الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

المدرسة العليا للأساتذة بورقلة
مصلحة النشاطات الثقافية والرياضية
دورة أفريل 2024
الشعبة: رياضيات
المادة: الرياضيات
المدّة: 4 ساعات و 30 د

امتحان البكالوريا التجريبي

على المترشّح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأوّل

التمرين الأوّل (4 ن)

نعتبر في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ المعادلة (E) المعرّفة كما يلي

$$(E): 650x-732y=486$$

1. أ. أُحسب $PGCD\,(650;732)$ ثمّ استنتج أنّ المعادلة (E) تقبل حلولا في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$

ب. تحقّق أنّ الثنائية $(3;2)$ حلّ للمعادلة (E) ثمّ استنتج مجموعة حلولها.

2. نعتبر L عددا طبيعيا يكتب $\overline{\alpha 0\alpha\beta\beta}$ في نظام التعداد الذي أساسه 5 ويكتب $\overline{\beta 6\beta 0}$ في نظام التعداد الذي أساسه 9 حيث α و β عددان طبيعيان.

- عيّن كُلّا من α و β ثمّ أُكتب L في النظام العشري.

3. حلّل العدد 1962 إلى جداء عوامل أوليّة ثمّ استنتج قيم العدد الطبيعي n التي تحقّق $1962\equiv 0\,[n^2]$

4. نضع : $PGCD\,(a;b)=d$ و $PPCM\,(a;b)=m$ حيث $(a;b)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$

- عيّن كلّ الثنائيات $(a;b)$ التي تحقّق

$$\begin{cases} m-91d=0 \\ a^2+b^2=1962 \end{cases}$$

التمرين الثاني (4 ن)

المتتالية العددية (U_n) معرّفة بـ $U_0=0$ ، ومن أجل كلّ عدد طبيعي n : $U_{n+1}=\dfrac{3}{\sqrt{6-U_n^2}}$

I) 1. برهن بالتراجع أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n : $0\leq U_n<\sqrt{3}$

2. أ. بيّن أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n : $U_{n+1}^2-U_n^2=\dfrac{(U_n^2-3)^2}{6-U_n^2}$

ب. بيّن أنّ المتتالية (U_n) متزايدة على $\mathbb{N}$ ثمّ استنتج أنّها متقاربة.

II) المتتالية العددية (V_n) معرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $V_n=\dfrac{U_n^2}{3-U_n^2}$

1. أ. بيّن أنّ المتتالية (V_n) حسابية أساسها 1 ويُطلب تعيين حدّها الأوّل V_0

ب. بيّن أنّه من أجل كلّ n من $\mathbb{N}$: $U_n = \sqrt{\frac{3n}{n+1}}$ ثمّ أُحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

2. من أجل كلّ n من $\mathbb{N}^*$ نضع : $S_n = \frac{2024}{n+\sqrt{V_1}} + \frac{2024}{n+\sqrt{V_2}} + \cdots + \frac{2024}{n+\sqrt{V_n}}$

أ. بيّن أنّه من أجل كلّ n من $\mathbb{N}^*$: $\frac{2024n}{n+\sqrt{n}} \leq S_n \leq \frac{2024n}{n+1}$

ب. استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

التمرين الثّالث (5 ن)

عيّن الاقتراح الصّحيح الوحيد من بين الاقتراحات الثّلاثة في كلّ حالة من الحالات الآتية مع التّبرير

1. حلّ المعادلة التفاضلية $y'' = \pi^2 e^{\pi x+\pi}$ الذي يحقّق $y(0) = e^{\pi}$ و $y'(-1) = \pi$ هو الدّالة h المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي

أ) $h(x) = e^{\pi x+\pi}$ ب) $h(x) = \pi x + e^{\pi}$ ج) $h(x) = e^{\pi x+\pi} + \pi x$

2. عدد الإمكانيات لتشكيل عدد مضاعف للعدد 5 ومكوّن من ثلاثة أرقام متمايزة مثنى مثنى باستخدام مجموعة الأرقام $\{0; 1; 9; 5; 4\}$ هو

أ) 5 ب) 24 ج) 21

3. إذا كان n عددا من $\mathbb{N}^*$ فإنّ المجموع : $\int_1^2 \frac{\log x}{x}dx + \int_2^3 \frac{\log x}{x}dx + \cdots + \int_n^{n+1} \frac{\log x}{x}dx$ يساوي

أ) $\frac{[\log(n+1)]^2}{2\ln 10}$ ب) $\frac{\log(n+1)}{\ln 100}$ ج) $\frac{\ln(n+1)\times\log(n+1)}{2}$

4. إذا كان z عددا مركّبا حيث $z = \sin\frac{\pi}{8} + i\cos\frac{\pi}{8}$ فإنّ

أ) $\arg(z) \equiv \frac{3\pi}{8}\,[2\pi]$ ب) $\arg(z) \equiv \frac{3\pi}{4}\,[2\pi]$ ج) $\arg(z) \equiv \frac{5\pi}{8}\,[2\pi]$

5. مجموعة حلول المتراجحة $4^x + 2^{x+1} \leq 3$ ذات المجهول الحقيقي x هي المجال

أ) $[0; +\infty[$ ب) $]-\infty; 0]$ ج) $[-3; 1]$

التمرين الرّابع (7 ن)

I) الدّالة العددية g معرّفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي : $g(x) = xe^{x-1} - 1$

1. بيّن أنّ الدّالة g متزايدة تماماً على المجال $]0; +\infty[$

2. أ. بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 1$ تقبل حلّا وحيدا α حيث $1,3 < \alpha < 1,4$

ب. استنتج حسب قيم x من المجال $]0; +\infty[$ إشارة العبارة : $g(x) - 1$

II) الدّالة العددية f معرّفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ : $f(x) = e^{x-1} - 2\ln x - 1$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$ حيث $\|\vec{j}\| = 1cm$

1. أ. أُحسب $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x)$ وفسّر النتيجة هندسيا ثمّ أُحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

ب. بيّن أنّه من أجل كلّ عدد حقيقي x من $]0;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{g(x)-1}{x}$

ج. أُدرس اتجاه تغيّر الدّالة f ثمّ شكّل جدول تغيّراتها

2. أ. أُكتب معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة التي فاصلتها 1

ب. أنشئ كُلّا من (T) و (C_f). (تُعطى: $f(\alpha)\approx -0,2$).

ج. ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة $e^x+e^{m+1}(x-1)=e\left(\ln x^2+1\right)$

3. نعتبر λ عددا حقيقيا حيث $0<\lambda<1$

أ. أُكتب بدلالة λ العدد $\mathcal{A}(\lambda)$ المعرّف بـ : $\mathcal{A}(\lambda)=\displaystyle\int_{\lambda}^{1} f(t)dt$ ، ثمّ فسّر النتيجة هندسيا.

ب. بيّن أنّ $\lim\limits_{\lambda \overset{>}{\to} 0} \mathcal{A}(\lambda)=\left(2-e^{-1}\right)cm^2$

انتهى الموضوع الأوّل

الموضوع الثاني

التمرين الأوّل (4 ن)

صندوق به 6 بطاقات متماثلة لا نفرّق بينها عند اللّمس، منها ثلاث بطاقات حمراء، بطاقتين خضراوين وبطاقة بيضاء.
البطاقات الحمراء تحمل الحروف: E ، N و N ، البطاقتين الخضراوين تحملان الحرفين: N و S ، أمّا البيضاء تحمل الحرف S
نسحب عشوائيا من الصندوق ثلاث بطاقات في آن واحد.

I) **1.** أُحسب احتمال كلّا من الحدثين الآتيين

أ. A: " الحصول على بطاقتين من نفس اللّون بالضّبط ".

ب. B: " الحصول على ثلاث بطاقات يُمكن أنّ تشكّل كلمة ENS ".

2. أ. بيّن أنّ $P\left(A\cap B\right)=\dfrac{1}{4}$ ، ثمّ استنتج أنّ الحدثين A و B ليسا مستقلين.

ب. أُحسب $P_A\left(\overline{B}\right)$ (احتمال الحدث $\overline{B}$ علما أنّ الحدث A محقّق)

II) نضيف إلى الصندوق n بطاقة تحمل الحرف E حيث $n\in\mathbb{N}^*$ ، ونسحب عشوائيا من الصندوق بطاقتين على التوالي وبإرجاع، وليكن X المتغيّر العشوائي الذي يُرفق بكل سحب لبطاقتين عدد مرّات ظهور الحرف S

1. أ. برّر أنّ مجموعة قيم المتغيّر العشوائي X هي $\{0;1;2\}$

ب. عرّف قانون احتمال المتغيّر العشوائي X

2. عيّن قيمة العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها $P\left(\displaystyle\int_0^X te^t dt=1\right)=\dfrac{3}{8}$

التمرين الثاني (4 ن)

I) حلّ في مجموعة الأعداد المركّبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $\left(z^2+2z+2\right)\left(\overline{2iz+\sqrt{3}+i}\right)=0$

II) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$، نعتبر النقط A ، B ، C و D التي لاحقاتها z_A، z_B، z_C و z_D على الترتيب حيث: $z_A=-1+i$ ، $z_B=\overline{z_A}$ ، $2z_C=z_A\times\left(1+i\sqrt{3}\right)$ و $z_A+z_D=0$

1. أ. أُكتب z_A على الشّكل المثلّثي ثمّ استنتج كتابة z_C على الشّكل المثلّثي.

ب. أُكتب z_C على الشّكل الجبري ثمّ استنتج القيمة المضبوطة لكلّ من $\cos\dfrac{13\pi}{12}$ و $\sin\dfrac{13\pi}{12}$

2. بيّن أنّ العدد المركّب $\dfrac{z_B-z_D}{z_B-z_A}$ تخيّلي صرف ثمّ استنتج طبيعة المثلّث ADB

3. عيّن (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللّاحقة z حيث : $\dfrac{z-z_A}{z-z_B}\times\dfrac{\overline{z}-z_B}{\overline{z}-z_A}=1$

التمرين الثالث (5 ن)

المتتالية العددية (U_n) معرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي

$$\begin{cases} U_0=0\ ;\ U_1=1 \\ U_{n+2}=3U_{n+1}-2U_n \end{cases}$$

1. من أجل كلّ n من $\mathbb{N}$ نضع : $V_n=U_{n+1}-U_n$

أ. بيّن أنّ المتتالية (V_n) هندسية يُطلب تعيين أساسها وحدّها الأوّل

ب. برهن أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n : $U_n = 2^n - 1$

ج. استنتج أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n : $PGCD\left(U_n; U_{n+1}\right) = 1$

2. من أجل كلّ عدد طبيعي n نضع : $L_n = 3^n + \left(U_n + 1\right)^{2024} + U_n$

أ. أُدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية لكلّ من العددين 2^n و 3^n على 5

ب. بيّن أنّ العدد L_n يقبل القسمة على 5 إذا وفقط إذا كان العدد الطبيعي n فرديا.

3. أ. بيّن أنّه من أجل كلّ n و p من $\mathbb{N}$ حيث $n \geq p$: $U_n = 2^p \times U_{n-p} + U_p$

ب. استنتج أنّ $PGCD\left(U_{1962}; U_{1954}\right) = 3$

التمرين الرّابع (7 ن)

I) الدّالة العددية g معرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ كما يلي : $g(x) = \dfrac{x}{x+1} - \ln\left(x+1\right)$

1. أُدرس اتجاه تغيّر الدّالة g على المجال $]-1;+\infty[$

2. أُحسب $g(0)$ ثمّ استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]-1;+\infty[$

II) الدالة العددية f معرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = \dfrac{2\ln\left(e^x+1\right)}{e^x} - 1$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$

1. أ. أُحسب كُلّا من $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ مفسّرا النتيجتين هندسيا.

ب. بيّن أنّه من أجل كلّ عدد حقيقي x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = 2e^{-x} \times g(e^x)$

ج. استنتج أنّ الدّالة f متناقصة تماما على $\mathbb{R}$ ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

2. أ. بيّن أنّ المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث $0,9 < \alpha < 1$

ب. أنشئ المنحنى (C_f)

3. أ. بيّن أنّه من أجل كلّ x من $\mathbb{R}$: $f(x) + f'(x) = 1 - \dfrac{2e^x}{e^x+1}$

ب. استنتج دالة أصلية F للدالة f على $\mathbb{R}$

III) المتتالية العددية (β_n) معرّفة على $\mathbb{N}^*$ كما يلي: $\beta_n = 2\displaystyle\int_0^1 e^{-\frac{x}{n}} \ln\left(1+e^x\right) dx$

1. أ. أُحسب β_1 ثمّ فسّر النتيجة هندسيا.

ب. بيّن أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي غير معدوم n : $\beta_n \leq 2\ln\left(1+e\right)$

ج. بيّن أنّ المتتالية (β_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}^*$ ثمّ استنتج أنّها متقاربة نحو عدد حقيقي l

2. أ. بيّن أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي غير معدوم n : $\left(1-e^{-\frac{1}{n}}\right)\ln 4^n \leq \beta_n \leq \left(1-e^{-\frac{1}{n}}\right)\ln\left(1+e\right)^{2n}$

ب. استنتج حصراً للعدد l

انتهى الموضوع الثاني

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

المدرسة العليا للأساتذة بورقلة
مصلحة النشاطات الثقافية والرياضية

امتحان البكالوريا التجريبي

دورة أفريل 2024
الشعبة: رياضيات
المادة: الرياضيات
المدّة: 4 ساعات ونصف

الإجابة النموذجية + سلّم التنقيط

إجابة نموذجية مقترحة للموضوع الأوّل

التمرين الأوّل (4 ن)

1. أ. حساب $PGCD\left(650;732\right)$ ثمّ استنتاج أنّ المعادلة (E) تقبل حلولا في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$

لدينا

$$\begin{aligned} 732 &= 650\times1+82\\ 650 &= 82\times7+76\\ 82 &= 76\times1+6\\ 76 &= 6\times12+4\\ 6 &= 4\times1+2\\ 4 &= 2\times2+0 \end{aligned}$$

ومنه $PGCD\left(650;732\right)=2$ ، وبما أنّ 2 يقسم 486 فإنّ المعادلة (E) تقبل حلولا في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$

ب. التحقّق أنّ الثنائية $(3;2)$ حلّ للمعادلة (E) ثمّ استنتاج مجموعة حلولها.

لدينا

$$650\times3-732\times2=486$$

ومنه

$$\begin{aligned} 650\times3-732\times2 &= 1950-1464\\ &= 486 \end{aligned}$$

وبالتالي $(3;2)$ حل للمعادلة (E) وعندئذ لدينا

$$\begin{cases} 650x-732y=486\\ 650\times3-732\times2=486 \end{cases}$$

ومنه

$$650\left(x-3\right)-732\left(y-2\right)=0$$

وعليه

$$325\left(x-3\right)=366\left(y-2\right)$$

وبما أنّ $PGCD\left(350;366\right)=1$ فإنّ $325\mid\left(y-2\right)$ وينتج عن ذلك أنّ

$$\begin{cases} y=325k+2\\ k\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

وبالتالي مجموعة حلول المعادلة هي S حيث

$$S=\left\{\left(366k+3\ ;\ 325k+2\right)/k\in\mathbb{Z}\right\}$$

2. تعيين كُلّا من α و β ثمّ كتابة L في النظام العشري.

لدينا

$$\begin{aligned} L &= 5^4\times\alpha+5^3\times0+5^2\times\alpha+5^1\times\beta+5^0\times\beta\\ &= 650\alpha+6\beta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L &= 9^3\times\beta+9^2\times6+9^1\times\beta+9^0\times0\\ &= 738\beta+486 \end{aligned}$$

ومنه

$$650\alpha+6\beta=738\beta+486$$

وعليه

$$650\alpha-732\beta=486$$

وبما أنّ

$$\begin{cases}0 \leqslant \alpha < 5\\ 0 \leqslant \beta < 5\end{cases}$$

فإنّ $\alpha = 3$ و $\beta = 2$ وبالتالي $L = 1962$

3. تحليل العدد 1962 إلى جداء عوامل أوليّة ثمّ استنتاج قيم العدد الطبيعي n التي تحقّق $1962 \equiv 0\left[n^2\right]$

لدينا

$$\begin{array}{c|c}1962 & 2\\ 981 & 3\\ 327 & 3\\ 109 & 109\\ 1 & \end{array}$$

ومنه $1962 = 2 \times 3^2 \times 109$ ونستنتج أنّ قيم العدد الطبيعي n التي تحقّق $1962 \equiv 0\left[n^2\right]$ هي : 1 و 3

4. تعيين كلّ الثنائيات $(a;b)$ التي تحقّق : $m - 91d = 0$ و $a^2 + b^2 = 1962$

لدينا

$$\begin{cases}m \times d = a \times b\\ a = d \times a'\\ b = d \times b'\\ PGCD\left(a'\,;b'\right) = 1\end{cases}$$

ومنه

$$\begin{cases}m = d \times a' \times b'\\ a = d \times a'\\ b = d \times b'\\ PGCD\left(a'\,;b'\right) = 1\end{cases}$$

وعليه

$$\begin{cases}d \times a' \times b' - 91d = 0\\ \left(d \times a'\right)^2 + \left(d \times b'\right)^2 = 1962\\ PGCD\left(a'\,;b'\right) = 1\end{cases}$$

وبالتالي

$$\begin{cases}a' \times b' = 91\\ d^2\left[\left(a'\right)^2 + \left(b'\right)^2\right] = 1962\\ d \in \{1;3\}\\ PGCD\left(a'\,;b'\right) = 1\end{cases}$$

ومن السؤال السابق نستنتج أنّ

$$\begin{cases}\left(a';b'\right) \in \{(1;91)\,;(7;13)\,;(13;7)\,;(91;1)\}\\ d^2\left[\left(a'\right)^2 + \left(b'\right)^2\right] = 1962\\ d \in \{1;3\}\end{cases}$$

وبما أنّ $91^2 > 1962$ و $7^2 + 13^2 = 218$ فإنّ

$$\begin{cases} (a';b') \in \{(7;13);(13;7)\} \\ d = 3 \end{cases}$$

عندئذ لدينا

$$(a;b) \in \{(21;39);(39;21)\}$$

التمرين الثاني (٤ ن)

I) 1. البرهان بالتراجع أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n : $0 \leq U_n < \sqrt{3}$

- نرمز للخاصية " $U_n \geq 1$ " بالرمز $P(n)$.
- نتحقّق من صحّة $P(0)$
  لدينا
  $$U_0 = 0$$
  ومنه
  $$0 \leq U_0 < \sqrt{3}$$
  وعليه $P(0)$ صحيحة.
- من أجل عدد طبيعي كيفي k نفترض صحّة $P(k)$ ونبرهن صحّة $P(k+1)$.
  لدينا
  $$0 \leq U_k < \sqrt{3}$$
  ومنه
  $$0 \leq U_k^2 < 3$$
  وعليه
  $$3 < 6 - U_k^2 \leq 6$$
  وبالتالي
  $$\sqrt{3} < \sqrt{6 - U_k^2} \leq \sqrt{6}$$
  ومنه
  $$\frac{1}{\sqrt{6}} \leq \frac{1}{\sqrt{6 - U_k^2}} < \frac{1}{\sqrt{3}}$$
  وعليه
  $$\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \frac{3}{\sqrt{6 - U_k^2}} < \frac{3}{\sqrt{3}}$$
  أي
  $$0 \leq \frac{3}{\sqrt{6 - U_k^2}} < \sqrt{3}$$
  أي
  $$0 \leq U_{k+1} < \sqrt{3}$$
  وبالتالي $P(k+1)$ صحيحة.
- وحسب مبدأ الاستدلال بالتراجع نستنتج أنّ $P(n)$ صحيحة من أجل كلّ عدد طبيعي n.

2. أ. تبيين أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n : $U_{n+1}^2 - U_n^2 = \dfrac{\left(U_n^2 - 3\right)^2}{6 - U_n^2}$

من أجل كلّ عدد طبيعي n لدينا

$$U_{n+1}^2 - U_n^2 = \left(\frac{3}{\sqrt{6 - U_n^2}}\right)^2 - U_n^2$$

$$U_{n+1}^2 - U_n^2 = \frac{9}{6-U_n^2} - U_n^2$$
$$= \frac{9}{6-U_n^2} - U_n^2$$
$$= \frac{9 - 6U_n^2 + U_n^4}{6-U_n^2}$$
$$= \frac{\left(U_n^2 - 3\right)^2}{6-U_n^2}$$

ب. تبيين أنّ المتتالية (U_n) متزايدة على $\mathbb{N}$ ثمّ استنتاج أنّها متقاربة.

من أجل كلّ n من $\mathbb{N}$ لدينا

$$U_{n+1}^2 - U_n^2 = \frac{\left(U_n^2 - 3\right)^2}{6-U_n^2}$$

وبما أنّ

$$0 \le U_n < \sqrt{3}$$

فإنّ

$$\begin{cases} \left(U_n^2 - 3\right)^2 > 0 \\ 6 - U_n^2 > 0 \end{cases}$$

أي

$$U_{n+1}^2 - U_n^2 > 0$$

ومنه

$$U_{n+1}^2 \ge U_n^2$$

وبما أنّ $U_n \ge 0$ فإنّ

$$U_{n+1} \ge U_n$$

وبالتالي المتتالية (U_n) متزايدة على $\mathbb{N}$

الاستنتاج. لدينا

- من أجل كلّ n من $\mathbb{N}$ لدينا

$$0 \le U_n < \sqrt{3}$$

ومنه (U_n) محدودة من الأعلى بالعدد $\sqrt{3}$

- المتتالية (U_n) متزايدة على $\mathbb{N}$

عندئذ نستنتج أنّ (U_n) متقاربة.

II) 1. أ. تبيين أنّ المتتالية (V_n) حسابية أساسها 1 وتعيين حدّها الأوّل V_0

من أجل كلّ n من $\mathbb{N}$ لدينا

$$V_{n+1} = \frac{U_{n+1}^2}{3 - U_{n+1}^2}$$
$$= \frac{\left(\frac{3}{\sqrt{6-U_n^2}}\right)^2}{3 - \left(\frac{3}{\sqrt{6-U_n^2}}\right)^2}$$
$$= \frac{\frac{9}{6-U_n^2}}{3 - \frac{9}{6-U_n^2}}$$

$$\begin{aligned} V_{n+1} &= \frac{3}{3-U_n^2} \\ &= \frac{3-U_n^2+U_n^2}{3-U_n^2} \\ &= 1+\frac{U_n^2}{3-U_n^2} \\ &= V_n+1 \end{aligned}$$

وعليه المتتالية (V_n) حسابية أساسها 1 وحدّها الأوّل V_0 حيث

$$\begin{aligned} V_0 &= \frac{U_0^2}{3-U_0^2} \\ &= \frac{U_0^2}{3-U_0^2} \\ &= \frac{0^2}{3-0^2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

ب. **تبيين أنّه من أجل كلّ n من $\mathbb{N}$: $U_n=\sqrt{\frac{3n}{n+1}}$ ثمّ حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$**

من أجل كلّ n من $\mathbb{N}$ لدينا

$$V_n = \frac{U_n^2}{3-U_n^2}$$

وذلك يكافئ

$$\left(3-U_n^2\right)V_n = U_n^2$$

ويكافئ

$$U_n^2+V_nU_n^2 = \ 3V$$

وبما أنّ $V_n+1>0$ فإنّ

$$U_n^2\left(V_n+1\right) = \ 3V_n$$

وبما أنّ $U_n\geq 0$ فإنّ

$$U_n = \sqrt{\frac{3V_n}{V_n+1}}$$

وعليه

$$U_n = \sqrt{\frac{3n}{n+1}}$$

2. أ. **تبيين أنّه من أجل كلّ n من $\mathbb{N}^*$: $\frac{2024n}{n+\sqrt{n}}\leq S_n\leq\frac{2024n}{n+1}$**

من أجل كلّ n من $\mathbb{N}^*$ لدينا

$$\begin{cases} \frac{2024}{n+\sqrt{n}} \leqslant \frac{2024}{1+\sqrt{V_1}} \leqslant \frac{2024}{n+1} \\ \frac{2024}{n+\sqrt{n}} \leqslant \frac{2024}{1+\sqrt{V_2}} \leqslant \frac{2024}{n+1} \\ \vdots \\ \frac{2024}{n+\sqrt{n}} \leqslant \frac{2024}{1+\sqrt{V_n}} \leqslant \frac{2024}{n+1} \end{cases}$$

ومنه

$$\frac{2024}{n+\sqrt{n}}+\frac{2024}{n+\sqrt{n}}+\cdots+\frac{2024}{n+\sqrt{n}}\leqslant S_n\leqslant\frac{2024n}{n+1}+\frac{2024}{n+1}+\cdots+\frac{2024}{n+1}$$

وعليه

$$\frac{2024n}{n+\sqrt{n}}\leqslant S_n\leqslant\frac{2024n}{n+1}$$

ب. استنتاج $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

من أجل كلّ n من $\mathbb{N}^*$ لدينا

$$\frac{2024n}{n+\sqrt{n}}\leqslant S_n\leqslant\frac{2024n}{n+1}$$

ولدينا

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{2024n}{n+1}=\lim_{n\to+\infty}\frac{2024n}{n}=2024$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{2024n}{n+\sqrt{n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{2024}{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}=2024$$

ومنه

$$\lim_{n\to+\infty} S_n=2024$$

التمرين الثالث (5 ن)

1. الجواب هو أ

التبرير. الدّالة $x\mapsto \pi^2e^{\pi x+\pi}$ مستمرّة على $\mathbb{R}$ ومنه حلول المعادلة التفاضلية $y''=\pi^2e^{\pi x+\pi}$ هي الدوال $x\mapsto e^{\pi x+\pi}+c_1x+c_2$ مع c_1 وc_2 عددان حقيقيان ثابتان، ولدينا

$$\begin{cases} y\left(0\right)=e^{\pi}\\ y'\left(-1\right)=\pi\end{cases}$$

ومنه

$$\begin{cases} e^{\pi\times 0+\pi}+c_1\times 0+c_2=e^{\pi}\\ \pi e^{\pi\times(-1)+\pi}+c_1=\pi\end{cases}$$

وعليه

$$\begin{cases} c_2=0\\ c_1=0\end{cases}$$

وبالتالي حلّ المعادلة التفاضلية هو الدّالة h المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي $h(x)=e^{\pi x+\pi}$

2. الجواب هو ج

التبرير. $A_4^2\times A_1^1+A_3^1\times A_3^1\times A_1^1=21$

3. الجواب هو ج

التبرير. الدّالة $x\mapsto\dfrac{\log x}{x}$ مستمرّة على المجال $[1;n+1]$ ولدينا

$$\int_1^2\frac{\log x}{x}dx+\int_2^3\frac{\log x}{x}dx+\cdots+\int_n^{n+1}\frac{\log x}{x}dx=\int_1^{n+1}\frac{\log x}{x}dx$$
$$=\frac{1}{\ln 10}\int_1^{n+1}\left(\frac{1}{x}\times\ln x\right)dx$$

$$\int_1^2 \frac{\log x}{x}dx + \int_2^3 \frac{\log x}{x}dx + \cdots + \int_n^{n+1} \frac{\log x}{x}dx = \int_1^{n+1} \frac{\log x}{x}dx$$
$$= \frac{1}{\ln 10}\int_1^{n+1}\left(\frac{1}{x}\times \ln x\right)dx$$
$$= \frac{1}{2\ln 10}\left[(\ln x)^2\right]_1^{n+1}$$
$$= \frac{\ln(n+1)\times\ln(n+1)}{2\ln 10}$$
$$= \frac{\ln(n+1)\times\log(n+1)}{2}$$

.4 الجواب هو أ
التبرير. لدينا

$$z = \sin\frac{\pi}{8} + i\cos\frac{\pi}{8}$$
$$= i\left(\cos\frac{\pi}{8} - i\sin\frac{\pi}{8}\right)$$
$$= i\left[\cos\left(-\frac{\pi}{8}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{8}\right)\right]$$

ومنه

$$\arg(z) \equiv \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}\,[2\pi]$$

وعليه

$$\arg(z) \equiv \frac{3\pi}{8}\,[2\pi]$$

.5 الجواب هو ب
التبرير. المتراجحة تكافئ

$$(2^x)^2 + 2\times 2^x - 3 \leqslant 0$$

وبوضع $t = 2^x$ ينتج

$$t^2 + 2t - 3 \leqslant 0$$

وذلك يكافئ

$$-3 \leq t \leq 1$$

ويكافئ

$$2^x \leq 1$$

ويكافئ

$$x \in \left]-\infty; 0\right]$$

التمرين الرابع (٧ ن)

I) **1. تبيين أنّ الدّالة g متزايدة تماماً على المجال $]0;+\infty[$**

الدّالة g قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ ولدينا

$$\begin{aligned} g'(x) &= 1 \times e^{x-1} + e^{x-1} \times x \\ &= (x+1)\, e^{x-1} \end{aligned}$$

ومن أجل كلّ x من $]0;+\infty[$ لدينا

$$(x+1)\, e^{x-1} > 0$$

أي $g'(x) > 0$ على $]0;+\infty[$ ، وبالتالي g متزايدة تماما على $]0;+\infty[$

2. أ. تبيين أنّ المعادلة $g(x) = 1$ تقبل حلّا وحيدا α حيث $1,3 < \alpha < 1,4$

- g مستمرة على $]0;+\infty[$.
- g متزايدة تماما على $]0;+\infty[$.
- لدينا

$g(1,4) \approx 1,09$	$g(1,3) \approx 0,22$

ومنه $g(1,3) < 1 < g(1,4)$

عندئذ نستنتج أنّ المعادلة $g(x) = 1$ تقبل حلّا وحيدا α حيث $1,3 < \alpha < 1,4$.

ب. استنتاج إشارة العبارة : $g(x) - 1$ على المجال $]0;+\infty[$

لدينا

- g متزايدة تماما على $]0;+\infty[$.
- $g(\alpha) - 1 = 0$

عندئذ يمكن استنتاج إشارة $g(x) - 1$ في جدول كما يأتي

x	0		α		$+\infty$
$g(x) - 1$	||	$-$	0	$+$	

II) **1. أ. حساب $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x)$ وتفسير النتيجة هندسيا ثمّ حساب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$**

لدينا

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \left(e^{x-1} - 2\ln x - 1\right)$$

وبما أنّ $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \ln x = -\infty$ فإنّ $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = +\infty$

التفسير الهندسي. المستقيم ذو المعادلة $x = 0$ (حامل محور التراتيب) هو مستقيم مقارب لـ (C_f)

حساب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ لدينا

$$\begin{aligned} \lim_{x \to +\infty} f(x) &= \lim_{x \to +\infty} \left(e^{x-1} - 2\ln x - 1\right) \\ &= \lim_{x \to +\infty} \left[x\left(\frac{e^x}{x} \times e^{-1} - 2\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}\right)\right] \end{aligned}$$

وبما أنّ

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0 \end{cases}$$

فإنّ

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

ب. تبيين أنّه من أجل كلّ عدد حقيقي x من $]0;+\infty[$: $f'(x) = \dfrac{g(x)-1}{x}$

الدّالة f قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ ولدينا

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{x-1} - \frac{2}{x} \\ &= \frac{xe^{x-1}-2}{x} \\ &= \frac{g(x)-1}{x} \end{aligned}$$

ج. دراسة اتجاه تغيّر الدّالة f ثمّ تشكيل جدول تغيّراتها

بما أنّ $x > 0$ فإنّ إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)-1$ وعندئذ لدينا

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	

- $f'(x) < 0$ على $]0;\alpha[$ ، ومنه الدالة f متناقصة تماما على $]0;\alpha]$
- $f'(x) > 0$ على $]\alpha;+\infty[$ ، ومنه الدالة f متزايدة تماما على $[\alpha;+\infty[$

تشكيل جدول التغيّرات

x	0		α		$+\infty$
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

.2 أ. كتابة معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة التي فاصلتها 1.

الدّالة f قابلة للاشتقاق عند 1،ومنه (C_f) يقبل مماسا (T) معامل توجيهه $f'(1)$ عند النقطة ذات الفاصلة 1 ونكتب

$$(T): y = f'(1)(x-1) + f(1)$$

ولدينا

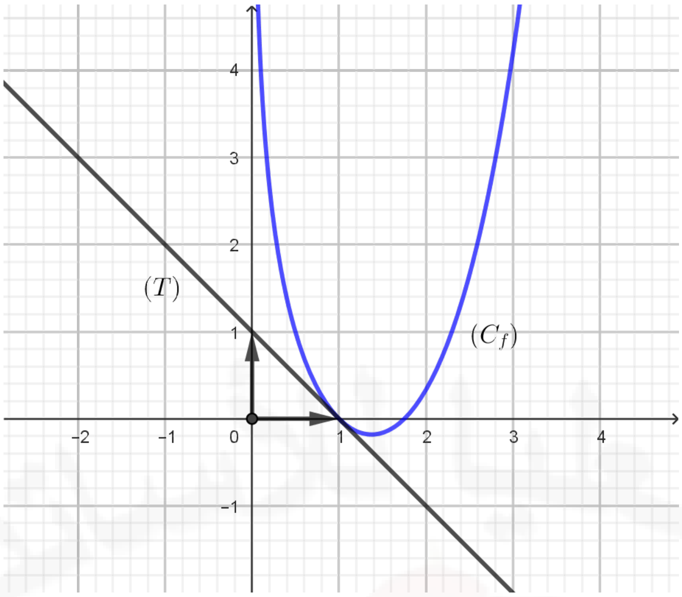
$$\begin{aligned} f(1) &= e^{1-1} - 2\ln 1 - 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(1) &= \frac{1\times e^{1-1}-2}{1} \\ &= -1 \end{aligned}$$

وبالتالي

$$(T): y = -x + 1$$

ب. إنشاء كُلّا من (T) و (C_f).



ج. **مناقشة حلول المعادلة $e^x + e^{m+1}(x-1) = e\left(\ln x^2 + 1\right)$ بيانيا**

المعادلة

$$e^x + e^{m+1}(x-1) = e\left(\ln x^2 + 1\right)$$

تكافئ

$$e^{x-1} + e^m(x-1) = 2lnx + 1$$

وتكافئ

$$f(x) = -e^m(x-1)$$

لدينا

$$f(x) = -|m|x$$

وبالتالي حلول المعادلة بيانيا هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيم (Δ_m) حيث

$$(\Delta_m) : y = -e^m(x-1)$$

من أجل كلّ m من $\mathbb{R}$ المستقيم (Δ_m) يشمل النقطة $A(1;0)$ ، وبوضع $m' = -e^m$ ينتج

في حالة	قيم m	عدد حلول المعادلة
$m' \in]-\infty; -1[$	$m \in]0; +\infty[$	حلّان
$m' = -1$	$m = 0$	حلّ واحد
$m' \in]-1; 0[$	$m \in]-\infty; 0[$	حلّان

3. **أ.** **كتابة العدد $\mathcal{A}(\lambda)$ بدلالة λ ثمّ تفسير النتيجة هندسيا.**

الدّالة f مستمرّة على المجال $[\lambda; 1]$، عندئذ لدينا

$$\mathcal{A}(\lambda) = \int_{\lambda}^{1} f(t)dt$$

$$= \int_{\lambda}^{1} \left(e^{t-1} - 2\ln t - 1\right)dt$$

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(\lambda) &= \left[e^{t-1} - 2t\ln t + t\right]_{\lambda}^{1} \\ &= -e^{\lambda-1} + \lambda + 2\lambda\ln\lambda + 2\end{aligned}$$

بما أنّ الدّالة موجبة على المجال $[\lambda;1]$ فإنّ النتيجة تُفسّر هندسيا بأنّها مساحة الحيز المستوي المحدّد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات ذات المعادلات : $y=0$ ، $x=\lambda$ و $x=1$

ب. **تبيين أنّ** $\lim\limits_{\lambda \overset{>}{\to} 0} \mathcal{A}(\lambda) = \left(2-e^{-1}\right) cm^2$

لدينا

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} \mathcal{A}(\lambda) = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \left(-e^{\lambda-1} + \lambda + 2\lambda\ln\lambda + 2\right) cm^2$$

وبما أنّ $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} (\lambda\ln\lambda) = 0$ فإنّ

$$\lim_{\lambda \overset{>}{\to} 0} \mathcal{A}(\lambda) = \left(2-e^{-1}\right) cm^2$$

■

سلّم تنقيط الموضوع الأوّل

التمرين الأوّل (4 ن)

ترقيم السؤال	التنقيط
1.أ	$0,25+0,25$
1.ب	$0,25+0,25$
2	$0,25\times 6$
3	$0,5+0,5$
4	$0,25+0,25$

التمرين الثاني (4 ن)

ترقيم السؤال	التنقيط
I) 1	$0,25+0,5+0,25$
I) 2.أ	$0,5$
I) 2.ب	$0,25+0,5$
II) 1.أ	$0,25+0,5$
II) 1.ب	$0,25+0,25$
II) 2.أ	$0,25$
II) 2.ب	$0,25$

التمرين الثالث (5 ن)

ترقيم السؤال	التنقيط
1	$0,5+0,5$
2	$0,5+0,5$
3	$0,5+0,5$
4	$0,5+0,5$
5	$0,5+0,5$

التمرين الرابع (7 ن)

ترقيم السؤال	التنقيط
I) 1	$0,25+0,25$
I) 2.أ	$0,25+0,25+0,25$
I) 2.ب	$0,25+0,25$
II) 1.أ	$0,5+0,25+0,25$
II) 1.ب	$0,75$
II) 1.ج	$0,5+0,5$
II) 2.أ	$0,5$
II) 2.ب	$0,5+0,25$
II) 2.ج	$0,25$
II) 3.أ	$0,25+0,5$
II) 3.ب	$0,25$

إجابة نموذجية مقترحة للموضوع الثاني

التمرين الأوّل (٤ ن)

I) 1. حساب احتمال كُلّا من الحدثين A و B

أ. A: " الحصول على بطاقتين من نفس اللّون بالضّبط ".

$$P(A) = \frac{A \text{ عدد عناصر}}{\text{عدد الإمكانيات}}$$
$$= \frac{C_3^2 \times C_3^1 + C_2^2 \times C_4^1}{C_6^3}$$
$$= \frac{13}{20}$$

ب. B: " الحصول على ثلاث بطاقات يُمكن أنّ تشكّل كلمة ENS ".

$$P(B) = \frac{B \text{ عدد عناصر}}{\text{عدد الإمكانيات}}$$
$$= \frac{C_1^1 \times C_3^1 \times C_2^1}{C_6^3}$$
$$= \frac{6}{20}$$
$$= \frac{3}{10}$$

2. أ. تبيين أنّ $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$ ، ثمّ استنتاج أنّ الحدثين A و B ليسا مستقلين.

$$P(A \cap B) = \frac{A \cap B \text{ عدد عناصر}}{\text{عدد الإمكانيات}}$$
$$= \frac{C_1^1 \times C_2^1 \times C_2^1 + C_1^1 \times C_2^2}{C_6^3}$$
$$= \frac{5}{20}$$
$$= \frac{1}{4}$$

وبما أنّ $\frac{1}{4} \neq \frac{13}{20} \times \frac{3}{10}$ أي $P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$ فإنّ A و B ليسا مستقلين.

ب. حساب $P_A\left(\overline{B}\right)$ (احتمال الحدث $\overline{B}$ علما أنّ الحدث A محقّق)

$$P_A\left(\bar{B}\right) = 1 - P_A(B)$$
$$= 1 - \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$
$$= 1 - \frac{\frac{1}{4}}{\frac{13}{20}}$$
$$= \frac{8}{13}$$

II) 1. أ. تبرير أنّ مجموعة قيم المتغيّر العشوائي X هي $\{0;1;2\}$

الإمكانية S	عدد مرّات ظهور الحرف S
$\overline{S}\ \overline{S}$	0
$S\ \overline{S}$	1
$S\ S$	2

ب. تعريف قانون احتمال المتغيّر العشوائي X

- الحدث $\{X=0\}$

$$P(X=0)=\frac{(n+4)^2}{(n+6)^2}$$

- الحدث $\{X=1\}$

$$\begin{aligned}P(X=1)&=\frac{2\times 2^1\times (n+4)^1}{(n+6)^2}\\&=\frac{4n+16}{(n+6)^2}\end{aligned}$$

- الحدث $\{X=2\}$

$$\begin{aligned}P(X=2)&=\frac{2^2}{(n+6)^2}\\&=\frac{4}{(n+6)^2}\end{aligned}$$

وينتج عن ذلك ما يلي

x_i	0	1	2	المجموع
$P(X=x_i)$	$\frac{(n+4)^2}{(n+6)^2}$	$\frac{4n+16}{(n+6)^2}$	$\frac{4}{(n+6)^2}$	1

2. تعيين قيمة العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها $P\left(\int_0^X te^t dt=1\right)=\frac{3}{8}$

المتراجحة

$$\int_0^X te^t dt=1$$

تكافئ

$$Xe^X-e^X+1=1$$

وتكافئ

$$e^X(X-1)=0$$

وتكافئ

$$X=1$$

وعليه المعادلة

$$P\left(\int_0^X te^t dt=1\right)=\frac{3}{8}$$

تكافئ

$$P(X=1)=\frac{3}{8}$$

وتكافئ

$$\frac{4n+16}{(n+6)^2} = \frac{3}{8}$$

وتكافئ

$$3n^2 + 4n - 20 = 0$$

وتكافئ

$$n = 2$$

التمرين الثاني (٤ ن)

I) **حل المعادلة** $\left(\overline{2iz - \sqrt{3} + i}\right)\left(z^2 + 2z + 2\right) = 0$ **في مجموعة الأعداد المركّبة** $\mathbb{C}$

المعادلة

$$\left(\overline{2iz - \sqrt{3} + i}\right)\left(z^2 + 2z + 2\right) = 0$$

تكافئ

$$\overline{2iz - \sqrt{3} + i} = 0 \quad \text{أو} \quad z^2 + 2z + 2 = 0$$

حل المعادلة $z^2 + 2z + 2 = 0$

لدينا

$$\begin{aligned}\Delta &= 2^2 - 4 \times 1 \times 2 \\ &= -4 \\ &= 4i^2 \\ &= (2i)^2\end{aligned}$$

وبالتالي المعادلة تقبل حلّين z_1 و z_2 حيث

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{-2-2i}{2 \times 1} \\ &= -1 - i \end{aligned} \qquad \begin{aligned} z_2 &= \overline{z_1} \\ &= -1 + i \end{aligned}$$

حل المعادلة $\overline{2iz + \sqrt{3} + i} = 0$

المعادلة تكافئ

$$\overline{2iz + \sqrt{3}} = -i$$

وتكافئ

$$2iz + \sqrt{3} = i$$

وتكافئ

$$iz = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

وتكافئ

$$z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

وبالتالي مجموعة حلول المعادلة هي $\left\{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i; -1-i; -1+i\right\}$

II) **.1** **أ.** **كتابة** z_A **على الشّكل المثلّثي ثمّ استنتاج كتابة** z_C **على الشّكل المثلّثي.**

لدينا

$$\begin{aligned}|z_A| &= \sqrt{(-1)^2 + 1^2} \\ &= \sqrt{2}\end{aligned}$$

ونعتبر θ عمدة للعدد z_A، عندئذ لدينا

$$\cos\theta = \frac{-1}{\sqrt{2}} \qquad \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

ومنه

$$z_A = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$$

ولدينا

$$\left|\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right| = 1 \qquad \arg\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \equiv \frac{\pi}{3}\,[2\pi]$$

عندئذ نستنتج

$$\begin{aligned}|z_C| &= |z_A| \times \left|\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right|\\ &= \sqrt{2}\times 1\\ &= \sqrt{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\arg(z_C) &\equiv \arg(z_A) + \arg\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\,[2\pi]\\ &\equiv \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\,[2\pi]\\ &\equiv \frac{13\pi}{12}\,[2\pi]\end{aligned}$$

وبالتالي

$$z_C = \sqrt{2}\left(\cos\frac{13\pi}{12} + i\sin\frac{13\pi}{12}\right)$$

ب. كتابة z_C على الشّكل الجبري ثمّ استنتاج القيمة المضبوطة لكلّ من $\cos\frac{13\pi}{12}$ و $\sin\frac{13\pi}{12}$

$$\begin{aligned}z_C &= (-1+i)\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\\ &= -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i + \frac{1}{2}i - \frac{\sqrt{3}}{2}\\ &= -\frac{1+\sqrt{3}}{2} + \frac{1-\sqrt{3}}{2}i\end{aligned}$$

وعندئذ نستنتج أنّ

$$\sin\frac{13\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} \qquad \cos\frac{13\pi}{12} = -\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

2. تبيين أنّ العدد المركّب $\frac{z_B - z_D}{z_B - z_A}$ تخيّلي صرف ثمّ استنتاج طبيعة المثلّث ADB

لدينا

$$\begin{aligned}\frac{z_B - z_D}{z_B - z_A} &= \frac{\overline{z_A} + z_A}{\overline{z_A} - z_A}\\ &= \frac{-1-i-1+i}{-1-i+1-i}\\ &= \frac{-2}{-2i}\\ &= -i\end{aligned}$$

ومنه العدد المركّب $\frac{z_B - z_D}{z_B - z_A}$ تخيّلي صرف ونستنتج أنّ

$$\left|\frac{z_B - z_D}{z_B - z_A}\right| = 1 \quad \text{و} \quad \arg\left(\frac{z_B - z_D}{z_B - z_A}\right) \equiv -\frac{\pi}{2}\,[2\pi]$$

أي

$$DB = AB \quad \text{و} \quad \left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{DB}\right) \equiv -\frac{\pi}{2}\,[2\pi]$$

عندئذ نستنتج أنّ المثلّث ADB قائم في B ومتساوي الساقين.

3. تعيين (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللّاحقة z حيث : $\frac{\overline{z} - z_B}{\overline{z} - z_A} \times \frac{z - z_A}{z - z_B} = 1$

لدينا $\frac{\overline{z} - z_B}{\overline{z} - z_A} \times \frac{z - z_A}{z - z_B} = 1$ وذلك يكافئ

$$\overline{\left(\frac{z - z_A}{z - z_B}\right)} \times \frac{z - z_A}{z - z_B} = 1$$

ويكافئ

$$\frac{|z - z_A|^2}{|z - z_B|^2} = 1$$

ويكافئ

$$|z - z_A|^2 = |z - z_B|^2$$

ويكافئ

$$|z - z_A| = |z - z_B|$$

ويكافئ

$$AM = BM$$

وبالتالي مجموعة النقط (Γ) هي المستقيم المحوري للقطعة $[AB]$

التمرين الثالث (5 ن)

1. أ. تبيين أنّ المتتالية (V_n) هندسية يُطلب تعيين أساسها وحدّها الأوّل

من أجل كلّ عدد طبيعي n لدينا

$$\begin{aligned} V_{n+1} &= U_{n+2} - U_{n+1} \\ &= 3U_{n+1} - 2U_n - U_{n+1} \\ &= 2U_{n+1} - 2U_n \\ &= 2\left(U_{n+1} - U_n\right) \\ &= 2V_n \end{aligned}$$

ومنه المتتالية (V_n) هندسية أساسها 2 وحدّها الأوّل V_0 حيث

$$\begin{aligned} V_0 &= U_1 - U_0 \\ &= 1 - 0 \\ &= 1 \end{aligned}$$

ب. البرهان بالتراجع أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي غير معدوم n، $U_n = 2^n - 1$.

- نرمز للخاصية " $U_n = 2^n - 1$ " بالرمز $P(n)$.
- نتحقّق من صحّة $P(0)$

لدينا

$$\begin{aligned} 2^0 - 1 &= 1 \\ &= U_0 \end{aligned}$$

ومنه $P(0)$ صحيحة.

- من أجل عدد طبيعي كيفي k نفترض صحّة $P(k)$ ونبرهن صحّة $P(k+1)$.

لدينا

$$\begin{aligned} U_{k+1} &= V_k + U_k \\ &= 2^k + 2^k - 1 \\ &= 2 \times 2^k - 1 \\ &= 2^{k+1} - 1 \end{aligned}$$

وعليه $P(k+1)$ صحيحة.

- حسب مبدأ الاستدلال بالتّراجع $P(n)$ صحيحة من أجل كلّ عدد طبيعي n.

ج. استنتاج أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n : $PGCD\left(U_n;U_{n+1}\right)=1$

من أجل كلّ عدد طبيعي n لدينا

$$\begin{aligned} U_{n+1} &= 2^{n+1} - 1 \\ &= 2 \times 2^n - 1 \\ &= 2\left(2^n - 1 + 1\right) - 1 \\ &= 2U_n + 2 - 1 \\ &= 2U_n + 1 \end{aligned}$$

ومنه

$$U_{n+1} - 2U_n = 1$$

وبالتالي حسب مبرهنة بيزو ينتج أنّ $PGCD\left(U_n;U_{n+1}\right)=1$

2. أ. دراسة بواقي القسمة الإقليدية لكلّ من العددين 2^n و 3^n على 5 حسب قيم العدد الطبيعي n

لدينا

$$\begin{cases} 2^0 \equiv 1\,[5] \\ 2^1 \equiv 2\,[5] \\ 2^2 \equiv 4\,[5] \\ 2^3 \equiv 3\,[5] \\ 2^4 \equiv 1\,[5] \end{cases}$$

وعليه من أجل كلّ عدد طبيعي k لدينا

$$\begin{cases} 2^{4k} \equiv 1\,[5] \\ 2^{4k+1} \equiv 2\,[5] \\ 2^{4k+2} \equiv 4\,[5] \\ 2^{4k+3} \equiv 3\,[5] \end{cases}$$

لدينا

$$\begin{cases} 3^0 \equiv 1\,[5] \\ 3^1 \equiv 3\,[5] \\ 3^2 \equiv 4\,[5] \\ 3^3 \equiv 2\,[5] \\ 3^4 \equiv 1\,[5] \end{cases}$$

وعليه من أجل كلّ عدد طبيعي k لدينا

$$\begin{cases} 3^{4k} \equiv 1\,[5] \\ 3^{4k+1} \equiv 3\,[5] \\ 3^{4k+2} \equiv 4\,[5] \\ 3^{4k+3} \equiv 2\,[5] \end{cases}$$

ب. تبيين أنّ العدد L_n يقبل القسمة على 5 إذا وفقط إذا كان العدد الطبيعي n فرديا.

لدينا

$$L_n \equiv 0\,[5]$$

وذلك يكافئ

$$3^n + \left(2^n\right)^{2024} + 2^n - 1 \equiv 0\,[5]$$

ويكافئ

$$3^n + \left(2^{2024}\right)^n + 2^n - 1 \equiv 0\,[5]$$

ويكافئ

$$3^n + 1^n + 2^n - 1 \equiv 0\,[5]$$

ويكافئ

$$3^n + 2^n \equiv 0\,[5]$$

ويكافئ

$$n \in \{4k+1; 4k+3 / k \in \mathbb{N}\}$$

ويكافئ

$$n \in \{2 \times 2k+1\ ;\ 2(2k+1)+1\ /\ k \in \mathbb{N}\}$$

ويكافئ أنّ العدد n فردي.

3. أ. تبيين أنه من أجل كلّ n و p من $\mathbb{N}$ حيث $n \geq p$: $U_n = 2^p \times U_{n-p} + U_p$

من أجل كلّ n و p من $\mathbb{N}$ حيث $n \geq p$ لدينا

$$\begin{aligned} 2^p \times U_{n-p} + U_p &= 2^p\left(2^{n-p}-1\right) + 2^p - 1 \\ &= 2^{p+n-p} - 2^p + 2^p - 1 \\ &= 2^n - 1 \\ &= U_n \end{aligned}$$

ب. استنتاج أنّ $PGCD\,(U_{1962}; U_{1954}) = 3$

من السؤال السابق نستنتج من أجل كلّ n و p من $\mathbb{N}$ حيث $n \geq p$ أنّ

$$PGCD\,(U_{n+p}; U_n) = PGCD\,(U_n; U_p)$$

وعليه

$$\begin{aligned} PGCD\,(U_{1962}; U_{1954}) &= PGCD\,(U_{1954}; U_8) \\ &= PGCD\,(U_{1946}; U_8) \\ &\ \vdots \\ &= PGCD\,(U_8; U_2) \\ &= PGCD\,(U_2; U_2) \\ &= U_2 \\ &= 3 \end{aligned}$$

التمرين الرابع (7 ن)

I) 1. دراسة اتجاه تغيّر الدّالة g على المجال $]-1;+\infty[$

قابلة للاشتقاق على المجال $]-1;+\infty[$ ولدينا

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{1 \times (x+1) - 1 \times x}{(x+1)^2} - \frac{1}{x+1} \\ &= \frac{-x}{(x+1)^2} \end{aligned}$$

من أجل كلّ x من $]-1;+\infty[$ لدينا

$$(x+1)^2 > 0$$

ومنه إشارة $g'(x)$ من إشارة البسط $-x$ وعندئذ لدينا

x	-1		0		$+\infty$
$g'(x)$	||	$+$	0	$-$	

- $g'(x) > 0$ على $]-1;0[$ و $g'(0)=0$، ومنه الدالة g متزايدة تماما على $]-1;0]$.
- $g'(x) < 0$ على $]0;+\infty[$ و $g'(0)=0$، ومنه الدالة g متناقصة تماما على $[0;+\infty[$.

2. حساب $g(0)$ ثمّ استنتاج إشارة $g(x)$ على المجال $]-1;+\infty[$

لدينا

$$\begin{aligned} g(0) &= \frac{0}{0+1} - \ln(0+1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

وبما أنّ الدّالة $g(0)$ قيمة حدية صغرى للدّالة g عندئذ نستنتج ما يلي

x	-1	0	$+\infty$
$g(x)$	$\Vert$ $-$	0	$-$

(II 1. أ. حساب كُلّا من $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ مفسّرا النتيجتين هندسيا.

لدينا

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2\ln(e^x+1)}{e^x} - 1\right) \\ &= \lim_{t\to+\infty}\left[\frac{2\ln t}{t-1} - 1\right] \\ &= \lim_{t\to+\infty}\left[\frac{2t}{t-1}\times\frac{\ln(t)}{t} - 1\right] \end{aligned}$$

وبما أنّ

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln t}{t} = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2t}{t-1} = 2 \end{cases}$$

فإنّ

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -1$$

وتُفسّر النتيجة هندسيا بأنّ المستقيم ذو المعادلة $y=-1$ والموازي لحامل محور الفواصل هو مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) عند $+\infty$

ولدينا

$$\begin{aligned} \lim_{x\to-\infty} f(x) &= \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{2\ln(e^x+1)}{e^x} - 1\right] \\ &= \lim_{x\to 0}\left[\frac{2\ln(t+1)}{t} - 1\right] \end{aligned}$$

وبما أنّ

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(t+1)}{t} = 1$$

فإنّ

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$$

وتُفسّر النتيجة هندسيا بأنّ المستقيم ذو المعادلة $y=1$ والموازي لحامل محور الفواصل هو مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) عند $-\infty$

ب. تبيين أنّه من أجل كلّ عدد حقيقي x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = 2e^{-x} \times g(e^x)$

الدّالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا

$$\begin{aligned} f'(x) &= -2e^{-x} \times \ln\left(e^x+1\right) + 2e^{-x} \times \frac{e^x}{e^x+1} \\ &= 2e^{-x}\left[\frac{e^x}{e^x+1} - \ln\left(e^x+1\right)\right] \\ &= 2e^{-x} \times g(e^x) \end{aligned}$$

ج. استنتاج أنّ الدّالة f متناقصة تماما على $\mathbb{R}$ ثمّ تشكيل جدول تغيّراتها.

من أجل كلّ x من $\mathbb{R}$ لدينا

$$2e^{-x} > 0$$

ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(e^x)$.

المتراجحة $g(e^x) \leq 0$ تكافئ $e^x > 0$ وتكافئ $x \in]-\infty; +\infty[$ وعندئذ لدينا

x	$-\infty$ $+\infty$
$f'(x)$	$-$

- $f'(x) < 0$ على $\mathbb{R}$ ومنه الدّالة f متناقصة تماما على $\mathbb{R}$

تشكيل جدول التغيّرات

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	1	-1

2. أ. تبيين أنّ المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث $0,9 < \alpha < 1$

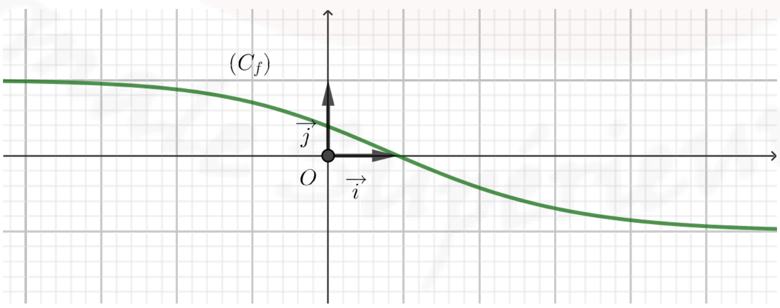
- الدّالة g مستمرّة على $\mathbb{R}$
- الدّالة g متناقصة تماما $\mathbb{R}$
- لدينا

$f(0,9) \approx 0,01$	$f(1) \approx -0,03$

ومنه $f(0,9) \times f(1) < 0$.

وبالتالي المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث $0,9 < \alpha < 1$

ب. إنشاء المنحنى (C_f)



3. أ. تبيين أنّه من أجل كلّ x من $\mathbb{R}$: $f(x)+f'(x)=1-\dfrac{2e^x}{e^x+1}$

من أجل كلّ x من $\mathbb{R}$ لدينا

$$\begin{aligned}
f(x)+f'(x) &= \frac{2\ln(e^x+1)}{e^x}-1+2e^{-x}\times g(e^x)\\
&= 2e^{-x}\ln(e^x+1)-1+2e^{-x}\left[\frac{e^x}{e^x+1}-\ln(e^x+1)\right]\\
&= 2e^{-x}\ln(e^x+1)-1+\frac{2}{e^x+1}-2e^{-x}\ln(e^x+1)\\
&= -1+\frac{2+2e^x-2e^x}{e^x+1}\\
&= -1+2-\frac{2e^x}{e^x+1}\\
&= 1-\frac{2e^x}{e^x+1}
\end{aligned}$$

ب. استنتاج دالة أصلية F للدالة f على $\mathbb{R}$

الدّالة f مستمرّة على $\mathbb{R}$ ، وبالتالي هي تقبل دالة أصلية F على $\mathbb{R}$ حيث

$$\begin{aligned}
F(x) &= -f(x)+x-2\ln(e^x+1)\\
&= -2e^{-x}\ln(e^x+1)+1+x-2\ln(e^x+1)\\
&= x+1-2\left(e^{-x}+1\right)\ln(e^x+1)
\end{aligned}$$

III) 1. أ. حساب β_1 ثمّ تفسير النتيجة هندسيا.

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= \int_0^1 \left[2e^{-x}\ln(1+e^x)-1+1\right]dx\\
&= \int_0^1 [f(x)+1]dx\\
&= [F(x)+x]_0^1\\
&= F(1)-F(0)+1\\
&= 1+1-2\left(e^{-1}+1\right)\ln(e+1)-0-1+2\left(e^0+1\right)\ln\left(e^0+1\right)+1\\
&= 4\ln 2-2\left(e^{-1}+1\right)\ln(e+1)+2
\end{aligned}$$

من أجل كلّ x من $\mathbb{R}$، $f(x)>-1$ ، وعليه النتيجة تُفسّر هندسيا بأنّ β_1 هو قيمة مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات ذات المعادلات : $y=-1$ ، $x=0$ و $x=1$

ب. تبيين أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي غير معدوم n : $\beta_n \leq 2\ln(1+e)$

من أجل كلّ x من $[0;1]$ ومن أجل كلّ n من $\mathbb{N}^*$ لدينا

$$e^{-\frac{x}{n}}\ln(1+e^x)\leqslant 1\times\ln(1+e)$$

ومنه

$$\int_0^1 e^{-\frac{x}{n}}\ln(1+e^x)dx\leqslant\ln(1+e)$$

وعليه

$$\beta_n\leqslant 2\ln(1+e)$$

ج. تبيين أنّ المتتالية (β_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}^*$ ثمّ استنتاج أنّها متقاربة نحو عدد حقيقي l

من أجل كلّ n من $\mathbb{N}^*$ لدينا

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$$

ومن أجل كلّ x من $[0;1]$ نجد

$$e^{-\frac{x}{n}} < e^{-\frac{x}{n+1}}$$

ومنه

$$e^{-\frac{x}{n}} \ln\left(e^x+1\right) < e^{-\frac{x}{n+1}} \ln\left(e^x+1\right)$$

وعليه

$$0 < e^{-\frac{x}{n}} \ln\left(e^x+1\right) < e^{-\frac{x}{n+1}} \ln\left(e^x+1\right)$$

وبالتالي

$$\int_0^1 e^{-\frac{x}{n}} \ln\left(e^x+1\right)dx < \int_0^1 e^{-\frac{x}{n+1}} \ln\left(e^x+1\right)dx$$

أي $\beta_n < \beta_{n+1}$ ، عندئذ نستنتج أنّ المتتالية (β_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}^*$ وبما أنّها محدودة من الأعلى بالعدد $2\ln\left(e+1\right)$ فهي متقاربة نحو عدد حقيقي l

2. أ. تبيين أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي غير معدوم n : $\left(1-e^{-\frac{1}{n}}\right)\ln 4^n \le \beta_n \le \left(1-e^{-\frac{1}{n}}\right)\ln\left(1+e\right)^{2n}$

من أجل كل x من $[0;1]$ لدينا

$$\ln 2 \le \ln\left(e^x+1\right) \le \ln\left(e+1\right)$$

ومن أجل كلّ n من $\mathbb{N}^*$ نجد

$$e^{-\frac{x}{n}} \ln 2 \leqslant e^{-\frac{x}{n}} \ln\left(e^x+1\right) \leqslant e^{-\frac{x}{n}} \ln\left(e+1\right)$$

ومنه

$$\ln 2 \int_0^1 e^{-\frac{x}{n}}dx \leqslant \int_0^1 e^{-\frac{x}{n}} \ln\left(e^x+1\right)dx \leqslant \ln\left(e+1\right) \int_0^1 e^{-\frac{x}{n}}dx$$

وعليه

$$2n\left(1-e^{-\frac{1}{n}}\right)\ln 2 \leqslant \beta_n \leqslant 2n\left(1-e^{-\frac{1}{n}}\right)\ln\left(1+e\right)$$

أي

$$\left(1-e^{-\frac{1}{n}}\right)\ln 4^n \le \beta_n \le \left(1-e^{-\frac{1}{n}}\right)\ln\left(1+e\right)^{2n}$$

ب. استنتاج حصر للعدد l. من أجل كلّ n من $\mathbb{N}^*$ لدينا

$$n\left(1-e^{-\frac{1}{n}}\right)\ln 4 \leqslant \beta_n \leqslant n\left(1-e^{-\frac{1}{n}}\right)\ln\left(1+e\right)^2$$

ولدينا

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\left[n\left(1-e^{-\frac{1}{n}}\right)\right] &= \lim_{n\to+\infty}\left(-\frac{1-e^{-\frac{1}{n}}}{-\frac{1}{n}}\right)\\ &= \lim_{m\to 0}\left(\frac{e^m-1}{m}\right)\\ &= 1\end{aligned}$$

وبما أنّ (β_n) متقاربة نحو l فإنّ

$$\ln 4 \le l \le \ln\left(e+1\right)^2$$

■

سلّم تنقيط الموضوع الثاني

التمرين الأوّل (4 ن)

ترقيم السؤال	التنقيط
I) 1.أ	$0,25+0,5$
I) 1.ب	$0,25+0,5$
I) 2.أ	$0,25+0,25$
I) 2.ب	$0,25+0,25$
II) 1.أ	$0,25$
II) أ.ب	$0,25+0,25+0,25$
II) 2	$0,25+0,25$

التمرين الثاني (4 ن)

ترقيم السؤال	التنقيط
II)	$0,25+0,5+0,25$
II) 1.أ	$0,25+0,5$
II) 1.ب	$0,25+0,5$
II) 2	$0,5+0,5$
II) 3	$0,25+0,25$

التمرين الثالث (5 ن)

ترقيم السؤال	التنقيط
1.أ	$0,25+0,75$
1.ب	$0,25+0,5$
1.ج	$0,25+0,25$
2.أ	$0,5+0,5$
2.ب	$0,5$
3.أ	$0,75$
3.ب	$0,5$

التمرين الرابع (7 ن)

ترقيم السؤال	التنقيط
I) 1	$0,25+0,25$
I) 2	$0,5+0,25$
II) 1.أ	$0,25+0,25+0,25+0,25+0,25$
II) 1.ب	$0,5$
II) 1.ج	$0,25+0,25$
II) 2.أ	$0,25$
II) 2.ب	$0,5$
II) 3.أ	$0,25$
II) 3.ب	$0,25+0,25$
III) 1.أ	$0,25+0,25$
III) 1.ب	$0,25$
III) 1.ج	$0,25+0,25$
III) 2.أ	$0,25+0,25$
III) 2.ب	$0,25$

انتهى ■