الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

إمتحان البكالوريا التجريبي | ثانويات المقاطعة الأولى -جيجل
دورة مـــاي 2024م | ثانوية بن زايد السعيد -العوانة
الشعبة: علوم تجريبية | ثانوية صالحي عثمان -بئر بوحوش

إختبار في مادة الرياضيات | المدة: 03 سا و30 د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأوّل:

التمرين الأول: (04.5 نقاط)

تضم جمعية سبع نساء وتسعة رجال، من بينهم إمرأة واحدة إسمها فاطمة، ورجل واحد إسمه عبد الله.
أرادت الجمعية تشكيل لجنة تضم رئيسا ونائبا وكاتبا من أجل تمثيلها في إحدى المناسبات الوطنية.

1/ أُحسب احتمال الأحداث التالية: **A** «اللجنة تضم عبد الله» **B** «فاطمة كاتبة للّجنة»

C «اللجنة تضم إما فاطمة وإما عبد الله» **D** «اللجنة تتكون من رجال ونساء معا»

2/ ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل لجنة عدد الرجال فيها.

ا/ عرّف قانون احتمال المتغير العشوائي X ثم أحسب أمله الرياضياتي $E(X)$.

ب/ استنتج $E(2024X+1445)$.

ج/ أُحسب الإحتمال $P\left(\int_1^X \ln t\, dt < 1\right)$.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.

نعتبر النقطتين A و B لاحقتيهما على الترتيب: $Z_A=1-2i$ و $Z_B=-i$.

في كل حالة من الحالات التالية، عيّن الإقتراح الصحيح الوحيد من بين الإقتراحات الثلاثة مع التبرير:

1/ حل المعادلة: $(1+2i)\overline{Z}+2-i=0$ ذات المجهول Z من $\mathbb{C}$ هو:

(أ) $Z=-i$	(ب) $Z=i$	(جـ) $Z=1-2i$

2/ عمدة للعدد المركب Z حيث: $Z=-3\left(-\cos\frac{\pi}{7}+i\sin\frac{\pi}{7}\right)$ هي:

(أ) $\frac{\pi}{7}$	(ب) $-\frac{\pi}{7}$	(جـ) $\pi-\frac{\pi}{7}$

3/ العدد المركب $L=\left(\frac{Z_A-Z_B}{\sqrt{2}}\right)^{1445}$ يساوي:

(أ) $-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}$	(ب) $\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}$	(جـ) $-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$

4/ إذا كانت θ عمدة لعدد مركب Z و r طويلته، فإن العدد المركب $\frac{Z_B}{Z}$ يُكتب على الشكل الأسي:

(أ) $r.e^{-i(\theta+\frac{\pi}{2})}$	(ب) $\frac{1}{r}.e^{i(-\theta+\frac{\pi}{2})}$	(جـ) $\frac{1}{r}.e^{-i(\theta+\frac{\pi}{2})}$

5/ مجموعة النقط M ذات اللاحقة Z التي تحقق $\arg(iZ-1)=\frac{\pi}{4}+k\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$ و A نقطة منها هي:

(أ) نصف المستقيم $[BA)$ ماعدا النقطة B .	(ب) المستقيم (BA) ماعدا النقطة B .	(جـ) الدائرة التي $[BA]$ قطر لها ماعدا النقطة B .

التمرين الثالث: (04.5 نقاط)

نعتبر (u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_0 = 4$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2}{2u_n - 1}$.

1/ ا/ بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - 1 = \dfrac{(u_n - 1)^2}{2u_n - 1}$.

ب/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n - 1 > 0$.

2/ أُدرس إتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم استنتج أنها متقاربة.

3/ لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = \ln\left(1 - \dfrac{1}{u_n}\right)$.

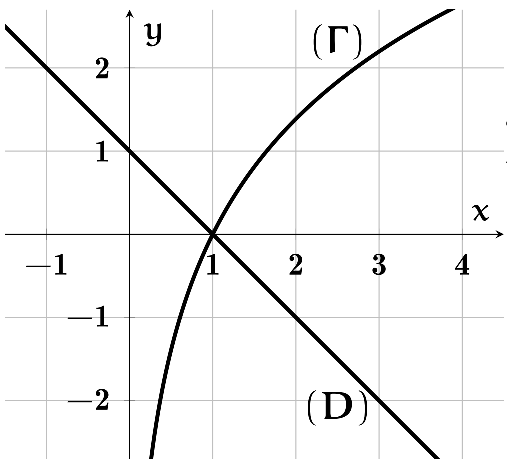
ا/ أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها 2 ثم أُحسب حدها الأول v_0 .

ب/ أُكتب v_n بدلالة n واستنتج u_n بدلالة n ثم أُحسب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

4/ أُحسب بدلالة n الجداء P_n حيث: $P_n = \left(1 - \dfrac{1}{u_0}\right) \times \left(1 - \dfrac{1}{u_1}\right) \times \cdots \times \left(1 - \dfrac{1}{u_n}\right)$.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$.



I/ الشكل المقابل يوضح (Γ) التمثيل البياني للدالة u المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ: $u(x) = 2\ln x$ و (D) المستقيم ذو معادلة: $y = -x+1$

1/ بقراءة بيانية حدد وضعية (Γ) بالنسبة إلى (D) .

2/ استنتج حسب قيم x من $]0; +\infty[$ إشارة: $g(x) = x - 1 + 2\ln x$

II/ نعرّف الدالة f على $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = x - 2 + (\ln x)^2 - \ln x$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المعلم $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1/ أُحسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x)$ ثم فسر النتيجة هندسيا.

2/ ا/ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$: $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x}$.

ب/ استنتج إتجاه تغير الدالة f ثم شكّل جدول تغيراتها.

3/ بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلّين α و β حيث: $0.4 < \alpha < 0.5$ و $2.1 < \beta < 2.2$.

4/ أُدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) الذي معادلة له هي: $y = x$.

5/ بين أن المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) موازيا للمستقيم (Δ) ، ثم أُكتب معادلة المماس (T) .

6/ ا/ أنشئ (Δ) و (T) و (C_f) .

ب/ ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة ذات المجهول x : $f(x) = x - m$.

7/ h الدالة المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ: $h(x) = -x(\ln x)^2 + ax\ln x + bx$ حيث a و b عددان حقيقيان.

ا/ عين العددين a و b حتى تكون الدالة h أصلية للدالة $x \longmapsto 2 - (\ln x)^2 + \ln x$ على المجال $]0; +\infty[$.

ب/ أُحسب S مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها: $y = x$ و $x = \dfrac{1}{e}$ و $x = e^2$.

انتهى الموضوع الأوّل.

الموضوع الثاني:

التمرين الأول: (04.5 نقاط)

صندوقان U_1 و U_2 متماثلان غير شفافين يحتويان على كريات متماثلة لا يمكن التفريق بينها باللمس، حيث:
يحتوي U_1 على خمس كريات حمراء مرقمة بـ: 0 ، 1 ، 1 ، 1 ، 2 وثلاث كريات خضراء مرقمة بـ: 0 ، 1 ، 1 .
يحتوي U_2 على ثلاث كريات حمراء مرقمة بـ: 1 ، 1 ، 2 وكريتين خضراوين مرقمتين بـ: 0 ، 1 .

I/ نختار عشوائيا أحد الصندوقين: فإذا كان U_1 نسحب منه كريتين على التوالي دون إرجاع،
وإذا كان U_2 نسحب منه كريتين على التوالي مع الإرجاع.

1/ أحسب إحتمال الحدثين: A «الكريتين المسحوبتين من نفس اللون»
B «الكريتين المسحوبتين تحملان نفس الرقم»

2/ هل الحدثان A و B مستقلان؟ علّل.

3/ إذا علمت أن الكريتين المسحوبتين مختلفتين في اللون، ما إحتمال أن تكونا من الصندوق U_1 ؟

II/ نضع كريات كلٍ من الصندوقين U_1 و U_2 في صندوق آخر U_3، ثم نسحب من هذا الأخير عشوائيا كريتين في آن واحد. وليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب مجموع الرقمين المحصل عليهما.

1/ عين قيم المتغير العشوائي X .

2/ عيّن قانون إحتمال المتغير العشوائي X ثم أُحسب أمله الرياضياتي $E(X)$.

التمرين الثاني: (04.5 نقاط)

I/ حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول المركب Z التالية: $(\overline{Z}+3+2i)(Z^2-2Z+5)=0$

II/ المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$.
نعتبر النقط A ، B ، C و D لواحقها على الترتيب: $Z_A=1-2i$ ، $Z_B=\overline{Z_A}$ ، $Z_C=-3+2i$ و $Z_D=-1$.

1/ ا/ أُحسب $|Z_A-Z_D|$ ، $|Z_B-Z_D|$ ، $|Z_C-Z_D|$.
ب/ استنتج أن النقط A و B و C تنتمي إلى نفس الدائرة، يُطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

2/ ا/ أكتب العدد المركب: $\dfrac{Z_A-Z_B}{Z_C-Z_B}$ على الشكل الأسي، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .
ب/ استنتج أن النقطة A هي صورة النقطة C بتحويل نقطي R يُطلب تعيين عناصره المميزة.

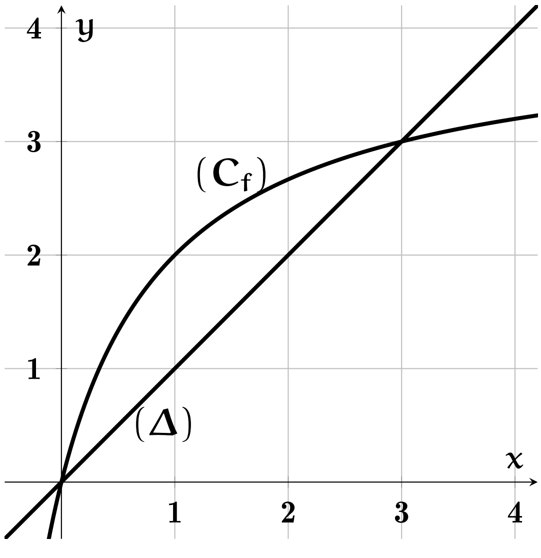
3/ ا/ عين Z_G لاحقة النقطة G مرجح الجملة المثقلة: $\{(A;1),(B;-1),(C;1)\}$.
ب/ بيّن أن الرباعي ABCG مربع.

4/ عين (E) مجموعة النقط M ذات اللاحقة Z بحيث: $|\overline{Z}+1|=|iZ+2+3i|$.

التمرين الثالث: (04 نقاط)

لتكن f الدالة المعرفة على $[0;+\infty[$ بـ: $f(x)=4-\dfrac{4}{x+1}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ كما هو موضح في الشكل أدناه؛ حيث (Δ) هو المستقيم ذو معادلة $y=x$.
ولتكن (u_n) المتتالية المعرفة بـ $u_0=1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=f(u_n)$.

1/ بين أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$.



2/ ا/ أنقل الشكل المقابل، ثم مثّل الحدود الأربعة الأولى للمتتالية (u_n) على حامل محور الفواصل موضحا خطوط الإنشاء.

ب/ ضع تخمينا حول إتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها.

3/ ا/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq u_n \leq 3$

ب/ أدرس إتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم استنتج أنها متقاربة.

4/ نعتبر (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = 1 - \dfrac{3}{u_n}$.

ا/ بين أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\dfrac{1}{4}$ ثم أحسب v_0 .

ب/ أكتب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n وأحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

5/ أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = \dfrac{u_n}{u_n - 3} + \dfrac{u_{n+1}}{u_{n+1} - 3} + \cdots + \dfrac{u_{n+2024}}{u_{n+2024} - 3}$.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I/ يمثل الجدول المقابل تغيرات الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = e^{-x} - x - 2$.

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	$-$
$g(x)$	$+\infty$ $\searrow$ $-\infty$

1/ بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $-0.5 < \alpha < -0.4$.

2/ حدّد حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$، ثم استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(-x)$.

II/ لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = 1 - x + \dfrac{x-1}{e^x}$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ (وحدة الطول: $2cm$) .

1/ ا/ أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

ب/ بيّن أن المستقيم (D) ذو معادلة $y = -x + 1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

ج/ أدرس وضعية (C_f) بالنسبة لـ (D) .

2/ ا/ بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = -\dfrac{g(-x)}{e^x}$.

ب/ ادرس إتجاه تغير الدالة f ثم شكّل جدول تغيراتها.

3/ بيّن أن: $f(-\alpha) = \alpha + \dfrac{1}{\alpha + 2}$ ثم استنتج حصرا لـ $f(-\alpha)$.

4/ ا/ بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x) = (1-x)(1-e^{-x})$.

ب/ عين فواصل نقط تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل، ثم أنشئ (D) و (C_f) بدقة.

5/ ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة $x - 1 = (-1 + 2m + x)e^x$.

6/ ا/ باستعمال المكاملة بالتجزئة بيّن أن: $\displaystyle\int_0^1 xe^{-x}dx = 1 - \frac{2}{e}$.

ب/ أحسب بالـ cm^2 مساحة الحيز المحصور بين (C_f) و (D) والمستقيمين ذي معادلتين $x = 0$ و $x = 1$.

انتهى الموضوع الثاني.

مناقشة البكالوريا التجريبية

الموضوع الأول

الجواب الأول

لجنة بمهام ذات ترتيبة $A_{16}^3 = 3360$

$\left\{ 9H \atop 8+\text{عبد الله} \right.$ ، $\left. 7F \atop 6+\text{فاطمة} \right\}$

أ- حساب الاحتمالات

A "اللجنة تضم عبد الله"

$$P(A) = \frac{3\times A_1^1 A_{15}^2}{A_{16}^3} = \frac{630}{3360} = \frac{3}{16}$$

B "فاطمة كاتبة اللجنة"

$$P(B) = \frac{A_1^1 A_{15}^2}{3360} = \frac{210}{3360} = \frac{1}{16}$$

C "اللجنة تضم إما فاطمة وإما عبد الله"

$$P(C) = \frac{3\times\left(A_1^1 A_{14}^2 + A_1^1 A_{14}^2\right)}{3360} = \frac{13}{40}$$

D "اللجنة تتكون من النساء والرجال معا"

$$P(D) = \frac{3\left(A_9^2 A_7^1 + A_9^1 A_7^2\right)}{3360} = \frac{63}{80}$$

$$= 1 - P(\bar{D}) = 1 - \frac{\left(A_9^3 + A_7^3\right)}{3360} =$$

ب) المتغير العشوائي

FFF $\longrightarrow$ 0   FHH $\longrightarrow$ 2

FFH $\longrightarrow$ 1   HHH $\longrightarrow$ 3

$$X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$$

$$P(X=0) = \frac{A_7^3}{3360} = \frac{1}{16}$$

$$P(X=1) = 3\times\frac{A_7^2 A_9^1}{3360} = \frac{27}{80}$$

$$P(X=2) = 3\times\frac{A_7^1 A_9^2}{3360} = \frac{9}{20}$$

$$P(X=3) = \frac{A_9^3}{3360} = \frac{3}{20}$$

$X = x_i$	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	$1/16$	$\frac{27}{80}$	$9/20$	$3/20$

حساب الأمل:

$$E(X) = \sum x_i p_i$$

$$= \frac{27}{80} + 2\times\frac{9}{20} + \frac{3\times 3}{20}$$

$$= 1,6875 = \frac{27}{16}$$

استنتاج $E(2024X + 1445)$

$$E(2024X + 1445)$$

$$= 2024\times E(X) + 1445$$

$$= 4\,860,5$$

ج حساب احتمال $P\left(\int_1^x \ln t\,dt < 1\right)$

$$\int_1^x \ln t\,dt = \left[t\ln t - t\right]_1^x$$

$$= x\ln x - x + 1$$

$$x\ln x - x + 1 < 1$$

$$x\ln x - x < 0$$

يكافئ $x > 0\ ;\ x(\ln x - 1) < 0$

$$\ln x - 1 < 0$$

$$\ln x < 1$$

$$x < e$$

$$x \in \{1, 2\}$$

$$P\left(\int_1^x \ln t\,dt < 1\right) = P(X=1) + P(X=2) \quad \text{وعليه}$$

$$= \frac{63}{80}$$

الجواب الثاني

1 - حل المعادلة $(1+2i)\bar{z} + 2 - i = 0$

$$(1+2i)\bar{z} = -2 + i$$

$$\bar{z} = \frac{-2+i}{1+2i}\times\frac{1-2i}{1-2i}$$

$$= \frac{-2+4i+i+2}{5} = \frac{5}{5}i = i$$

ومنه $z = -i$

الاختيار -أ-.

2) عمدة العدد المركب z

$z = -3\left(-\cos\frac{\pi}{7} + i\sin\frac{\pi}{7}\right)$

$= 3\left(\cos\frac{\pi}{7} - i\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)\right)$

$= 3\left(\cos\left(-\frac{\pi}{7}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{7}\right)\right)$

ومنه $-\frac{\pi}{7}$ عمدة له

الاختيار - ب -

3) $L = \left(\frac{z_A - z_B}{\sqrt{2}}\right)^{1445}$

$\frac{z_A - z_B}{\sqrt{2}} = \frac{1-2i+i}{\sqrt{2}} = \frac{1-i}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}$

$= e^{-i\frac{\pi}{4}}$

$L = \left(e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^{1445} = e^{-i\frac{1445}{4}\pi}$

$= e^{-i\left(360\pi + \frac{5\pi}{4}\right)}$

$= e^{-i\frac{5\pi}{4}} = e^{i\frac{3\pi}{4}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$

الاختيار - ج -

4) $\frac{z_B}{z} = \frac{-i}{\bar{z}} = \frac{e^{-i\frac{\pi}{2}}}{re^{i\theta}} = \frac{1}{r}e^{-i\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}$

الاختيار - ج -

5) مجموعة النقط.

$\arg(iz-1) = \frac{\pi}{4} + k\pi$

$\arg(iz+i^2) = \frac{\pi}{4} + k\pi$

$\arg(i(z-(-i))) = \frac{\pi}{4} + k\pi$

$\arg(i) + \arg(z - z_B) = \frac{\pi}{4} + k\pi$

$\arg(z - z_B) = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} + k\pi = -\frac{\pi}{4} + k\pi$

$(\vec{u}, \overrightarrow{BM}) = -\frac{\pi}{4} + k\pi$.

ومنه المستقيم (BA) ماعدا النقطة B.

الاختيار - ب -

الجواب الثالث

$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \frac{u_n^2}{2u_n - 1} \end{cases}$$

1- تبيان أنه: $u_{n+1} - 1 = \frac{(u_n-1)^2}{2u_n-1}$

$u_{n+1} - 1 = \frac{u_n^2}{2u_n-1} - 1 = \frac{u_n^2 - 2u_n + 1}{2u_n - 1}$

$= \frac{(u_n-1)^2}{2u_n-1}$.

ب) البرهان بالتراجع أنه: $u_n - 1 > 0$

• التحقق من صحة الخاصية الابتدائية.

$u_0 - 1 = 4 - 1 = 3 > 0$

ومنه الخاصية الابتدائية محققة

• نفرض أن $u_n - 1 > 0$ من اجل n عدد طبيعي

ونبرهن أن $u_{n+1} - 1 > 0$.

لدينا $u_n - 1 > 0$ وعليه $(u_n-1)^2 > 0$ ... ①

ولدينا $u_n > 1$ ومنه $2u_n - 1 > 0$ .... ②

من ① و ② نجد $\frac{(u_n-1)^2}{2u_n-1} > 0$ ومنه

$u_{n+1} - 1 > 0$.

وعليه من اجل كل "n" من $\mathbb{N}$ فإن $u_n - 1 > 0$

جـ - اتجاه تغير المتتالية.

$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n^2}{2u_n-1} - u_n$

$= \frac{u_n^2 - 2u_n^2 + u_n}{2u_n - 1}$

$= \frac{-u_n^2 + u_n}{2u_n - 1} = \frac{u_n(1-u_n)}{2u_n-1}$

لدينا $u_n - 1 > 0$ ومنه $-u_n + 1 < 0$ ... ①

$u_n - 1 > 0$ ومنه $u_n > 0$ .... ②

③ ... $2u_n - 1 > 0$

وعليه $u_{n+1} - u_n < 0$ ومنه

(u_n) متناقصة.

(u_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل فهي متقاربة.

3/

$$v_n = \ln\left(1-\frac{1}{u_n}\right)$$

أ- إثبات أن (v_n) هندسية أساسها $q=2$

معناه $v_{n+1} = 2v_n$.

$$v_{n+1} = \ln\left(1-\frac{1}{u_{n+1}}\right) = \ln\left(1-\frac{1}{\frac{u_n^2}{2u_n-1}}\right)$$

$$= \ln\left(1-\frac{2u_n-1}{u_n^2}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{u_n^2-2u_n+1}{u_n^2}\right)$$

$$= \ln\left(\left(\frac{u_n-1}{u_n}\right)^2\right) = 2\ln\left(1-\frac{1}{u_n}\right)$$

$$= 2v_n$$

ومنه (v_n) هندسية أساسها $q=2$ وحدها الأول

$$v_0 = \ln\left(1-\frac{1}{4}\right) = \ln\left(\frac{3}{4}\right)$$

عبارة v_n و u_n.

$$v_n = v_0 \times q^n = \ln\left(\frac{3}{4}\right)\times 2^n = \ln\left(\frac{3}{4}\right)^{2^n}$$

ولدينا $v_n = \ln\left(1-\frac{1}{u_n}\right)$

$$1-\frac{1}{u_n} = e^{v_n}$$

$$\frac{1}{u_n} = 1-e^{v_n} = 1-\left(\frac{3}{4}\right)^{2^n}$$

$$u_n = \frac{1}{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{2^n}}$$

حساب $\lim u_n$

$$\lim u_n = \lim \frac{1}{1-\underbrace{\left(\frac{3}{4}\right)^{2^n}}_{0}} = 1$$

4/ حساب الجداء

$$P_n = \left(1-\frac{1}{u_0}\right)\left(1-\frac{1}{u_1}\right)\times\cdots\times\left(1-\frac{1}{u_n}\right)$$

لدينا $1-\frac{1}{u_n} = e^{v_n}$ ، ومنه

$$P_n = e^{v_0}\times e^{v_1}\times\cdots\times e^{v_n} = e^{v_0+v_1+\cdots+v_n}$$

$$P_n = e^{\ln\frac{3}{4}\left(\frac{1-2^{n+1}}{1-2}\right)}$$

$$P_n = e^{\ln\left(\frac{3}{4}\right)\left(2^{n+1}-1\right)}.$$

التمرين الرابع

I/ 1- بقراءة بيانية: تحديد وضعية (Γ) بالنسبة لـ (D) من التمثيل البياني

x	0	1	$+\infty$
الوضع النسبي	(Γ) تحت (D)	(Γ) يقطع (D)	(Γ) فوق (D)

2- استنتاج إشارة $g(x)$

$$g(x) = x-1+2\ln x = 2\ln x-(-x+1)$$

اعتمادا على الوضع النسبي لـ (Γ) و (D) فإن:

x	0		1		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

II) $f(x) = x-2+(\ln x)^2-\ln x$

أ- حساب النهايات

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \ln x\left(\frac{x}{\ln x}-\frac{2}{\ln x}+\ln x-1\right) = +\infty$$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = +\infty$$

ومنه $x=0$ معادلة لمستقيم مقارب عمودي

2- تبيان أن $f'(x) = \frac{g(x)}{x}$.

$$f'(x) = 1+2\times\frac{1}{x}\ln x-\frac{1}{x} = \frac{x+2\ln x-1}{x}$$

$$= \frac{g(x)}{x}$$

استنتاج اتجاه تغيرها

$x>0$ ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$.

وعليه f متناقصة على $]0;1]$ ومتزايدة على $[1;+\infty[$

جدول تغيراتها

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-1	↗	$+\infty$

3- تبيان أن $f(x)=0$ تقبل حلين α و β

على المجال $]0;1]$ ، f مستمرة ومتناقصة تماما على $]0,1]$ فهي كذلك على $[0,4;0,5]$ ، ولدينا

$f(0,4)=0,16$ و $f(0,5)=-0,33$ ، ومنه $f(0,4)f(0,5)<0$

إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0,4<\alpha<0,5$.

تم المجال $[1;+\infty[$ ، f مستمرة و متزايدة تماما على $[1;+\infty[$ خصوصا في المجال $[2{,}1;2{,}2]$ و لدينا $f(2{,}2)=0{,}03, f(2{,}1)=-0{,}09$.

و منه $f(2{,}1)f(2{,}2)<0$ و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا β حيث $2{,}1<\beta<2{,}2$

4- دراسة وضعية (φ) بالنسبة لـ (Δ)

$$f(x)-y = x-2+(\ln x)^2-\ln(x)-x$$
$$=(\ln x)^2-\ln x-2.$$

بوضع $\ln x = y$ نجد $y^2-y-2=0$

$$(y-2)(y+1)=0$$

و منه $y=-1$ أو $y=2$ و عليه

و منه $x=e^{-1}$ أو $x=e^2$ و منه

x	0		e^{-1}		e^2		$+\infty$
$f(x)-y$		$+$	0	$-$	0	$+$	
الوضع النسبي		(φ) فوق (Δ)	(φ) يقطع (Δ)	(φ) تحت (Δ)	(φ) يقطع (Δ)	(φ) فوق (Δ)	

5- تبيان أن (φ) يقبل مماسا موازيا لـ (Δ).

أي $g(x)=x$ و منه $f'(x)=1$

و منه $2\ln x+x-1=x$ و منه $2\ln x=1$

$$x=e^{\frac{1}{2}}$$

معادلته

$$f'(e^{\frac{1}{2}})=1$$
$$f(e^{\frac{1}{2}})=e^{\frac{1}{2}}-2+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}=\frac{-9}{4}+e^{\frac{1}{2}}$$
$$(T): y=(x-e^{\frac{1}{2}})+e^{\frac{1}{2}}-\frac{9}{4}$$
$$=x-\frac{9}{4}.$$

المناقشة

$f(x)=x-m$ هي فواصل نقط تقاطع (φ) مع المستقيم ذو المعادلة $y=x-m$.

$-m<-\frac{9}{4}$ أي $m>\frac{9}{4}$ لا توجد حلول.

$-m=-\frac{9}{4}$ أي $m=\frac{9}{4}$ يوجد حل.

$-m>-\frac{9}{4}$ أي $m<\frac{9}{4}$ يوجد حلان متمايزان.

7) $h(x)=-x(\ln x)^2+ax\ln x+bx$

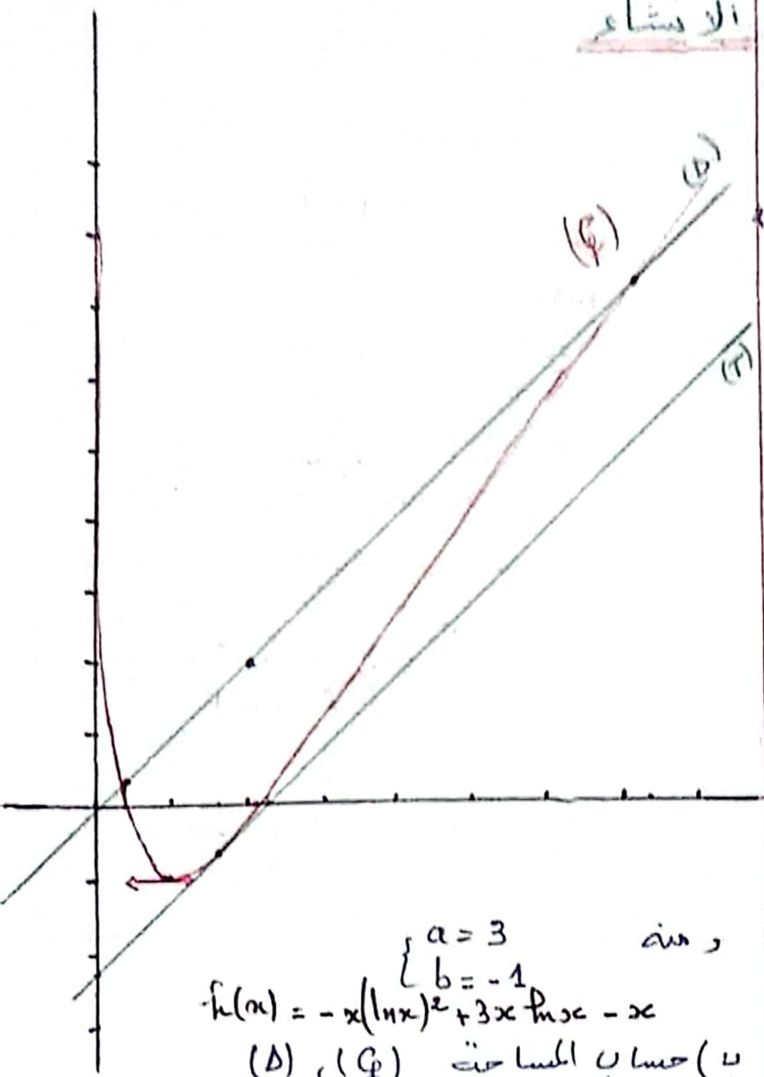
إيجاد a و b بحيث h دالة أصلية للدالة

$$x\longrightarrow 2-(\ln x)^2+\ln x$$

$$h'(x)=-(\ln(x))^2-2\ln x+a\ln x+a+b$$
$$=-(\ln x)^2+(a-2)\ln x+a+b$$

و منه
$$\begin{cases} a-2=1 \\ a+b=2 \end{cases}$$

الإنشاء



و منه
$$\begin{cases} a=3 \\ b=-1 \end{cases}$$
$$h(x)=-x(\ln x)^2+3x\ln x-x$$

8) حساب المساحة (φ) ، (Δ)

$x=\frac{1}{e}$ ، $x=e^2$

(φ) تحت (Δ) في المجال $[e^{-1};e^2]$

و منه
$$S=\int_{e^{-1}}^{e^2}(y-f(x))\,dx$$
$$=\int_{e^{-1}}^{e^2}(x-x+2-(\ln x)^2+\ln x)\,dx$$
$$=\left[h(x)\right]_{e^{-1}}^{e^2}$$
$$=h(e^2)-h(e^{-1})$$
$$=-e^2\times 4+3e^2\times 2-e^2-(-e^{-1}-3e^{-1}-e^{-1})$$
$$=(e^2+5e^{-1})\,cm^2.$$

الموضوع الثاني

التمرين الأول

U_2 : $R_1 \; R_1 \; R_2$ — $V_0 \; V_1$

U_1 : $R_0 \; R_1R_1R_1 \; R_2$ — $V_0 \; V_1V_1$

1- حساب احتمال الحادثتين A و B

$$P(A) = \frac{1}{2}\left(\frac{A_5^2 + A_3^2}{A_8^2} + \frac{3^2+2^2}{5^2}\right) = \frac{689}{1400}$$

$$P(B) = \frac{1}{2}\left(\frac{A_5^2 + A_2^2}{A_8^2} + \frac{3^2+1^2+1^2}{5^2}\right) = \frac{583}{1400}.$$

2- البحث في استقلال الحادثتين :

$$P(A\cap B) = \frac{1}{2}\left(\frac{A_3^2 + A_2^2}{A_8^2} + \frac{2^2+1^2+1^2+1^2}{5^2}\right) = \frac{37}{175}$$

ولدينا :

$$P(A)\times P(B) = \frac{401687}{1960000} \neq P(A\cap B)$$

ومنه الحادثتين A و B غير مستقلتين

3- الكريتين المسحوبتين من لونين مختلفين حساب $P_{\bar{A}}(U_1)$

$$P_{\bar{A}}(U_1) = \frac{P(U_1\cap \bar{A})}{P(\bar{A})} = \frac{\frac{1}{2}\times 2A_3^1A_5^1}{1-P(A)} = \frac{\frac{15}{56}}{\frac{711}{1400}} = \frac{125}{237}.$$

II المتغير العشوائي

قيم المتغير العشوائي

$0+0 \to 0$

$0+1 \to 1$

$0+2 \to 2$

$1+1 \to 2$

$1+2 \to 3$

$2+2 \to 4$

وعليه قيم المتغير العشوائي هي : $0, 1, 2, 3, 4$

قانون المتغير العشوائي

$$P(X=0) = \frac{C_3^2}{C_{13}^2} = \frac{3}{78}$$

$$P(X=1) = \frac{C_3^1C_8^1}{C_{13}^2} = \frac{24}{78}$$

$$P(X=2) = \frac{C_3^1C_2^1 + C_8^2}{C_{13}^2} = \frac{34}{78}$$

$$P(X=3) = \frac{C_8^1C_2^1}{C_{13}^2} = \frac{16}{78}$$

$R_0V_0 \quad R_1R_1 \quad R_2$

$V_0 \quad R_1R_1 \quad R_2$

R_1V_1

V_1V_1

$$P(X=4) = \frac{C_2^2}{C_{13}^2} = \frac{1}{78}$$

$X=x_i$	0	1	2	3	4
$P(X=x_i)$	$3/78$	$24/78$	$34/78$	$16/78$	$1/78$

حساب الأمل الرياضي

$$E(X) = \sum_{i=1}^{5} x_iP_i = \frac{24}{13} = 1,846 = \frac{144}{78}.$$

التمرين الثاني

I) $(\bar{z}+3+2i)(z^2-2z+5)=0$

ومنه $\bar{z}+3+2i=0$ أو $z^2-2z+5=0$

$\bar{z}=-3-2i$ ومنه $\boxed{z=-3+2i}$

حساب المميز $\Delta = 4-20=-16$

$$z_1 = \frac{2-4i}{2} = 1-2i$$

$$z_2 = \bar{z}_1 = 1+2i$$

II) $z_A = 1-2i$ ، $z_B = 1+2i$ ؛ $z_C = -3+2i$

$z_D = -1$

1- حساب $|z_A-z_D|$ ، $|z_B-z_D|$ ، $|z_C-z_D|$

$|z_A-z_D| = |1-2i+1| = |2-2i| = \sqrt{8}$

$|z_B-z_D| = |1+2i+1| = |2+2i| = \sqrt{8}$

$|z_C-z_D| = |-3+2i+1| = |-2+2i| = \sqrt{8}$

ب) لدينا $AD=BD=CD$ وعليه A ، B ، C تنتمي إلى الدائرة التي مركزها D ، ونصف قطرها $r=\sqrt{8}$.

ج- كتابة $\frac{z_A-z_B}{z_C-z_B}$ على الشكل الأسي.

$$\frac{z_A-z_B}{z_C-z_B} = \frac{1-2i-1-2i}{-3+2i-1-2i} = \frac{-4i}{-4} = i = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

لدينا $\left|\frac{z_A-z_B}{z_C-z_B}\right| = 1$ و $\arg\left(\frac{z_A-z_B}{z_C-z_B}\right) = \frac{\pi}{2}$ وعليه المثلث ABC قائم في B ومتساوي الساقين

د) استنتاج أن A صورة C بتحويل R

$$\frac{z_A-z_B}{z_C-z_B} = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

ومنه

$$z_A-z_B = e^{i\frac{\pi}{2}}(z_C-z_B).$$

و منه A صورة C بالدوران الذي مركزه B و زاويته $\frac{\pi}{2}$.

3/ تعيين z_G

$$z_G = \frac{z_A - z_B + z_C}{1-1+1} = 1-2i-1-2i-3+2i$$

$$= -3-2i = \bar{z}_C$$

تبيان أن الرباعي ABCG مربع.

لدينا $z_G = \bar{z}_C$ و عليه $BC = AG$

و $(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}) = \frac{\pi}{2}$ و منه الرباعي ABCG مربع

4/ مجموعة النقط

$$|\bar z + 1| = |iz+2+3i|$$

$$|\bar z + \bar 1| = |iz - 2i^2 + 3i|$$

$$|\overline{z+1}| = |i(z+3-2i)|$$

$$|z-(-1)| = |i||z-(-3+2i)|$$

$$|z-z_D| = |z-z_C|$$

$$DM = CM$$

و منه مجموعة النقط هي المستقيم المحوري للقطعة $[DC]$

التمرين الثالث

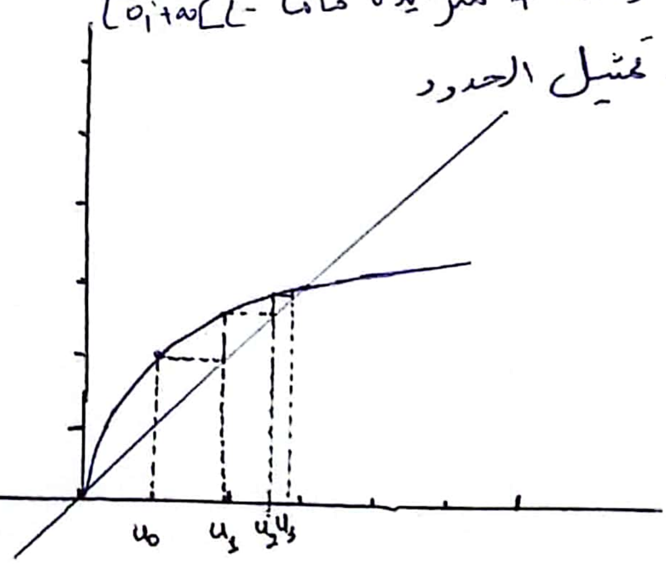
$$f(x) = 4 - \frac{4}{x+1}$$

1- تبيان أن f متزايدة تماما

$$f'(x) = \frac{4}{(x+1)^2} > 0$$

و منه f متزايدة تماما على $[0;+\infty[$

2- تمثيل الحدود



ب) التخمين.

$u_0 < u_1 < u_2 < u_3$ و منه (u_n) متزايدة و المسافة بين الحدود تتناقص فهي متقاربة.

3. 1. البرهان بالتراجع أن $0 < u_n < 3$

نسمي $P(n)$ الخاصية "من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $0<u_n<3$"

التحقق من صحة الخاصية $P(0)$

من أجل $n=0$: $0 < u_0 = 1 < 3$ محققة.

نفرض أن $P(n)$ صحيحة و نبرهن $P(n+1)$

نفرض أن $0 < u_n < 3$

و لدينا f متزايدة و منه $f(0) < f(u_n) < f(3)$

$$0 < 1 < u_{n+1} < 3$$

و عليه $P(n+1)$ صحيحة و منه $P(n)$ صحيحة

ب- دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n).

$$u_{n+1}-u_n = \frac{4u_n}{u_n+1} - u_n = \frac{4u_n - u_n^2 - u_n}{u_n+1}$$

$$= \frac{u_n(3-u_n)}{u_n+1}$$

① ... $0<u_n<3$

② ... $1 < u_n+1 < 4$.

$0<u_n<3$ و منه $0<3-u_n<3$ ... ③

من ① و ② و ③ فإن $u_{n+1}-u_n>0$ و منه (u_n) متزايدة.

التقارب

(u_n) متزايدة و محدودة من الأعلى فهي متقاربة

4) $v_n = 1 - \frac{3}{u_n}$

تبيان أن (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{4}$.

معناه $v_{n+1} = q \cdot v_n$

$$v_{n+1} = 1 - \frac{3}{u_{n+1}} = 1 - \frac{3}{\frac{4u_n}{u_n+1}}$$

$$= 1 - \frac{(u_n+1)3}{4u_n}$$

$$= \frac{u_n-3}{4u_n} = \frac{1}{4} v_n$$

و منه (v_n) هندسية أساسها $q=\frac{1}{4}$ ، وحدها الأول $v_0 = 1-\frac{3}{u_0}$ أي $v_0=-2$.

عبارة v_n : $v_n = v_0 q^n = -2\left(\frac{1}{4}\right)^n$

عبارة u_n : لدينا $v_n = 1 - \frac{3}{u_n}$

ومنه

$$\frac{3}{u_n} = 1 - v_n$$

$$u_n = \frac{3}{1 - v_n} = \frac{3}{1 + 2\left(\frac{1}{4}\right)^n}.$$

نهاية u_n

$$\lim u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{3}{1+2\left(\frac{1}{4}\right)^n} = \frac{3}{1} = 3$$

لأن $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$.

ذ) حساب المجموع :

$$S_n = \frac{u_n}{u_n - 3} + \dots + \frac{u_{n+2024}}{u_{n+2024} - 3}.$$

لدينا

$v_n = \frac{u_n - 3}{u_n}$ ومنه

$$\frac{1}{v_n} = \frac{u_n}{u_n - 3}.$$

ومنه $S_n = \frac{1}{v_n} + \frac{1}{v_{n+1}} + \dots + \frac{1}{v_{n+2024}}$

$$S_n = \frac{1}{v_n}\left(\frac{1 - \left(\frac{1}{9}\right)^{2025}}{1 - \frac{1}{9}}\right)$$

$$= -\frac{1}{2} \times 4^n \left(\frac{1 - 4^{2025}}{-3}\right)$$

$$= \frac{4^n}{6}\left(1 - 4^{2025}\right)$$

الجواب الرابع

$$g(x) = e^{-x} - x - 2$$

1- بيان أن $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α: $-0.5 < \alpha < -0.4$

من جدول تغيرات الدالة g نلاحظ أنها مستمرة ومتناقصة على $\mathbb{R}$ فهي مستمرة ومتناقصة على $[-0.5, -0.4]$ ولدينا $g(-0.5) =$ ، $g(-0.4) =$

ومنه $g(-0.5) \times g(-0.4) < 0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-0.5 < \alpha < -0.4$

اشارة $g(x)$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	$+$	0	$-$

اشارة $g(-x)$

$g(-x) > 0$ يكافئ $-x < \alpha$ ومنه $x > -\alpha$

وعليه

x	$-\infty$	$-\alpha$	$+\infty$
$g(-x)$	$-$	0	$+$

II. $f(x) = 1 - x + \frac{x-1}{e^x}$

أ) حساب النهايات

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x - xe^x + x - 1}{e^x} = -\infty$$

ب) تبيان أن $y = -x + 1$ مقارب لـ (C_f)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x) - y\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x-1}{e^x} = 0$$

ومنه (D) مقارب لـ (C_f) عند $+\infty$.

ج) دراسة الوضعية

لدينا $f(x) - y = \frac{x-1}{e^x}$ و $e^x > 0$ ومنه

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x) - y$	$-$	0	$+$
الوضع النسبي	(C_f) تحت (D)	(C_f) تقطع (D)	(C_f) فوق (D)

2- حساب $f'(x)$.

$$f'(x) = -1 + e^{-x} - e^{-x}(x-1)$$

$$= -e^{-x}\left(e^{x} + x - 2\right)$$

$$= \frac{-g(-x)}{e^x}.$$

ب) دراسة اتجاه التغير :

$e^x > 0$ وعليه

x	$-\infty$	$-\alpha$	$+\infty$
$g(-x)$	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$

وعليه f متناقصة تماما على $[-\alpha; +\infty[$ ومتزايدة تماما على $]-\infty; -\alpha]$

جدول التغيرات

x	$-\infty$	$-\alpha$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$f(-\alpha)$	↘ $-\infty$

3- تبيان أن: $f(-\alpha)=\alpha+\frac{1}{\alpha+2}$

$f(-\alpha)=1+\alpha+\frac{\alpha+1}{e^{-\alpha}}$

ولدينا $g(\alpha)=0$ ومنه $e^{-\alpha}-\alpha-2=0$

ومنه $e^{-\alpha}=\alpha+2$ ، $f(-\alpha)=1+\alpha+\frac{-\alpha+1}{\alpha+2}$

$=\alpha+\frac{\alpha+2-\alpha+1}{\alpha+2}=\alpha+\frac{1}{\alpha+2}$

استنتاج حصر لـ $f(-\alpha)$.

$-0,5<\alpha<-0,4$ ① ومنه $1,5<\alpha+2<1,6$

ومنه $\frac{1}{1,6}<\frac{1}{\alpha+2}<\frac{1}{1,5}$

② ... $0,625<\frac{1}{\alpha+2}<0,67$

نجمع ① و ② ومنه

$0,125<f(\alpha)<0,27$

4- تبيان أن: $f(x)=(1-x)(1-e^{-x})$

$f(x)=1-x+\frac{x-1}{e^{x}}$

$=1-x+(x-1)e^{-x}$

$=(1-x)[1-e^{-x}]$.

ب) تعيين نقط تقاطع $(\mathcal{C})$ مع محور الفواصل

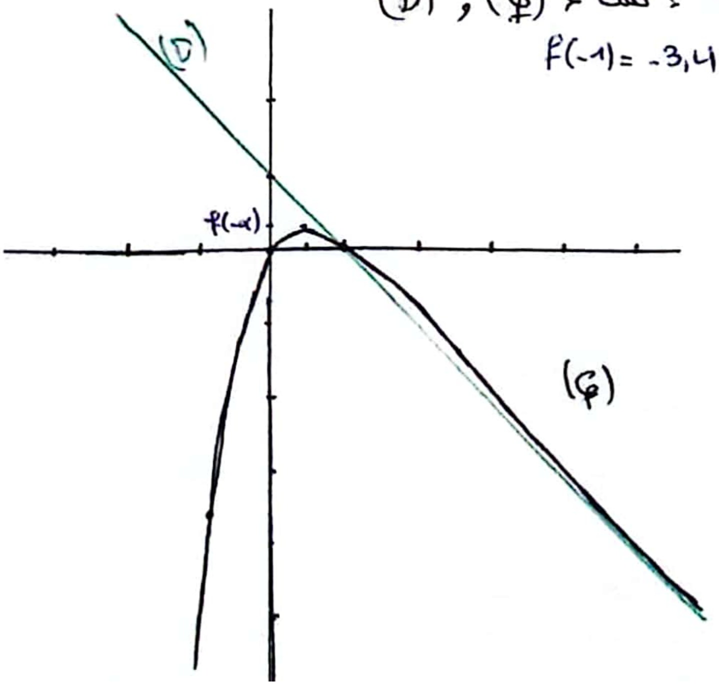
$f(x)=0$ ومنه $(1-x)(1-e^{-x})=0$

$1-x=0$ أو $1-e^{-x}=0$ وعليه

$x=1$ أو $x=0$ ومنه $(\mathcal{C})$ تقطع محور الفواصل في نقطتين $(1,0)$ ، $(0,0)$.

إنشاء $(\mathcal{C})$ ، (D)

$f(-1)=-3,4$



5) المناقشة البيانية

$x-1=(-1+2m+x)e^{x}$ ومنه

$\frac{x-1}{e^{x}}=-1+x+2m$ ومنه

$1-x+\frac{x-1}{e^{x}}=2m$ وعليه $f(x)=2m$

هي فواصل نقط تقاطع $(\mathcal{C})$ مع المستقيم $y=2m$.

$2m=f(-\alpha)$ ومنه $m=\frac{f(-\alpha)}{2}$ يوجد حل موجب

$2m>f(-\alpha)$ ومنه $m>\frac{f(-\alpha)}{2}$ لا توجد حلول

$2m=0$ ومنه $m=0$ يوجد حلان أحدهما موجب والآخر سالب

$0<m<\frac{f(-\alpha)}{2}$ يوجد حلان موجبان

$m<0$ يوجد حلان مختلفان في الإشارة

6- التكامل بالتجزئة $I=\int_0^1 xe^{-x}dx$

$u(x)=x$ $\qquad u'(x)=1$

$v'(x)=e^{-x}$ $\qquad v(x)=-e^{-x}$

$I=\left[-xe^{-x}\right]_0^1-\int_0^1 -e^{-x}dx$

$=\left[-xe^{-x}-e^{-x}\right]_0^1$

$=(-1e^{-1}-e^{-1})-(-1)$

$=1-2e^{-1}=1-\frac{2}{e}$.

ب) حساب المساحة (D) ، $(\mathcal{C})$ ، $x=0$ ، $x=1$

$(\mathcal{C})$ تحت (D) وعليه:

$S=-2\times2\int_0^1 (f(x)-y)dx$

$=-4\int_0^1 (x-1)e^{-x}dx\ cm^2$

$=-4\left[\int_0^1 xe^{-x}dx+\int_0^1 -e^{-x}dx\right]cm^2$

$=-4\left[\left(1-\frac{2}{e}\right)+\left[e^{-x}\right]_0^1\right]cm^2$

$=-4\left(1-\frac{2}{e}+e^{-1}-1\right)cm^2$

$=\frac{4}{e}\ cm^2$