الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية

مديرية التربية لولاية تقرت

امتحان بكالوريا تجريبي التعليم الثانوي

ثانوية : الحسن بن الهيثم النزلة

دورة: ماي 2024

الشعبة: رياضيات

اختبار في مادة: الرياضيات

المدة :4 سا و 30 د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين :

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

يحتوي كيس على ثلاث كريات بيضاء تحمل العدد 0 ، وخمس كريات سوداء تحمل العدد 3− ، وكريتين حمراوتين تحملان العدد α (حيث $\alpha \in \mathbb{N}^*$) ، كل الكريات متماثلة ولا نفرق بينها عند اللمس

نسحب عشوائيا كرتين من الكيس في آن واحد

❶ أحسب إحتمال الأحداث الأتية : A : " الحصول على كريتين من نفس اللون "

B : " الحصول على كريتين جداء الأعداد المسجلة عليها معدوم " ، C : " سحب كريتين حمراوين على الأكثر "

❷ نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل عملية سحب ، مجموع العددين المسجلين على الكريتين

عرف قانون إحتمال للمتغير العشوائي X

❸ بين أن : $E(X) = \frac{2}{5}\alpha - 3$

❹ عين أصغر قيمة للعدد الطبيعي α حتى يكون $E(X) > 0$

التمرين الثاني: (05 نقاط)

I- نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ كثير الحدود $P(z)$ حيث : $P(z) = z^3 - 8$

❶ تحقق أن : $z^3 - 8 = (z-2)(z^2 + 2z + 4)$

❷ إستنتج كل حلول المعادلة $P(z) = 0$

II- نعتبر في المستوي المركب $(O;\vec{u},\vec{v})$ النقط A ، B ، C ذات اللواحق

$z_A = -1 + \sqrt{3}i$ ، $z_B = \overline{z_A}$ ، $z_C = 2$ على الترتيب

❶ أكتب z_A ، z_B ، z_C على الشكل الأسي

❷ إستنتج أن النقط A ، B ، C تنتمي إلى نفس الدائرة (يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها)

❸ بين أن : $z_A{}^{2023} = 2^{2022} z_A$ ، ثم إستنتج مايلي : ($z_A{}^{2023} + z_B{}^{2023} + z_C{}^{2023}$)

❹ أكتب العدد المركب $L = \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$ على الشكل الجبري ثم الأسي

❺ إستنتج طبيعة المثلث ABC

التمرين الثالث: (04 نقاط)

❶ حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : (E) ... $3x - 2y = 1$

❷ أ/ ليكن n عددا طبيعيا غير معدوم ، بين أن الثنائية $(14n + 3; 21n + 4)$ حل للمعادلة (E)

ب/ إستنتج أن العددان $14n + 3$ و $21n + 4$ أوليان فيما بينهما

❸ ليكن d القاسم المشترك الأكبر للعددين $2n + 1$ و $21n + 4$

أ/ عين القيم الممكنة للعدد d

ب/ بين أنه إذا كان $d = 13$ فإن $n \equiv 6[13]$

❹ من أجل كل عدد طبيعي nحيث $n \geq 2$ نضع $A = 21n^2 - 17n - 4$ ، $B = 28n^3 - 8n^2 - 17n - 3$

أ/ بين أن العددين A و B يقبلان في $\mathbb{Z}$ القسمة على $n - 1$

ب/ عين حسب قيم n القاسم المشترك الأكبر للعددين A و B

التمرين الرابع : (07 نقاط)

I- لتكن الدالة g المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ بـ : $g(x) = x^2 + 2x + \ln(x + 1)$.

❶ أدرس تغيرات الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها .

❷ أحسب $g(0)$ ، ثم إستنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]-1; +\infty[$.

II- f الدالة المعرفة على المجال$]-1; +\infty[$ بـ : $f(x) = x - \frac{\ln(x+1)}{x+1}$ ،(C_f) تمثيلها البياني في معلم $(o; \vec{i}, \vec{j})$.

❶ أحسب النهايتين$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ و$\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} f(x)$

❷ أ/ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-1; +\infty[$ فإن : $f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$

ب/ استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

جـ/ إستنتج أنه إذا كان $x \in [0; 4]$ فإن : $f(x) \in [0; 4]$

❸ أ/ بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f)

ب/ أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم المقارب المائل (Δ)

❹ أرسم (Δ) و (C_f)

III- (u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ : $u_0 = 4$ و من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $u_{n+1} = f(u_n)$

❶ بإستعمال المنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) مثل على حامل محور الفواصل الحدود u_0 ، u_1، u_2 و u_3

❷ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq u_n \leq 4$

❸ أ/ بين أن (u_n) متناقصة ، ثم إستنتج أنها متقاربة

ب/ أحسب نهاية u_n

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

يحتوي صندوق U_1 على 6 كرات حمراء و 4 كرات سوداء

ويحتوي صندوق U_2 على 3 كرات حمراء و كرية سوداء و كرية بيضاء

أولا : نسحب عشوائيا على التوالي ودون إرجاع 3 كرات من الصندوق U_1

❶ شكل شجرة الإحتمالات التي تنمذج هذه الوضعية

❷ أحسب $P(A)$ ، $P(B)$ ، A : " الحصول على 3 كرات حمراء " B : " الحصول على كرية حمراء على الأقل "

ثانيا : نسحب عشوائيا كرتين في آن واحد من الصندوق U_1 وكرية واحدة من الصندوق U_2

❶ علما أن الكرة المسحوبة من U_2 سوداء ما هو إحتمال سحب كرية حمراء على الأقل

❷ ليكن المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل سحب عدد الكرات البيضاء المسحوبة

أ/ برر أن قيم X هي 0 و 1

ب/ أحسب الأمل الرياضي ، ثم إستنتج $E(1444X + 2023)$

جـ/ أحسب $P((\ln x)^2 - \ln x \leq 0)$

❸ نضيف n كرة سوداء إلى الصندوق U_1 و n كرة حمراء إلى الصندوق U_2

نسحب كرية واحدة من الصندوق U_1 وكرية واحدة من الصندوق U_2

لتكن الحادثة C : " الحصول على كرتين من نفس اللون " . عين قيمة n حتى يكون $P(C) = \frac{3}{7}$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

لتكن المتتاليتان (u_n) و (v_n) المعرفتان على $\mathbb{N}$ بـ : $u_n = \frac{2^n+3n-1}{2}$ ، $v_n = \frac{2^n-3n+1}{2}$ على الترتيب

❶ أحسب الحدود u_0 و u_1 و u_2 ، v_0 ، v_1 ، v_2

❷ لتكن المتتالية (w_n)المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $w_n = u_n - v_n$

أ/ أثبت أن (w_n) متتالية حسابية معينا أساسها وحدها الأول

ب/ أحسب المجموع $S = w_0 + w_1 + \cdots + w_{10}$

❸ لتكن المتتالية (t_n)المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $t_n = u_n + v_n$

أ/ أثبت أن (t_n) متتالية هندسية معينا أساسها وحدها الأول

ب/ أحسب المجموع $S' = t_0 + t_1 + \cdots + t_{10}$

❹ ليكن : $S_1 = u_0 + u_1 + \cdots + u_{10}$ ، $S_2 = v_0 + v_1 + \cdots + v_{10}$

أ/ تحقق أن : $S = S_1 - S_2$ ، و $S' = S_1 + S_2$

ب/ إستنتج قيمة كل من S_1 و S_2

التمرين الثالث: (05 نقاط)

❶ أ/ أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 7

ب/ ماهو باقي القسمة الإقليدية للعدد $2017^{4n+2} + 2 \times 2019^{6n+4}$ على 7

❷ نعتبر المعادلة ذات المجهولين الصحيحين x و y : $(E) ... 343x - 648y = 76$

أ/ بين أن المعادلة (E) تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$

ب/ حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E)

❸ ليكن d القاسم المشترك الأكبر للعددين الطبيعين غير المعدومين x و y حلول المعادلة (E)

أ/ ماهي القيم الممكنة للعدد d

ب/ عين الثنائيات $(x; y)$ من الأعداد الطبيعية بحيث يكون $d = 76$

❹ λ عدد طبيعي يكتب $\overline{\beta 1\alpha\beta}$ في نظام التعداد ذي التعداد 7 ، ويكتب $\overline{\alpha 1\alpha\alpha\beta}$ في نظام التعداد ذي الأساس 5 ، جد العددين α و β ، ثم أكتب λ في نظام التعداد ذي الأساس 6

التمرين الرابع : (07 نقاط)

I- لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = x + e^x$

❶ أدرس إتجاه تغير الدالة g

❷ بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $-0.57 < \alpha < -0.56$

❸ استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$

II- f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة: $f(x) = x - xe^{1-x}$ ، (C_f) تمثيلها البياني في معلم $(O; \vec{i}, \vec{j})$

❶ أحسب نهايتي الدالة f عند $-\infty$ وعند $+\infty$

❷ بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب لـ (C_f) بجوار $+\infty$ ، ثم أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ)

❸ أ/ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن : $f'(x) = e^{1-x}g(x-1)$

ب/ إستنتج أن الدالة f متزايدة تماما على $]\alpha + 1; +\infty[$ ومتناقصة تماما على $]-\infty; \alpha + 1]$

جـ/ شكل جدول تغيرات الدالة f

❹ أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1

❺ أحسب $f(-1)$ ، ثم أنشئ كلا من (T) ، (Δ) و (C_f) . (نأخذ $f(\alpha + 1) = -0.4$)

❻ عين بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m ، بحيث تقبل المعادلة $x = e^{m-1+x}$ حلين متمايزين

III- λ عدد حقيقي موجب تماما

❶ بإستعمال التكامل بالتجزئة عين دالة أصلية للدالة $x \mapsto xe^{1-x}$ على $\mathbb{R}$ والتي تنعدم عند 0

❷ أحسب بدلالة λ المساحة $A(\lambda)$ للحيز المستوي المحدد بـ (C_f) والمستقيم (Δ) والمستقيمين اللذين معادلتيهما $x = 0$ و $x = \lambda$

الحل المفصل لبكالوريا التجريبية
شعبة رياضيات

الموضوع الأول :

التمرين الأول

$3B : 0, 0, 0$

$5N : -3, -3, -3, -3, -3$

$2R : \alpha, \alpha$

عدد الحالات الممكنة للسحب

$C_{10}^{2} = \boxed{45}$

① حساب احتمال الأحداث التالية

* الحادثة A معناه سحب إما (R,R) أو (N,N) أو (B,B)

$P(A) = \frac{C_3^2 + C_5^2 + C_2^2}{45} = \boxed{\frac{14}{45}}$ 0,25

* الحادثة B معناه سحب إما $(0,0)$ أو $(0,\bar{0})$

$P(B) = \frac{C_3^1 C_7^1 + C_3^2}{45} = \boxed{\frac{24}{45}}$ 0,25

* الحادثة C معناه سحب إما $(\bar{R},\bar{R})$ أو $(R,\bar{R})$ أو (R,R)

$P(C) = \frac{C_2^2 + C_2^1 C_8^1 + C_2^0 C_8^2}{45} = \boxed{1}$ 0,25

② قيم المتغير العشوائي X هي

$X = \{0, -6, -3, \alpha, \alpha-3, 2\alpha\}$ 0,25

عرف قانون احتمال المتغير العشوائي X

$P(X=0) = \frac{C_3^2}{45} = \boxed{\frac{3}{45}}$ 0,25

$P(X=-6) = \frac{C_5^2}{45} = \boxed{\frac{10}{45}}$ 0,25

$P(X=-3) = \frac{C_3^1 C_5^1}{45} = \boxed{\frac{15}{45}}$ 0,25

$P(X=\alpha) = \frac{C_3^1 C_2^1}{45} = \boxed{\frac{6}{45}}$ 0,25

$P(X=\alpha-3) = \frac{C_5^1 C_2^1}{45} = \boxed{\frac{10}{45}}$ 0,25

$P(X=2\alpha) = \frac{C_2^2}{45} = \boxed{\frac{1}{45}}$ 0,25

0,25 x_i	0	-3	-6	α	2α	$\alpha-3$
$P(X=x_i)$	$\frac{3}{45}$	$\frac{15}{45}$	$\frac{10}{45}$	$\frac{6}{45}$	$\frac{1}{45}$	$\frac{10}{45}$

③ بين أن $E(X) = \frac{2}{5}\alpha - 3$

$E(X) = \sum_{i=1}^{6} x_i P_i$

$= \frac{0\times 3 + (-3)(15) + (-6)(10) + 6\alpha + 2\alpha + (\alpha-3)10}{45}$ 0,25

$= \frac{18\alpha - 135}{45} = \frac{18\alpha}{45} - 3 = \boxed{\frac{2}{5}\alpha - 3}$

و . هـ . م

④ عين أصغر قيمة لـ α بحيث $E(X) > 0$

$\frac{2}{5}\alpha - 3 > 0$

$\frac{2}{5}\alpha > 3$

$\alpha > \frac{15}{2}$

$\alpha \in \left]\frac{15}{2} ; +\infty\right[$

بما أن α عدد طبيعي فإن

$\boxed{\alpha = 8}$

0,25

التمرين الثاني

I) ① التحقق

$$(z-2)(z^2+2z+4) = z^3+2z^2+4z-2z^2-4z-8$$
$$= z^3-8 \quad (0,25)$$

و . هـ . م

② استنتاج حلول $P(z)=0$ (0,75)

$z^3-8=0$ تكافئ $(z-2)(z^2+2z+4)=0$

أي $z-2=0$ أو $z^2+2z+4=0$

أي $\boxed{z=2}$ أو $\boxed{z=-1-\sqrt{3}i}$ أو $\boxed{z=-1+\sqrt{3}i}$

II) ① كتابة z_A ، z_B ، z_C على الشكل الأسي

$z_A = -1+\sqrt{3}i$

$|z_A| = \sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2} = 2$

نضع $Arg(z_A)=\theta$ ومنه

$$\begin{cases} \cos\theta = \frac{-1}{2} \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \quad \theta = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}+2k\pi$$
$k \in \mathbb{Z}$

ومنه $\boxed{z_A = 2e^{\frac{2\pi}{3}i}}$ (0,5)

بما أن $z_B = \overline{z_A}$ فإن

$\boxed{z_B = 2e^{-\frac{2\pi}{3}i}}$ (0,25)

نلاحظ أن z_C هو عدد حقيقي موجب

ومنه $\boxed{z_C = 2e^{2\pi i}}$ (0,25)

② استنتاج أن A، B، C تنتمي إلى نفس الدائرة

لدينا $|z_A|=|z_B|=|z_C|$

أي $OA=OB=OC$ (0,5)

ومنه نستنتج أن النقاط A، B، C تنتمي إلى الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها $r=2$

③ تبيين أن $z_A^{2023} = 2^{2022} z_A$

$$z_A^{2023} = \left(2e^{\frac{2\pi}{3}i}\right)^{2023}$$
$$= 2^{2023} \times e^{\frac{4046\pi}{3}i}$$
$$= (2)^{2023} \times e^{\left(\frac{4044\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}\right)i}$$
$$= (2)^{2023} \times e^{\frac{2\pi}{3}i}$$
$$= 2^{2022} \times 2 \times e^{\frac{2\pi}{3}i}$$
$$= 2^{2022} \cdot z_A \quad (0,75)$$

و . هـ . م

استنتاج $z_A^{2023}+z_B^{2023}+z_C^{2023}$ (0,75)

لدينا $\boxed{z_A^{2023} = 2^{2022} z_A}$ ... ①

وبما أن $z_B = \overline{z_A}$ فإن

$\boxed{z_B^{2023} = 2^{2022} z_B}$ ... ②

لدينا أيضا $\boxed{z_C^{2023} = 2^{2023}}$ ... ③

من ① و ② و ③ نجد

$$z_A^{2023} + z_B^{2023} + z_C^{2023} = 2^{2022}(z_A + z_C + 2)$$

$$= 2^{2022}(-1+1+2)$$

$$z_A^{2023} + z_B^{2023} + z_C^{2023} = 0$$

④ كتابة L على الشكل الجبري

$$L = \frac{-1-\sqrt{3}i+1-\sqrt{3}i}{2+1-\sqrt{3}i} = \frac{-2\sqrt{3}i}{3-\sqrt{3}i} \times \frac{3+\sqrt{3}i}{3+\sqrt{3}i}$$

$$= \frac{-6\sqrt{3}i+6}{(3)^2+(\sqrt{3})^2} = \frac{6-6\sqrt{3}i}{12}$$

$$\boxed{L = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i}$$ 0,25

* كتابة L على الشكل الأسي

$$|L| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$$

نضع $Arg(L) = \theta_1$ ومنه

$$\begin{cases} \cos\theta_1 = \frac{1}{2} \\ \sin\theta_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \quad \boxed{\theta_1 = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = e^{-\frac{\pi}{3}i}$$ 0,5

⑤ طبيعة المثلث ABC 0,5

$$\left|\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right| = 1$$

$$\frac{|z_B - z_A|}{|z_C - z_A|} = 1$$

$$|z_B - z_A| = |z_C - z_A|$$

$$AB = AC$$

$$Arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right) = -\frac{\pi}{3}$$

$$(\overrightarrow{AC} ; \overrightarrow{AB}) = -\frac{\pi}{3}$$

ومنه ABC متقايس الأضلاع

التمرين ③

① حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E) 0,5

واضح أن $(1;1)$ حل لـ (E)

$$\begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ 3(1) - 2(1) = 1 \end{cases}$$

بالطرح نجد

$$3(x-1) = 2(y-1)$$

لكن $3 \mid 2(y-1)$ و $PGCD(3;2)=1$

ومنه حسب غوص فإن $3 \mid y-1$

$$y - 1 = 3k$$

$$\boxed{y = 3k+1}$$

لكن $2 \mid 3(x-1)$ و $PGCD(3;2)=1$

ومنه حسب غوص فإن $2 \mid x-1$

$$x - 1 = 2k$$

$$\boxed{x = 2k+1}$$

$$(x;y) = \{(2k+1 ; 3k+1)\} \quad k \in \mathbb{Z}$$

② أ) تبيين أن $(14n+3 ; 21n+4)$ حل 0,25

$$3x - 2y = 3(14n+3) - 2(21n+4) = 1$$

و.هـ.م

ب) استنتاج أن $14n+3$ و $21n+4$ أوليان 0,5

بما أن $(14n+3 ; 21n+4)$ حل لـ (E)

أي $3(14n+3) - 2(21n+4) = 1$

ج) أثبت أنه يوجد عددان $u=3$ و $v=-2$ يحققان

$$u(14n+3)+v(21n+4)=1$$

ومنه حسب مبرهنة بيزو فإن العددان أوليان فيما بينهما

③ أ) القيم الممكنة للعدد d

$$PGcd(21n+4\,;\,2n+1)=d$$

$d \mid 2n+1$ و $d \mid 21n+4$ إذن $d \mid (2n+1)(21)$ و $d \mid (21n+4)(-2)$

$$d \mid 13$$

(0.5)

ومنه القيم الممكنة لـ d هي 1 أو 13

ب) بين أنه إذا كان $d=13$ فإن $n\equiv 6[13]$

$$PGcd(2n+1\,;\,21n+4)=13$$

$$\begin{cases}2n+1\equiv 0\,[13]\\ 21n+4\equiv 0\,[13]\end{cases}$$

$$\begin{cases}2n+1\equiv 0\,[13]\\ 8n+4\equiv 0\,[13]\end{cases}$$

$$\begin{cases}2n\equiv 12\,[13]\\ 8n\equiv 9\,[13]\end{cases}$$

$$\begin{cases}2n\equiv 12\,[13]\\ 8n\equiv 48\,[13]\end{cases}$$

بالطرح

$$6n\equiv 36\,[13]$$

$$\boxed{n\equiv 6\,[13]}$$

(0.75)

لأن $PGcd(6;13)=1$

4) أ) بين أن A و B يقبلان القسمة على $n-1$

$$A=(n-1)(21n+4)$$

(0.5)

$$B=(n-1)(28n^2+20n+3)$$

ب) تعيين حسب قيم n القاسم المشترك الأكبر لـ A و B

$$PGcd(A;B)=PGcd\big((n-1)(21n+4)\,;\,(n-1)(28n^2+20n+3)\big)$$

$$=(n-1)\times PGcd(21n+4\,;\,28n^2+20n+3)$$

$$=(n-1)\times PGcd\big(21n+4\,;\,(14n+3)(2n+1)\big)$$

بما أن $21n+4$ و $14n+3$ أوليان فيما بينهما حسب السؤال 2، ب فإن

$$PGcd(A;B)=(n-1)\,PGcd(21n+4\,;\,2n+1)$$

ومن السؤال ③ (أ) وجدنا أن القيم الممكنة لـ $PGcd(21n+4;2n+1)$ هي 1 أو 13 ومنه نستنتج

$$PGcd(A;B)=(n-1)\times 13$$

إذا كان $n=13k+6$

$$PGcd(A;B)=(n-1)\times 1$$

إذا كان $n\neq 13k+6$

(1)

التمرين الرابع

$g(x) = x^2 + 2x + \ln(x+1)$

① تغيرات الدالة g

$$\lim_{x \to -1^{>}} x^2 + 2x + \ln(x+1) = \boxed{-\infty}$$

لأن

$$\begin{cases} \lim_{x \to -1^{>}} x^2 + 2x = -1 \\ \lim_{x \to -1^{>}} \ln(x+1) = -\infty \end{cases}$$

0,25

$$\lim_{x \to +\infty} x^2 + 2x + \ln(x+1) = \boxed{+\infty}$$

لأن

$$\begin{cases} \lim_{x \to +\infty} x^2 + 2x = +\infty \\ \lim_{x \to +\infty} \ln(x+1) = +\infty \end{cases}$$

g تقبل الإشتقاق على $]-1;+\infty[$

و دالتها المشتقة هي

$$g'(x) = 2x + 2 + \frac{1}{x+1} = 2(x+1) + \frac{1}{x+1}$$

$$= \frac{2(x+1)^2 + 1}{x+1}$$ 0,25

بما أن $2(x+1)^2 + 1 > 0$ فإن إشارة المشتق من إشارة المقام

x	-1		$+\infty$
$g'(x)$	$\|\|$	$+$	

g متزايدة تماما على المجال $]-1;+\infty[$ 0,25

x	-1		$+\infty$
$g'(x)$	$\|\|$	$+$	
$g(x)$	$\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

0,25

حساب $g(0)$ و إستنتاج إشارة $g(x)$

$$g(0) = 0^2 + 2\times 0 + \ln(0+1) = 0$$

x	-1		0		$+\infty$
$g(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

0,25

II

$$f(x) = x - \frac{\ln(x+1)}{x+1}$$

① حساب النهايات 0,5

$$\lim_{x \to -1^{>}} x - \frac{\overbrace{\ln(x+1)}^{-\infty}}{\underbrace{x+1}_{0^+}} = \boxed{+\infty}$$

$$\lim_{x \to +\infty} x - \underbrace{\frac{\ln(x+1)}{x+1}}_{0} = \boxed{+\infty}$$

② أ) بين أن $f'(x) = \dfrac{g(x)}{(x+1)^2}$ 0,5

$$f'(x) = 1 - \frac{\frac{1}{x+1}(x+1) - \ln(x+1)}{(x+1)^2}$$

$$= 1 - \frac{1 - \ln(x+1)}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{(x+1)^2 - 1 + \ln(x+1)}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{x^2 + 2x + \ln(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$$

و هو م

ب) إتجاه تغير الدالة f

بما أن $(x+1)^2 > 0$ فإن إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ ومنه

f متناقصة تماما على المجال $]-1;0]$

و متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$ 0,25

$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

III

② برهن بالتراجع أن $0 \leq u_n \leq 4$

من أجل $n=0$ لدينا $u_0 = 4$ ومنه
$0 < u_0 \leq 4$ (0,1)

ومنه $P(0)$ محققة

* نفرض $P(n)$ ونبرهن $P(n+1)$

لدينا $0 \leq u_n \leq 4$

وبما أن f متزايدة على $[0;4]$

$f(0) \leq f(u_n) \leq f(4)$

$0 \leq u_{n+1} \leq 4$

ومنه $P(n+1)$ محققة

و . هـ . م

③ أ) بين أن (u_n) متناقصة

لدينا مما سبق $f(x) - x \leq 0$

من أجل كل $x \in [0;4]$

ومنه إذا كان $u_n \in [0;4]$

$f(u_n) - u_n \leq 0$ (0,2)

إذن $u_{n+1} - u_n \leq 0$

ومنه (u_n) متناقصة على N

* بما أن (u_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل بالعدد 0 فهي متقاربة (0,2)

③ ب) حساب نهاية u_n

الدالة f مستمرة على المجال $[0;4]$

وبما أن (u_n) متقاربة فإن

$$\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} u_n = l$$ (0,1)

$$\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = l$$

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖	$+\infty$ ↘	0	↗ $+\infty$	

(0,2)

ج) استنتاج أن $f(x) \in [0;4]$ (0,1)

$x \in [0;4]$ معناه $0 \leq x \leq 4$

وبما أن f متزايدة تماما على $[0;4]$

فإن $f(0) \leq f(x) \leq f(4)$

$0 \leq f(x) \leq 4$

أي أن $f(x) \in [0;4]$

و . هـ . م

③ أ) بين أن $(\Delta): y = x$ مقارب مائل

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - x] = \lim_{x\to+\infty} \left[-\frac{\ln(x+1)}{x+1}\right] = 0$$ (0,1)

ومنه $(\Delta): y = x$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$

ب) الوضع النسبي: ندرس إشارة الفرق

$$f(x) - x = -\frac{\ln(x+1)}{x+1}$$

من أجل كل $x \in]-1;+\infty[$ فإن

$x + 1 > 0$

ومنه إشارة الفرق من إشارة $-\ln(x+1)$

$-\ln(x+1) \geq 0$

$\ln(x+1) \leq 0$

$x + 1 \leq 1$ (0,1)

$x \leq 0$

x	-1		0	
$f(x) - x$	‖	$+$	0	$-$
الوضع النسبي	‖	(C_f) فوق (Δ)	(C_f) يقطع (Δ) في $(0;0)$	(C_f) تحت (Δ)

$$f(\ell) = \ell$$

$$\ell - \frac{\ln(\ell+1)}{\ell+1} = \ell$$

$$-\frac{\ln(\ell+1)}{\ell+1} = 0$$

$$-\ln(\ell+1) = 0$$

$$\ln(\ell+1) = 0$$

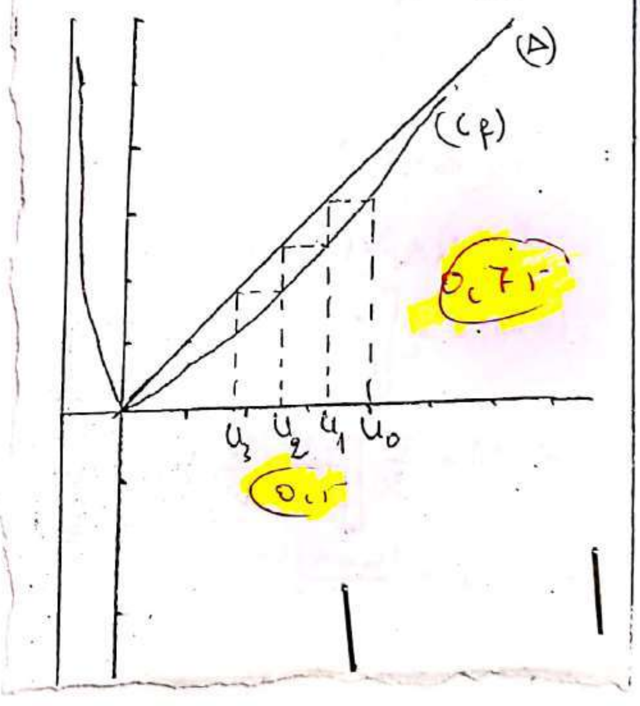
$$\ell + 1 = 1$$

$$\ell = 0$$

ومنه

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$$

4) رسم (Δ) و (C_f)

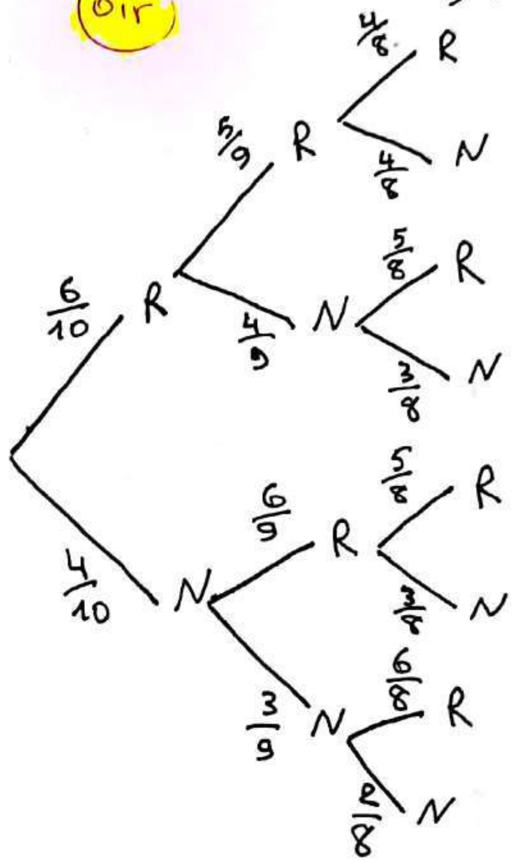


تصحيح الموضوع الثاني

التمرين الأول:

$$\underbrace{\boxed{\begin{matrix}6R\\4N\end{matrix}}}_{U_1} \qquad \underbrace{\boxed{\begin{matrix}3R\\1N\\1B\end{matrix}}}_{U_2}$$

① شجرة الإحتمالات (0,5)



② حساب $P(A)$ ، 0,25

$$P(A) = \frac{6}{10} \times \frac{5}{9} \times \frac{4}{8} = \frac{120}{720} = \boxed{\frac{1}{6}}$$

حساب $P(B)$ 0,25

$\bar{B}$: " عدم سحب أي كرة حمراء "

$$P(\bar{B}) = \frac{4}{10} \times \frac{3}{9} \times \frac{2}{8} = \frac{24}{720}$$

نعلم أن

$$P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - \frac{24}{720} = \boxed{\frac{696}{720}}$$

ثانيا: عدد الحالات الممكنة

$$C_{10}^{2} \times C_{5}^{1} = \boxed{225}$$

① علما أن الكرة من U_2 سوداء ما إحتمال سحب كرة حمراء على الأقل

E : " سحب كرة سوداء من U_2 "

D : " سحب كرة حمراء على الأقل "

$$P_E(D) = \frac{P(E \cap D)}{P(C)}$$

$$P(E) = \frac{C_1^1}{C_5^1} = \boxed{\frac{1}{5}}$$

$E \cap D$: " سحب كرية سوداء من U_2 و سحب كرية حمراء على الأقل "

$$(\underbrace{R,N}_{U_1},\underbrace{N}_{U_2}) \text{ أو } (\underbrace{R,R}_{U_1},\underbrace{N}_{U_2})$$

$$P(E \cap D) = \frac{C_6^1 C_4^1}{C_{10}^2} \times \frac{C_1^1}{C_5^1} + \frac{C_6^2}{C_{10}^2} \times \frac{C_1^1}{C_5^1}$$

$$= \frac{24}{225} + \frac{15}{225} = \boxed{\frac{39}{225}}$$

ومنه

$$P_E(D) = \frac{\frac{39}{225}}{\frac{1}{5}} = \boxed{\frac{13}{15}} \quad 0,5$$

② أ) برر أن قيم X هي 0 و 1 0,25

الحادثة $(X=0)$ معناه عدم سحب أي كرية بيضاء

الحادثة $(X=1)$ معناه سحب كرية بيضاء

عرفا قانون الاحتمال

$P(X=0) = \frac{C^2_{10}}{C^2_{10}} \times \frac{C^1_4}{C^1_5} = \boxed{\frac{4}{5}}$ 0,25

$P(X=1) = \frac{C^2_{10}}{C^2_{10}} \times \frac{C^1_1}{C^1_5} = \boxed{\frac{1}{5}}$ 0,25

x_i	0	1
$P(X=x_i)$	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{5}$

0,25

ب) حساب الأمل الرياضي

$E(X) = \sum_{i=1}^{2} x_i P_i = 0 \times \frac{4}{5} + 1 \times \frac{1}{5} =$

$\boxed{E(X) = \frac{1}{5}}$ 0,25

استنتاج $E(1444X+2023)$

$E(1444X+2023) = 1444E(X)+2023$

$= 1444 \times \frac{1}{5} + 2023$

$= \boxed{2311,8}$ 0,25

ج) حساب $P((\ln x)^2 - \ln x \leq 0)$ 0,5

نقوم أولا بحل المتراجحة

$(\ln x)^2 - \ln x \leq 0$

$\ln x(\ln x - 1) \leq 0$

x	0		1		e^1		$+\infty$
$\ln x$	‖	$-$	0	$+$	|	$+$	
$\ln x - 1$	‖	$-$	|	$-$	0	$+$	
$\ln x(\ln x - 1)$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	

$[1;e]$

ومنه قيم المتغير التي تنتمي إلى $[1;e]$

هي $X=1$ ومنه

$P((\ln x)^2 - \ln x \leq 0) = P(X=1) = \boxed{\frac{1}{5}}$

3) عين قيمة n بحيث $P(C) = \frac{3}{7}$ 0,5

$P(C) = \frac{C^1_6}{C^1_{n+10}} \times \frac{C^1_{n+3}}{C^1_{n+5}} + \frac{C^1_{n+4}}{C^1_{n+10}} \times \frac{C^1_1}{C^1_{n+5}}$

$= \frac{6}{n+10} \times \frac{n+3}{n+5} + \frac{n+4}{n+10} \times \frac{1}{n+5}$

$= \frac{6n+18}{n^2+15n+50} + \frac{n+4}{n^2+15n+50}$

$= \frac{7n+22}{n^2+15n+50} = \frac{3}{7}$

$3n^2+45n+150 = 49n+154$

$3n^2-4n-4=0$

$\Delta = (-4)^2 - 4(3)(-4) = 64 > 0$

$\boxed{n_1 = 2}$

$n_2 = -\frac{2}{3}$ (مرفوض)

التمرين الثاني:

① حساب الحدود

$u_0 = 0$; $u_1 = 2$; $u_2 = \frac{9}{2}$ (0,75)

$v_0 = 1$; $v_1 = 0$; $v_2 = -\frac{1}{2}$

② 1) إثبات أن (w_n) حسابية (0,5)

$$w_{n+1} = u_{n+1} - v_{n+1}$$

$$= \frac{2^{n+1}+3(n+1)-1}{2} - \frac{2^{n+1}-3(n+1)+1}{2}$$

$$= \frac{\cancel{2^{n+1}}+3n+3-1-\cancel{2^{n+1}}+3n+3-1}{2}$$

$$= \frac{6n+4}{2} = \boxed{3n+2}$$

$$\boxed{w_{n+1} = 3n+2}$$

لدينا $w_n = u_n - v_n = \frac{2^n+3n-1}{2} - \frac{2^n-3n+1}{2}$

$$= \frac{2^n+3n-1-2^n+3n-1}{2}$$

$$w_n = \frac{6n-2}{2} = \boxed{3n-1}$$

ومنه

$$w_{n+1} - w_n = 3n+2-(3n-1)$$

$$= 3n+2-3n+1$$

$$w_{n+1} - w_n = 3$$

ومنه (w_n) متتالية حسابية أساسها 3 حدها الأول

$$w_0 = u_0 - v_0 = 0 - 1 = \boxed{-1}$$

$$\boxed{w_n = 3n-1}$$

ب) حساب المجموع

$$S = w_0 + w_1 + \dots + w_{10}$$

$$S = \frac{11}{2}(w_0 + w_{10}) = \frac{11}{2}(-1+29)$$

$$\boxed{S = 154}$$ (0,5)

③ 1) إثبات أن (t_n) هندسية (0,5)

$$t_{n+1} = u_{n+1} + v_{n+1}$$

$$= \frac{2^{n+1}+3(n+1)-1}{2} + \frac{2^{n+1}-3(n+1)+1}{2}$$

$$= \frac{2\times 2^{n+1}}{2} = 2^{n+1}$$

$$\boxed{t_{n+1} = 2^{n+1}}$$

لدينا

$$t_n = u_n + v_n = \frac{2\times 2^n}{2} = \boxed{2^n}$$

$$\frac{t_{n+1}}{t_n} = \frac{2^{n+1}}{2^n} = \boxed{2}$$

ومنه (t_n) متتالية هندسية أساسها 2 حدها الأول $\boxed{t_0 = 1}$

ب) حساب المجموع (0,5)

$$S' = 1\left[\frac{2^{11}-1}{2-1}\right] = 2^{11}-1 = \boxed{2047}$$

④ 1) تحقق أن $S' = S_1 - S_2$ (0,5)

$$S_1 - S_2 = (u_0+u_1+\dots+u_{10}) - (v_0+v_1+\dots+v_{10})$$

$$= (u_0-v_0)+(u_1-v_1)+\dots+(u_{10}-v_{10})$$

$$= w_0 + w_1 + \dots + w_{10}$$

$$= S$$

و . ه . م

للعدد 3^n على 7 تشكل متتالية دورية دورها $6k$

$n=$	$6k$	$6k+1$	$6k+2$	$6k+3$	$6k+4$	$6k+5$
$3^n \equiv$	1	3	2	6	4	5

ومنه البواقي هي $1, 3, 2, 6, 4, 5$ (0,25)

ب) ما هو باقي القسمة الإقليدية ل $2 \times 2019^{6n+4} + 2017^{4n+2}$ على 7

لدينا

$2019 \equiv 3 [7]$

ومنه

$\boxed{2019^{6n+4} \equiv 4 [7]}$

لدينا أيضا

$2017 \equiv 1 [7]$

$2017^{4n+2} \equiv 1^{4n+2} [7]$

$\boxed{2017^{4n+2} \equiv 1 [7]}$

$2 \times 2019^{6n+4} + 2017^{4n+2} \equiv (2 \times 4 + 1) [7]$

$\equiv 2 [7]$

إذن باقي القسمة هو 2 (0,5)

② نبين أن (E) تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$

لدينا $PGcd(343; 648) = 1$

وبما أن 1 يقسم 76 فإن

(E) تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$ (0,25)

$S_1 + S_2 = u_0 + u_1 + \dots + u_{10} + v_0 + v_1 + \dots + v_{10}$

$= (u_0 + v_0) + (u_1 + v_1) + \dots + (u_{10} + v_{10})$

$= W_0 + W_1 + \dots + W_{10}$

$= S'$ (0,25)

و.هـ.م

ب)/ استنتاج قيمة كل من S_1 و S_2

$$\begin{cases} S_1 - S_2 = 154 \\ S_1 + S_2 = 2047 \end{cases}$$

بالجمع نجد

$2S_1 = 2201$

$\boxed{S_1 = \frac{2201}{2}}$ (0,25)

بالتعويض نجد

$\boxed{S_2 = \frac{1893}{2}}$

التمرين الثالث

① أ) بواقي قسمة 3^n على 7

$n=0$, $3^0 \equiv 1 [7]$

$n=1$, $3^1 \equiv 3 [7]$

$n=2$, $3^2 \equiv 2 [7]$

$n=3$, $3^3 \equiv 6 [7]$ (0,25)

$n=4$, $3^4 \equiv 4 [7]$

$n=5$, $3^5 \equiv 5 [7]$

$n=6$; $3^6 \equiv 1 [7]$

ومنه بواقي القسمة الإقليدية

2. ب) حل في Z^2 المعادلة E

نلاحظ أن $(4;2)$ حلا لـ (E) ومنه

$$\begin{cases} 343x - 648y = 76 \\ 343(4) - 648(2) = 76 \end{cases}$$

بالطرح نجد $343(x-4) = 648(y-2)$

لدينا $343 \mid 648(y-2)$ لكن $PGcd(343;648)=1$

ومنه حسب غوص فإن $343 \mid y-2$

$y - 2 = 343K$

$\boxed{y = 343K + 2}$

لدينا $648 \mid 343(x-4)$ لكن $PGcd(343;648)=1$

ومنه حسب غوص فإن $648 \mid x-4$ ومنه

$x - 4 = 648K$

$\boxed{x = 648K + 4}$ (0,75)

ومنه $(x;y) = \{(648K+4 ; 343K+2)\}$ $K \in Z$

3) أ) القيم الممكنة للعدد d

$PGcd(x;y) = d$

$d \mid x$ و $d \mid y$ أي $d \mid 343x$ و $d \mid 648y$ أي

$d \mid 343x - 648y$

$d \mid 76$

$d \in \{1, 2, 4, 19, 38, 76\}$ (0,5)

ب) تعيين $(x;y)$ بحيث $d = 76$

$PGcd(x;y) = 76$

$x \equiv 0[76]$ و $y \equiv 0[76]$ ومنه $\begin{cases} 648K+4 \equiv 0[76] \\ 343K+2 \equiv 0[76] \end{cases}$

$$\begin{cases} 40K + 4 \equiv 0[76] \\ 39K + 2 \equiv 0[76] \end{cases}$$

بالطرح نجد $K + 2 \equiv 0[76]$

$K \equiv -2[76]$

$\boxed{K \equiv 74[76]}$

$\boxed{K = 76\alpha + 74}$ (0,75)

$(x;y) = \{49248\alpha + 47956 ; 26068\alpha + 25384\}$

$\alpha \in N$

4) إيجاد α و β

$\lambda = \overline{\beta 1 \alpha \beta}^{7} = \beta \times 7^3 + 1 \times 7^2 + \alpha \times 7^1 + \beta \times 7^0$

$= \boxed{344\beta + 7\alpha + 49}$ (0,25)

$\lambda = \overline{\alpha 1 \alpha \alpha \beta}^{5} = \alpha \times 5^4 + 1 \times 5^3 + \alpha \times 5^2 + \alpha \times 5^1 + \beta \times 5^0$

$= \boxed{655\alpha + \beta + 125}$ (0,25)

$344\beta + 7\alpha + 49 = 655\alpha + \beta + 125$

$343\beta - 648\alpha = 76$

$\alpha = 343K + 2$

$\beta = 648K + 4$

لكن $0 < \alpha < 5$ و $0 < \beta < 5$ ومنه

$\boxed{\alpha = 2}$; $\boxed{\beta = 4}$ (0,25)

كتابة λ في النظام العشري

$\lambda = 655(2) + 4 + 125$ (0,25)

$\boxed{\lambda = 1439}$ =

كتابة λ في النظام ذي الأساس 6

1439	6				
5	239	6			
	5	39	6		
		3	6	6	
			0	1	6
				1	0

0,5

$1439 = \overline{10355}^{6}$

التمرين الرابع

$g(x) = x + e^{x}$

① إتجاه تغير الدالة g 0,5

الدالة g قابلة للإشتقاق على R

$g'(x) = 1 + e^{x} > 0$

ومنه g متزايدة تماما على R

② يبين أن $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α

g مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $[-0,57;-0,56]$ و

0,5

$$\begin{cases} g(-0,57) = -0,004 \\ g(-0,56) = +0,01 \end{cases} \quad g(-0,57)\times g(-0,56)<0$$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-0,57 < \alpha < -0,56$

إشارة $g(x)$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

0,5

II) $f(x) = x - xe^{1-x}$

① حساب نهايات f عند $-\infty$ و $+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x(1-e^{1-x}) = \boxed{+\infty}$ 0,5

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x - \frac{x}{e^{x}}\times e^{1} = \boxed{+\infty}$

② يبين أن $(\Delta): y = x$ مقارب لـ (C_f)

$\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x)-x] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[-\frac{x}{e^{x}}e^{1}\right] = 0$

ومنه $(\Delta): y = x$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$ 0,25

الوضع النسبي:

$f(x) - x = -xe^{1-x}$

لدينا مهما يكن $x \in R$ فإن $e^{1-x} > 0$ ومنه إشارة الفرق من إشارة $-x$ 0,5

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)-x$	$+$	0	$-$
الوضع النسبي	(C_f) فوق (Δ)	(C_f) يقطع (Δ) في $(0;0)$	(C_f) تحت (Δ)

③ أ) يبين أن: $f'(x) = e^{1-x} g(x-1)$

$f'(x) = 1 - e^{1-x} - e^{1-x}(-x)$

$= 1 - e^{1-x} + xe^{1-x}$

$= e^{1-x}(e^{x-1} - 1 + x)$ 0,5

$= e^{1-x} \times g(x-1)$

و.هـ.م

ب) استنتاج اتجاه التغير (0,5)

$f'(x) = e^{1-x} g(x-1)$

بما ان $e^{1-x} > 0$ فإن إشارة $f'(x)$

من إشارة $g(x-1)$

*) $g(x-1) \geq 0$ من اجل كل $x-1 \geq \alpha$

أي $x \geq \alpha + 1$ ومنه

f متزايدة تماما على $[\alpha+1; +\infty[$

*) $g(x-1) \leq 0$ من اجل $x-1 \leq \alpha$

أي $x \leq \alpha + 1$ ومنه .

f متناقصة تماما على $]-\infty; \alpha+1]$

ج) جدول التغيرات

x	$-\infty$		$\alpha+1$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$f(\alpha+1)$	↗	$+\infty$

(0,25)

4) معادلة المماس (T) عند $x_0 = 1$

$(T): y = f'(1)(x-1) + f(1)$

$\boxed{(T): y = x - 1}$ (0,25)

5) حساب $f(-1)$ (0,25)

$f(-1) = e^2 - 1 \simeq 6,38$

6) تعيين قيم m بيانيا

$e^{m-1+x} = x$

$e^m \times e^{-1+x} = x$ (0,5)

$e^m = \frac{x}{e^{-1+x}}$

$e^m = xe^{1-x}$

$-e^m = -xe^{1-x}$

$x - e^m = x - xe^{1-x}$

$f(x) = x - e^m$

ومنه حلول المعادلة هي فواصل نقاط تقاطع (C_f) مع المستقيم $y = x - e^m$

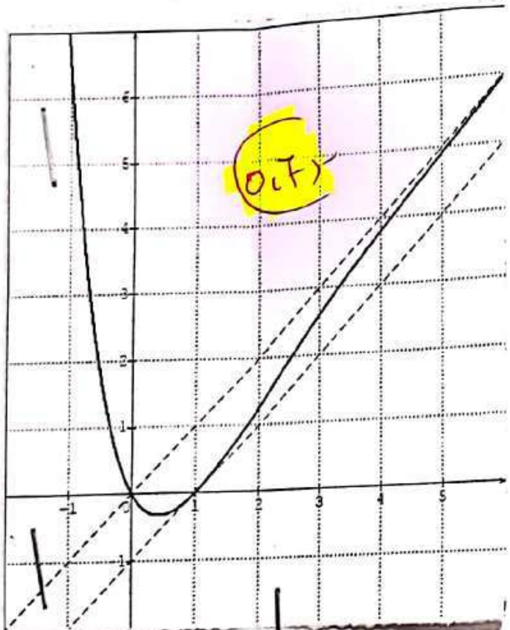
يكون للمعادلة حلين متمايزين اذا كان

$-1 < -e^m < 0$

$0 < e^m < 1$

$m \in]-\infty; 0)$

الإنشاء :



III) التكامل بالتجزئة

$\int_0^x te^{1-t}dt = [-te^{1-t}]_0^x - \int_0^x -e^{1-t}dt$

$= [-te^{1-t}]_0^x + [-e^{1-t}]_0^x$

$= [(-t-1)e^{1-t}]_0^x$

$\boxed{= (-x-1)e^{1-x} + e}$ (0,75)

2) $A(\lambda) = \int_0^\lambda (x - f(x))dx = \int_0^\lambda xe^{1-x}dx$

$A(\lambda) = (-\lambda-1)e^{1-\lambda} + e$ (0,5)