موضوع البكالوريا التجريبي رقم 05

التمرين الأول:

عين الاقتراح الصحيح الوحيد من بين الاقتراحات الثلاثة في كل حالة من الحالات الآتية مع التبرير.

1) القيمة المتوسطة للدالة f على المجال $[-1;0]$ حيث $f(x)=(-2x+4)e^{x+1}$ هي:

أ) $m=6-8e$ ب) $m=\dfrac{6-e}{4}$ ج) $m=6e-8$

2) المتتالية العددية (w_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $w_n=\ln(n!)-\ln[(n+1)!]$

من أجل كل عدد طبيعي n، لدينا:

أ) $w_n=-\ln(n+1)$ ب) $w_n=0$ ج) $w_n=\ln(n+1)$

3) الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=\left(\dfrac{3}{2}\right)^{x-1}$ تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة هي:

أ) $g'(x)=3^2\ln x$ ب) $g'(x)=\left(\dfrac{3}{2}\right)^{x-1}\times\ln\left(\dfrac{3}{2}\right)$ ج) $g'(x)=2\times3^{x-1}$

4) حل المعادلة التفاضلية $y'-(\ln 2)y=\ln 4$ والذي يحقق $f(0)=0$ هو الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

أ) $f(x)=(\ln 2)e^{(\ln 2)x}-\ln 2$ ب) $f(x)=2e^{(\ln 2)x}-2$ ج) $f(x)=2^x-1$

التمرين الثاني:

يحتوي كيس على خمس كريات حمراء مرقمة بـ: -2 ، -1 ، 0 ، 1 ، 2 وثلاث كريات خضراء مرقمة بـ: -1 ، 0 ، 1 وكريتين سوداوين مرقمتين بـ: -1 ، 0 (لا نفرق بين الكريات باللمس).

1) نسحب عشوائيا على التوالي دون إرجاع كريتين من الكيس، ونعتبر الحدثين A و B التاليين:

A : "الكريتان المسحوبتان مختلفتان في اللون" و B : "الكريتان المسحوبتان تحمل كل منهما رقما موجبا تماما"

أ- احسب $p(A)$ و $p(B)$

ب- احسب $p(A\cap B)$ ثم استنتج أن $p(A\cup B)=\dfrac{32}{45}$

2) نسحب الآن عشوائيا كريتين في آن واحد من الكيس.

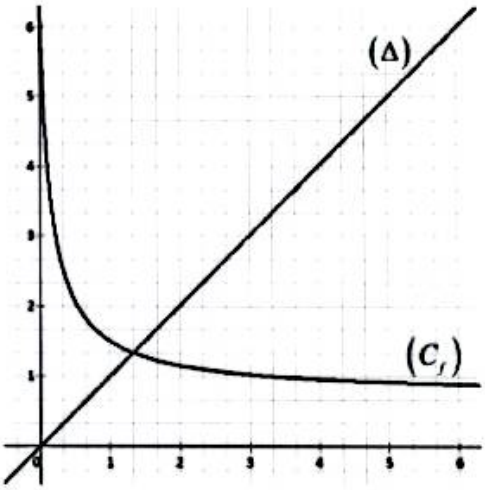
ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب العدد الحقيقي $|x-y|$ حيث x و y الرقمان الظاهران على الكريتين المسحوبتين.

أ- برر أن قيم المتغير العشوائي X هي $\{0;1;2;3;4\}$ ثم عرف قانون احتماله.

ب- احسب $E(X)$ الأمل الرياضياتي للمتغير العشوائي X

ج- استنتج قيمة α حتى يكون $E(415X+\alpha)-2=2025$

التمرين الثالث:



1) الدالة العددية f معرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\dfrac{9x+12}{12x+2}$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ و (Δ) المستقيم الذي معادلته $y=x$ كما هو موضح في الشكل المقابل.

المتتالية العددية (u_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0=\dfrac{1}{3}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=f(u_n)$

1) أ- أعد رسم الشكل المقابل على ورقة الإجابة ثم مثل على حامل محور الفواصل الحدود الأربعة الأولى للمتتالية (u_n) دون حسابها مبرزا خطوط التمثيل.

ب- ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية وتقاربها.

2) المتتالية العددية (v_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n=\dfrac{u_n-\frac{4}{3}}{u_n+\frac{3}{4}}$ (نقبل أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $v_n\neq 1$)

أ- بين أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $-\dfrac{7}{18}$ واحسب حدها الأول v_0

ب- اكتب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n واحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

جـ- احسب بدلالة n المجموعين S_n و T_n حيث: $\begin{cases}S_n=v_0+v_1+\ldots+v_n\\ T_n=u_0(1-v_0)+u_1(1-v_1)+\ldots+u_n(1-v_n)\end{cases}$

التمرين الرابع:

الدالة العددية f معرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $\begin{cases}f(x)=x(1-\ln x)^2\ ;\ x>0\\ f(0)=0\end{cases}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O,\vec{i};\vec{j})$

1) احسب $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\dfrac{f(x)}{x}$. ماذا تستنتج؟ فسر النتيجة هندسيا.

2) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

3) أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]0;+\infty[$ ، $f'(x)=(-1+\ln x)(1+\ln x)$

ب- ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

4) أ- بين أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف A يطلب تعيين إحداثييها.

ب- اكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة A

5) أنشئ المماس (T) والمنحنى (C_f) على المجال $[0;7]$

6) n عدد طبيعي غير معدوم و f_n الدالة العددية المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f_n(x)=x(1-\ln x)^n$
و (C_n) تمثيلها البياني في المعلم السابق.

المتتالية العددية (u_n) معرفة بحدها الأول $u_0=\frac{e^2-1}{2}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_n=\int_1^e f_n(x)dx$

أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[1;e]$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $f_n(x)>0$

ب- فسر هندسيا العدد u_n ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، $u_n\geq 0$

جـ- بين أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما ثم استنتج أنها متقاربة.

7) أ- باستعمال المكاملة بالتجزئة، بين أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، $u_{n+1}=\frac{n+1}{2}u_n-\frac{1}{2}$

ب- علما أنه من أجل كل عدد طبيعي $n\geq 2$، $\frac{1}{n+1}\leq u_n\leq \frac{1}{n-1}$ استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

8) ادرس إشارة $f_1(x)-f_2(x)$ في المجال $[1;e]$ ثم احسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنيين (C_1) و (C_2) والمستقيمين $x=1$ و $x=e$

التمرين الخامس: (خاص بشعبتي رياضي / تقني رياضي)

1) أ- ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n، بواقي القسمة الإقليدية للعدد 5^n على 7

ب- استنتج باقي القسمة الإقليدية للعدد $1446+5^{2025}$ على 7

2) عين قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها العدد $337+5^n+4\times 5^n+222^n$ يقبل القسمة على 7

3) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n، العدد $2023+2^{6n}\times 2022-2021^{6n+3}$ مضاعف للعدد 7

4) العدد الطبيعي N غير المعدوم يكتب $20m$ في النظام العشري.

عين قيم العدد الطبيعي m الذي يحقق $N\equiv 6[7]$ ثم عين قيم N

انتهى الموضوع

تصحيح الموضوع التجريبي رقم 05

التمرين الأول:

1) الاقتراح الصحيح: (ب) $m = 6e - 8$

التبرير:

القيمة المتوسطة للدالة f على المجال $[-1;0]$ هي:

$$m = \frac{1}{0-(-1)} \int_{-1}^{0} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} (-2x+4)e^{x+1}\,dx$$

باستعمال المكاملة بالتجزئة نضع:

$u = -2x+4$ و $v' = e^{x+1}$

ومنه:

$u' = -2$ و $v = e^{x+1}$

وعليه،

$$m = \left[(-2x+4)e^{x+1}\right]_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0} -2e^{x+1}\,dx$$

$$m = 4e - 6 + 2\int_{-1}^{0} e^{x+1}\,dx$$

$$m = 4e - 6 + 2\left[e^{x+1}\right]_{-1}^{0} = 4e - 6 + 2(e-1)$$

نجد: $\boxed{m = 6e - 8}$

2) الاقتراح الصحيح: (أ) $w_n = -\ln(n+1)$

التبرير:

من أجل كل عدد طبيعي n لدينا:

$$w_n = \ln(n!) - \ln((n+1)!)$$

$$w_n = \ln\frac{n!}{(n+1)!} = \ln\frac{n!}{(n+1)\,n!} = \ln\frac{1}{n+1}$$

$$w_n = \ln 1 - \ln(n+1)$$

نجد: $\boxed{w_n = -\ln(n+1)}$

3) الاقتراح الصحيح: (ب) $g'(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^{x-1} \times \ln\left(\frac{3}{2}\right)$

التبرير:

من أجل كل عدد حقيقي x لدينا،

$$g(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^{x-1} = e^{\ln\left(\frac{3}{2}\right)^{x-1}} = e^{(x-1)\times \ln\frac{3}{2}}$$

الدالة g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة:

$$g'(x) = \ln\left(\frac{3}{2}\right) \times e^{(x-1)\times\ln\left(\frac{3}{2}\right)}$$

نجد: $\boxed{g'(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^{x-1} \times \ln\left(\frac{3}{2}\right)}$

4) الاقتراح الصحيح: (أ) $f(x) = 2e^{(\ln 2)x} - 2$

التبرير:

$y' - (\ln 2)y = \ln 4$ تكافئ $y' = (\ln 2)y + \ln 4$

الحل العام لهذه المعادلة التفاضلية هي الدوال f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = \lambda e^{(\ln 2)x} - \frac{\ln 4}{\ln 2}$

نجد، $f(x) = \lambda e^{(\ln 2)x} - 2$

الحل الخاص تحقق: $f(0) = 2$

نجد: $\lambda = 2$

ومنه، $\boxed{f(x) = 2e^{(\ln 2)x} - 2}$

التمرين الثاني:

1) نسحب عشوائيا على التوالي دون ارجاع كريتين من الكيس.

(-2) (-1) (0) (1) (2)

(-1) (0) (1)

(-1) (0)

فيكون عدد الحالات الممكنة لهذا السحب:

$$A_{10}^2 = 90$$

أ) حساب $P(A)$ و $P(B)$:

A: "الكريتان المسحوبتان مختلفتان في اللون"

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{A_5^2 + A_3^2 + A_2^2}{A_{10}^2} = \frac{31}{45}$$

نجد: $\boxed{P(A) = \frac{31}{45}}$

B: "الكريتان المسحوبتان تحمل كل منهما رقما موجبا تماما"

معناه: سحب من (1) (2) (1) ومنه: $\frac{A_3^2}{A_{10}^2}$ (3)

$$P(B) = \frac{A_3^2}{A_{10}^2}$$

نجد: $\boxed{P(B) = \frac{1}{15}}$

ب) حساب $P(A\cap B)$ تم استنتاج أن $P(A\cup B) = \frac{32}{45}$

$A\cap B$: "الكريتان المسحوبتان مختلفتان في اللون وتحمل كل منها رقما موجبا تماما"

$$P(A\cap B) = \frac{2A_2^1 \times A_1^1}{A_{10}^2}$$

نجد: $\boxed{P(A\cap B) = \frac{2}{45}}$

ولدينا:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$
$$=\frac{31}{45}+\frac{1}{15}-\frac{2}{45}$$

نجد: $\boxed{P(A\cup B)=\frac{32}{45}}$

2) نسحب الآن عشوائيا كرتين في آن واحد من الكيس.

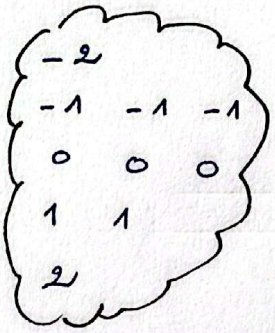
فيكون عدد الحالات الممكنة لهذا السحب:

$$C_{10}^{2}=45$$

ولدينا: $X=|x-y|$

حيث: x و y الرقمان الظاهران على الكرتين المسحوبتين.

1) تبرير قيم X ثم تعريف قانون الاحتمال:



x	y	$X=\lvert x-y\rvert$
-2	-1	1
-2	0	2
-2	1	3
-2	2	4
-1	-1	0
-1	0	1
-1	1	2
-1	2	3
0	0	0
0	1	1
0	2	2
1	1	0
1	2	1

ومنه: $\boxed{X=\{0;1;2;3;4\}}$

نعرف قانون الاحتمال كما يلي:

$$P(X=0)=\frac{C_3^2+C_3^2+C_2^2}{45}=\frac{7}{45}$$
$$P(X=1)=\frac{C_1^1\times C_3^1+C_3^1\times C_3^1+C_3^1\times C_2^1+C_2^1\times C_1^1}{45}=\frac{20}{45}$$
$$P(X=2)=\frac{C_1^1\times C_3^1+C_3^1\times C_2^1+C_3^1\times C_1^1}{45}=\frac{12}{45}$$
$$P(X=3)=\frac{C_1^1\times C_2^1+C_3^1\times C_1^1}{45}=\frac{5}{45}$$
$$P(X=4)=\frac{C_1^1\times C_1^1}{45}=\frac{1}{45}$$

x_i	0	1	2	3	4
$P(X=x_i)$	$\frac{7}{45}$	$\frac{20}{45}$	$\frac{12}{45}$	$\frac{5}{45}$	$\frac{1}{45}$

ب) حساب $E(X)$:

$$E(X)=\sum_{i=1}^{5}x_i\times P(X=x_i)$$
$$E(X)=\frac{0\times7+1\times20+2\times12+3\times5+4\times1}{45}$$

نجد: $\boxed{E(X)=\frac{7}{5}}$

جـ) استنتاج قيمة α:

لدينا: $E(415X+\alpha)-2=2025$

أي: $415\times E(X)+\alpha=2027$

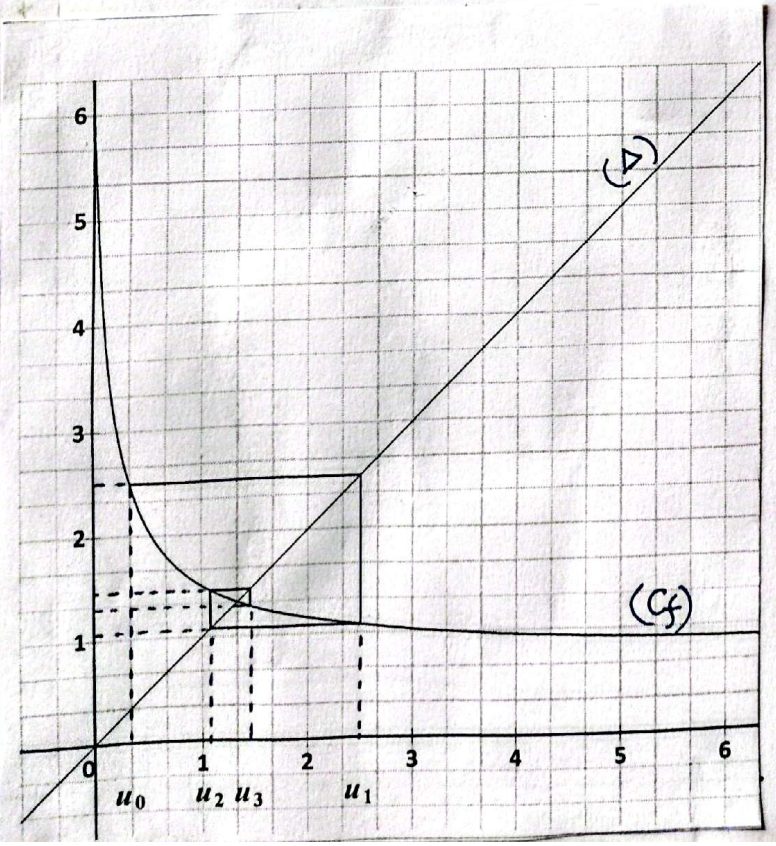
نجد: $\boxed{\alpha=1446}$

التمرين الثالث:

1) $f(x)=\frac{9x+12}{12x+2}$; $D_f=[0;+\infty[$

$$\begin{cases}u_0=\frac{1}{3}\\ u_{n+1}=f(u_n)=\frac{9u_n+12}{12u_n+2}\end{cases};\ n\in\mathbb{N}$$

2) تمثيل الحدود الأربعة الأولى للمتتالية (u_n) على حامل محور الفواصل دون حسابها:



ب/ ومنع تخمين حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها :

• المتتالية (u_n) ليست رتيبة لأن :

$$u_0 < u_1 > u_2 < u_3$$

• المتتالية (u_n) متقاربة لأن حدودها تتقارب كلها نحو فاصلة نقطة تقاطع المنحنى (C_f) والمستقيم (Δ).

(2)

$$V_n = \frac{u_n - \frac{4}{3}}{u_n + \frac{3}{4}} \quad ; \quad n \in \mathbb{N} \quad (V_n \neq 1)$$

1ب/ بين أن (V_n) متتالية هندسية أساسها $-\frac{7}{18}$ وحساب حدها الأول V_0 :

من أجل كل عدد طبيعي n لدينا ،

$$V_{n+1} = \frac{u_{n+1} - \frac{4}{3}}{u_{n+1} + \frac{3}{4}} = \frac{\frac{9u_n + 12}{12u_n + 2} - \frac{4}{3}}{\frac{9u_n + 12}{12u_n + 2} + \frac{3}{4}}$$

$$V_{n+1} = \frac{4}{3} \times \frac{-21u_n + 28}{72u_n + 54}$$

$$V_{n+1} = \frac{4}{3} \times \frac{-7}{18} \times \frac{3u_n - 4}{4u_n + 3}$$

$$V_{n+1} = \frac{4}{3} \times \frac{-7}{18} \times \frac{3}{4} \times \frac{u_n - \frac{4}{3}}{u_n + \frac{3}{4}}$$

فنجد :

$$\boxed{V_{n+1} = -\frac{7}{18} V_n}$$

ومنه: (V_n) متتالية هندسية أساسها $\boxed{\frac{-7}{18}}$

وحدها الأول ،

$$V_0 = \frac{u_0 - \frac{4}{3}}{u_0 + \frac{3}{4}}$$

نجد :

$$\boxed{V_0 = -\frac{12}{13}}$$

ب/ كتابة عبارة V_n بدلالة n ثم u_n بدلالة n ثم حساب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$:

• من أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $V_n = V_0 \times q^n$

نجد :

$$\boxed{V_n = -\frac{12}{13} \times \left(-\frac{7}{18}\right)^n}$$

• ولدينا أيضا من أجل كل عدد طبيعي n :

$$V_n = \frac{u_n - \frac{4}{3}}{u_n + \frac{3}{4}} = \frac{u_n + \frac{3}{4} - \frac{3}{4} - \frac{4}{3}}{u_n + \frac{3}{4}}$$

$$V_n = \frac{u_n + \frac{3}{4} - \frac{25}{12}}{u_n + \frac{3}{4}} = 1 - \frac{\frac{25}{12}}{u_n + \frac{3}{4}}$$

ومنه :

$$1 - V_n = \frac{25}{12\left(u_n + \frac{3}{4}\right)}$$

وعليه :

$$u_n + \frac{3}{4} = \frac{25}{12(1 - V_n)}$$

نجد :

$$u_n = \frac{25}{12(1 - V_n)} - \frac{3}{4}$$

$$u_n = \frac{25 - 9(1 - V_n)}{12(1 - V_n)} = \frac{16 + 9V_n}{12 - 12V_n}$$

$$u_n = \frac{16 + 9\left[-\frac{12}{13} \times \left(-\frac{7}{18}\right)^n\right]}{12 - 12\left[-\frac{12}{13} \times \left(-\frac{7}{18}\right)^n\right]} \times \frac{13}{13}$$

$$u_n = \frac{208 - 108\left(-\frac{7}{18}\right)^n}{156 + 144\left(-\frac{7}{18}\right)^n} = \frac{4}{3} \times \frac{52 - 27\left(-\frac{7}{18}\right)^n}{52 + 48\left(-\frac{7}{18}\right)^n}$$

نجد :

$$\boxed{u_n = \frac{4}{3} \times \frac{1 - \frac{27}{52}\left(-\frac{7}{18}\right)^n}{1 + \frac{12}{13}\left(-\frac{7}{18}\right)^n}}$$

• لدينا : $-1 < -\frac{7}{18} < 1$

ومنه :

$$\lim_{n \to +\infty} \left(-\frac{7}{18}\right)^n = 0$$

وعليه :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \frac{4}{3} \times \frac{1 - 0}{1 - 0}$$

نجد :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = \frac{4}{3}}$$

جـ/ حساب بدلالة n المجموعين S_n و T_n :

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n :

$$S_n = V_0 + V_1 + \dots + V_n$$

S_n هو مجموع $n+1$ حدا من حدود متتابعة لمتتالية هندسية أساسها $-\frac{7}{18}$ وحدها الأول $-\frac{12}{13}$

ومنه :

$$S_n = -\frac{12}{13} \times \frac{\left(-\frac{7}{18}\right)^{n+1} - 1}{-\frac{7}{18} - 1}$$

$$S_n = \frac{216}{325}\left[\left(-\frac{7}{18}\right)^{n+1} - 1\right]$$

$$S_n = \frac{216}{325}\left[-\frac{7}{18} \times \left(\frac{-7}{18}\right)^n - 1\right]$$

$$S_n = -\frac{84}{325} \times \left(-\frac{7}{18}\right)^n - \frac{216}{325}$$

$$S_n = -\frac{84}{325}\left[\left(-\frac{7}{18}\right)^n + \frac{216}{325} \times \frac{325}{84}\right]$$

نجد :

$$\boxed{S_n = -\frac{12}{325}\left[18 + 7\left(-\frac{7}{18}\right)^n\right]}$$

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n :

$$T_n = u_0(1 - v_0) + u_1(1 - v_1) + \cdots + u_n(1 - v_n)$$

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n :

$$v_n = \frac{u_n - \frac{4}{3}}{u_n + \frac{3}{4}}$$

ومنه :

$$v_n\left(u_n + \frac{3}{4}\right) = u_n - \frac{4}{3}$$

$$v_n u_n + \frac{3}{4} v_n = u_n - \frac{4}{3}$$

$$u_n - v_n u_n = \frac{3}{4} v_n + \frac{4}{3}$$

نجد :

$$\boxed{u_n(1 - v_n) = \frac{3}{4} v_n + \frac{4}{3}}$$

وعليه :

$$T_n = \left(\frac{3}{4} v_0 + \frac{4}{3}\right) + \left(\frac{3}{4} v_1 + \frac{4}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{3}{4} v_n + \frac{4}{3}\right)$$

$$T_n = \frac{3}{4}\left(v_0 + v_1 + \cdots + v_n\right) + \left(\frac{4}{3} + \frac{4}{3} + \cdots + \frac{4}{3}\right)$$

$$T_n = \frac{3}{4} S_n + \frac{4}{3}(n+1)$$

$$T_n = \frac{3}{4}\left[-\frac{12}{325}\left(18 + 7\left(-\frac{7}{18}\right)^n\right)\right] + \frac{4}{3}n + \frac{4}{3}$$

$$T_n = -\frac{162}{325} - \frac{63}{325}\left(-\frac{7}{18}\right)^n + \frac{4}{3}n + \frac{4}{3}$$

$$T_n = \frac{4}{3}n - \frac{814}{975} - \frac{63}{325}\left(-\frac{7}{18}\right)^n$$

$$T_n = \frac{1}{975}\left[975 \times \frac{4}{3}n - 814 - 975 \times \frac{63}{325}\left(-\frac{7}{18}\right)^n\right]$$

$$\boxed{T_n = \frac{1}{975}\left[1300n - 814 - 189\left(-\frac{7}{18}\right)^n\right]}$$

التمرين الرابع :

$$\begin{cases} f(x) = x(1 - \ln x)^2 \; ; \; x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases} \qquad D_f = [0; +\infty[$$

1) حساب $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)}{x}$:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x(1 - \ln x)^2}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \underbrace{(1 - \ln x)^2}_{-(-\infty)}$$

$$= \boxed{+\infty}$$

الاستنتاج :

الدالة f غير قابلة للاشتقاق على يمين 0

التفسير الهندسي :

المنحنى (C_f) الممثل للدالة f يقبل على يمين 0 نصف مماس عمودي (يوازي حامل محور التراتيب) موجه نحو الأعلى.

2) حساب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \underbrace{x}_{(+\infty)} \underbrace{(1 - \ln x)^2}_{(-\infty)}$$

$$= \boxed{+\infty}$$

3) أ) بين أن : $f'(x) = (-1 + \ln x)(1 + \ln x)$

الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$ ودالتها المشتقة ،

$$f'(x) = 1 \times (1 - \ln x)^2 + x \frac{-2}{x}(1 - \ln x)$$

$$f'(x) = (1 - \ln x)^2 - 2(1 - \ln x)$$

$$f'(x) = (1 - \ln x)[1 - \ln x - 2]$$

$$f'(x) = (1 - \ln x)(-1 - \ln x)$$

$$f'(x) = -(1 - \ln x)(1 + \ln x)$$

نجد :

$$\boxed{f'(x) = (-1 + \ln x)(1 + \ln x)}$$

ب/ دراسة اتجاه تغير الدالة f ثم تشكيل جدول تغيراتها:

$f'(x)=0$ تكافئ $x=\frac{1}{e}$ أو $x=e$

و إشارة $f'(x)$ على المجال $]0;+\infty[$ من إشارة الجداء $(1+\ln x)(-1+\ln x)$ حيث:

$1+\ln x<0$ تكافئ $0<x<\frac{1}{e}$

$-1+\ln x<0$ تكافئ $0<x<e$

ومنه:

x	0		$\frac{1}{e}$		e		$+\infty$
$1+\ln x$	‖	$-$	0	$+$		$+$	
$-1+\ln x$	‖	$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	

وعليه:

- f متناقصة تماما على المجال $[\frac{1}{e};e]$
- f متزايدة تماما على كل من المجالين $]0;\frac{1}{e}]$ و $[e;+\infty[$

جدول تغيراتها كالآتي:

x	0		$\frac{1}{e}$		e		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↗	$\frac{4}{e}$	↘	0	↗	$+\infty$

4) ١/ بين أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف A:

الدالة f قابلة للإشتقاق مرتين على $]0;+\infty[$ ودالتها المشتقة الثانية:

$$f''(x)=\frac{1}{x}(1+\ln x)+\frac{1}{x}(-1+\ln x)$$

$$f''(x)=\frac{1+\ln x-1+\ln x}{x}$$

نجد: $\boxed{f''(x)=\frac{2\ln x}{x}}$

$f''(x)=0$ تكافئ $x=1$

و إشارة $f''(x)$ على المجال $]0;+\infty[$ من إشارة $\ln x$ (لأن $\frac{2}{x}>0$ على $]0;+\infty[$).

$\ln x<0$ تكافئ $0<x<1$

ومنه:

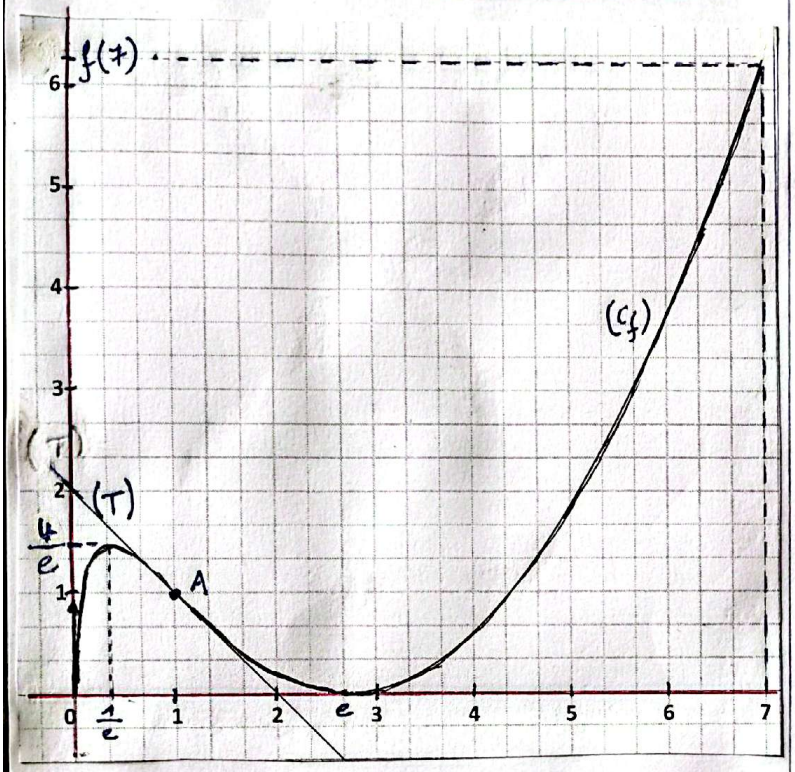
x	0		1		$+\infty$
$f''(x)$	‖	$-$	0	$+$	

ب/ كتابة معادلة المماس (T) لـ (C_f) عند $A(1;1)$:

$(T): y=f'(1)(x-1)+f(1)$

نجد: $\boxed{(T): y=-x+2}$

5) إنشاء (T) و (C_f) على المجال $[0;7]$:



6) $f_n(x)=x(1-\ln x)^n$; $D_{f_n}=]0;+\infty[$

$$\begin{cases} u_0=\dfrac{e^2-1}{e} \\ u_n=\displaystyle\int_1^e f_n(x)\,dx \end{cases}$$

١/ بين أن $f_n(x)\geq 0$ من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[1;e]$ ومن أجل كل عدد طبيعي n من $\mathbb{N}^*$

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[1;e]$ لدينا:

$1\leq x\leq e$ ... ①

ومنه: $0\leq \ln x\leq 1$

$-1\leq -\ln x\leq 0$

$0\leq 1-\ln x\leq 1$

فيكون من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n:

$0\leq (1-\ln x)^n\leq 1$ ... ②

بضرب (1) و (2) طرف لطرف نجد:

$$0 \leq x(1-\ln x)^n \leq e$$

أي: $0 \leq f_n(x) \leq e$

ومنه: $\boxed{f_n(x) \geq 0}$

ب/ التفسير الهندسي للعدد u_n ثم استنتاج أن $u_n \geq 0$ من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n:

العدد u_n هو مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_n) الممثل للدالة f_n وحامل محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتيهما $x=1$ و $x=e$.

لدينا مما سبق ومن أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n

$f_n(x) \geq 0$

ومنه: $\int_1^e f_n(x)\,dx \geq 0$ (حسب خواص التكامل)

أي: $\boxed{u_n \geq 0}$

جـ/ بين أن المتتالية (u_n) متناقصة:

$$u_{n+1} - u_n = \int_1^e x(1-\ln x)^{n+1}\,dx - \int_1^e x(1-\ln x)^n\,dx$$

$$= \int_1^e \left[x(1-\ln x)^{n+1} - x(1-\ln x)^n\right] dx$$

$$= \int_1^e \left[x(1-\ln x)(1-\ln x)^n - x(1-\ln x)^n\right] dx$$

$$= \int_1^e x(1-\ln x)^n \left[1-\ln x - 1\right] dx$$

$$= \int_1^e x(1-\ln x)^n(-\ln x)\,dx$$

ومنه: $u_{n+1} - u_n = \int_1^e (-\ln x) f_n(x)\,dx$

ولدينا من أجل كل عدد حقيقي x من $[1;e]$،

$-\ln x \leq 0$ و $f_n(x) \geq 0$

ومنه: $(-\ln x) f_n(x) \leq 0$

$$\int_1^e (-\ln x) f_n(x)\,dx \leq 0$$

نجد: $u_{n+1} - u_n \leq 0$

ومنه: $\boxed{(u_n) \text{ متناقصة}}$

وبما أن (u_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل بالعدد 0 فهي متقاربة نحو نهاية l.

$\boxed{(u_n) \text{ متقاربة}}$

7) 1/ بينت أن $u_{n+1} = \frac{n+1}{2}u_n - \frac{1}{2}$ من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n:

لدينا: $u_{n+1} = \int_1^e f_{n+1}(x)\,dx$

$$u_{n+1} = \int_1^e x(1-\ln x)^{n+1}\,dx$$

باستعمال المكاملة بالتجزئة نضع:

$u = x$ و $v = (1-\ln x)^{n+1}$

ومنه:

$u = \frac{1}{2}x^2$ و $v = -\frac{n+1}{x}(1-\ln x)^n$

وعليه:

$$u_{n+1} = \left[\frac{1}{2}x^2(1-\ln x)^{n+1}\right]_1^e + \int_1^e \frac{1}{2}x \cdot \frac{n+1}{x}(1-\ln x)^n\,dx$$

$$u_{n+1} = -\frac{1}{2} + \frac{n+1}{2}\int_1^e x(1-\ln x)^n\,dx$$

$$u_{n+1} = -\frac{1}{2} + \frac{n+1}{2}u_n$$

$$\boxed{u_{n+1} = \frac{n+1}{2}u_n - \frac{1}{2}}$$

ب/ استنتاج $\lim_{n\to+\infty} u_n$:

لدينا من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 2$:

$$\frac{1}{n+1} \leq u_n \leq \frac{1}{n-1}$$

ولدينا: $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ و $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n-1} = 0$

ومنه وحسب النهايات بالحصر فإن:

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 0}$$

8) دراسة إشارة $f_1(x) - f_2(x)$ ثم حساب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنيين (C_1) و (C_2) والمستقيمين $x=1$ و $x=e$:

$$f_1(x) - f_2(x) = x(1-\ln x) - x(1-\ln x)^2$$

$f_1(x) - f_2(x) = x(1-\ln x)\left[1-1+\ln x\right]$

$f_1(x) - f_2(x) = x\ln x(1-\ln x)$

ولدينا من أجل كل عدد حقيقي x من $[1;e]$:

$1-\ln x \geq 0$ و $\ln x \geq 0$ و $x > 0$

ومنه :

$x\ln x(1-\ln x) \geq 0$

أي :

$$f_1(x) - f_2(x) \geq 0$$

ملاحظة : (C_1) يقع فوق (C_2) على $]1;e[$

ومنه :

$$A = \int_1^e \left(f_1(x) - f_2(x)\right) dx$$

$$A = \int_1^e f_1(x)\,dx - \int_1^e f_2(x)\,dx$$

$$A = u_1 - u_2$$

حيث ,

$u_1 = \frac{0+1}{2} u_0 - \frac{1}{2} = \frac{e^2-3}{4}$

$u_2 = \frac{1+1}{2} u_1 - \frac{1}{2} = \frac{e^2-5}{4}$

ومنه :

$A = \frac{e^2-3}{4} - \frac{e^2-5}{4}$

نجد :

$$A = \frac{1}{2}\ (u.a)$$

التمرين الخامس : (خاص بشعبتي رياضي/تقني رياضي)

1) أ/ دراسة بواقي القسمة الاقليدية للعدد 5^n على 7 حسب قيم العدد الطبيعي n :

قيم n	$6K$	$6k+1$	$6k+2$	$6k+3$	$6K+4$	$6K+5$
بواقي 5^n على 7	1	5	4	6	2	3

ب/ استنتاج باقي القسمة الاقليدية على 7 للعدد $5^{2025} + 1446$:

لدينا : $2025 = 6k+3$ مع $k = 337$

ومنه :

$5^{2025} \equiv 5^{6k+3}\ [7]$

أي ,

$5^{2025} \equiv 6\ [7]$

ولدينا : $1446 \equiv 4\ [7]$

ومنه :

$5^{2025} + 1446 \equiv 6+4\ [7]$

أي ,

$5^{2025} + 1446 \equiv 3\ [7]$

فيكون :

3) باقي قسمة $5^{2025} + 1446$ على 7 هو 3

2) تعيين قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يقبل العدد $222^n + 4\times 5^n + 337$ القسمة على 7 :

لدينا , $337 \equiv 1\ [7]$ و $222 \equiv 5\ [7]$

ومنه :

$222^n + 4\times 5^n + 337 \equiv 5^n + 4\times 5^n + 1\ [7]$

$222^n + 4\times 5^n + 337 \equiv 5\times 5^n + 1\ [7]$

العدد $222^n + 4\times 5^n + 337$ يقبل القسمة على 7

معناه : $5\times 5^n + 1 \equiv 0\ [7]$

اي : $5\times 5^n \equiv 6\ [7]$

وأيضا : $5\times 5^n \equiv 20\ [7]$

ولدينا 5 أولي مع 7

ومنه :

$5^n \equiv 4\ [7]$

حسب الجدول فإنه :

$$n = 6k+2\ ;\ k \in \mathbb{N}$$

3) بين أن $2021^{6n+3} - 2022\times 2^{6n} + 2023$ مضاعف لـ 7 من أجل كل عدد طبيعي n :

لدينا : $2023 \equiv 0\ [7]$ و $2022 \equiv 6\ [7]$ و $2021 \equiv 5\ [7]$

ومنه :

$2021^{6n+3} - 2022\times 2^{6n} + 2023 \equiv 5^{6n+3} - 6\times 2^{6n}\ [7]$

$2021^{6n+3} - 2022\times 2^{6n} + 2023 \equiv 6 - 6\times (2^6)^n\ [7]$

$2021^{6n+3} - 2022\times 2^{6n} + 2023 \equiv 6 - 6\times 1^n\ [7]$

$2021^{6n+3} - 2022\times 2^{6n} + 9023 \equiv 6 - 6\ [7]$

ومنه :

$2021^{6n+3} - 2022\times 2^{6n} + 2023 \equiv 0\ [7]$

العدد : $2021^{6n+3} - 2022\times 2^{6n} + 2023$ مضاعف لـ 7

4) $N = \overline{20mm}^{10}$. $N \in \mathbb{N}$

حيث , $0 \leq m \leq 9$

تعيين قيم العدد الطبيعي m الذي يحقق $N \equiv 6\ [7]$ ثم تعيين قيم N :

لدينا :

$N = \overline{20mm}^{10}$

$N = m \times 10^0 + m \times 10^1 + 0 \times 10^2 + 2 \times 10^3$

$N = m + 10m + 0 + 2000$

ومنه :

$N = 11m + 2000$

ولدينا : $N \equiv 6 [7]$

تكافئ :

$11m + 2000 \equiv 6 [7]$

$4m + 5 \equiv 6 [7]$

$4m \equiv 1 [7]$

وأيضا :

$4m \equiv 8 [7]$

ولدينا : 4 أولي مع 7

ومنه :

$m \equiv 2 [7]$

نجد :

$m = 7k + 2$

وبما أن $0 \leq m \leq 9$

فإن : $k = \{0; 1\}$

فنجد :

$\boxed{m \in \{2; 9\}}$

ولدينا من أجل $m = 2$ نجد :

$N = 2022$

ومن أجل $m = 9$ نجد :

$N = 2099$

ومنه :

$\boxed{N \in \{2022; 2099\}}$

تم بحمد الله وتوفيقه
كتابة الحل المفصل
للموضوع البكالوريا
رقم 05

بتاريخ :
الموافق لـ :

بقلم الأستاذ :
عبد الحميد بوقطوف

BAC 2025
Bahdja Plus Academy
بلدية برج البحري