

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين :

الموضوع الأول :

التمرين الأول : (4 نقاط)

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ: $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = e \times \sqrt{u_n}$

(1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq u_n \leq e^2$

(2) بين أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما، ثم استنتج أنها متقاربة

(3) نضع: من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = \ln u_n - 2$

أ) بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول

ب) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = -\frac{1}{2^{n-1}}$

ج) أكتب عبارة u_n بدلالة n ، ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

د) أكتب P_n بدلالة n حيث: $P_n = u_0 \times u_1 \times \dots \times u_n$

التمرين الثاني : (4 نقاط)

مؤسسة ناشئة بها 12 موظف منهم 7 رجال أحدهم اسمه أنس و 5 نساء احداهن هبة، نريد تكوين لجنة من 3 أعضاء تمثل عمال المصنع.

(1) ماهو عدد الحالات الممكنة لاختيار 3 أعضاء من العمال

(2) أحسب احتمال الحوادث التالية:

❖ A " اللجنة كلها رجال " ❖ B " اللجنة تضم رجلا وامرأتين " ❖ C " اللجنة تضم أنس و هبة "

(3) نعرف المتغير العشوائي X والذي يمثل عدد النساء في اللجنة

أ) عين قيم المتغير العشوائي X

ب) عرف قانون احتمال المتغير العشوائي X ثم أحسب أمله الرياضي $E(X)$

ج) أحسب $P(X > 1)$

(4) نريد تعيين مدير للمؤسسة ونائب من العمال

أ) أحسب احتمال أن يكون المدير و نائبه من جنسين مختلفين.

(ب) أحسب احتمال أن يكون أنس أحد العضوين.

التمرين الثالث : (5 نقاط)

(I) حل في مجموعة الاعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول Z الآتية: $z^2 + 4z + 8 = 0$

(II) المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، نعتبر النقط A ، B و C التي لاحقاتها على الترتيب

$$z_C = -z_B \text{ و } z_B = \overline{z_A}, z_A = -2 + 2i$$

(1) أكتب العدد z_A على الشكل الاسي ثم استنتج الشكل الاسي لكل من z_C و z_B

(2) أ) عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون العدد $(z_A)^n$ حقيقي موجب

(ب) بين أن العدد $\left(\frac{z_C}{2\sqrt{2}}\right)^{1962}$ تخيلي صرف

(3) أكتب العدد المركب $L = \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$ على الشكل الاسي ثم استنتج طبيعة المثلث ABC

(4) (I) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث: $\arg\left(\frac{z+2-2i}{z+2+2i}\right) = -\frac{\pi}{2}$

أ) بين أن النقطة O تنتمي إلى (Γ)

(ب) عين ثم أنشئ (Γ)

التمرين الرابع : (7 نقاط)

(I) (C_g) التمثيل البياني للدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$$g(x) = c + (a + bx)e^{-x+2}$$

◀ بقراءة بيانية :

(1) عين $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ ثم إستنتج أن $c = 1$.

(2) عين $g(2)$ و $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x) - g(2)}{x - 2}$ ثم إستنتج أن $a = 1$ و $b = -1$.

(3) إستنتج من أجل كل عدد حقيقي x : إشارة $g(x)$.

(II) f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = x - 1 + xe^{-x+2}$ ، (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس

$$(O; \vec{i}, \vec{j})$$

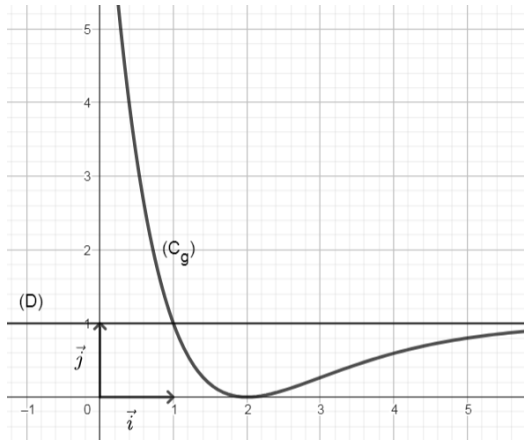
(1) أحسب: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

(2) أ- بين أن f دالة أصلية للدالة g على $\mathbb{R}$

ب- إستنتج اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها.

(3) أحسب: $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x - 1)]$ ، ثم فسر النتيجة بيانياً.

(4) أدرس وضعية المنحني (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x - 1$



5) أ- بَيِّنْ أَنَّ المنحني (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي المستقيم (Δ) يطلب تعيين معادلة له.

ب- بَيِّنْ أَنَّ $I(2; 3)$ نقطة إنعطاف للمنحني (C_f) .

ج - بَيِّنْ أَنَّ المنحني (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α ، حيث : $0 < \alpha < 0,2$

د - أحسب $f(-\frac{1}{2})$ ثم أنشئ كلاً من (T) ، (Δ) و المنحني (C_f) .

6) ناقش بياناً وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة : $x + e^{x-2}(-1 - m) = 0$

7) أ) بإستعمال المكاملة بالتجزئة عين الدالة الأصلية للدالة $x \mapsto xe^{-x}$ والتي تنعدم عند 1

ب) أحسب بالسنتيمتر مربع A مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) و المستقيمت ذات المعادلات:

$$x = 2 \text{ و } x = 1, y = x - 1$$

انتهى الموضوع الأول

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

ثانوية: المجاهد المتوفي علال العيشاوي

امتحان البكالوريا التجريبي للتعليم الثانوي

دورة : 2025

الشعبة: علوم تجريبية

المدة: 3 ساعات

تصحيح اختبار في مادة: الرياضيات

تصحيح الموضوع الأول :

التمرين الأول : (4 نقاط)

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ: $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = e \times \sqrt{u_n}$

1. برهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq u_n \leq e^2$ 0.5 ن

نضع: $P(n) : 0 \leq u_n \leq e^2, n \in \mathbb{N}$

- بداية التراجع: من أجل $n = 0$ ، لدينا: $u_0 = 1$ و $0 \leq 1 \leq e^2$ ومنه: $0 \leq u_0 \leq e^2$ إذن: $P(0)$ صحيحة.
- نفرض أن $P(n)$ صحيحة من أجل n كيفي ونبرهن صحتها من أجل $n + 1$

لدينا: $0 \leq u_n \leq e^2$ ومنه: $0 \leq \sqrt{u_n} \leq e$ إذن: $0 \leq e\sqrt{u_n} \leq e^2$ ومنه: $0 \leq u_{n+1} \leq e^2$

إذن حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع $0 \leq u_n \leq e^2$ من أجل كل عدد طبيعي

2. تبيان أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما، ثم استنتاج أنها متقاربة

◀ تبيان أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما 0.5 ن

لدينا:

$$u_{n+1} - u_n = e\sqrt{u_n} - u_n$$

$$= \sqrt{u_n}(e - \sqrt{u_n})$$

بما أن $0 \leq u_n \leq e^2$ إذن $0 \leq \sqrt{u_n} \leq e$ و $-e \leq -\sqrt{u_n} \leq 0$ ومنه: $0 \leq e - \sqrt{u_n} \leq e$ إذن: $\sqrt{u_n}(e - \sqrt{u_n}) > 0$

ومنه: $u_{n+1} - u_n > 0$ إذن: (u_n) متزايدة تماما.

◀ استنتاج تقارب المتتالية (u_n) 0.25 ن

بما أن (u_n) محدودة من أعلى ومتزايدة تماما إذن (u_n) متقاربة

3. نضع: من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = \ln u_n - 2$

أ) تبيان أن (v_n) متتالية هندسية مع تعيين أساسها وحدها الأول 1 ن

لدينا:

$$v_{n+1} = \ln(u_{n+1} - 2) = \ln(e\sqrt{u_n}) - 2$$

$$= \ln e + \ln(\sqrt{u_n}) - 2 = 1 + \ln(u_n)^{\frac{1}{2}} - 2$$

$$= -1 + \frac{1}{2} \ln u_n = \frac{1}{2}(\ln u_n - 2) \quad \left[= \frac{1}{2}v_n \right]$$

إذن: (v_n) هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$ حدها الأول: $v_0 = \ln(u_0) - 2 = \ln(1) - 2 = 0 - 2 = -2$

0.25 ن

(ب) استنتاج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = -\frac{1}{2^{n-1}}$

لدينا: $v_n = -\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ اذن: $v_n = v_0 \times q^n = -2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = -\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = -\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

(ج) كتابة عبارة u_n بدلالة n ، ثم حساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

0.5 ن

كتابة عبارة u_n بدلالة n

لدينا: $v_n = \ln u_n - 2$ اذن: $\ln u_n = v_n + 2$ ومنه: $u_n = e^{v_n+2}$ اذن: $u_n = e^{-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 2}$

حساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

0.5 ن

لدينا: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 2} = e^{0+2} = e^2$ لأن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ لأن: $-1 < \frac{1}{2} < 1$

0.5 ن

(د) كتابة P_n بدلالة n حيث: $P_n = u_0 \times u_1 \times \dots \times u_n$

لدينا: $u_n = e^{v_n+2}$ اذن:

$$P_n = u_0 \times u_1 \times \dots \times u_n = e^{v_0+2} \times e^{v_1+2} \times \dots \times e^{v_n+2} = e^{v_0+v_1+\dots+v_n+2(n+1)}$$

$$v_0 + v_1 + \dots + v_n = v_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = -2 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = -4 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$$

$$P_n = e^{-4 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) + 2(n+1)}$$

التمرين الثاني : (4 نقاط)

مؤسسة ناشئة بها 12 موظف منهم 7 رجال أحدهم اسمه أنس و 5 نساء احداهن هبة، نريد تكوين لجنة من 3 أعضاء تمثل عمال المصنع.

0.25 ن

1. عدد الحالات الممكنة لاختيار 3 أعضاء من العمال:

لدينا: $C_{12}^3 = \frac{12!}{3!(12-3)!} = \frac{12!}{3!9!} = 220$ ومنه: عدد الحالات الممكنة لاختيار 3 أعضاء من العمال هي 220 حالة

2. حساب احتمال الحوادث التالية:

❖ A " اللجنة كلها رجال " ❖ B " اللجنة تضم رجلا وامرأتين " ❖ C " اللجنة تضم أنس و هبة "

0.25 ن

حساب احتمال الحدث A:

$$P(A) = \frac{C_7^3}{C_{12}^3} = \frac{35}{220} = \frac{7}{44}$$

0.25 ن

حساب احتمال الحدث B:

$$P(B) = \frac{C_7^1 \times C_5^2}{C_{12}^3} = \frac{7 \times 10}{220} = \frac{70}{220} = \frac{7}{22}$$

0.25 ن

حساب احتمال الحدث C:

$$P(C) = \frac{C_1^1 \times C_1^1 \times C_{10}^1}{C_{12}^3} = \frac{1 \times 1 \times 10}{220} = \frac{10}{220} = \frac{1}{22}$$

3. نعرف المتغير العشوائي X والذي يمثل عدد النساء في اللجنة

أ) تعيين قيم المتغير العشوائي X 0.25 ن

قيم المتغير العشوائي X هي: $\{0; 1; 2; 3\}$

ب) تعريف قانون احتمال المتغير العشوائي X ثم حساب أمله الرياضي $E(X)$

◀ تعريف قانون احتمال المتغير العشوائي X 1 ن

❖ $P(X = 0)$ هو احتمال للجنة كلها رجال أي $P(A)$:

$$P(X = 0) = P(A) = \frac{35}{220} = \frac{7}{44}$$

❖ $P(X = 1)$ هو احتمال اللجنة تضم امرأة ورجلين :

$$P(X = 1) = \frac{C_5^1 \times C_7^2}{C_{12}^3} = \frac{5 \times 21}{220} = \frac{105}{220} = \frac{21}{44}$$

❖ $P(X = 2)$ هو احتمال اللجنة تضم رجلا وامرأتين أي $P(B)$:

$$P(X = 2) = P(B) = \frac{70}{220} = \frac{7}{22}$$

❖ $P(X = 3)$ هو احتمال للجنة كلها نساء :

$$P(X = 3) = \frac{C_5^3}{C_{12}^3} = \frac{10}{220} = \frac{1}{22}$$

عندئذ:

x_i	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{35}{220}$	$\frac{105}{220}$	$\frac{70}{220}$	$\frac{10}{220}$

◀ حساب الأمل الرياضي $E(X)$ 0.25 ن

$$E(X) = \sum_{i=0}^{i=3} x_i \times p_i \quad \text{لدينا:}$$

$$\begin{aligned} &= 0 \times \frac{35}{220} + 1 \times \frac{105}{220} + 2 \times \frac{70}{220} + 3 \times \frac{10}{220} \\ &= \frac{0 + 105 + 140 + 30}{220} \\ &= \frac{275}{220} = 1.25 \end{aligned}$$

ج) حساب $P(X > 1)$ 0.5 ن

$$\begin{aligned} P(X > 1) &= P(X = 2) + P(X = 3) \quad \text{لدينا:} \\ &= \frac{70}{220} + \frac{10}{220} \\ &= \frac{80}{220} = \frac{4}{11} \end{aligned}$$

(4) نريد تعيين مدير للمؤسسة ونائب من العمال

أ) حساب احتمال أن يكون المدير ونائبه من جنسين مختلفين. 0.5 ن

❖ نسمي الحدث D : "اللجنة من جنسين مختلفين" : $P(D) = \frac{2 \times A_5^1 \times A_7^1}{A_{12}^2} = \frac{2 \times 5 \times 7}{132} = \frac{70}{132} = \frac{35}{66}$

ب) حساب احتمال أن يكون أنس أحد العضوين. 0.5 ن

❖ نسمي الحدث E : "أنس أحد العضوين" : $P(E) = \frac{2 \times A_1^1 \times A_{11}^1}{A_{12}^2} = \frac{22}{132} = \frac{1}{6}$

التمرين الثالث : (5 نقاط)

(I) حل في مجموعة الاعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول Z الآتية: $z^2 + 4z + 8 = 0$ 1 ن

لدينا: $\Delta = 4^2 - 4 \times 1 \times 8 = -16$ ، بما أن $\Delta < 0$ اذن للمعادلة حلين مركبين وهما:

$$z_1 = \frac{-4 + 4i}{2} = -2 + 2i \quad \text{و} \quad z_2 = \frac{-4 - 4i}{2} = -2 - 2i$$

(II) المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، نعتبر النقط A, B و C التي لاحقاتها على الترتيب

$$z_C = -z_B \quad \text{و} \quad z_B = \bar{z}_A, \quad z_A = -2 + 2i$$

1. كتابة العدد z_A على الشكل الاسي ثم استنتاج الشكل الاسي لكل من z_B و z_C

◀ كتابة العدد z_A على الشكل الاسي 0.5 ن

لدينا: $|z_1| = |-2 + 2i| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ و $\theta =$ اذن:
$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{2} \\ \sin \theta = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

مع: $\frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ ومنه: $z_A = 2\sqrt{2}e^{\frac{3\pi i}{4}}$ و $k \in \mathbb{Z}$

◀ استنتاج الشكل الاسي لكل من z_B و z_C 0.25 × 2 ن

لدينا: $z_C = -z_B = e^{\pi i} 2\sqrt{2}e^{\frac{-3\pi i}{4}} = 2\sqrt{2}e^{\frac{\pi i}{4}}$ و $z_B = \bar{z}_A = 2\sqrt{2}e^{\frac{-3\pi i}{4}}$

2. أ) تعيين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون العدد $(z_A)^n$ حقيقي موجب 0.5 ن

حتى يكون العدد $(z_A)^n$ حقيقي موجب يكفي أن يكون: $\arg(z_A^n) = 2k\pi$ أي: $\arg(z_A) = 2k\pi$

ومنه: $n \frac{3\pi}{4} = 2k\pi$ اذن: $n = \frac{8}{3}k$ حيث: $k \in \mathbb{Z}$

ب) تبيان أن العدد $\left(\frac{z_C}{2\sqrt{2}}\right)^{1962}$ تخيلي صرف 0.5 ن

لدينا: $z_C = 2\sqrt{2}e^{\frac{\pi i}{4}}$ ومنه: $\left(\frac{z_C}{2\sqrt{2}}\right)^{1962} = \left(\frac{2\sqrt{2}e^{\frac{\pi i}{4}}}{2\sqrt{2}}\right)^{1962} = e^{\frac{\pi i}{4} \times 1962} = e^{\frac{\pi}{2}i + 2k\pi i} = i$ ومنه: العدد

$\left(\frac{z_C}{2\sqrt{2}}\right)^{1962}$ تخيلي صرف

3. كتابة العدد المركب $L = \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$ على الشكل الاسي ثم استنتاج طبيعة المثلث ABC

◀ كتابة العدد المركب $L = \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$ على الشكل الاسي 0.5 ن

لدينا:

$$L = \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \frac{-2 - 2i + 2 - 2i}{2 + 2i + 2 - 2i} = \frac{-4i}{4} = -i$$

اذن: $|L| = 1$ و $\arg(L) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ حيث: $k \in \mathbb{Z}$ ومنه ينتج: $L = e^{-\frac{\pi}{2}i}$

◀ استنتاج طبيعة المثلث ABC : 0.25 ن

لدينا: $|L| = 1$ اذن: $\frac{AB}{AC} = 1$ اذن: $AB = AC$

ولدينا من جهة أخرى: $\arg(L) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ أي: $(\vec{AC}; \vec{AB}) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ، اذن المثلث ABC قائم في A ومتقايس الساقين

4. (Γ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث: $\arg\left(\frac{z + 2 - 2i}{z + 2 + 2i}\right) = -\frac{\pi}{2}$

أ) تبيان أن النقطه O تنتمي إلى (Γ) 0.5 ن

لدينا:

$$\frac{z_O + 2 - 2i}{z_O + 2 + 2i} = \frac{2 - 2i}{2 + 2i} = \frac{(2 - 2i)^2}{(2 + 2i)(2 - 2i)} = \frac{-8i}{8} = -i$$

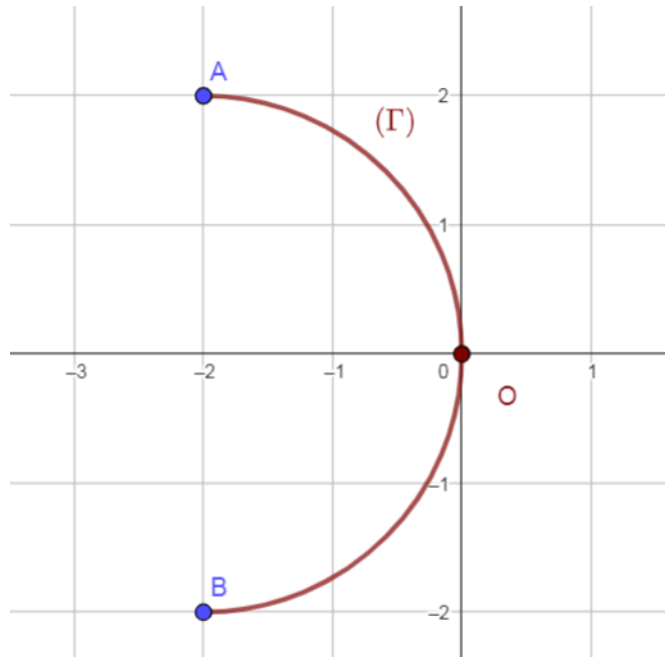
ومنه: $\arg\left(\frac{z_O + 2 - 2i}{z_O + 2 + 2i}\right) = -\frac{\pi}{2}$ اذن: النقطه O تنتمي إلى (Γ)

ب) تعيين ثم إنشاء (Γ)

◀ تعيين (Γ) : 0.5 ن

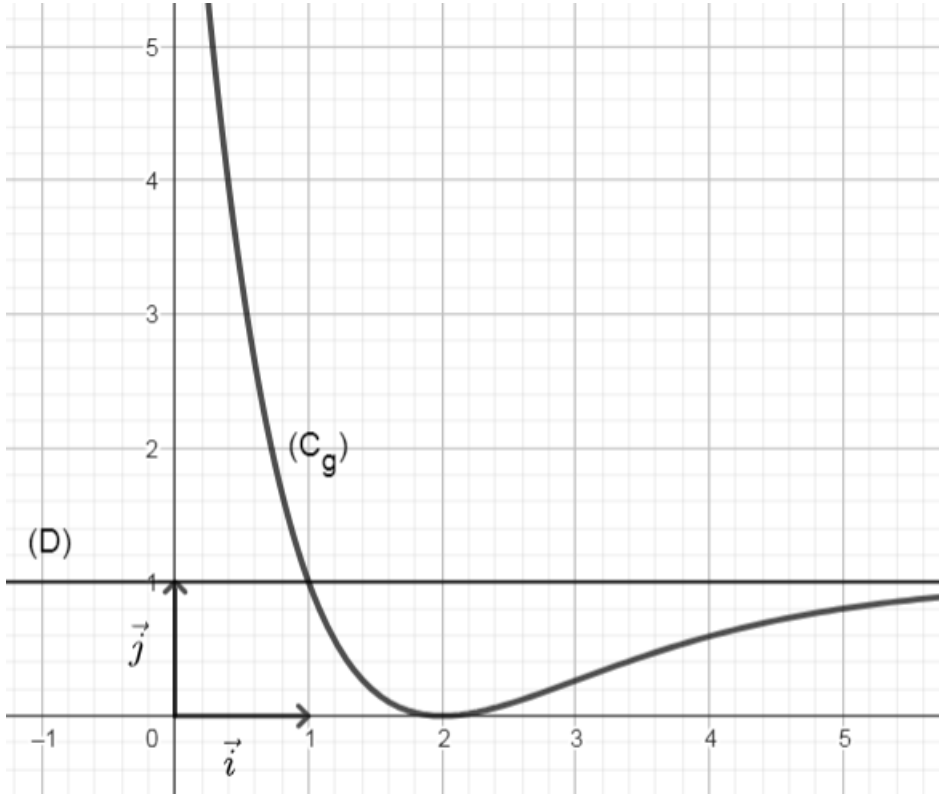
لدينا: $\arg\left(\frac{z + 2 - 2i}{z + 2 + 2i}\right) = -\frac{\pi}{2}$ ومنه: $\arg\left(\frac{z - z_A}{z - z_B}\right) = -\frac{\pi}{2}$ أي: $(\vec{MB}; \vec{MA}) = -\frac{\pi}{2}$ ومنه (Γ) هي نصف الدائرة التي قطرها $[AB]$ باستثناء النقطتين A و B

◀ إنشاء (Γ) : 0.25 ن



التمرين الرابع : (7 نقاط)

(I) (C_g) التمثيل البياني للدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = c + (a + bx)e^{-x+2}$.
 ◀ بقراءة بيانية :



1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ تعيين ثم إستنتاج أن $c = 1$.

◀ تعيين $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ 0.25 ن

من الشكل نلاحظ: $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1$

◀ إستنتاج أن $c = 1$ 0.25 ن

لدينا: $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} c + (a + bx)e^{-x+2} = c$ اذن من خلال مما سبق: $c = 1$

2. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x) - g(2)}{x - 2}$ و $g(2)$ تعيين ثم إستنتاج أن $a = 1$ و $b = -1$.

◀ تعيين $g(2)$ 0.25 ن

من الشكل نلاحظ: $g(2) = 0$

◀ تعيين $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x) - g(2)}{x - 2}$ 0.25 ن

لدينا من جهة : $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x) - g(2)}{x - 2} = g'(2)$ ومن جهة أخرى: $g(2)$ قيمة حدية صغرى اذن: $g'(2) = 0$

ومنه نستنتج أن: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x) - g(2)}{x - 2} = 0$

◀ إستنتاج أن $a = 1$ و $b = -1$ 0.25 × 2 ن

لدينا: $g(2) = 0$ أي: $1 + (a + 2b) = 0$ ومنه: $a + 2b = -1$
 g دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث: $g'(x) = (b - a - bx)e^{-x+2}$ ، بما أن $g'(2) = 0$ إذن: $-b - a = 0$
 ومنه: $a = -b$ ، إذن: $-b + 2b = -1$ أي: $b = -1$ ومنه: $a = 1$

3. $\square$ إستنتج من أجل كل عدد حقيقي x : إشارة $g(x)$. 0.5 ن

من خلال الشكل نلاحظ أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $g(x) \geq 0$ ، نلخص ذلك في جدول الإشارة:

x	0	2	$+\infty$
$g(x)$	+	0	+

(II) f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = x - 1 + xe^{-x+2}$ ، (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. $\square$ حساب: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

◀ حساب: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ 0.25 ن

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ لأن: $\lim_{x \rightarrow -\infty} x - 1 = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x+2} = -\infty$

◀ حساب: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 0.25 ن

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ لأن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - 1 = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x+2} = 0$ (نهاية شهيرة)

2. أ) تبيان أن f دالة أصلية للدالة g على $\mathbb{R}$ 0.25 ن

f دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ، ولدنيا:

$$f'(x) = 1 + e^{-x+2} - xe^{-x+2}$$

$$= 1 + (1 - x)e^{-x+2} = g(x)$$

ومنه: f دالة أصلية للدالة g على $\mathbb{R}$

ب) إستنتاج اتجاه تغير الدالة f ، ثم تشكيل جدول تغيراتها.

◀ إستنتاج اتجاه تغير الدالة f 0.25 ن

بما أن: $f'(x) = g(x)$ و $g(x) \geq 0$ إذن: $f'(x) \geq 0$ و منه f متزايدة على $\mathbb{R}$

◀ تشكيل جدول تغيرات الدالة f 0.25 ن

x	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	+
$f(x)$	$-\infty$	3	$+\infty$

3. حساب : $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x - 1)]$ ، ثم تفسير النتيجة بيانيا.

◀ حساب : $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x - 1)]$ 0.25 ن

لدينا: $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x - 1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x+2} = 0$

◀ تفسير النتيجة بيانيا 0.25 ن

بما أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x - 1)] = 0$ فإن (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل معادلته: $y = x - 1$ بجوار $+\infty$

4. دراسة وضعية المنحني (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x - 1$ 0.25 ن

لدينا: $f(x) - y = xe^{-x+2}$

$f(x) - y = 0$ يعني أن: $xe^{-x+2} = 0$ ومنه: $x = 0$ (لأن: $e^{-x+2} > 0$)

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f(x)-y	—	0	+
الوضع النسبي بين (C_f) و (Δ)	(C_f) تحت (Δ)	(C_f) يقطع (Δ) في النقطة $(0, -1)$	(C_f) فوق (Δ)

5. أ) تبين أن المنحني (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي المستقيم (Δ) يطلب تعيين معادلة له.

◀ تبين أن المنحني (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي المستقيم (Δ) 0.25 ن

نحل المعادلة : $f'(x) = 1$ أي: $g(x) = 1$ ومنه: $1 + (1 - x)e^{-x+2} = 1$ أي $(1 - x)e^{-x+2} = 0$ ومنه: $1 - x = 0$ (لأن: $e^{-x+2} > 0$) إذن $x = 1$

ومنه: النقطة هي : $(1; f(1))$ حيث: $f(1) = 1 - 1 + e^{-1+2} = e$

◀ كتابة معادلة المماس T 0.25 ن

لدينا: $f'(1) = 1$ و $f(1) = e$

$$(T) : y = f'(1)(x - 1) + f(1)$$

$$(T) : y = 1(x - 1) + e$$

$$(T) : y = x - 1 + e$$

ب) تبين أن $I(2; 3)$ نقطة إنعطاف للمنحني (C_f) . 0.25 ن

لدينا:

x	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	+

بما أن المشتقة الأولى انعدمت عند 2 ولم تغير اشارتها اذن النقطة $(2; f(2))$ هي نقطة انعطاف للمنحنى (C_f) ، اذن: $I(2;3)$ نقطة إنعطاف للمنحنى (C_f)

ج) تبيان أن المنحنى (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α ، حيث: $0 < \alpha < 0,2$ 0.25 ن f دالة مستمرة ومنتزعة تماماً على $]0;0.2[$ ، ولدينا:

$$f(0) = 0 - 1 + 0e^{-0+2} = -1$$

$$f(0.2) = 0.2 - 1 + 0.2e^{-0.2+2} = 0.41$$

بما أن $f(0) \times f(0.2) < 0$ إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث $0 < \alpha < 0,2$.

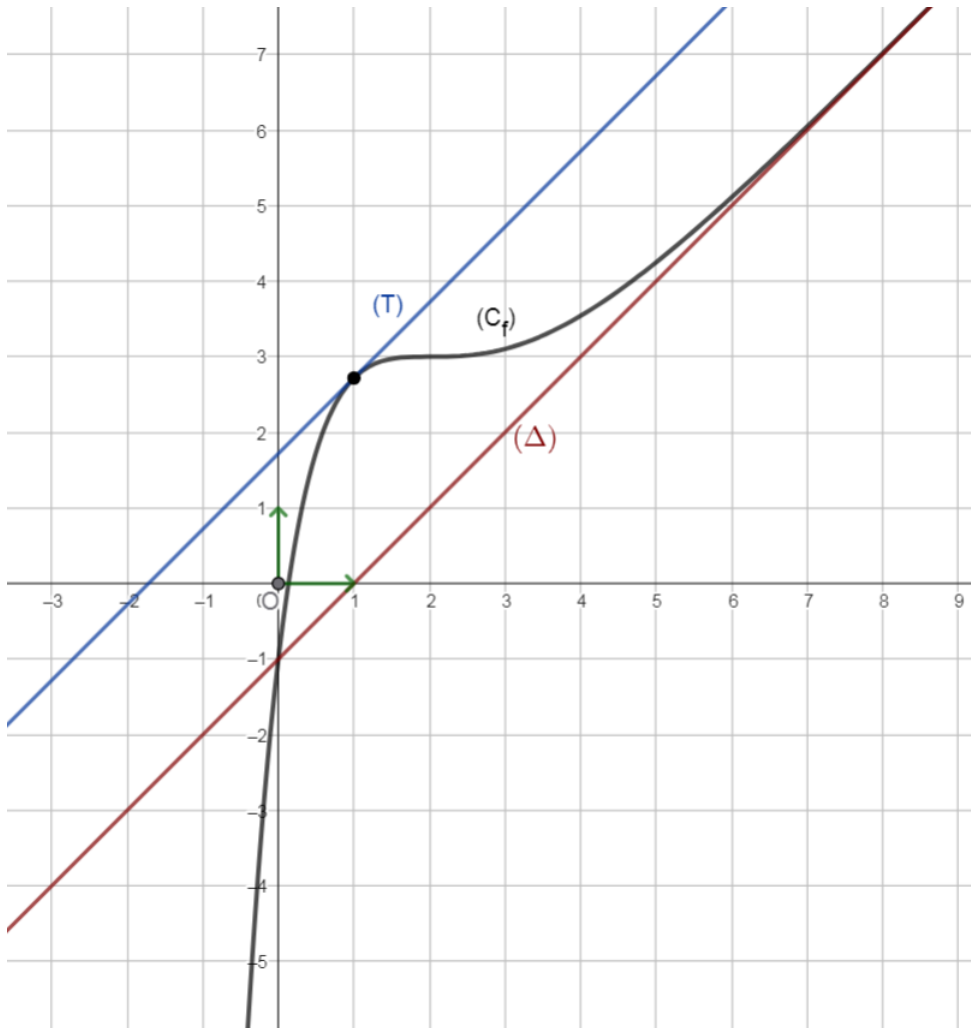
د) حساب $f(-\frac{1}{2})$ ثم إنشاء كلاً من (T) ، (Δ) والمنحنى (C_f) .

◀ حساب $f(-\frac{1}{2})$ 0.25 ن

لدينا:

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} - 1 - \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}+2} \simeq -7.59$$

◀ إنشاء كلاً من (T) ، (Δ) والمنحنى (C_f) 0.75 ن



6. مناقشة حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة: $x + e^{x-2}(-1 - m) = 0$ 0.5 ن

لدينا: $x + e^{x-2}(-1 - m) = 0$ تعني: $x - e^{x-2} = me^{x-2}$ ومنه: $m = -1 + xe^{-x+2}$

اذن: $m + x = x - 1 + xe^{-x+2}$ ومنه: $f(x) = x + m$ (مناقشة ماثلة):

❖ $m < -1$: المعادلة تقبل حل واحد سالب

❖ $m = -1$: المعادلة تقبل حل واحد معدوم

❖ $-1 \leq m \leq e - 1$: المعادلة تقبل حلين موجبين تماما

❖ $m = e - 1$: المعادلة تقبل حل واحد موجب وهو $x = 1$

❖ $m > e - 1$: المعادلة لا تقبل حلول

7. أ) تعيين الدالة الأصلية للدالة $x \mapsto xe^{-x}$ والتي تنعدم عند 1 بإستعمال المكاملة بالتجزئة 0.25 ن

$$\begin{aligned} \int_1^x te^{-t} dt &= [-te^{-t}]_1^x - \int_1^x -e^{-t} dt \\ &= -xe^{-x} + e^{-1} - [e^{-t}]_1^x \\ &= -xe^{-x} + e^{-1} - e^{-x} + e^{-1} \\ &= -(x+1)e^{-x} + 2e^{-1} \end{aligned}$$

ب) حساب بالسنتيمتر مربع A مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) والمستقيمات ذات

المعادلات: $x = 2$ و $x = 1$, $y = x - 1$ 0.25 ن

$$\begin{aligned} A &= \int_1^2 (f(x) - (x - 1)) dx \\ &= \int_1^2 xe^{-x+2} dx \\ &= \left[-(x+1)e^{-x+2} + 2e \right]_1^2 \\ &= (-3 + 2e) - (-2e + 2e) \\ &= 2e - 3 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

◀ ملاحظة: تقبل كل الأجوبة الصحيحة.

انتهي تصحيح الموضوع الأول