الثانوية الخاصّة: الرّجاء والتفوّق (بوزريعة) المستوى: ثالثة ثانوي "علوم تجريبية" المادة: رياضيات	**اختبار** **الفصل الثاني**	الموسم الدراسي: 2018/2017 المدة: ثلاث ساعات (3سا) إعداد: عبد المطلب

تمرين 1 (4نقاط)

(u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول $u_0=1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=\dfrac{u_n}{\sqrt{u_n^2+2}}$.

1) أ) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $0\le u_n\le 1$.

ب) بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $4u_{n+1}-3u_n=\dfrac{-u_n(9u_n^2+2)}{\sqrt{u_n^2+2}\left(4+3\sqrt{u_n^2+2}\right)}$.

استنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}\le\dfrac{3}{4}u_n$.

ج) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $0\le u_n\le\left(\dfrac{3}{4}\right)^n$، ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

2) (v_n) المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول v_0، ومن أجل كل عدد طبيعي n، $v_n=\dfrac{u_n}{\sqrt{2u_n^2+2}}$.

أ) بيّن أنّ (v_n) متتالية هندسية، أساسها $q=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$، يطلب حساب حدّها الأوّل.

ب) احسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n=v_0^2+v_1^2+\dots+v_n^2$.

تمرين 2 (5نقاط)

في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، لتكن النقط A، B و C لاحقاتها على الترتيب: $z_A=2$ ، $z_B=6+2i$ و $z_C=4i$.

1) أ) بيّن أنّ $\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=e^{i\frac{\pi}{2}}$. استنتج طبيعة المثلث ABC وارسمه.

ب) اكتب كل من (z_B-4) و (z_C-4) على الشكل الأسي.

ج) n عدد طبيعي. بيّن أنّ $(z_B-4)^n\times(z_C-4)^n=2^{4n}e^{in\pi}$ ، ثم عيّن قيم العدد الطبيعي n الذي من أجله يكون $(z_B-4)^n\times(z_C-4)^n$ عددا حقيقيا موجبا.

2) لتكن النقطتان D و E تحقّقان: $\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}=\vec{0}$ و $2\overrightarrow{EA}-\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{EC}=\vec{0}$.

أ) ماذا تمثّل النقطة D بالنسبة لـ B و C؟ وماذا تمثّل النقطة E بالنسبة لـ A، B و C؟

ب) بيّن أنّ لاحقة النقطة D هي $z_D=3+3i$ ، وأنّ لاحقة النقطة E هي $z_E=-1+i$.

ج) لتكن (Γ_1) مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي التي تحقّق: $\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\|=\|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\|$.

- بيّن أنّ $2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{ME}$ ، وأنّ $\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MD}$.
- بيّن أنّ النقطتين A و C تنتميان إلى المجموعة (Γ_1) ثم عيّن وأنشئ هذه المجموعة.

د) لتكن (Γ_2) مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي التي تحقّق: $z-z_E=|z_B-z_D|e^{i\theta}$ ، حيث $\theta\in\mathbb{R}$.

- بيّن أنّ النقطة A تنتمي إلى المجموعة (Γ_2) ثم عيّن وأنشئ هذه المجموعة.

اقلب الورقة

تمرين3 (4نقاط)

1) كيس U_1 يحتوي على 5 كرات بيضاء و4 كرات سوداء وكرة واحدة خضراء. نسحب عشوائيا وفي آن واحد ثلاث كرات.

نعتبر الحادثتين التاليتين: A: سحب ثلاث كرات من اللون نفسه.

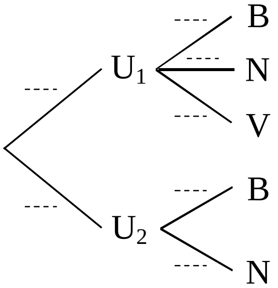
B: سحب على الأقل كرة واحدة سوداء.

احسب الاحتمالات التالية: $P(A)$ ، $P(B)$ ، $P(A\cap B)$ و $P_B(A)$.

2) كيس U_2 يحتوي على 5 كرات بيضاء و4 كرات سوداء. نرمي قطعة نقدية مرتين، إذا ظهر الوجه مرتين نسحب كرة واحدة من الكيس U_1، وإذا ظهر غير ذلك نسحب كرة واحدة من الكيس U_2.

نعتبر الحادثتين التاليتين: N: سحب الكرة السوداء.

U_1: الكرة المسحوبة من الكيس U_1.



أ) أنقل ثم أكمل شجرة الإحتمالات المقابلة التي تمنذج هذه الوضعية.

ب) احسب احتمال سحب الكرة السوداء.

ج) إذا سحبنا الكرة السوداء، فما احتمال أن تكون من من الكيس U_2؟

(في كل التمرين، تعطى النتائج على شكل كسور غير قابلة للاختزال)

تمرين4 (7نقاط)

I- g الدالة العددية المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=2x-6+\ln x$

1) بيّن أنّ الدالة g متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$.

2) بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $2{,}5<\alpha<2{,}6$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}_+^*$.

II- f الدالة العددية المعرّفة على المجال $D_f=]-1;+\infty[$ بـ: $f(x)=x^2-5x+(x+1)\ln(x+1)$

ليكن $(\mathscr{C})$ تمثيلها البياني في المستوي المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) احسب $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ >}} f(x)$ ، أعط تفسيرا بيانيا للنتيجة، ثم احسب نهاية الدالة f عند $+\infty$.

2) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من D_f ، $f'(x)=g(x+1)$ ، ثم شكّل جدول تغيرات الدالة f.

3) بيّن أنّ $f(\alpha-1)=-\alpha^2-\alpha+6$ ، ثم أعط حصرا للعدد $f(\alpha-1)$.

4) احسب $f(0)$ ، $f(3)$ و $f(4)$ ، ثم ارسم المنحني $(\mathscr{C})$. اعتبر $f(\alpha-1)\approx -3$.

III- h الدالة العددية المعرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ: $h(x)=-x^2+3x+3\ln(x+1)$

1) بيّن أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=-\infty$ ، واحسب $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ >}} h(x)$.

2) ادرس اتّجاه تغيّر الدالة h ثم شكّل جدول تغيراتها.

3) بيّن أنّ المعادلة $h(x)=0$ تقبل حلين أحدهما معدوم، والآخر β يطلب حصره بعددين طبيعيين متتابعين.

4) برهن على وجود مماسين لـ$(\mathscr{C})$ يشملان النقطة $A(2;-8)$. لا يطلب كتابة معادلتهما.

انتهى

تصحيح اختبار الفصل 2: 2018م

تمرين 3:
"عبد المطلب"

1) $P(A) = \dfrac{C_5^3 + C_4^3}{C_{10}^3} = \dfrac{7}{60}$

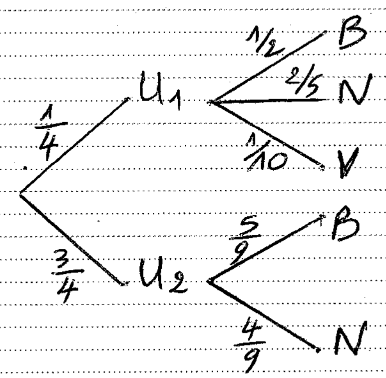
$P(B) = 1 - \dfrac{C_6^3}{C_{10}^3} = \dfrac{5}{6}$

أو: $P(B) = \dfrac{C_4^1 \times C_6^2 + C_4^2 \times C_6^1 + C_4^3}{C_{10}^3} = \dfrac{5}{6}$

(3 سوداء) $P(A \cap B) = \dfrac{C_4^3}{C_{10}^3} = \dfrac{1}{30}$

$P_B(A) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(B)} = \dfrac{1}{25}$

2) أ)



ب) $P(N) = P(U_1 \cap N) + P(U_2 \cap N)$

$P(N) = \frac{1}{4} \times \frac{2}{5} + \frac{3}{4} \times \frac{4}{9} = \frac{13}{30}$

ج) $P_N(U_2) = \dfrac{P(U_2 \cap N)}{P(N)} = \dfrac{10}{13}$

تمرين 2:

1) أ)

$\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \dfrac{-2+4i}{4+2i} = \dfrac{i(4+2i)}{4+2i} = i = e^{i\frac{\pi}{2}}$

ومنه ABC قائم في A ومتساوي الساقين
$\begin{cases} \left|\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = \dfrac{AC}{AB} = 1 \\ \arg\left(\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

ب) $z_B - 4 = 2 + 2i = 2\sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$

$z_C - 4 = -4 + 4i = 4\sqrt{2}\, e^{i\frac{3\pi}{4}}$

ج)

$(z_B - 4)^n (z_C - 4)^n = (2\sqrt{2})^n e^{i\frac{n\pi}{4}} \times (4\sqrt{2})^n e^{i\frac{3n\pi}{4}}$

$= (2^n \cdot \sqrt{2}^n)(2^{2n} \cdot \sqrt{2}^n) \cdot e^{i\left(\frac{n\pi}{4} + \frac{3n\pi}{4}\right)}$

$= 2^{3n} \cdot \sqrt{2}^{2n} \cdot e^{in\pi}$

ومنه: $(z_B - 4)^n (z_C - 4)^n = 2^{4n} \cdot e^{in\pi}$

$(z_B - 4)^n (z_C - 4)^n$ حقيقي موجب

إذا كان $n\pi = 2k\pi$ ومنه $n = 2k$ ، $k \in \mathbb{N}$

2) أ) D تمثل منتصف القطعة $[BC]$

و E تمثل مرجح الجملة $\{(A,2);(B,-1);(C,1)\}$

ب) $z_D = \dfrac{z_B + z_C}{2} = 3 + 3i$

$z_E = \dfrac{2z_A - z_B + z_C}{2 - 1 + 1} = -1 + i$

ج) $2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} =$

$2(\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{EA}) - (\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{EB}) + (\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{EC}) =$

$2\overrightarrow{ME} + \underbrace{(2\overrightarrow{EA} - \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{EC})}_{\vec{0}}$

ومنه: $2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{ME}$

$\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = (\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DB}) + (\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC})$

$= 2\overrightarrow{MD} + \underbrace{(\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC})}_{\vec{0}}$

ومنه: $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MD}$

• المجموعة (Γ_1): $\|2\overrightarrow{ME}\| = \|2\overrightarrow{MD}\|$

أي: $\|\overrightarrow{ME}\| = \|\overrightarrow{MD}\|$

$A \in (\Gamma_1)$: $AE = AD = \sqrt{10}$ (محققة)

$C \in (\Gamma_1)$: $CE = CD = \sqrt{10}$ (محققة)

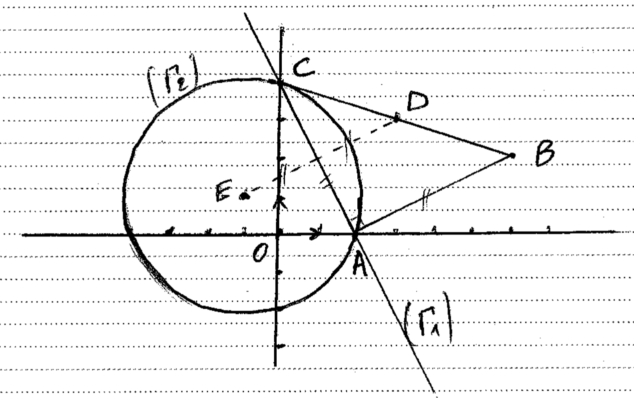
$ME = MD$: (Γ_1) هي محور $[ED]$

د) لدينا: $|z - z_E| = |z_B - z_D|$

أي: $EM = DB$

$A \in (\Gamma_2)$: $EA = DB = \sqrt{10}$ (محققة)

(Γ_2) هي دائرة مركزها E وتشمل النقطة A أي نصف قطرها $\sqrt{10}$.



تمرين 1:

1) أ) $n=0$: $0 \leq u_0 = 1 \leq 1$ (محققة)

نفرض أن: $0 \leq u_n \leq 1$ ونبرهن: $0 \leq u_{n+1} \leq 1$

لدينا: $0 \leq u_n^2 \leq 1$ ، $2 \leq u_n^2 + 2 \leq 3$

$\sqrt{2} \leq \sqrt{u_n^2+2} \leq \sqrt{3}$ ، $\frac{1}{\sqrt{3}} \leq \frac{1}{\sqrt{u_n^2+2}} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$0 \leq \frac{u_n}{\sqrt{u_n^2+2}} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \leq 1$$

$0 \leq u_{n+1} \leq 1$ ومنه: $0 \leq u_n \leq 1$ $(n \in \mathbb{N})$

ب) $$4u_{n+1} - 3u_n = \frac{4u_n}{\sqrt{u_n^2+2}} - 3u_n$$

$$4u_{n+1} - 3u_n = \frac{u_n\left(4 - 3\sqrt{u_n^2+2}\right)}{\sqrt{u_n^2+2}}$$

$$4u_{n+1} - 3u_n = \frac{u_n\left(4 - 3\sqrt{u_n^2+2}\right)\left(4 + 3\sqrt{u_n^2+2}\right)}{\sqrt{u_n^2+2}\cdot\left(4 + 3\sqrt{u_n^2+2}\right)}$$

$$4u_{n+1} - 3u_n = \frac{u_n\left(-9u_n^2 - 2\right)}{\sqrt{u_n^2+2}\left(4 + 3\sqrt{u_n^2+2}\right)}$$

المقام موجب والبسط سالب ومنه:

$4u_{n+1} - 3u_n \leq 0$ أي: $u_{n+1} \leq \frac{3}{4}u_n$

ج) $n=0$: $0 \leq u_0 = 1 \leq \left(\frac{3}{4}\right)^0$ (محققة)

نفرض أن: $0 \leq u_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n$ ونبرهن: $0 \leq u_{n+1} \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}$

$$0 \leq \frac{3}{4} \times u_n \leq \frac{3}{4} \times \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

أي: $0 \leq \frac{3}{4}u_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}$ ولدينا سابقا

$0 \leq u_{n+1} \leq \frac{3}{4}u_n$ ومنه: $0 \leq u_{n+1} \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}$

إذن: $0 \leq u_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n$: $(n \in \mathbb{N})$

$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$ ومنه $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ (مبرهنة الحصر)

2) أ)

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{\sqrt{2u_{n+1}^2+2}} = \frac{\frac{u_n}{\sqrt{u_n^2+2}}}{\sqrt{\frac{2u_n^2}{u_n^2+2}+2}}$$

$$v_{n+1} = \frac{u_n}{\sqrt{u_n^2+2}} \times \frac{\sqrt{u_n^2+2}}{\sqrt{2\cdot(2u_n^2+2)}}$$

$$v_{n+1} = \frac{u_n}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2u_n^2+2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}v_n$$

ومنه: (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{\sqrt{2}}$ وحدها الأول $v_0 = \frac{1}{2}$.

ب) $$S_n = v_0^2 + v_1^2 + \dots + v_n^2$$

$$S_n = v_0^2 + (v_0 q)^2 + \dots + (v_0 q^n)^2$$

$$S_n = v_0^2\left(\underbrace{1 + q^2 + \dots + q^{2n}}_{S'_n}\right)$$

S'_n : مجموع حدود متتالية هندسية أساسها q^2 ، حدها الأول 1 وعدد حدودها $n+1$

$$S_n = v_0^2\left(\frac{1-(q^2)^{n+1}}{1-q^2}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}\right)$$

ومنه:

$$S_n = \frac{1}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$$

تمرين 4:

I-1) $(x>0)$ $\quad g'(x)=2+\frac{1}{x}=\frac{2x+1}{x}>0$

ومنه g متزايدة تماما

2) g مستمرة ومتزايدة على $]2,5;2,6[$

$f(2,5)\simeq -0,08<0$ و $f(2,6)\simeq 0,16>0$ ومنه

حسب مبرهنة القيم المتوسطة $g(x)=0$

تقبل حلا وحيدا α حيث: $2,5<\alpha<2,6$

إشارة $g(x)$:

		α	
$g(x)$	$-$	0	$+$

II-1) $\lim_{x\to -1} f(x)=6$ لأن

$$\lim_{x\to -1}(x+1)\ln(x+1)=0$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[x(x-5)+(x+1)\ln(x+1)\right]=+\infty$$

2) $f'(x)=2x-5+\ln(x+1)+1=2x-4+\ln(x+1)$

لدينا: $g(x+1)=2x-4+\ln(x+1)$

ومنه: $f'(x)=g(x+1)$

$g(x+1)=0$ لما $x+1=\alpha$ ومنه $x=\alpha-1$

إشارة $g(x+1)$:

		$\alpha-1$	
$g(x+1)$	$-$	0	$+$

x	-1		$\alpha-1$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	6	$\searrow$	$f(\alpha-1)$	$\nearrow$	$+\infty$

3) $f(\alpha-1)=\alpha^2-7\alpha+6\alpha\ln\alpha$

ولدينا: $g(\alpha)=0$ أي $\ln\alpha=-2\alpha+6$

ومنه: $f(\alpha-1)=\alpha^2-7\alpha+6\alpha(-2\alpha+6)$

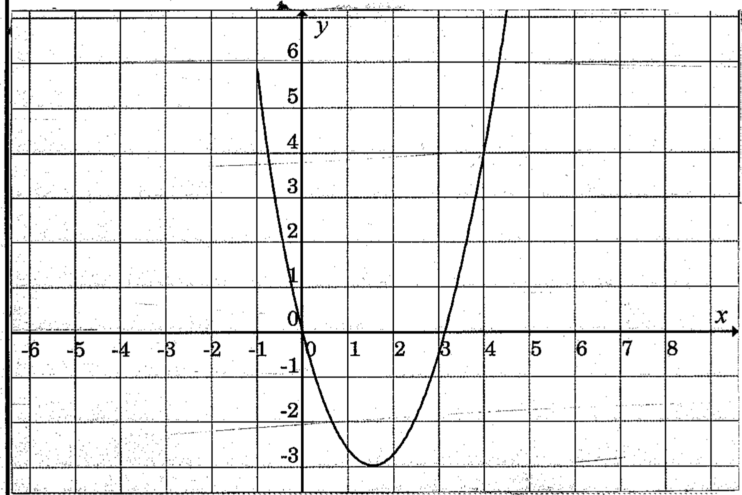
$$f(\alpha-1)=-\alpha^2-\alpha+6$$

$2,5<\alpha<2,6$ ؛ $3,5<\alpha+1<3,6$

$8,75<\alpha(\alpha+1)<9,36$ ؛ $-9,36<-\alpha(\alpha+1)<-8,75$

$$-3,36<-\alpha(\alpha+1)+6<-2,75$$

4) $f(0)=0$ ، $f(3)\simeq -0,5$ و $f(4)\simeq 4$



III-1) $$\lim_{x\to+\infty} h(x)=\lim_{x\to+\infty}(x+1)\left(\frac{-x^2+3x}{x+1}+3\frac{\ln(x+1)}{x+1}\right)=-\infty$$

$\lim_{x\to -1} h(x)=-\infty$ لأن $\lim_{x\to -1}\ln(x+1)=-\infty$

2) $h'(x)=-2x+3+\frac{3}{x+1}=\frac{-2x^2+x+6}{x+1}$

$$h'(x)=\frac{-(x-2)(2x+3)}{x+1}$$

x	-1		2		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
$h(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$2+3\ln 3$	$\searrow$	$-\infty$

3) $h(0)=0$. h مستمرة ومتناقصة على $]4;5[$. $h(4)\simeq 0,8>0$ و $h(5)\simeq -4,6<0$

إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة $4<\beta<5$

4) $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

$-8=f'(x_0)(2-x_0)+f(x_0)$

$-8=\left(2x_0-4+\ln(x_0+1)\right)(2-x_0)+x_0^2-5x_0+(x_0+1)\ln(x_0+1)$

بعد التبسيط: $-x_0^2+3x_0+3\ln x_0=0$

أي $h(x_0)=0$ ومنه $x_0=0$ ، $x_0=\beta$

"عبد المطلب"