38}$
التواتر المُجمع النازل	$\frac{38}{38}$	$\frac{36}{38}$	$\frac{22}{38}$	$\frac{10}{38}$

الفشل هو التوقف عن المُحاولة، أما النجاح هو الاستمرار في المحاولة وأما التميّز هو الاستمرار حين يتوقف الآخرون.

على فايسبوك: مع الأستاذ هلال خالد الرياضيات	على انستغرام: Prof_khaled_mathpro
زكاة العلم نشره	دعواتكم للوالد بالرحمة والمغفرة

الأستاذ هلال خالد ***BEM2025***

7. الإحصاء #المدى

المدى في سلسلة إحصائية هو الفرق بين أكبر قيمة وأصغر قيمة في هذه السلسلة.

مثال في السلسلة الإحصائية الآتية، المدى هو **3** لأن $\mathbf{7-4=3}$.

5	**5**	**4**	**5**	**4**	**7**	**5**	**7**	**4**	**4**

مُلاحظة المدى يُعطي انطباعا عن فكرة تشتت قيم سلسلة ما (فوارق معتبرة بين قيم نفس السلسلة).

الأستاذ هلال خالد ***BEM2025***

8. الإحصاء #الوسيط

الوسيط في سلسلة هو قيمة تُقسم السلسلة إلى سلسلتين لهما نفس التكرار.

مُلاحظات

- الوسيط ليس بالضرورة قيمة من السلسلة.
- في سلسلة إحصائية مُجمعة في فئات، بدل أن نبحث عن الوسيط نبحث عن الفئة الوسيطية.

طريقة

لتعيين وسيط سلسلة إحصائية تكرارها الكلي N، نُرتبها ترتيبا تصاعديا أو تنازليا:

- إذا كان N فرديا فإن الوسيط يُساوي القيمة التي رُتبتها $\frac{N+1}{2}$.

مثال أول في السلسلة الإحصائية الآتية، مجموع التكرار $N=7$ فرُتبة الوسيط هي $\frac{7+1}{2}$ أي **4** وبترتيب القيم تصاعديا (يمكن أيضا تصاعديا): 71 ؛ 51 ؛ 51 ؛ 51 ؛51 ؛ 41 ؛ 41 فنجد الرُتبة الرابعة للقيمة 51 فهي وسيط هذه السلسلة.

51	**51**	**41**	**51**	**41**	**71**	**51**

- إذا كان N زوجيا فإن الوسيط هو الوسط الحسابي للقيمتين اللتين ترتيبهما $\frac{N}{2}+1$ و $\frac{N}{2}$.

مثال ثاني في السلسلة الإحصائية الآتية: 3 ؛ 8 ؛ 2 ؛ 3 ؛ 4 ؛ 8 ؛ 3 ؛ 11 ؛ 8 ؛ 8 عدد التكرارات هو 10 أي أن $N=10$ وبترتيب السلسلة ترتيبا تنازليا: 2 ؛ 3 ؛ 3؛ 3 ؛ 4 ؛ 8 ؛ 8 ؛ 8 ؛ 8 ؛ 11 نجد القيمة ذات الرُتبة $\frac{10}{2}$ (أي $\frac{10}{2}=5$) هي 8 والقيمة ذات الرتبة $\frac{N}{2}+1$ (أي $\frac{10}{2}+1=6$) هي 4 .

فالوسيط هو الوسط الحسابي $\frac{4+8}{2}$ أي 6.

مثال ثالث

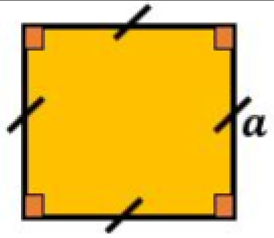
نعتبر **السلسلة الإحصائية** في شكل فئات كما يأتي، حيث x يُمثل علامات تلاميذ أحد أقسام السنة الرابعة متوسط:

العلامة x	$\mathbf{15 \le x \le 20}$	$\mathbf{10 \le x < 15}$	$\mathbf{5 \le x < 10}$	$\mathbf{0 \le x < 5}$
التكرار	**10**	**12**	**14**	**2**
التكرار المُجمع الصاعد	**38**	**28**	**16**	**2**

لدينا $N=38$ ومنه الوسيط هو القيمة ذات الرتبة 19 وهي موجودة في الفئة $\mathbf{10 \le x < 15}$ حسب التكرار المجمع الصاعد ومنه الفئة الوسيطية هي $\mathbf{10 \le x < 15}$.

الروايات لا ينبغي أن تكون مصدر ثقافتك، وإلاّ فتلك مُجرّد خيالات وعليك تعلّم دينك لتعرف ربّك واقرأ في كتب الفكر لتعرف الحياة واقرأ الأدب ليَرِق طبعك.

المُربع



a طول ضلع المربع

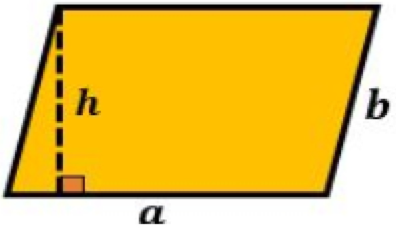
مساحته

$A = a \times a$

مُحيطه

$P = 4 \times a$

متوازي أضلاع



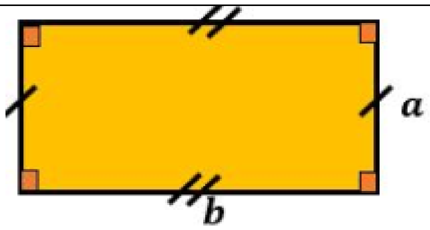
مساحته

$A = \frac{a \times h}{2}$

مُحيطه

$P = 2(a + b)$

المُستطيل



مُحيطه $P = 4(a \times b)$

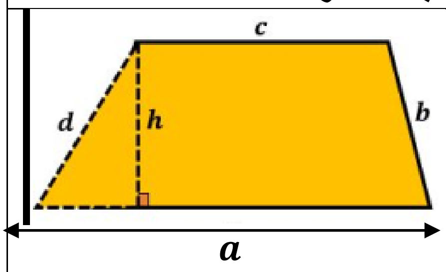
مساحته

$A = a \times b$

a عُرضه

b طوله

شبه المُنحرف



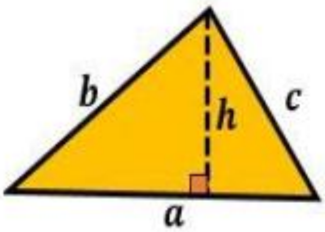
مساحته

$A = \frac{(a+c)\times h}{2}$

مُحيطه

$P = a + b + d + c$

مثلث



مُحيطه $P = a + b + c$

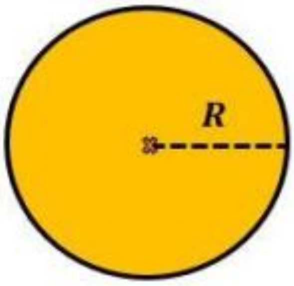
مساحته

$A = \frac{a \times h}{2}$

a قاعدة

h ارتفاعه

دائرة



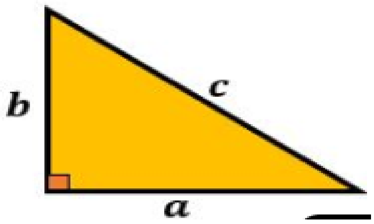
مساحتها

$A = \pi \times R^2$

مُحيطها

$P = 2 \times \pi \times R$

مثلث قائم

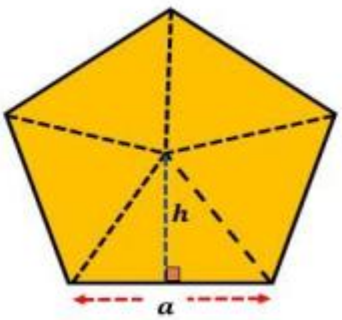


مساحته

$A = \frac{a \times b}{2}$

$P = a + b + c$

مُضلع (منتظم خماسي)

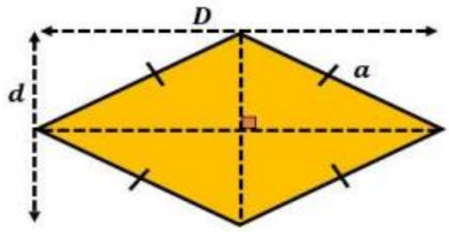


$P = a \times n$

n: هو عدد الأضلاع.

$S = n \times \left(\frac{a \times h}{2}\right)$

معين



مساحته

$A = \frac{d \times D}{2}$

مُحيطه

$P = 4 \times a$

من سلك طريقا يلتمس فيه علما
سهّل الله له به طريقا إلى الجنة

على فايسبوك: الرياضيات مع الأستاذ هلال خالد

على انستغرام: Prof_khaled_mathpro

مكعب

مساحته الجانبية

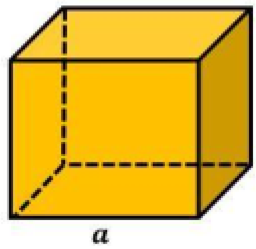
$$A = a \times a \times 4$$

مساحته الكلية

$$S = a \times a \times 6$$

حجمه

$$V = a \times a \times a$$



متوازي مستطيلات

مساحته الجانبية

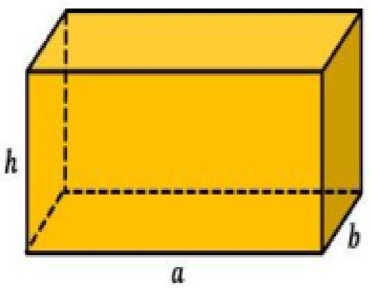
$$A = 2h(a + b)$$

مساحته الكلية

$$S = 2ah \times 2bh + 2ab$$

حجمه

$$V = ab \times h$$



اسطوانة دوران

مساحته الجانبية

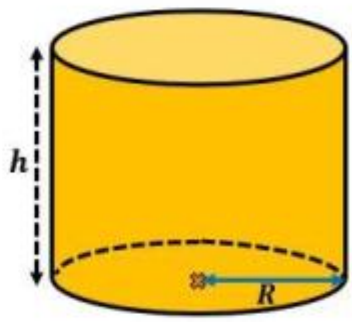
$$S = 2\pi R \times h$$

مساحته الكلية

$$A = 2\pi R^2 + S$$

حجمه

$$V = \pi R^2 \times h$$



الموشور القائم

مساحته الجانبية

$$S = P \times h$$

حيث P محيط القاعدة

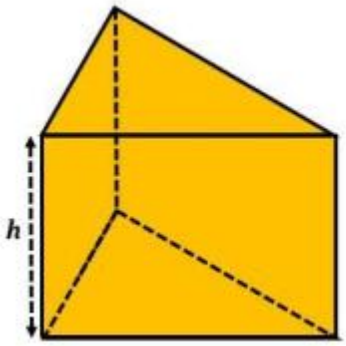
مساحته الكلية

$$A = 2B + S$$

حيث B مساحة القاعدة

حجمه

$$V = B \times h$$



الهرم

مساحته الجانبية

$$S = A' \times n$$

حيث A' مساحة وجه جانبي منه و n عدد الاوجه الجانبية.

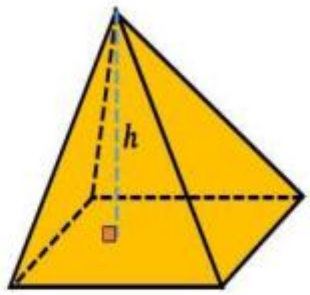
مساحته الكلية

$$A = B + A'$$

حيث B مساحة القاعدة

حجمه

$$V = \frac{1}{3} B \times h$$



شكل القاعدة هو مُضلع(مثلث، مربع...)

المخروط

مساحته الجانبية

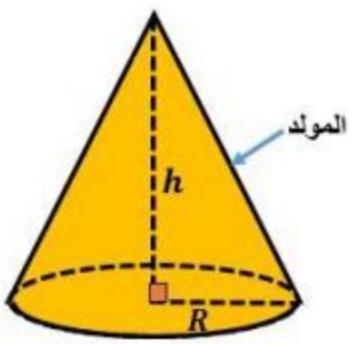
$$S = \frac{2\pi R \times \text{المولد}}{2}$$

مساحته الكلية

$$A = \pi R^2 + S$$

حجمه

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 \times h$$

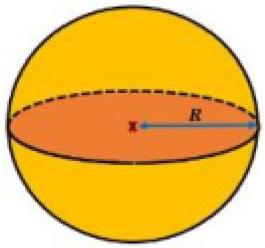


الجلة

مساحته الكلية

$$A = 4\pi R^2$$

حجمه $V = \frac{4}{3} \pi R^3$



على فايسبوك: الرياضيات مع الأستاذ هلال خالد
على انستغرام: Prof_khaled_mathpro
البريد الإلكتروني:
khaledhellal1993@gmail.com

زكاة العلم نشره

دعواتكم للوالد بالرحمة