التمرين 01 بكالوريا 2008// الموضوع الثاني شعبة علوم تجريبية

(1)حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة ذات المجهول z التالية: $z^2+iz-2-6i=0$.

(2)نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ النقطتين A و B اللتين لاحقتاهما z_A و z_B على الترتيب حيث : $z_A=2+i$ و $z_B=-2-i$.

عين z_ω لاحقة النقطة ω مركز الدائرة (Γ) ذات القطر $[AB]$.

(3)لتكن C النقطة ذات اللاحقة z_C حيث : $z_C=\dfrac{4-i}{1+i}$.

أكتب z_C على الشكل الجبري ثم أثبت أن النقطة C تنتمي إلى الدائرة (Γ) .

(4)(أ) برهن أن عبارة التشابه المباشر S الذي مركزه $M_0(z_0)$ و نسبته $k\,(k>0)$ و زاويته θ و الذي يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$ هي : $z'-z_0=k^{ei}(z-z_0)$

(ب)تطبيق: عين الطبيعة و العناصر المميزة للتحويل S المعرف بـ: $z'+\dfrac{1}{2}i=2e^{i\frac{\pi}{3}}\left(z+\dfrac{1}{2}i\right)$.

الحل

(1) حل المعادلة : $\Delta=(i)^2-4\times(-2-6i)=-1+8+24i=7+24i$

حساب جذر تربيعي لـ Δ : نبحث عن عددين حقيقيين x و y حيث : $(x+iy)^2=7+24i$

المعادلة $(x+iy)^2=7+24i$ تكافئ : $x^2-y^2+2ixy=7+24i$ بالإضافة إلى ذلك نستنتج من هذه المعادلة

أن : $\left|(x+iy)^2\right|=|7+24i|$ أي $x^2+y^2=\sqrt{7^2+24^2}=\sqrt{625}=25$.

نستنتج أن $\begin{cases}x^2+y^2=25\\x^2-y^2=7\\2xy=24\end{cases}$ تكافئ $\begin{cases}x^2=\dfrac{25+7}{2}=16\\y^2=\dfrac{25-7}{2}=9\\2xy=24\end{cases}$ ومنه نأخذ $x=4$ و $y=3$

جذر تربيعي لـ Δ : 4 + 3i و $z_2=\dfrac{-i+4+3i}{2}=2+i$ و $z_1=\dfrac{-i-4-3i}{2}=-2-2i$

(2) المركز ω للدائرة (Γ) منتصف القطعة [AB] . $z_\omega=\dfrac{z_A+z_B}{2}=\dfrac{-2-2i+2+i}{2}=-\dfrac{1}{2}i$

(3) * كتابة z_c على شكله الجبري : $z_c=\dfrac{4-i}{1+i}=\dfrac{(4-i)(1-i)}{2}=\dfrac{4-i-4i-1}{2}=\dfrac{3}{2}-\dfrac{5}{2}i$

* إثبات أن النقطة C تنتمي إلى الدائرة (Γ) : يكفي أن نثبت أن $\omega C=\dfrac{AB}{2}$

$$\frac{AB}{2}=\frac{|z_B-z_A|}{2}=\frac{|-2-2i-2-i|}{2}=\frac{|-4-3i|}{2}=\frac{\sqrt{(-4)^2+(-3)^2}}{2}=\frac{5}{2}$$

$$\omega C=|z_c-z_\omega|=\left|\frac{3}{2}-\frac{5}{2}i+\frac{1}{2}i\right|=\left|\frac{3}{2}-2i\right|=\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+(-2)^2}=\sqrt{\frac{25}{4}}=\frac{5}{2}$$

نستنتج أن النقطة C تنتمي إلى الدائرة (Γ).

4) أ) تكون نقطة M' صورة لنقطة M تختلف عن M_0 بالتشابه المباشر S الذي مركزه M_0 إذا تحقق ما يلي :

$$\begin{cases} \dfrac{|z'-z_0|}{|z-z_0|}=k \\ \arg\left(\dfrac{z'-z_0}{z-z_0}\right)\equiv\theta\ [2\pi] \end{cases} \text{ تكافئ } \begin{cases} |z'-z_0|=k\times|z-z_0| \\ \arg\left(\dfrac{z'-z_0}{z-z_0}\right)\equiv\theta\ [2\pi] \end{cases} \text{ تكافئ } \begin{cases} M_0M'=k\times M_0M \\ \left(\overrightarrow{M_0M},\overrightarrow{M_0M'}\right)\equiv\theta\ [2\pi] \end{cases}$$

نستنتج أن العددين المركبين $\dfrac{z'-z_0}{z-z_0}$ و $k(\cos(\theta)+i\sin(\theta))$ متساويين .

ومنه : $\dfrac{z'-z_0}{z-z_0}=k\times e^{i\theta}$ أي $z'-z_0=k\times e^{i\theta}(z-z_0)$. نلاحظ أن لاحقة M_0 كذلك تحقق هذه العلاقة .

ب) التحويل S هو التشابه المباشر الذي مركزه النقطة التي لاحقتها $-\dfrac{1}{2}i$ أي ω ونسبته 2 وزاويته $\dfrac{\pi}{3}$.

التمرين 02 بكالوريا 2008// الموضوع الأوّل شعبة رياضيات

المستوي منسوب الى م م م . نعتبر النقطتين A و B اللتين لا حقتاهما $\sqrt{3}-i$ و $\sqrt{3}+3i$ على الترتيب

(1) أكتب العبارة المركبة للتشابه المباشر s الذي مركزه O ويحول A الى B ثم عين زاويته ونسبته

(2) نعرف متتالية النقط من المستوي المركب كما ياتي $A_0=A$: ومن اجل كل عدد طبيعي n : $A_{n+1}=s(A_n)$.

نرمز الى لاحقة A_n بالرمز z_n

(أ) أنشيئ في المستوي المركب النقط : A_0 و A_1 و A_2

(ب) برهن أن : $z_n=2(\sqrt{3})^n\times e^{i\left(n\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)}$

(ج) عين مجموعة العداد الطبيعية n التي تنتمي من اجلها النقطة A_n الى المستقيم (OA_1)

(3) نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة كما يلي: $u_0=A_0A_1$ و من اجل كل عدد طبيعي n : $u_n=A_nA_{n+1}$

(أ) بين ان المتتالية (u_n) هندسية يطلب تحديد حدها الاول u_0 واساسها q

(ب) استنتج عبارة u_n بدلالة n

(ج) احسب بدلالة n المجموع S_n حيث $S_n=u_0+u_1+u_2+....+u_n$ ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$

الحل

A و B نقطتان من المستوي حيث : $z_A=\sqrt{3}-i$ و $z_B=3+3i$

(1) $S:M(Z)\to M'(Z')$

$z'-z_O=ke^{i\theta}(z-z_O)$

و هي العبارة المركبة للتشابه المباشر الذي مركزه المبدأ O و زاويته θ و نسبته k. حيث $z_O=0$

و لدينا : $A(z_A)\xrightarrow{s}B(z_B)$ ومنه $z_B=ke^{i\theta}z_A$ ومنه $ke^{i\theta}=\dfrac{z_B}{z_A}=\sqrt{3}i$

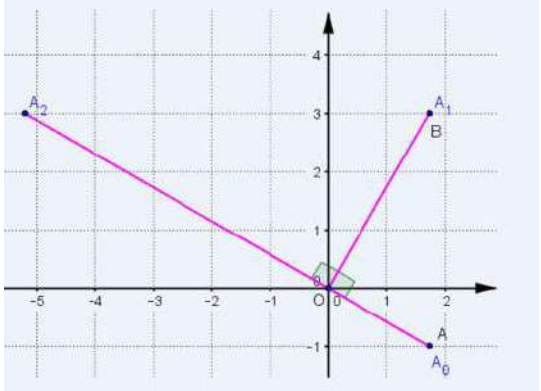
إذن العبارة المركبة للتشابه المباشر s هي $z'=\sqrt{3}.i.z$

نسبة التشابه المباشر هي : $k=\left|\sqrt{3}i\right|=\sqrt{3}$ و زاويته هي

$\theta=\dfrac{\pi}{2}+2\pi k$

(2) لدينا $A_0=A$ و $A_{n+1}=s(A_n)$

(أ) انشاء النقاط A_0 و A_1 و A_2 التي لواحقها z_0 و z_1 و z_2



لدينا $A_1 = s(A_0)$ ومنه $z_1 = i\sqrt{3} \times z_0 = i\sqrt{3}\left(\sqrt{3} - i\right) = 3i + \sqrt{3}$

$A_2 = s(A_1)$ ومنه $z_2 = i\sqrt{3} \times z_1 = i\sqrt{3}\left(3i + \sqrt{3}\right) = 3i - 3\sqrt{3}$

(ب) إثبات أن من اجل كل عدد طبيعي : $z_n = 2(\sqrt{3})^n \times e^{i\left(n\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right)}$

باستخدام مبدأ التراجع :

من أجل $n = 0$ الخاصية صحيحة لأن الطرف الأول $z_0 = \sqrt{3} - i$ لاحقة النقطة $A_0 = A$ و الطرف الثاني

$2(\sqrt{3})^0 \times e^{i\left(0\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right)} = 2e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)} = \sqrt{3} - i$

نفرض أن : $z_n = 2(\sqrt{3})^n \times e^{i\left(n\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right)}$ و نثبت : $z_{n+1} = 2(\sqrt{3})^{n+1} \times e^{i\left((n+1)\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right)}$

لدينا $z_{n+1} = \sqrt{3}i \times z_n = \sqrt{3}i \times 2(\sqrt{3})^n \times e^{i\left(n\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right)}$

ومنه $z_{n+1} = 2(\sqrt{3})^{n+1} \times e^{i\left(\frac{\pi}{2} + n\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right)}$ اذن $z_{n+1} = 2(\sqrt{3})^{n+1} \times e^{i\frac{\pi}{2}} \times e^{\left(n\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right)} = 2(\sqrt{3})^{n+1} \times e^{i\left((n+1)\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right)}$

(جـ)النقطة A_n تنتمي إلى المستقيم (OA_1) تعني أن النقاط O و A_1 و A_n في استقامية، أي أن $\left(\overrightarrow{OA_1}.\overrightarrow{OA_n}\right) = 0 + k\pi$

و منه $Arg\left(\frac{z_n - z_o}{z_1 - z_O}\right) = k\pi$ أي $Arg\frac{z_n}{z_1} = k\pi$ ومنه $Argz_n - Argz_1 = k\pi$ اذن $(n\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}) - (\frac{\pi}{3}) = k\pi$ و

منه: $3n - 1 - 2 = 6k$ اذن $n = 2k + 1$

(3) لدينا المتتالية (u_n) حيث : $u_0 = A_0A_1$ و $u_n = A_nA_{n+1}$:

(أ) من تعريف هذه المتتالية نكتب

$$u_{n+1} = A_{n+1}A_{n+2} = |z_{n+2} - z_{n+1}| = |i\sqrt{3}.z_{n+1} - i\sqrt{3}.z_n| = |i\sqrt{3}(z_{n+1} - z_n)|$$
$$= |i\sqrt{3}||(z_{n+1} - z_n)| = \sqrt{3}(z_{n+1} - z_n) = \sqrt{3} \times A_nA_{n+1} = \sqrt{3} \times u_n$$

ومنه $u_{n+1} = \sqrt{3} \times A_nA_{n+1}$ اذن $u_{n+1} = \sqrt{3} \times u_n$

و منه (u_n) متتالية هندسية حدها الأول

$u_0 = A_0A_1 = |z_1 - z_0| = |i\sqrt{3}z_0 - z_0| = |(i\sqrt{3} - 1)| = |z_0||i\sqrt{3} - 1| = 2 \times 2 = 4$ و أساسها $q = \sqrt{3}$

(ب) لدينا $u_n = u_0 \times q^n$ ومنه $u_n = 4(\sqrt{3})^n$

(جـ) حساب المجموع : $S_n = u_0 \times \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} = \frac{4}{\sqrt{3} - 1}\left((\sqrt{3})^{n+1} - 1\right) = 2(\sqrt{3} + 1)\left((\sqrt{3})^{n+1} - 1\right)$

$\lim_{n \to +\infty} S_n = +\infty$ لان $\lim_{n \to +\infty} (\sqrt{3})^{n+1} = +\infty$ $(\sqrt{3} \succ 1)$

(1) حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة $z^2-6z+18=0$

(2) ليكن العدد المركب $z_1=3-3i$

(أ)أكتب العدد z_1 على الشكل الأسي

(ب)نعتبر العدد المركب z_3 حيث : $z_1z_3=6(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12})$

استنتج قيمتي العددين $\cos\frac{\pi}{12}$ و $\sin\frac{\pi}{12}$

(3) في المستوي المركبالمنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{u};\vec{v})$ نعتبر النقاط A ; B ; C لواحقها على الترتيب :

$z_A=3+3i$; $z_B=3-3i$; $z_C=6$

(أ) عين زاوية الدوران الذي مركزه O ويحول النقطة A إلى النقطة B

(ب) ما طبيعة الرباعي $OACB$

الحل

(1) حل المعادلة : $z^2-6z+18=0$

$\Delta=36-72=-36=36i^2$ ومنه الحلان : $z_2=3+3i$; $z_1=\frac{6-6i}{2}=3-3i$

(2)(أ) الشكل الاسي : $|z_1|=3\sqrt{2}$ و $\sin\theta_1=-\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos\theta_1=\frac{3}{3\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ اذن $\theta=-\frac{\pi}{4}$

وبالتالي الشكل الاسي : $z_1=3\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$

(ب) استنتاج $\cos\frac{\pi}{12}$ و $\sin\frac{\pi}{12}$ حيث $z_1z_3=6(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12})$

ومنه $|z_1z_3|=\left|6(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12})\right|=6$ اذن $r_1r_3=6$ ومنه $r_3.3\sqrt{2}=6$ اذن $r_3=\sqrt{2}$

وينتج ايضا ان : $\arg(z_1z_3)=\arg 6(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12})=\frac{\pi}{12}$ اذن $\theta-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{12}$ أي $\theta=\frac{\pi}{3}$

$$z_3=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{3}}=\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$z_1z_3=(3-3i)(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{6}}{2})=\frac{3\sqrt{2}}{2}+\frac{3\sqrt{6}}{2}i-\frac{3\sqrt{2}}{2}i+\frac{3\sqrt{6}}{2}$$

$$=\frac{3\sqrt{2}+3\sqrt{6}}{2}+i\frac{3\sqrt{6}-3\sqrt{2}}{2}$$

وبالمطابقة نجد : $\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ و $\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

(3)(أ)الدوران r مركزه O و $r(A)=B$ ومنه $z_B-z_O=a(z_A-z_O)$ أي $a=\frac{z_B-z_O}{z_A-z_O}$

ومنه زاوية الدوران هي $a=\frac{z_B}{z_A}=\frac{3-3i}{3+3i}=\frac{(3-3i)(3-3i)}{(3+3i)(3-3i)}=-i$ $-\frac{\pi}{2}$

(ب)طبيعة الرباعي $OACB$: $z_{\overline{BC}}=z_C-z_B=3+3i$ و $z_{\overline{OA}}=3+3i$

إذن $\overline{OA}=\overline{BC}$ وبما أن $\arg(a)=\arg\frac{z_B-z_O}{z_A-z_O}=\arg\frac{z_B}{z_A}=-\frac{\pi}{2}$ اي $(\overline{OA},\overline{OB})=-\frac{\pi}{2}$ فان الرباعي $OACB$ مربع

نعتبر في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$ النقطتين A , B لاحقتاهما على الترتيب :

$z_A = 1+i$, $z_B = 3i$

(1)أكتب على الشكل الأسي: z_A , z_B .

(2)ليكن S التشابه المباشر الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z النقطة M' لاحقتها z' بحيث : $z' = 2iz+6+3i$

(أ)عين العناصر المميزة للتشابه المباشر S .

(ب)عين z_C لاحقة النقطة C صورة النقطة A بالتشابه المباشر S .

(ج)استنتج طبيعة المثلث ABC .

(3) .لتكن النقطة D مرجح الجملة $\{(A;2),(B;-2),(C;2)\}$

أ) عين z_D لاحقة النقطة D .

ب) عين مع التبرير طبيعة الرباعي $ABCD$.

4) لتكن M نقطة من المستوي تختلف عن B و عن D لاحقتها z و لتكن (Δ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي يكون من أجلها : $\dfrac{z_B - z}{z_D - z}$ عددا حقيقيا موجبا تماما.

(أ) تحقق أن النقطة E ذات اللاحقة $z_E = 6+3i$ تنتمي إلى (Δ).

(ب) أعط تفسيرا هندسيا لعمدة العدد المركب $\dfrac{z_B - z}{z_D - z}$ ،عين حينئذ المجموعة (Δ).

الحل

(1) $z_A = 1+i$, $z_B = 3i$

كتابة الشكل الأسي: $|z_A| = |1+i| = \sqrt{2}$ و $\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ و $\sin\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

ومنه $z_A = \sqrt{2}.e^{i\frac{\pi}{4}}$ و $|z_B| = 3$ ومنه $z_B = 3.e^{i\frac{\pi}{2}}$

(2) (أ)تعيين العناصر المميزة للتشابه المباشر S : $z' = 2iz+6+3i$ و $a = 2i$ و $b = 6+3i$

ومنه $|a| = 2$ تشابه نسبته 2وزاويته $\arg(a) = \arg(2i) = \dfrac{\pi}{2}$ ومركزه النقطة الصامدة ذات اللاحقة :

$z_0 = \dfrac{b}{1-a} = \dfrac{6+3i}{1-2i} = \dfrac{(6+3i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \dfrac{15i}{5} = 3i$ ومنه النقطة الصامدة هي النقطة B

(ب)تعيين z_C لاحقة النقطة C صورة النقطة A بالتشابه S :

$S(A) = C$ وتعني $z_C = 2iz_A + 6+3i$ ومنه $z_C = 2i(1+i)+6+3i = 4+5i$

(ج)استنتاج طبيعة المثلث ABC :

بما ان C صورة النقطة A بالتشابه S الذي مركزه B ونسبته 2 وزاويته $\dfrac{\pi}{2}$ فان $BC = 2BA$ و

$(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}) = \dfrac{\pi}{2}+2\pi k$ ومنه المثلث قائم في B

(3) النقطة D مرجح الجملة $\{(A;2),(B;-2),(C;2)\}$

(أ) تعيين z_D لاحقة النقطة D : $z=\dfrac{2z_A-2z_B+2z_C}{2-2+2}=\dfrac{2(1+i)-2(3i)+2(4+5i)}{2}=5+3i$

(ب) طبيعة الرباعي $ABCD$.

لدينا من السؤال (2) $\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right)=\dfrac{\pi}{2}+2\pi k$ وبحساب الشعاعين : $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{DC}$ نجد :

$z_{\overrightarrow{AB}}=3i-(1+i)=-1+2i$ و $z_{\overrightarrow{DC}}=4+5i-(5+3i)=-1+2i$ ومنه $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$

وبالتالي الرباعي $ABCD$ متوازي اضلاع واحدى زواياه قائمة اذن فهو مستطيل

4) (Δ) مجموعة النقط $M(z)$ التي يكون من أجلها : $\dfrac{z_B-z}{z_D-z}$ عددا حقيقيا موجبا تماما.

(أ) النقطة E حيث $z_E=6+3\,i$ تنتمي إلى (Δ) معناه $\dfrac{z_B-z_E}{z_D-z_E}$ عددا حقيقيا موجبا تماما

بالحساب نجد : $\dfrac{z_B-z_E}{z_D-z_E}=\dfrac{3i-(6+3i)}{5+3i-(6+3i)}=\dfrac{-6}{-1}=6$ اذن النقطة E تنتمي إلى (Δ)

(ب)التفسير الهندسي لعمدة $\dfrac{z_B-z}{z_D-z}$: لدينا $\arg\left(\dfrac{z_B-z}{z_D-z}\right)=\left(\overrightarrow{MD},\overrightarrow{MB}\right)$ وبما ان $\dfrac{z_B-z}{z_D-z}$ عددا حقيقيا موجبا تماما

فان $\arg\left(\dfrac{z_B-z}{z_D-z}\right)=2k\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$ أي ان الزاوية $\left(\overrightarrow{MD},\overrightarrow{MB}\right)=0+2k\pi$ أي معدومة

وبالتالي المجموعة (Δ) للنقط $M(z)$ هي المستقيم (BD)باستثناء القطعة $[BD]$

التمرين 05 بكالوريا 2011// الموضوع الأوّل شعبة علوم تجريبية

نعتبر في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$،النقاط A , B , Cلواحقها على الترتيب:

$z_A=-i$; $z_B=2+3i$; $z_C=-4+i$

(1) (أ) أكتب على الشكل الجبري العدد المركب: $\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$.

(ب).عين طويلة العدد المركب $\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ و عمدة له ، و استنتج طبيعة المثلث ABC .

(2). نعتبر التحويل T في المستوي الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z النقطة M' ذات اللاحقة z' بحيث :

$z'=iz-1-i$

(أ) عين طبيعة التحويل T محددا عناصره المميزة.

(ب) ما هي صورة النقطة B بالتحويل T .

(3). لتكن D ذات اللاحقة $z_D=-6+2i$

(أ). بين أن النقاط A , C , Dفي استقامية.

(ب). عين نسبة التحاكي h الذي مركزه A و يحول النقطة C إلى D .

(ج). عين العناصر المميزة للتشابه المباشر S الذي مركزه A و يحول B إلى D .

الحل

$z_A=-i\ ;\ z_B=2+3i\ ;\ z_C=-4+i$

(1) (أ) كتابة العدد المركب: $\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ على الشكل الجبري :

$$\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\frac{-4+i+i}{2+3i+i}=\frac{-2+i}{1+2i}=\frac{(-2+i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}=\frac{5i}{5}=i$$

(ب).تعيين الطويلة و العمدة :

$$\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=i \text{ ومنه } \left|\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right|=1 \text{ أي } \frac{|z_C-z_A|}{|z_B-z_A|}=\frac{AC}{AB}=1$$

و $\arg\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\dfrac{\pi}{2}$ وتعني ان $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\dfrac{\pi}{2}+2\pi k$ اذن المثلث ABC قائم في A ومتقايس الساقين

(2) $z'=iz-1-i$ لدينا $\arg(a)=\arg i=\dfrac{\pi}{2}$ ومنه التحويل T دوران زاويته $\theta=\dfrac{\pi}{2}$

ومركزه النقطة الصامدة ذات اللاحقة $z_0=\dfrac{b}{1-a}=\dfrac{-1-i}{1-i}=\dfrac{-(1+i)^2}{2}=\dfrac{-2i}{2}=-i=z_A$

ومنه : مركز T هو النقطة $A(0;-1)$

(ب) تعيين صورة النقطة B بالدوران T : بفرض صورة B هي B' ذات اللاحقة $z_{B'}$ فيكون : $z_{B'}=iz_B-1-i$

ويكون : $z_{B'}=i(2+3i)-1-i=2i-3-1-i=4+i=z_C$ إذن صورة النقطة B بالتحويل T هي النقطة C

(3) اثبات ان النقاط $A,\ C,\ D$ في استقامية : يكفي اثبات ان العدد $\dfrac{z_C-z_A}{z_D-z_A}$ حقيقي .

(لأن في هذه الحالة يكون $\arg\left(\dfrac{z_C-z_A}{z_D-z_A}\right)=k\pi;k\in\mathbb{Z}$ و بالتالي $\left(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AC}\right)=k\pi$)

لدينا : $\dfrac{z_C-z_A}{z_D-z_A}=\dfrac{(-4+i)-(-i)}{(-6+2i)-(-i)}=\dfrac{-4+2i}{-6+3i}=\dfrac{-2(2-i)}{-3(2-i)}=\dfrac{3}{2}$, وهو المطلوب

ب) تعيين نسبة التحاكي h الذي مركزه A و يحول C الى D :

بفرض نسبة هذا التحاكي هي k : يكون : $\overrightarrow{AD}=k\overrightarrow{AC}$ و منه يكون : $z_D-z_A=k(z_C-z_A)$

إذن : $k=\dfrac{z_D-z_A}{z_C-z_A}$ ولقد وجدنا : $\dfrac{z_C-z_A}{z_D-z_A}=\dfrac{2}{3}$, إذن : $k=\dfrac{3}{2}$

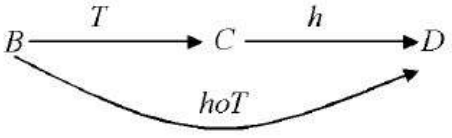
(ج) عناصر التشابه المباشر S الذي مركزه A و يحول B الى D :

لدينا C هي صورة B بالدوران T الذي مركزه A و زاويته $\theta=\dfrac{\pi}{2}$

و D هي صورة C بالتحاكي h الذي مركزه A و نسبته $k=\dfrac{3}{2}$ إذن D هي صورة B بمركب هذين التحويلين

ونعلم ان مركب دوران و تحاك لهما نفس المركز هو تشابه مباشر له نفس المركز و نسبته هي نسبة التحاكي و زاويته هي زاوية الدوران . إذن : $S=hoT$

ومنه مركز التشابه المباشر S هو A , نسبته $k=\dfrac{3}{2}$ و زاويته $\theta=\dfrac{\pi}{2}$



نعتبر في المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$ النقاط A , B , C لواحقها على الترتيب :

$z_A=3-2i$, $z_B=3+2i$, $z_C=4i$

(1)(أ) علم النقاط A , B , C

(ب) ما هي طبيعة الرباعي $OABC$ ؟إجابتك.

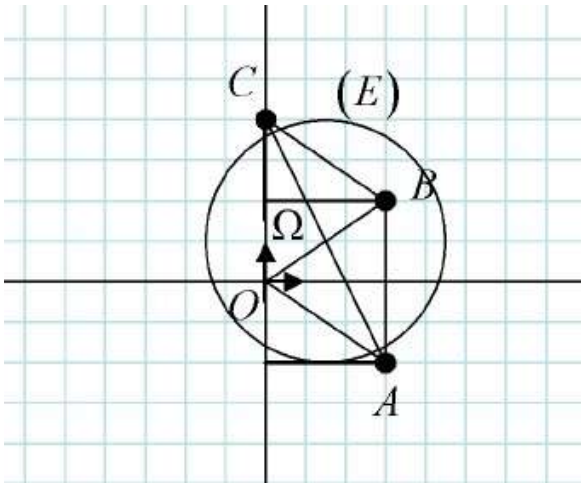
(ج) عين لاحقة النقطة Ω مركز الرباعي $OABC$.

(2) عين ثم أنشئ (E) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق: $\left\|\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=12$

(3)(أ) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-6z+13=0$ نسمي z_0 , z_1 حلي هذه المعادلة

(ب) لتكن M نقطة من المستوي لاحقتها z . عين مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق : $|z-z_0|=|z-z_1|$

الحل



1) أ) تعليم النقط A , B و C :

ب) طبيعة الرباعي $OABC$:

لدينا: $z_B-z_A=(3+2i)-(3-2i)=4i=z_C$

إذن : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}$

ومنه الرباعي $OABC$ متوازي أضلاع

ج) تعيين لاحقة النقطة Ω مركز $OABC$:

إن Ω هي منتصف $[OB]$

ومنه : $z_\Omega=\dfrac{z_O+z_B}{2}=\dfrac{3+2i}{2}=\dfrac{3}{2}+i$

2) تعيين و انشاء مجموعة النقط (E): لدينا : $\left\|\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=12$

ويكون : $\left\|(\overrightarrow{M\Omega}+\overrightarrow{\Omega O})+(\overrightarrow{M\Omega}+\overrightarrow{\Omega A})+(\overrightarrow{M\Omega}+\overrightarrow{\Omega B})+(\overrightarrow{M\Omega}+\overrightarrow{\Omega C})\right\|=12$

ومنه : $\left\|4\overrightarrow{M\Omega}+\underbrace{\left(\overrightarrow{\Omega O}+\overrightarrow{\Omega A}+\overrightarrow{\Omega B}+\overrightarrow{\Omega C}\right)}_{\vec{0}}\right\|=12$ اذن $\left\|4\overrightarrow{M\Omega}\right\|=12$ ومنه : $4M\Omega=12$ إذن : $M\Omega=3$

ومنه المجموعة (E) دائرة مركزها Ω و نصف قطرها $r=3$

(3)(أ) حل المعادلة : $z^2-6z+13=0$

لدينا : $\Delta=(-6)^2-4(1)(13)=36-52=-16=16i^2=(4i)^2$

فتقبل المعادلة حلين مترافقين هما : $z_0=\dfrac{6-4i}{2}=3-2i$ و $z_1=3+2i$

ب) تعيين مجموعة النقط M بحيث $|z-z_0|=|z-z_1|$:

نلاحظ ان : $z_0 = z_A$ و $z_1 = z_B$ ومنه : $|z - z_0| = |z - z_1|$ يعني أن $AM = BM$

إذن : مجموعة النقط M هي المستقيم محور القطعة $[AB]$

التمرين 07 بكالوريا 2011// الموضوع الأوّل شعبة رياضيات

المستوي مزود بمعلم متعامد متجانس $A\left(o,\vec{u},\vec{v}\right)$ ، B و C نقط لواحقها على الترتيب : $z_A = 1 - i$ ، $z_B = -1 + i$ ، $z_C = \sqrt{3}(1+i)$.

(1) اكتب على الشكل الاسي الاعداد z_A و z_B و z_C

(2) (أ) احسب الطويلة والعمدة للعدد المركب $\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$ ثم فسر النتائج المحصل عليها

(ب) حدد طبيعة المثلث ABC

(3) عين لاحقة النقطة D بحيث يكون الرباعي $ACBD$ معينا

(4) T التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M من المستوي لاحقتها z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث $z' = (-1+i)z + 1 - 3i$

(أ) عين طبيعة التحويل T وعناصره المميزة

(ب) استنتج طبيعة التحويل ToT وعناصره المميزة

الحل

(1) كتابة على الشكل الاسي الاعداد $z_A = 1 - i$ ، $z_B = -1 + i$ ، $z_C = \sqrt{3}(1+i)$.

$|z_A| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$ و $\arg(z_A) = -\dfrac{\pi}{4} + 2\pi k$ ومنه $z_A = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$

$|z_B| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ و $\arg(z_B) = \dfrac{3\pi}{4} + 2\pi k$ ومنه $z_B = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$

$Z_C = \sqrt{3} + \sqrt{3}i$ ومنه $|z_C| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{6}$ و $\arg(z_C) = \dfrac{\pi}{4} + 2\pi k$ ومنه $z_C = \sqrt{6}.e^{i\frac{\pi}{4}}$

(2) (أ) **حساب طويلة وعمدة العدد المركب** $\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$:

نلاحظ أن $z_A = -i(i+1)$ و $z_B = i(i+1)$ ومنه

$$\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \frac{i(i+1) + i(i+1)}{\sqrt{3}(i+1) + i(i+1)} = \frac{2i\left(\sqrt{3} - i\right)}{\left(\sqrt{3}+i\right)\left(\sqrt{3}-i\right)} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

ومنه $\left|\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right| = 1$ و $\arg\left(\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right) = \dfrac{\pi}{3}$

التفسير الهندسي : $AB = AC = 1$ و $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}\right) = \dfrac{\pi}{3} + 2\pi k$

(ب) طبيعة المثلث ABC :

مما سبق $AB = AC$ و $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}\right) = \dfrac{\pi}{3}$ نستنتج أن المثلث ABC متقايس الأضلاع.

(3) إيجاد لاحقة النقطة D :

حتي يكون الرباعي $ACBD$ متوازي اضلاع يجب أن يكون $AC=BC$ و وجدناها سابقا لان المثلث ABC متقايس الأضلاع و $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{DB}$ أي $z_C-z_A=z_B-z_D$ ومنه $z_D=z_A+z_B-z_C$

ومنه $z_D=-\sqrt{3}-i\sqrt{3}$ ومنه $z_D=1-i-1+i-(\sqrt{3}(1+i)=-\sqrt{3}-i\sqrt{3}$

(4)(أ) طبيعة التحويل T : حيث $z'=(-1+i)z+1-3i$

بما أن $|-1+i|=\sqrt{2}\neq 1$ فإن T تشابه مباشر نسبته $\sqrt{2}$ وزاويته $\arg(-1+i)=\frac{3\pi}{4}$ ومركزه

النقطة الصامدة ذات اللاحقة : $\frac{b}{1-a}=\frac{1-3i}{1-(-1+i)}=\frac{(1-3i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}=\frac{5-5i}{5}=1-i=z_A$

ومنه T تشابه مركزه A ونسبته $\sqrt{2}$ وزاويته $\frac{3\pi}{4}$

(ب) استنتاج طبيعة التحويل ToT :

بما أن T تشابه مركزه A ونسبته $\sqrt{2}$ وزاويته $\frac{3\pi}{4}$ فان ToT تشابه مركزه A ونسبته $(\sqrt{2})^2=2$ وزاويته

أي ToT تشابه مركزه A ونسبته 2 وزاويته $2.\frac{3\pi}{4}=\frac{3\pi}{2}$ أو $-\frac{\pi}{2}$

التمرين 08 بكالوريا 2012// الموضوع الأوّل شعبة علوم تجريبية

(1)نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية: $z=\frac{3i(z+2i)}{z-2+3i}$ (حيث $z\neq 2-3i$)

حل في $\mathbb{C}$ هذه المعادلة.

(2) ينسب المستوي المركب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$. A و B نقطتان لاحقتاهما على الترتيب :

z_A و z_B حيث: $z_A=1+i\sqrt{5}$ و $z_B=1-i\sqrt{5}$

- تحقق أن A و B تنتميان إلى دائرة مركزها O يطلب تعيين نصف قطرها.

(3)نرفق بكل نقطة M من المستوي لاحقتها z ، $(z\neq 2-3i)$ النقطة M' لاحقتها z' حيث: $z'=\frac{3i(z+2i)}{z-2+3i}$

النقط C ، D ، E لواحقها على الترتيب: $z_c=-2i$ ، $z_D=2-3i$ و $z_c=3i$ و (Δ) محور القطعة $[CD]$

(أ)عبر عن المسافة OM' بدلالة المسافتين CM و DM .

(ب)استنتج أنه من أجل كل نقطة M من (Δ) فإن النقطة M' تنتمي إلى دائرة (γ) يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها . تحقق أن E تنتمي إلى (γ) .

الحل

(1)- حل المعادلة :

$z=\frac{3i(z+2i)}{z-2+3i}$ ومنه $z(z-2+3i)=3i(z+2i)$ ومنه $z^2-2z+3iz=3iz-6$ أي $z^2-2z+6=0$

حل المعادلة $z^2-2z+6=0$ بالمميز : $\Delta=(-2)^2-4(1)(6)=-20=(2\sqrt{5}i)^2$

وعليه المعادلة تقبل حلين مترافقين هما : $z'=1-\sqrt{5}i$ و $z''=1+\sqrt{5}i$

(2)- التحقق أنَ A ، B تنتميان إلى دائرة واحدة مركزها O :

لدينا : $|z_A|=|z_B|=\sqrt{6}$ أي $OA=OB=\sqrt{6}$ ومنه A ، B تنتميان إلى دائرة مركزها O ونصف قطرها $\sqrt{6}$

(3)(أ)- التعبير عن المسافة OM' بدلالة المسافتين CM و DM :

لدينا $z'=\dfrac{3i(z+2i)}{z-2+3i}$ أي $z'=\dfrac{3i(z-(-2i))}{z-(2-3i)}$ ومنه $|z'|=\left|\dfrac{3i(z-(-2i))}{z-(2-3i)}\right|$

و $|z'|=OM'$ و $\left|\dfrac{3i\,(z-(-2i))}{z-(2-3i)}\right|=\dfrac{|3i|\,|(z-(-2i))|}{|z-(2-3i)|}=\dfrac{3CM}{DM}$ ومنه $OM'=\dfrac{3CM}{DM}$

(ب)- استنتاج أن $M\in(\Delta)$ تكافئ M' تنتمي لدائرة (γ) :

لدينا $OM'=\dfrac{3CM}{DM}$ وبما أن (Δ) محور القطعة $[CD]$ فان من اجل $M\in(\Delta)$ فان $CM=DM$ و ومنه $OM'=3$

و من العلاقة $OM'=3$ نستنتج أن M' تنتمي للدائرة (γ) مركزها O ونصف قطرها 3 .

- التحقق أنَ النقطة E تنتمي إلى (γ) :

E تنتمي الى (γ) معناه $OE=3$ ولدينا $OE=|z_E|=|3i|=3$ محققة

التمرين 09 بكالوريا 2012// الموضوع الثاني شعبة علوم تجريبية

(1) $p(z)$ كثير حدود للمتغير المركب z حيث: $p(z)=z^3-12z^2+48z-72$

(أ) تحقق أن 6 هو جذر لكثير الحدود $p(z)$.

(ب)حدد العددين الحقيقيين α و β بحيث من أجل كل عدد مركب z : $p(z)=(z-6)(z^2+\alpha z+\beta)$.

(جـ)- حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$. المعادلة $p(z)=0$

(2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$. A ، B ، C نقط من المستوي المركب لواحقها على الترتيب: $z_A=6$ ، $z_B=3+i\sqrt{3}$ و $z_C=3-i\sqrt{3}$

(أ) أكتب كلا من z_A ، z_B و z_C على الشكل الأسي.

(ب) أكتب العدد المركب $\dfrac{z_A-z_B}{z_A-z_C}$ على الشكل الجبري ، ثم على الشكل الأسي.

(ج) إستنتج طبيعة المثلث ABC .

(3) ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه C و نسبته $\sqrt{3}$ و زاويته $\dfrac{\pi}{2}$

(أ) جد الكتابة المركبة للتشابه S.

(ب) عين $z_{A'}$ لاحقة النقطة A' صورة النقطة A بالتشابه S .

(ج)بين أن النقط A ، B ، A' في استقامية.

الحل

(1) (أ) التحقق أن 6 هو جذر لكثير الحدود $p(z)$:

$p(6)=6^3-12\times6^2+48\times6-72=0$

(ب)تحديد العددين الحقيقيين α و β

$p(z)=(z-6)(z^2+\alpha z+\beta)=z^3-12z^2+48z-72$: .

بالنشر والمطابقة نجد $\alpha=-6$ و $\beta=12$

(جـ)- حل المعادلة $p(z)=0$ معناه $(z-6)(z^2-6z+12)=0$

ومنه $z=6$ او $z=3-i\sqrt{3}$ أو $z=3+i\sqrt{3}$

(2) $Z_A=6$ ، $Z_B=3+i\sqrt{3}$ ، $Z_C=3-i\sqrt{3}$.

(أ)كتابة كلا من Z_A ، Z_B ، Z_C على الشكل الأسي.

$Z_A=6=6e^{i0}$ ، $Z_B=3+i\sqrt{3}=2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$ و $Z_C=3-i\sqrt{3}=2\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{6}}$

(ب)كتابة العدد المركب $\frac{Z_A-Z_B}{Z_A-Z_C}$ على الشكل الجبري:

$\frac{Z_A-Z_B}{Z_A-Z_C}=\frac{6-3-i\sqrt{3}}{6-3+i\sqrt{3}}=\frac{3-i\sqrt{3}}{3+i\sqrt{3}}\times\frac{3-i\sqrt{3}}{3-i\sqrt{3}}=\frac{9-3-6i\sqrt{3}}{12}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

الشكل الأسي: $\left|\frac{Z_A-Z_B}{Z_A-Z_C}\right|=\left|\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right|=1$ و $\arg\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=-\frac{\pi}{3}$ ومنه $\frac{Z_A-Z_B}{Z_A-Z_C}=e^{-i\frac{\pi}{3}}$

(ج)استنتاج طبيعة المثلث ABC .

لدينا من السؤال (ب):لدينا $\left|\frac{Z_A-Z_B}{Z_A-Z_C}\right|=1$ تعني $AB=AC$ و $\frac{Z_A-Z_B}{Z_A-Z_C}=e^{-i\frac{\pi}{3}}$ أي $(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})=-\frac{\pi}{3}$

وهذا يعني أن ABC مثلث متقايس الاضلاع.

(3) S التشابه المباشر الذي مركزه C و نسبته $\sqrt{3}$ و زاويته $\frac{\pi}{2}$

(أ) الكتابة المركبة للتشابه S : $(z'-z_C)=\sqrt{3}\times e^{i\frac{\pi}{2}}(z-z_C)$ ومنه $z'=i\sqrt{3}z-4i\sqrt{3}$

(ب) تعيين $z_{A'}$ لاحقة النقطة A' صورة النقطة A بالتشابه S :

$z'=i\sqrt{3}z-4i\sqrt{3}$ ومنه $z_{A'}=i\sqrt{3}z_A-4i\sqrt{3}$ أي $z_{A'}=i\sqrt{3}(6)-4i\sqrt{3}$ ومنه $z_{A'}=2i\sqrt{3}$

(ج)تبيان أن النقط A ، B ، A' في استقامية :

$(z_A-z_{A'})=-2(z_A-z_B)$ ومنه $\overrightarrow{AA'}=-2\overrightarrow{AB}$ ومنه النقط A ، B ، A' في استقامية .

التمرين 10 بكالوريا 2013// الموضوع الأوّل شعبة علوم تجريبية

(1)حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة (1) ذات المجهول z : (1).... $z^2-(4\cos\alpha)z+4=0$ حيث α حقيقي.

(2)من أجل $\alpha=\frac{\pi}{3}$ ، نرمز إلى حلي المعادلة (1) بـ z_1 و z_2 . بين أن: $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2013}=1$

(3)نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ النقط A ، B و C التي لواحقها :

$z_A=1+i\sqrt{3}$ ، $z_B=1-i\sqrt{3}$ و $z_c=4+i\sqrt{3}$ على الترتيب.

(أ)أنشئ النقط A ، B و C .

(ب)أكتب على الشكل الجبري العدد المركب $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$. ثم استنتج أن C هي صورة B بالتشابه المباشر S الذي مركزه A و يطلب تعيين نسبته و زاويته.

(ج)- عين لاحقة النقطة G مرجح الجملة $\{(A;1),(B;-1),(C;2)\}$. ثم أنشئ G .

(د)- أحسب z_D لاحقة النقطة D ، بحيث يكون الرباعي $ABDG$ متوازي أضلاع.

الحل

(1) حل المعادلة: $z^2 - (4\cos\alpha)z + 4 = 0$ .....(1)

أي $\Delta' = b'^2 - ac = (2\cos\alpha)^2 - 4 = 4\cos^2\alpha - 4$

$\Delta = 16\cos^2\alpha - 16 = -16(1-\cos^2\alpha) = -16\sin^2\alpha = (4i\sin\alpha)^2$

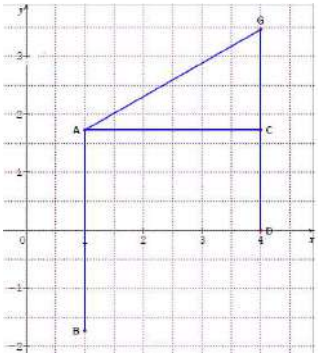
ومنه المعادلة تقبل حلين مترافقين هما : $z_1 = 2\cos\alpha + 2i\sin\alpha$ و $z_2 = 2\cos\alpha - 2i\sin\alpha$

(2) تبيان أنَ $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2013} = 1$

من أجل $\alpha = \frac{\pi}{3}$ يكون $z_1 = 2.\frac{1}{2} + 2i.\frac{\sqrt{3}}{2} = 1 + i\sqrt{3}$ و $z_2 = 2.\frac{1}{2} - 2i\frac{\sqrt{3}}{2} = 1 - i\sqrt{3}$

ومنه $z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ و $z_2 = 2e^{-\frac{\pi}{3}i}$

$$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2013} = \left(e^{\frac{2\pi}{3}i}\right)^{2013} = e^{\frac{4026\pi}{3}i} = e^{671(2\pi)i} = \cos(2\pi k) + i\sin(2\pi k) = 1$$



(2) (أ)- إنشاء النقط A ، B و C :لإنشاء النقطتين A ، B نستعمل الإحداثيات القطبية

حيث $z_A = 2e^{\frac{\pi}{3}i}$ ، $z_B = 2e^{-\frac{\pi}{3}i}$ و $z_c = 4 + i\,\mathrm{Im}(z_A)$

ب)- كتابة العدد المركب $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ على الشكل الجبري

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{4 + i\sqrt{3} - 1 - i\sqrt{3}}{1 - i\sqrt{3} - 1 - i\sqrt{3}} = \frac{3}{-2i\sqrt{3}} = \frac{i\sqrt{3}}{2}$$

استنتاج أن C هي صورة B بالتشابه المباشر S الذي مركزه A و تعيين نسبته و زاويته.

من الجواب السابق لدينا : $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{i\sqrt{3}}{2}$.....(*) تكافئ $(z_C - z_A) = \frac{i\sqrt{3}}{2}(z_B - z_A)$

المساواة الأخيرة تعني أنَ C هي صورة B بالتشابه المباشر S الذي مركزه A ونسبته $\frac{\sqrt{3}}{2}$ و زاويته $\frac{\pi}{2}$

ج)- تعيين لاحقة النقطة G و إنشاءها

لدينا G مرجح الجملة $\{(A;1),(B;-1),(C;2)\}$ ومنه $z_G=\frac{z_A-z_B+2z_C}{1-1+2}=4+2i\sqrt{3}$

ومنه $z_G=4+i\,2\mathrm{Im}(z_A)$

د) – تعيين لاحقة z_D بحيث يكون $ABDG$ متوازي أضلاع .

$ABDG$ متوازي أضلاع معناه $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{GD}$ معناه $z_D-z_G=z_B-z_A$ معناه $z_D=z_G+z_B-z_A=4$

التمرين 11 بكالوريا 2013// الموضوع الثاني شعبة علوم تجريبية

(1)نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة (E) ذات المجهول z الآتية: (E)..... $z^2+4z+13=0$

تحقق أن العدد المركب $z_1=-2-3i$ حل للمعادلة (E)، ثم جد الحل الآخر.

(2) A و B نقطتان من المستوي المركب لاحقتاهما $z_A=-2-3i$ و $z_B=i$ على الترتيب . S التشابه المباشر الذي مركزه A و نسبته $\frac{1}{2}$ و زاويته $\frac{\pi}{2}$ و الذي يحول كل نقطة $M(z)$ من المستوي إلى النقطة $M'(z')$.

(أ)بين أن $z'=\frac{1}{2}iz-\frac{7}{2}-2i$.

(ب)أحسب z_C لاحقة النقطة C ، علما أن C هي صورة B بالتشابه S .

(3)لتكن النقطة D حيث: $2\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}=\vec{0}$.

(أ)بين أن D هي مرجح النقطتين A و B المرفقتين بمعاملين حقيقيين يطلب تعيينهما.

(ب)أحسب z_D لاحقة النقطة D .

(جـ)– بين أن: $\frac{z_D-z_A}{z_C-z_A}=i$ ، ثم استنتج طبيعة المثلث ACD .

الحل

(1)– التحقق أن $z_1=-2-3i$ هو حل للمعادلة $z^2+4z+13=0$ معناه $z_1^2+4z_1+13=0$

لدينا $(-2-3i)^2+4(-2-3i)+13=4-9+12i-8-12i+13=0$

المعادلة (E) معاملاتها حقيقية و $\Delta'=-9$ أي $\Delta'\prec 0$ ومنه تقبل حلين مترافقين $z_2=\overline{z_1}=-2+3i$

(2) أ)– تبيان أنَ $z'=\frac{1}{2}iz-\frac{7}{2}-2i$

لدينا S تشابه مركزه A ويحول $M(z)$ إلى $M'(z')$ أي $z'-z_A=\frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{2}i}(z-z_A)$ و $z_A=-2-3i$

ومنه العبارة المركبة للتشابه S هي : $z'=\frac{1}{2}iz+\left(1-\frac{1}{2}i\right)(-2-3i)=\frac{1}{2}iz-\frac{7}{2}-2i$

(ب)– حساب z_C لاحقة النقطة C :

لدينا C صورة النقطة B بالتشابه S وهذا يعني $z_C=\frac{1}{2}i\times z_B-\frac{7}{2}-2i$

ومنه $z_C=\frac{1}{2}i\,(i)-\frac{7}{2}-2i=-4-2i$

(3) (أ)– تبيان أنَ D مرجح النقطتين A و B المرفقتين بمعاملين حقيقين يطلب حسابهما :

D مرجح النقطتين A و B المرفقتين بمعاملين حقيقين معناه $\alpha\overrightarrow{DA}+\beta\overrightarrow{DB}=\vec{0}$

النقطة D تحقق العلاقة الشعاعية $2\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}=\vec{0}.....(1)$

ومنه (1) تكافئ $-2\overrightarrow{DA}+\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}\right)=\vec{0}$ تكافئ $-2\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}=\vec{0}$

تكافئ $-3\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}=\vec{0}$ أي أن $\alpha=-3$ و $\beta=1$.

الخلاصة : D مرجح النقطتين A و B المرفقين بمعاملين -3 و 1 على الترتيب .

(ب) – حساب z_D لاحقة النقطة D

لدينا D مرجح الجملة $\{(A;-3),(B;1)\}$ ومنه $z_D=\dfrac{\alpha z_A+\beta z_B}{\alpha+\beta}=\dfrac{-3(-2-3i)+1(i)}{-3+1}=-3-5i$

(جـ) – تبيان أنّ : $\dfrac{z_D-z_A}{z_C-z_A}=i$ واستنتاج طبيعة المثلث ACD

لدينا $\dfrac{z_D-z_A}{z_C-z_A}=\dfrac{(-3-5i)-(-2-3i)}{(-4-2i)-(-2-3i)}=\dfrac{-1-2i}{-2+i}=i$

لدينا $\left|\dfrac{z_D-z_A}{z_C-z_A}\right|=1$ تعني $AD=AC$ و $\arg\left(\dfrac{z_D-z_A}{z_C-z_A}\right)=\dfrac{\pi}{2}.....(1)$ تعني $\left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AD}\right)=\dfrac{\pi}{2}.....(2)$

من (1) و (2) نجد : المثلث ACD قائم في A ومتساوي الساقين .

التمرين 12 بكالوريا 2014// الموضوع الأوّل شعبة علوم تجريبية

(1)حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2-6\sqrt{2}z+36=0$.

(2)المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$، لتكن النقط A ، B ، C و D التي لاحقاتها على الترتيب : $z_A=3\sqrt{2}(1+i)$ ، $z_B=\overline{z_A}$ ، $z_C=6\sqrt{2}$ و $z_D=\dfrac{z_C}{2}$

(أ)أكتب z_A ، z_B و $(1+i)z_A$ على الشكل الأسي.

(ب)أحسب $\left(\dfrac{(1+i)z_A}{6\sqrt{2}}\right)^{2014}$.

(جـ)– بين أن النقط O ، A ، B و C تنتمي إلى نفس الدائرة التي مركزها D ، يطلب تعيين نصف قطرها.

(د)– أحسب $\dfrac{z_B-z_C}{z_A-z_C}$ ثم جد قيسا للزاوية $\left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}\right)$. ما هي طبيعة الرباعي $OACB$؟

(3)ليكن R الدوران الذي مركزه O و زاويته $\dfrac{\pi}{2}$.

(أ)أكتب العبارة المركبة للدوران R .

(ب)عين لاحقة النقطة C' صورة C بالدوران R ثم تحقق أن النقط C' و C ، A في استقامية.

(جـ) – عين لاحقة النقطة A' صورة A بالدوران R ثم حدد صورة الرباعي $OACB$ بالدوران R .

الحل

(1)– حل المعادلة : $z^2-6\sqrt{2}z+36=0$

$\Delta=-72=-36\times2=\left(6i\sqrt{2}\right)^2$

ومنه أو الحلان $z=3\sqrt{2}(1+i)$ أو $z=3\sqrt{2}(1-i)$

(2) (أ)- كتابة $z_A=3\sqrt{2}(1+i)$ ، $z_B=3\sqrt{2}(1-i)$ و $(1+i)z_A$ على الشكل الأسي :

لدينا $z_A=3\sqrt{2}(1+i)=3\sqrt{2}.\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=6e^{\frac{\pi}{4}i}$ و $z_B=6e^{-\frac{\pi}{4}i}$ لأنَ $z_B=\overline{z_A}$

و $(1+i)z_A=3\sqrt{2}(1+i)^2=6\sqrt{2}.i=6\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{2}i}$

ب)- حساب $\left(\frac{(1+i)z_A}{6\sqrt{2}}\right)^{2014}$

لدينا من الجواب السابق $(1+i)z_A=6\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{2}i}$ وعليه $\frac{(1+i)z_A}{6\sqrt{2}}=e^{\frac{\pi}{2}i}$

اذن $\left(\frac{(1+i)z_A}{6\sqrt{2}}\right)^{2014}=\left(e^{\frac{\pi}{2}i}\right)^{2014}=e^{\frac{2014\pi}{2}i}=e^{1007\pi i}=\cos(\pi+503.(2\pi))+i\sin(\pi+503.(2\pi))=$

$=\cos\pi+i\sin\pi=-1$

(ج) - تبيان انَ النقط O ، A ، B و C تنتمي إلى نفس الدائرة التي مركزها D وتعيين نصف قطرها

نبين أنَ $DO=DA=DB=DC$

لدينا : $DO=|z_D-z_O|=|3\sqrt{2}|=3\sqrt{2}$ ، $DA=|z_D-z_A|=|-3\sqrt{2}i|=3\sqrt{2}$

$DB=|z_D-z_B|=|3\sqrt{2}i|=3\sqrt{2}$ ، $DC=|z_D-z_C|=|-3\sqrt{2}|=3\sqrt{2}$

ومنه النقط O ، A ، B و C تنتمي لنفس الدائرة التي مركزها D ونصف قطرها $3\sqrt{2}$

(د) - حساب $\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}$ لدينا : $\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}=\frac{3\sqrt{2}(1-i)-6\sqrt{2}}{3\sqrt{2}(1+i)-6\sqrt{2}}=\frac{=-(1+i)=(1+i)^2}{(-1+i)}\frac{}{2}=i$

العلاقة $\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}=i$ تعني $\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}=e^{\frac{\pi}{2}i}$ أي قيس الزاوية $\left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}\right)$ هو $\frac{\pi}{2}$ و $CA=CB$.

من الجواب (ج) و (د) السابقين نستنتج أنَ الرباعي $OACB$ مربعا لأنَ : $CA=CB$ و وقيس الزاوية $\left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}\right)$ هو $\frac{\pi}{2}$

اذن المثلث ACB قائم في Cو من النتائج $DO=DA=DB=DC$ تعني القطران $[OC]$ و $[AB]$ متناصفان

(3) أ)- كتابة العبارة المركبة للدوران R الذي مركزه O و زاويته $\frac{\pi}{2}$

العبارة المركبة للدوران هي $z'-z_O=1e^{\frac{\pi}{2}i}(z-z_O)$ وعليه $z'=e^{\frac{\pi}{2}i}.z$.

ب)- تعيين لاحقة النقطة C' صورة C بالدوران R :

لدينا : $z'=e^{\frac{\pi}{2}i}.z$ ومنه $z_{C'}=e^{\frac{\pi}{2}i}.z_C=6\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{2}i}=6\sqrt{2}i$ اذن $z_{C'}=6\sqrt{2}i$

لدينا $z_{\overline{AC}}=3\sqrt{2}(1-i)=-3\sqrt{2}(1-i)=-z_{\overline{AC'}}$ اذن $\overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{AC'}$

ومنه النقط C ، A و C' في استقامية .

ج)- تعيين لاحقة النقطة A' صورة A بالدوران R وتحديد صورة الرباعي $OACB$ بالدوران R :

لدينا $z'=e^{\frac{\pi}{2}i}.z$ ومنه $z_{A'}=e^{\frac{\pi}{2}i}.z_A=e^{\frac{\pi}{2}i}.6\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}=6\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}i}=-z_B$ اذن $z_{A'}=6\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}i}=-z_B$

لدينا $R(O)=O$ ، $R(A)=A'$ ، $R(C)=C'$ و $R(B)=A$

ومنه صورة الرباعي $OACB$ بالدوران R هي المربع $OA'C'A$.

(1)حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z حيث: $(z-i)(z^2-2z+5)=0$

(2)في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ (وحدة الطول $1cm$)

تعطى النقط A ، B و C التي لاحقاتها : $z_A=i$ ، $z_B=1+2i$ و $z_C=1-2i$ على الترتيب.

(أ)أنشئ النقط A ، B و C .

(ب)جد z_H لاحقة النقطة H المسقط العمودي للنقطة A على المستقيم (BC)

(جـ)- أحسب مساحة المثلث ABC .

(3)ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه A و نسبته $\frac{1}{2}$ و زاويته $\frac{\pi}{2}$.

(أ)عين الكتابة المركبة للتشابه S .

(ب)بين أن مساحة صورة المثلث ABC بالتشابه S تساوي $\frac{1}{2}cm^2$.

(4) M نقطة لاحقتها z . عين مجموعة النقط M حيث: $|z|=|iz+1+2i|$

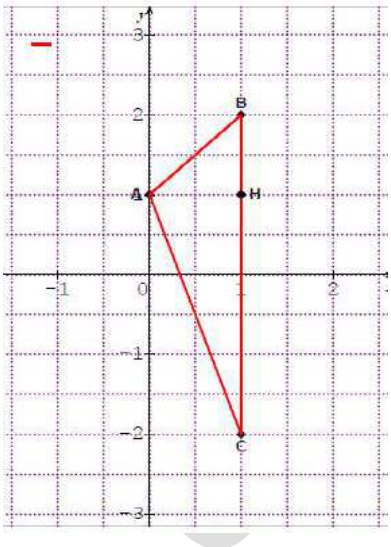
الحل

(1) – حل المعادلة : $(z-i)(z^2-2z+5)=0$ تكافئ $z=i$ أو $z^2-2z+5=0$

$\Delta=-16=(4i)^2$ ومنه الحلان : $z=1-2i$ أو $z=1+2i$

الخلاصة : الحلول هي : $z=i$ او $z=1-2i$ أو $z=1+2i$

(2) (أ)- انشاء النقطة A ، B و C لدينا: $z_A=i$ ، $z_B=1+2i$ و $z_C=1-2i$. النقطتان B و C متناظرتان بالنسبة الى محور الفواصل .



(ب)- إيجاد z_H لاحقة النقطة H :

لدينا : النقطة H هي المسقط العمودي للنقطة A على المستقيم (BC)

اذنَ H لها نفس الفاصلة مع B ونفس الترتيب مع A ومنه $z_H=1+i$

(ج). – حساب مساحة المثلث ABC :

مساحة المثلث ABC هي : $S_{ABC}=\frac{AH.BC}{2}$

لدينا $AH=|z_H-z_A|=1$ و $BC=|z_C-z_B|=|-4i|=4$

ومنه $S_{ABC}=\frac{1\times 4}{2}=2cm^2$

(3) (أ)- تعيين الكتابة المركبة للتشابه S :

العبارة المركبة للتشابه الذي مركزه A ونسبته $\frac{1}{2}$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$ هي : $z'-z_A=\frac{1}{2}\times e^{i\frac{\pi}{2}}(z-z_A)$ ومنه

$z'=\frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{2}i}z+\left(1-\frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{2}i}\right)z_A$ اي $z'=\frac{1}{2}\cdot i\cdot z+\left(1-\frac{1}{2}\cdot i\right)i$ ومنه : $z'=\frac{1}{2}iz+\frac{1}{2}+i$

(ب) – تبيان أنَ مساحة صورة المثلث ABC بالتشابه S تساوي $\frac{1}{2}cm^2$:

بما أنَ نسبة التشابه المباشر S هي $\frac{1}{2}$ فإنَ مساحة صورة المثلث ABC هي : $S' = \left(\frac{1}{2}\right)^2 .S_{ABC} = \frac{1}{4}.2 = \frac{1}{2}cm^2$

(4) – تعيين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث $|z| = |iz+1+2i|$

$|z| = |iz+1+2i|$ تكافئ $|z| = |i(z-i+2)|$ اي $|z| = |i||z-(-2+i)|$ ومنه $|z| = |z-(-2+i)|$ وبوضع

$M(z)$ و $O(0)$ و $D(-2+i)$ فإنَ العبارة الاخيرة تكتب على الشكل $OM = DM$

وعليه مجموعة النقط $M(z)$ هي محور القطعة المستقيمة $[OD]$

التمرين 14 بكالوريا 2014// الموضوع الأوّل شعبة رياضيات

(1) حل في مجموعة الاعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة التالية : $(z-1-2i)(z^2-2(1+\sqrt{3})z+5+2\sqrt{3})=0$

(2) نعتبر في المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ النقط A,B,C,D لاحقاتها على الترتيب

$z_A = 1+2i$; $z_B = 1+\sqrt{3}+i$; $z_C = 1+\sqrt{3}-i$, $z_D = 1-2i$.

(أ) بين أن $AB = CD$ و (AD) يوازي (BC) .

(ب) تحقق أن $\frac{z_A+z_C}{2} \neq \frac{z_B+z_D}{2}$ ثم استنتج طبيعة الرباعي $ABCD$.

(3)(أ)– بين أن $\frac{z_D-z_B}{z_A-z_B} = \sqrt{3}.e^{i\frac{\pi}{2}}$. استنتج أن D هو صورة A بتشابه مباشر مركزه B يطلب تعيين نسبته و زاويته

(ب) – بين أن المثلث ADB قائم و أن النقط $A;B;C;D$ تنتمي إلى دائرة يطلب تحديد مركزها و نصف قطرها.

استنتج إنشاء الرباعي $ABCD$.

الحل

(1) حل في مجموعة الاعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة التالية : $(z-1-2i)(z^2-2(1+\sqrt{3})z+5+2\sqrt{3})=0$

لدينا $(z-1-2i)(z^2-2(1+\sqrt{3})z+5+2\sqrt{3})=0$ يكافئ $z-1-2i=0$ أي $z=1+2i$

أو $z^2-2(1+\sqrt{3})z+5+2\sqrt{3}=0$ ومميزها $\Delta=-4$ فنجد : $z=1+\sqrt{3}+i$ و $z=1+\sqrt{3}-i$

إذن ، حلول المعادلة هي $1+2i$ ، $1+\sqrt{3}+i$ ، $1+\sqrt{3}-i$

(2) أ)– تبيان أنَ : $AB = CD$ و (AD) يوازي (BC) :

لدينا : $z_A = 1+2i$; $z_B = 1+\sqrt{3}+i$; $z_C = 1+\sqrt{3}-i$, $z_D = 1-2i$

$AB = |z_B - z_A| = |1+\sqrt{3}+i-1-2i| = |\sqrt{3}-i| = 2$ و $DC = |1-2i-1-\sqrt{3}+i| = |-\sqrt{3}-i| = 2$

ولدينا : $z_D - z_A = \overline{z}_A - z_A = -4i$ و $z_C - z_B = z_C - \overline{z}_C = -2i$ ومنه $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{BC}$ مرتبطان خطيا

ومنه (AD) يوازي (BC)

ب)– التحقق أنَ $\frac{z_A+z_C}{2} \neq \frac{z_B+z_D}{2}$ واستنتاج طبيعة الرباعي $ABCD$

$z_A+z_C = 2+\sqrt{3}+i$ و $z_B+z_D = 2+\sqrt{3}-i$ ومنه $\frac{z_A+z_C}{2} \neq \frac{z_B+z_D}{2}$

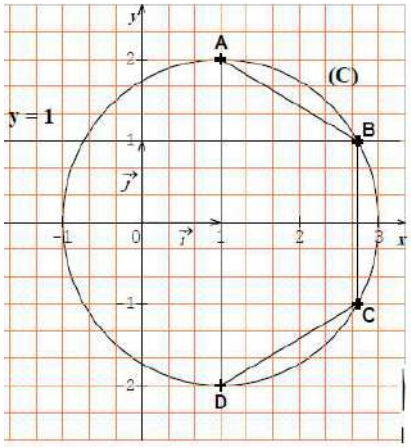
الاستنتاج :بما ان $\frac{z_A+z_C}{2} \neq \frac{z_B+z_D}{2}$ فان القطرين $[AC]$ و $[BD]$ غير متناصفين و $AB = CD$

ومنه $ABCD$ شبه منحرف متقايس الساقين .

(3)(أ)- تبيان أن $\frac{z_D-z_B}{z_A-z_B}=\sqrt{3}.e^{i\frac{\pi}{2}}$: لدينا : $z_D-z_B=-\sqrt{3}\left(1+i\sqrt{3}\right)$ و $z_A-z_B=-\left(\sqrt{3}-i\right)$

ومنه $\frac{z_D-z_B}{z_A-z_B}=\frac{-\sqrt{3}\left(1+i\sqrt{3}\right)}{-\left(\sqrt{3}-i\right)}=\frac{\sqrt{3}\left(1+i\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}+i\right)}{4}=\frac{4\sqrt{3}i}{4}=\sqrt{3}i$ إذن $\frac{z_D-z_B}{z_A-z_B}=\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}$

الاستنتاج : لدينا $\left(z_D-z_B\right)=\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}\left(z_A-z_B\right)$ أي $\begin{cases}BD=BA\sqrt{3}\\ \left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BD}\right)=\frac{\pi}{2}(2\pi)\end{cases}$



إذن : D هي صورة A بالتشابه المباشر الذي مركزه B ونسبته $\sqrt{3}$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

ب)- تبيان أن المثلث ADB قائم :

مما سبق $\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BD}\right)=\frac{\pi}{2}$ اي $(BA)\perp(BD)$ ومنه المثلث ADB قائم في B .

اذن النقط A,B و D تنتمي إلى الدائرة التي قطرها $[AD]$ ومركزها $I(1;0)$.

بما أنَ النقطتين B و C متناظرتان بالنسبة الى محور الفاصل فإنَ $IB=IC$.

اذن النقط A,B,C و D تنتمي إلى الدائرة التي مركزها $I(1;0)$ ونصف قطرها $IA=2$.

(ج)-استنتاج إنشاء الرباعي $ABCD$:

لتكن (C) الدائرة التي مركزها $I(1;0)$ وتمر بالنقطة $A(1,2)$.وبما أن ترتيب النقطة B هو 1 فان B هي نقطة تقاطع الدائرة (C) والمستقيم الذي معادلته $y=1$ وفاصلتها موجبة و C هي نظيرة B بالنسبة لمحور الفواصل .

التمرين 15 بكالوريا 2014// الموضوع الثاني شعبة رياضيات

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$ النقطتان A ; B ; لاحقتاهما على الترتيب :

$a=2+6i$; $b=-1+2i$

(1)أكتب العدد المركب $1+i$ على شكل أسي

(2) S التحويل النقطي الذي يرفق بكل M نقطة لاحقتها z النقطة M' لاحقتها z' حيث $z'=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}z+2$.

(أ) D النقطة ذات اللاحقة d حيث $d=2i$ جد لاحقة النقطة D' صورة D بالتحويل S ماذا تستنتج ؟

(ب)بين أن $z'-d=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}(z-d)$ و استنتج طبيعة و عناصر التحويل S

(3) (Δ) المستقيم ذو المعادلة $3x+5y=11$

(أ)تحقق أن النقطة $M_0(-3;4)$ تنتمي إلى (Δ) ثم عين نقط (Δ) التي إحداثياتها أعدادا صحيحة .

(ب) M_0' صورة M_0 بالتحويل S بين أن المستقيمين (BM_0') و (BM_0) متعامدان .

x , y عددان صحيحان من المجال $[-5\ ;\ 5]$ عين مجموعة النقط $M(x\ ;\ y)$ من المستوي بحيث يكون المستقيمان (BA) ; (BM') متعامدين حيث M' هي صورة M بالتحويل S

الحل

(1) كتابة العدد المركب $1+i$ على شكل أسي : لدينا $|1+i|=\sqrt{2}$ و $\arg(1+i)=\frac{\pi}{4}$

ومنه الشكل الأسي للعدد المركب $1+i$ هو $1+i=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

(2) أ)- ايجاد لاحقة النقطة D' صورة D بالتحويل S : $z'=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}z+2$

لدينا : النقطة D' صورة D بالتحويل S حيث لاحقة D هي $d=2i$ ومنه

$z_{D'}=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}z_D+2=(1+i)(2i)+2=2i$ ومنه نلاحظ أنَ $z_{D'}=z_D$ نستنتج أنَ النقطة D صامدة بالتحويل S

(ب) تبيان أنَ $z'-d=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}(z-d)$ واستنتاج طبيعة وعناصر التحويل S .

لدينا $z'=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}z+2$ تكافئ $z'-2i=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}z+2-2i$ ومنه $z'-2i=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}z+2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$

اذن $z'-2i=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\left(z+2\times\frac{1}{e^{i\frac{\pi}{4}}}e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)$ اي $z'-2i=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\left(z+2\times e^{-i\frac{\pi}{2}}\right)$

وتكافئ $z'-2i=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}(z-2i)$ وتكافئ $z'-d=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}(z-d)$

من العبارة $z'-d=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}(z-d)$ نستنتج أنَ التحويل S هو تشابه مباشر لأن $\left|\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right|=\sqrt{2}\neq 1$

مركزه D لأنها نقطة صامدة ونسبته $\sqrt{2}$ و زاويته $\arg\left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)=\frac{\pi}{4}$

(3) أ)- التحقق أنَ النقطة $M_0(-3;4)$ تنتمي إلى (Δ)

النقطة $M_0(-3;4)$ تنتمي إلى (Δ) لأنَ : الثنائية $(-3;4)$ تحقق معادلة (Δ) : $3(-3)+5(4)=11$

- تعيين نقط (Δ) التي إحداثياتها أعداد صحيحة :

نقط (Δ) التي إحداثياتها أعداد صحيحة هي النقط التي إحداثيتها حلول المعادلة $3x+5y=11$

البحث عن حلول المعادلة :

بما أنَ $(-3;4)$ حلا خاصا للمعادلة $3x+5y=11$ فإنَ (S)..... $\begin{cases}3x+5y=11\\3(-3)+5(4)=11\end{cases}$

الجملة (S) تكافئ $3(x+3)+5(y-4)=0$ وتكافئ $3(x+3)=5(y-4)=0$

من المعادلة $3(x+3)=5(y-4)=0$ نستنتج أنَ :

* $3/5(4-y)$ وبما أنَ 3 أولي مع 5 فإنَ $3/(4-y)$ (حسب مبرهنة غوص) ومنه $y=-3k+4$

* $5/3(x+3)$ وبما أنَ 5 أولي مع 3 فإنَ $5/(x+3)$ (حسب مبرهنة غوص) ومنه $x=5k-3$

وعليه نقط (Δ) التي إحداثياتها أعداد صحيحة هي النقط التي إحداثياتها

$(x;y)=(5k-3;-3k+4)$ حيث k عدد صحيح.

(ب)- تبيان أنّ المستقيمين (BM'_0) و (BA) متعامدان .

لدينا : M'_0 صورة M_0 بالتحويل S ومنه لاحقة النقطة M'_0 هي :

$$z_{M'_0}=\sqrt{2}^{i\frac{\pi}{4}}z_{M'_0}+2=(1+i)(-3+4i)+2=-5+i$$

المستقيمان (BM'_0) و (BA) متعامدان معناه $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BM'_0}=0$

لدينا $\overrightarrow{BM'_0}(-4;-1)=-1.(-4)+4.(-1)=0$ ، $\overrightarrow{BA}(-1;4)$ ومنه $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BM'_0}=0$

(4) - تعيين مجموعة النقط $M(x;y)$ من المستوي بحيث يكون المستقيمان (BA) و (BM') متعامدان

(BA)و (BM') متعامدان معناه $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BM'}=0$ و $\overrightarrow{BM'}(x-y+3;x+y-2)$. و $\overrightarrow{BA}(-1;4)$

اذن $-1(x-y+3)+4(x+y-2)=0$. ومنه $3x+5y=11$ حيث $-5\le x\le 5$ و $-5\le y\le 5$

لدينا : حلول المعادلة $3x+5y=11$ هي $(x;y)=(5k-3;-3k+4)$

ومنه $\begin{cases}-5\le y\le 5\\-5\le x\le 5\end{cases}$ أي $\begin{cases}-5\le 5k-3\le 5\\-5\le -3k+4\le 5\end{cases}$ وتكافئ $\begin{cases}\frac{-2}{5}\le k\le\frac{8}{5}\\-\frac{1}{3}\le k\le 3\end{cases}$ ومنه $k\in\{0;1\}$

ومنه توجد نقطتان إحداثياتهما : $(-3;4)$ و $(2;1)$.

التمرين 16 بكالوريا 2015// الموضوع الأوّل شعبة علوم تجريبية

(I)عين العددين المركبين α و β حيث: $\begin{cases}2\alpha-\beta=-3\\2\overline{\alpha}+\overline{\beta}=-3-2i\sqrt{3}\end{cases}$ مع $\overline{\alpha}$ مرافق α و $\overline{\beta}$ مرافق β

(II) المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$. A ، B و C النقط التي لاحقاتها على الترتيب :

$z_A=-\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ، و $z_B=\overline{z_A}$ ، و $z_A=z_C.e^{i\frac{\pi}{3}}$.

(1)(أ) أكتب كلا من z_A و z_C على الشكل الأسي ثم عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون $\left(\frac{z_A}{z_C}\right)^n$ عددا حقيقيا سالبا

(ب) تحقق أن العدد: $(\frac{z_A}{\sqrt{3}})^{2015}+(\frac{z_B}{\sqrt{3}})^{1962}-(\frac{z_C}{\sqrt{3}})^{1435}$ حقيقي.

(2) D نقطة ذات اللاحقة: $z_D=1+i$

(أ)حدد النسبة و الزاوية للتشابه المباشر S الذي مركزه O و يحول D إلى A .

(ب) اكتب $\frac{z_A}{z_D}$ على الشكل الجبري ثم استنتج القيمة المضبوطة لكل من: $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$.

(3)عين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي تحقق: $z=k\left(i+1\right)e^{i\left(\frac{7\pi}{12}\right)}$ حيث k يمسح $\mathbb{R}^+$.

الحل

(1) تعيين العددين المركبين α و β :

$$(*)\ldots\begin{cases}2\alpha-\beta=-3\\2\overline{\alpha}+\overline{\beta}=-3-2i\sqrt{3}\end{cases}$$ تكافئ $$\begin{cases}2\alpha-\beta=-3\\2\overline{\alpha}+\overline{\beta}=\overline{-3-2i\sqrt{3}}\end{cases}$$ تكافئ $$\begin{cases}2\alpha-\beta=-3\\2\alpha+\beta=-3+2i\sqrt{3}\end{cases}\ldots(2)$$

بجمع المعادلتين (1) و (2) طرف لطرف نجد : $4\alpha=-6+2i\sqrt{3}$

ومنه $\alpha=-\frac{3}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}$ وبالتعويض في المعادلة (1) نجد $\beta=2\alpha+3$ وعليه $\beta=i\sqrt{3}$

(2) (أ)- كتابة z_A و z_C على الشكل الأسي : $|z_A|=\sqrt{3}$ و $|z_B|=\left|\overline{z_A}\right|=\sqrt{3}$

$z_A=-\frac{3}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=\sqrt{3}e^{\frac{5\pi}{6}i}$ ،

و $z_A=z_C.e^{i\frac{\pi}{3}}$ ومنه $|z_A|=|z_C|.\left|e^{i\frac{\pi}{3}}\right|$ ومنه $|z_C|=|z_A|=\sqrt{3}$

ومنه الشكل الاسي للعدد z_C : $z_C=z_A.e^{-\frac{\pi}{3}i}=\sqrt{3}e^{\frac{5\pi}{6}i}.e^{-\frac{\pi}{3}i}=\sqrt{3}e^{\left(\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\right)i}=\sqrt{3}e^{\left(\frac{\pi}{2}\right)i}$

- تعيين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون $\left(\frac{z_A}{z_C}\right)^n$ حقيقيا سالبا :

لدينا $z_A=z_C.e^{\frac{\pi}{3}i}$ أي $\left(\frac{z_A}{z_C}\right)=e^{\frac{\pi}{3}i}$ ومنه $\left(\frac{z_A}{z_C}\right)^n=e^{\frac{n\pi}{3}i}$

$\left(\frac{z_A}{z_C}\right)^n$ حقيقيا سالبا معناه $\frac{n\pi}{3}=(2k+1)\pi$ أي $n=6k+3$ و $k\in\mathbb{N}$

(ب)- التحقق أنّ العدد المركب $2\left(\frac{z_A}{\sqrt{3}}\right)^{2015}+\left(\frac{z_B}{\sqrt{3}}\right)^{1962}-\left(\frac{z_C}{\sqrt{3}}\right)^{1435}$ حقيقي

$$2\left(\frac{z_A}{\sqrt{3}}\right)^{2015}+\left(\frac{z_B}{\sqrt{3}}\right)^{1962}-\left(\frac{z_C}{\sqrt{3}}\right)^{1435}=2\left(e^{\frac{5\pi}{6}i}\right)^{2015}+\left(e^{-\frac{5\pi}{6}i}\right)^{1962}-\left(e^{\left(\frac{\pi}{2}\right)i}\right)^{1435}=$$

$$=2\left(e^{2015\times\frac{5\pi}{6}i}\right)+\left(e^{-1962\times\frac{5\pi}{6}i}\right)-\left(e^{1435\frac{\pi}{2}i}\right)=2e^{i\left(1679\pi+\frac{\pi}{6}\right)}+e^{-i.1635\pi}-e^{i\left(\pi+\frac{\pi}{2}\right)}=$$

$$=2e^{\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)i}+\left(e^{\pi i}\right)-\left(e^{\left(\frac{-\pi}{2}\right)i}\right)=2\left(-\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)-1-(-i)=-\sqrt{3}-i-1+i=-\sqrt{3}-1$$

(2) (أ)- تحديد نسبة وزاوية التشابه المباشر S : لدينا $z_D=\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$

العبارة المركبة للتشابه المباشر S هي من الشكل : $z'-z_O=ke^{i\theta}(z-z_O)$

لدينا المركز هو O و S يحول D إلى A وعليه تكون العبارة المركبة ل S من الشكل $z_A=ke^{\theta}z_D$

ومنه $ke^{i\theta}=\frac{z_A}{z_D}=\frac{\sqrt{3}e^{\frac{5\pi}{6}i}}{\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}}=\frac{\sqrt{3}e^{\frac{5\pi}{6}i}.e^{-\frac{\pi}{4}i}}{\sqrt{2}.}=\sqrt{\frac{3}{2}}e^{\frac{7\pi}{12}i}$ وعليه النسبة $k=\sqrt{\frac{3}{2}}$ الزاوية $\theta=\frac{7\pi}{12}$

(ب)- كتابة العدد $\frac{z_A}{z_D}$ على الشكل الجبري ، استنتاج القيمة المضبوطة

لدينا $\frac{z_A}{z_D}=\frac{-\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}{1+i}=\frac{\left(-\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\left(-\sqrt{3}+i\right)(1-i)}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}\left[\left(1-\sqrt{3}\right)+i\left(1+\sqrt{3}\right)\right]$

استنتاج القيمة المضبوطة لكل من $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$

من الجواب السابق لدينا $\frac{z_A}{z_D}=\frac{\sqrt{3}}{4}\left[\left(1-\sqrt{3}\right)+i\left(1+\sqrt{3}\right)\right]$ و $\frac{z_A}{z_D}=\sqrt{\frac{3}{2}}e^{\frac{7\pi}{12}i}$

بالمطابقة بين الشكلين نستنتج أنَ :

$\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(1-\sqrt{3}\right).\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ وعليه $\sqrt{\frac{3}{2}}\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(1-\sqrt{3}\right)$

$\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(1+\sqrt{3}\right).\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ وعليه $\sqrt{\frac{3}{2}}\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(1+\sqrt{3}\right)$

(3) – تعيين مجموعة النقط $M(z)$ التي تحقق : $z=k(1+i)e^{\frac{7\pi}{12}i}$ حيث k يمسح $\mathbb{R}^+$

لدينا $z=k(1+i)e^{\frac{7\pi}{12}i}$ تكافئ $z=k.z_D\times e^{\frac{7\pi}{12}i}$ ومن العلاقة السابقة فان : $z_A=\sqrt{\frac{3}{2}}.z_D\times e^{\frac{7\pi}{12}i}$

اذن $z=k\sqrt{\frac{2}{3}}\times z_A$ و منه يمكن ان نكتب : $z-z_O=k\sqrt{\frac{2}{3}}\times(z_A-z_O)$ أي $\overline{OM}=k'\times\overline{OA}$ حيث

$k'\in\mathbb{R}^+$ وعليه مجموعة النقط $M(z)$ هي نصف المستقيم $[OA)-\{O\}$

التمرين 17 بكالوريا 2015// الموضوع الثاني شعبة علوم تجريبية

في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$. نعتبر النقط A ، B و C التي لاحقاتها على الترتيب : z_A ، z_B و z_C حيث: $z_A=2.e^{i\frac{\pi}{6}}$ و $z_B=-\overline{z_A}$ و $z_C=-(z_A+z_B)$. حيث $\overline{z_A}$ هو مرافق z_A

(1) أ) أكتب كلا من العددين المركبين: z_B و z_C على الشكل الأسي.

(ب) استنتج أن النقط A ، B و C تنتمي إلى دائرة (γ) يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها.

(جـ) انشيء الدائرة (γ) و النقط: A ، B و C.

(2) (أ) تحقق أن: $\frac{z_B-z_C}{z_B-z_A}=e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

(ب) استنتج أن المثلث ABC متقايس الأضلاع و أن النقطة O مركز ثقل هذا المثلث.

(جـ) عين و أنشيء (E) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي تحقق: $|z|=|z-\sqrt{3}-i|$.

(3)(أ) عين زاوية الدوران r الذي مركزه O و يحول C إلى A .

(ب) اثبت أن صورة (E) بالدوران r هي محور القطعة $[OB]$.

الحل

(1) كتابة كلا من z_B ، z_C على الشكل الأسي : $z_A = 2.e^{i\frac{\pi}{6}}$ اي $z_A = \sqrt{3}+i$

لدينا $z_B = \overline{-z_A} == \overline{-2e^{i\frac{\pi}{6}}} = 2e^{i\pi}\times e^{-i\frac{\pi}{6}} = 2e^{i\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)} = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$

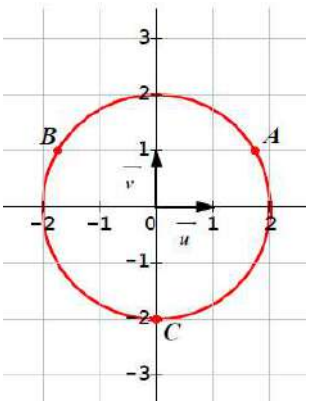
$z_C = -\left(z_A + z_B\right) = -\left(z_A - \overline{z_A}\right) = -\left(2i\ \mathrm{Im}(z_A)\right) = -2i = 2e^{-i\frac{\pi}{2}}$

(ب) – استنتاج أنَ النقط A ، B و C تنتمي إلى دائرة (γ): $|z_A| = 2$ و $|z_B| = \left|-\overline{z_A}\right| = 2$ و منه

$|z_B| = |z_A| = |z_C| = 2$ وهذا معناه $OA = OB = OC$.

اذن النقط A ، B و C تنتمي إلى دائرة (γ) مركزها O ونصف قطرها 2

(جـ) – إنشاء الدائرة (γ) والنقط A ، B و C .



لإنشاء النقط A ، B و C نستعمل الإحداثيات القطبية $A\left(2;\frac{\pi}{6}\right)$

$B\left(2;\frac{5\pi}{6}\right)$ و $C\left(2;\frac{-\pi}{2}\right)$

(2) (أ)– التحقق أنَ : $\frac{z_B - z_C}{z_B - z_A} = e^{\frac{\pi}{3}i}$

لدينا $z_A = \sqrt{3}+i$ ، و $z_B = -\overline{z_A} = -\sqrt{3}+i$ و $z_C = -2i$

$\frac{z_B - z_C}{z_B - z_A} = \frac{-\sqrt{3}+i-(-2i)}{-\sqrt{3}+i-\left(\sqrt{3}+i\right)} = \frac{-\sqrt{3}+3i}{-2\sqrt{3}} = \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i = e^{-\frac{\pi}{3}i}$ لان $\arg\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -\frac{\pi}{3}$

(ب) – استنتاج أنَ المثلث ABC متقايس الأضلاع وأنَ O مركز ثقل هذا المثلث

العلاقة $\frac{z_B - z_C}{z_B - z_A} = e^{\frac{\pi}{3}i}$ تعني أنَ : $\left|\frac{z_B - z_C}{z_B - z_A}\right| = 1$ و $\arg\left(\frac{z_B - z_C}{z_B - z_A}\right) = -\frac{\pi}{3}$

أي انَّ $AB = BC$ وقيس الزاوية $\left(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA}\right)$ هو $\frac{\pi}{3}$ ومنه المثلث ABC متقايس الأضلاع

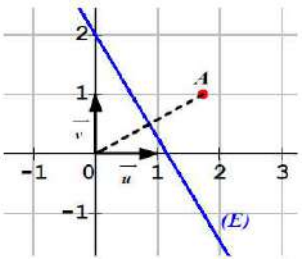
ولدينا $\frac{z_A + z_B + z_C}{3} = \frac{\sqrt{3}+i-\sqrt{3}+i-2i}{3} = 0 = z_O$ معناه $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC} = \vec{0}$

و هذا يعني النقطة O مركز ثقل هذا المثلث

(ج) تعيين و إنشاء مجموعة النقط (E) :

$|z| = |z-\sqrt{3}-i|$ تكافئ $|z_M - z_O| = |z_M - z_A|$ وتكافئ $MO = MA$.

اذن (E) مجموعة النقط $M(z)$ هي محور القطعة $[OA]$



(3) (أ)– تعيين زاوية الدوران r مركزه O و يحول C إلى A .

العبارة المركبة للدوران r هي من الشكل : $z' - z_O = e^{i\theta}\left(z - z_O\right)$ أي $z_A = e^{i\theta}.z_C$

ومنه $e^{i\theta}=\frac{z_A}{z_C}=\frac{2e^{\frac{\pi}{6}i}}{2e^{-\frac{\pi}{2}i}}=e^{\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}\right)i}=e^{\left(\frac{2\pi}{3}\right)i}$ ومن زاوية الدوران هي $\theta=\frac{2\pi}{3}+2k\pi$

(ب) – إثبات أنَ صورة (E) بالدوران r هي محور القطعة $[OB]$:

حيث (E) هي محور القطعة $[OA]$

العبارة المركبة للدوران هي : $z'=e^{i\frac{2\pi}{3}}z$ و صورة المركز O بالدوران r هي O لأنَ المركز نقطة صامدة .

وصورة النقطة A بالدوران r هي B لأنَ $z_B=e^{\frac{2\pi}{3}i}z_A=2e^{i\frac{2\pi}{3}}.e^{\frac{\pi}{6}i}=2e^{\frac{5\pi}{6}i}$

وعليه صورة (E) بالدوران r هي محور القطعة $[OB]$.

التمرين 18 بكالوريا 2015// الموضوع الثاني شعبة تقني رياضي

(1)حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية : $z^2-4(\sin\theta)z+4=0$.....(1) حيث θ عدد حقيقي

(2)من أجل $\theta=\frac{\pi}{3}$ نرمز إلى حلي المعادلة (1). بـ z_1 و z_2 أكتب z_1 و z_2 على الشكل الأسي .

(3)نعتبرفي المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ النقط A ; B ; C لاحقتاهما على الترتيب $z_A=\sqrt{3}+i$; $z_B=\sqrt{3}-i$; $z_C=3\sqrt{3}+i$.

(أ)أكتب العدد المركب $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ على الشكل الجبري ثم على الشكل الأسي و أستنتج طبيعة المثلث ABC .

(ب)استنتج ان النقطة C هي صورة النقطة B بالتشابه المباشر S الذي مركزه A يطلب تعيين نسبته و زاوية له

(ج)عين لاحقة النقطة D صورة B بالانسحاب t الذي شعاعه $\overrightarrow{AC}$ ثم حدد طبيعة الرباعي $ABDC$

(4)(أ)– عين (Γ_1) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث $\frac{z-z_C}{z-z_B}$ تخيلي صرف مع $z\neq z_B$.

(ب)–عين (Γ_2) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث $\frac{z-z_C}{z-z_B}$ حقيقي مع $z\neq z_B$

الحل

(1) حل المعادلة $z^2-(4\sin\theta)z+4=0$ (1)

$\Delta=(4\sin\theta)^2-16=16\sin^2\theta-16=16(-\cos^2\theta)=(i4\cos\theta)^2$

ومنه المعادلة تقبل حلين مترافقين هما : $z_1=2(\sin\theta+i\cos\theta)$ ، $z_2=2(\sin\theta-i\cos\theta)$

(2) كتابة z_1 و z_2 على الشكل الأسي :

من أجل $\theta=\frac{\pi}{3}$ يكون $z_1=2\left(\sin\frac{\pi}{3}+i\cos\frac{\pi}{3}\right)$ و $z_2=2\left(\sin\frac{\pi}{3}-i\cos\frac{\pi}{3}\right)$

ومنه $z_1=2\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)\right]=2\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]=2e^{\frac{\pi}{6}i}$

و $z_2=\overline{z_1}=2e^{-\frac{\pi}{6}i}$

(3) (أ)– كتابة العدد المركب $\frac{z_c-z_A}{z_B-z_A}$ على الشكل الجبري :

لدينا $z_A=\sqrt{3}+i$ و $z_B=\sqrt{3}-i$ و $z_C=\sqrt{3}i$ ومنه $\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\dfrac{3\sqrt{3}+i-\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}-i-\sqrt{3}-i}=\dfrac{\sqrt{3}}{-i}=i\sqrt{3}$

كتابة العدد المركب $\dfrac{z_c-z_A}{z_B-z_A}$ على الشكل الأسي واستنتاج طبيعة المثلث ABC .

لدينا $\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=i\sqrt{3}=\sqrt{3}e^{\frac{\pi}{2}i}$ و من الجواب السابق لدينا : $\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\sqrt{3}e^{\frac{\pi}{2}i}$.

ومنه : $\dfrac{\pi}{2}$ هو قيسا للزاوية الموجهة $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$ و عليه المثلث ABC قائم في A

(ب) استنتاج ان النقطة c صورة النقطة B بالتشابه المباشر S :

من العبارة $\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\sqrt{3}.e^{\frac{\pi}{2}i}$ نجد : $z_C-z_A=\sqrt{3}e^{\frac{\pi}{2}i}\left(z_B-z_A\right)$.

نستنتج ان C هي صورة النقطة B بالتشابه المباشر S الذي مركزه A نسبته $\sqrt{3}$ و زاويته $\dfrac{\pi}{2}$.

(جـ) تعيين لاحقة D صورة B بالانسحاب t الذي شعاعه $\overrightarrow{AC}$:

النقطة D صورة النقطة B بالإ نسحاب t الذي شعاعه $\overrightarrow{AC}$ تعني $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AC}$

ومنه : $z'=z+z_{\overrightarrow{AC}}$ حيث : $z_{\overrightarrow{AC}}=z_c-z_A=2\sqrt{3}$ و $z_{B\overrightarrow{D}}=z_D-z_B$

و منه لاحقة النقطة D هي : $z_D=z_B+2\sqrt{3}=\sqrt{3}-i+2\sqrt{3}=3\sqrt{3}-i$. اذن $z_D=3\sqrt{3}-i$

ـ تحديد طبيعة الرباعي $ABDC$:

لدينا : $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$.....(1) لان D صورة B بالإنسحاب t الذي شعاعه $\overrightarrow{AC}$.

و لدينا : $\dfrac{\pi}{2}$.....(2) قيسا للزاوية الموجهة $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$.

من (1) و (2) نستنتج أن الرباعي $ABDC$ مستطيل .

(4) (أ) تعيين مجموعة النقط (Γ_1) :

العدد $\dfrac{z-z_C}{z-z_B}$ تخيلي صرف معناه $\arg\dfrac{z-z_C}{z-z_B}=\dfrac{\pi}{2}+k\,\pi$

$M\in(\Gamma_1)$ معناه $M=C$ أو $\left(\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MC}\right)=\dfrac{\pi}{2}+k\,\pi$ ومنه (Γ_1) هي الدائرة التي قطرها $[BC]$ بإستثناء النقطة B

ب) تعيين مجموعة النقط (Γ_2) :

العدد $\dfrac{z-z_c}{z-z_B}$ حقيقي معناه $\dfrac{z-z_c}{z-z_B}=0$ أو $\arg\left(\dfrac{z-z_c}{z-z_B}\right)=k\,\pi$

$M\in(\Gamma_2)$ معناه $M=C$ أو $\left(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{CM}\right)=k\,\pi$ ومنه (Γ_2) هي المستقيم (BC) بإستثناء النقطة B

التمرين 19 بكالوريا 2015// الموضوع الأوّل شعبة رياضيات

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}\right)$ نعتبر النقط A , B , C , H ; I التي لواحقها على الترتيب

$z_A=i$; $z_B=-2+i$; $z_C=-3$, $z_H=3+4i$, $z_I=-1-i$

1) أ–مثل النقط A , B , C , H ; I في معلم .

ب–عين النسبة و زاوية التشابه المباشر الذي مركزه B و يحول النقطة A إلى النقطة C .

2) عين z_G لاحقة النقطة G مركز ثقل المثلث ABC .

3) أ-أكتب على الشكل الجبري العدد $\frac{z_B - z_C}{z_H - z_A}$

ب-استنتج أن المستقيمين (AH) ; (BC) متعامدان

ج-بين أن H هي نقطة تلاقي ارتفاعات المثلث ABC

4) بين أن النقط G , H ; I في استقامية .

5) (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث $z+1+i=\sqrt{5}e^{i\theta}$ مع $\theta \in \mathbb{R}$.

أ-بين أن النقطة A تنتمي إلى المجموعة (Γ).

ب-عين طبيعة المجموعة (Γ) مع تحديد عناصرها المميزة .

ج-أنشئ المجموعة (Γ).

د-تحقق أن النقطتين B ; C تنتميان إلى المجموعة (Γ)

الحل

(1) (أ)- تمثيل النقط A, B , C , H ; I في معلم $(O;\vec{u};\vec{v})$.

(ب)-تعيين النسبة و زاوية التشابه المباشر :

العبارة المركبة للتشابه المباشر هي : $z'-z_\omega = ke^{\theta}(z-z_\omega)$

ولدينا التشابه مركزه B و يحول النقطة A إلى النقطة C

وعليه العبارة هي : $z_C - z_B = ke^{\theta}(z_A - z_B)$ ومنه $ke^{\theta} = \frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}$

تطبيق عددي : $ke^{\theta} = \frac{z_C - z_B}{z_A - z_B} = \frac{-3+2-i}{i+2-i} = \frac{-1-i}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{5\pi}{4}i}$

وعليه : نسبة التشابه هي $k = \frac{\sqrt{2}}{2}$ و $\theta = \frac{5\pi}{4}$ زاوية له .

(2) تعيين z_G لاحقة النقطة G مركز ثقل المثلث ABC

G مركز ثقل المثلث ABC معناه $z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3} = \frac{i+(-2+i)+(-3)}{3} = -\frac{5}{3} + \frac{2}{3}i$

(3)(أ)- كتابة العدد المركب $\frac{z_B - z_C}{z_H - z_A}$ على الشكل الجبري

لدينا $\frac{z_B - z_C}{z_H - z_A} = \frac{-2+i+3}{-3+4i-i} = \frac{1+i}{-3(1-i)} = \frac{(1+i)^2}{-3(1-i)(1+i)} = -\frac{1}{3}i$

(ب)-استنتاج أن المستقيمين (AH) ; (BC) متعامدان

من الجواب السابق لدينا : $\frac{z_B - z_C}{z_H - z_A} = -\frac{1}{3}i$ معناه $\frac{z_B - z_C}{z_H - z_A}$ تخيلي صرف

ومنه : المستقيمين (AH) ; (BC) متعامدان .

(ج)- تبيان أن H هي نقطة تلاقي ارتفاعات المثلث ABC

من الجواب السابق لدينا : $(AH) \perp (BC)$ معناه (AH) الإرتفاع المتعلق بالضلع

ولدينا : $(BH)\perp(AC)$ معناه (BH) الإرتفاع المتعلق بالضلع $[AC]$.

لأنَ : $\frac{z_B-z_H}{z_C-z_A}=i$ تخيلي صرف ومنه H هي نقطة تلاقي ارتفاعات المثلث ABC .

(4) تبيان أن النقط G , H ; I في استقامية .

النقط G , H ; I في استقامية معناه العدد المركب $\frac{z_G-z_H}{z_I-z_H}$ حقيقي .

بعد الحساب والتبسيط نجد $\frac{z_G-z_H}{z_I-z_H}=\frac{-\frac{5}{3}+\frac{2}{3}i-3-4i}{-1-i-3-4i}=\frac{2}{3}$

(5) (أ)-تبيان أن النقطة A تنتمي إلى المجموعة (Γ) :

لدينا (Γ) مجموعة النقط من المستوي $M(z)$ حيث : $z+1+i=\sqrt{5}e^{\theta i}$

A تنتمي إلى المجموعة (Γ) معناه $z_A+1+i=\sqrt{5}e^{\theta i}$

لدينا $z_A+1+i=i+1+i=1+2i$ ومنه $|z_A+1+i|=|1+2i|=|1+2i||e^{\theta i}|=\sqrt{5}$ لأنَ $|e^{\theta i}|=1$

ب-تعيين طبيعة المجموعة (Γ) :

لدينا $z+1+i=\sqrt{5}e^{\theta i}$ تكافئ $|z-z_I|=\sqrt{5}$ أي $IM=\sqrt{5}$.

ومنه مجموعة النقط (Γ) هي دائرة مركزها I ونصف قطرها $\sqrt{5}$.

ج-أنشاء المجموعة (Γ) (أنظر 1- أ)

د-التحقق أن النقطتين B ; C تنتميان إلى المجموعة (Γ)

B و C تنتميان إلى المجموعة (Γ) لأنَ : $IB=\sqrt{5}$ و $IC=\sqrt{5}$.

التمرين 20 بكالوريا 2015// الموضوع الثاني شعبة رياضيات

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلات ذات المجهول z التالية : $z^2-2(1-\sqrt{3})z+8=0$ (لاحظ أن $(1+\sqrt{3})^2=4+2\sqrt{3}$)

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ نعتبر النقطتان A ; B لاحقتاهما على الترتيب

$z_A=(1-\sqrt{3})+i(1+\sqrt{3})$, $z_B=\overline{z_A}$

2) أ-بين أن $\frac{z_B}{z_A}=e^{-\frac{7\pi}{6}i}$

ب-استنتج عمدة للعدد المركب z_A .

ج-استنتج القيمة المضبوطة لكل من العددين $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$.

(3)(أ)-حل في مجموعة الأعداد الصحيحة المعادلة ذات المجهول $(x;y)$ التالية $7x-2y=1$

(ب) بين أنه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ من الأعداد الصحيحة حلا للمعادلة $7x-24y=12$ فإن x يكون مضاعفا للعدد 12

ج-استنتج كل الثنائيات $(x;y)$ من الأعداد الصحيحة حلولا للمعادلة $7x-24y=12$.

د-عين مجموعة قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها العدد $(z_A)^n$ عددا حقيقيا سالبا تماما .

الحل

(1) حل المعادلة في المجموعة $\mathbb{C}$: لدينا $z^2-2\left(1-\sqrt{3}\right)z+8=0$

$$\Delta'=b'^2-a.c=\left(1-\sqrt{3}\right)^2-8=-4-2\sqrt{3}=-\left(4+2\sqrt{3}\right)=\left[i\left(1+\sqrt{3}\right)\right]^2$$

المعادلة تقبل حلّين مترافقين هما :

$$z'=\frac{-b'-\delta}{a}=\left(1-\sqrt{3}\right)-i\left(1+\sqrt{3}\right) \quad \text{و} \quad z''=\frac{-b'+\delta}{a}=\left(1-\sqrt{3}\right)+i\left(1+\sqrt{3}\right)$$

(2) (أ)- تبيان أن: $\frac{z_B}{z_A}=e^{-\frac{7\pi}{6}i}$

لدينا : $\frac{z_B}{z_A}=\frac{z_B.\overline{z_A}}{z_A.\overline{z_A}}=\frac{\left(z_B\right)^2}{\left|z_A\right|^2}=\frac{\left[\left(1-\sqrt{3}\right)-i\left(1+\sqrt{3}\right)\right]^2}{\left(1-\sqrt{3}\right)^2+\left(1+\sqrt{3}\right)^2}=\frac{-4\sqrt{3}+4i}{8}$

ومنه $\frac{z_B}{z_A}=\frac{-4\sqrt{3}+4i}{8}=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i=e^{\frac{5\pi}{6}i}=e^{-\frac{7\pi}{6}i}$ لاحظ أنّ $\frac{-7\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}-2\pi$

(ب) استنتاج عمدة للعدد المركب z_A :

لدينا $\frac{z_B}{z_A}=e^{-\frac{7\pi}{6}i}$ ومنه : $z_A=z_B.e^{\frac{7\pi}{6}i}$ ومنه $z_A=\overline{z_A}.e^{\frac{7\pi}{6}i}$ لأنّ $z_B=\overline{z_A}$

وعليه $\arg\left(z_A\right)=-\arg\left(z_A\right)+\frac{7\pi}{6}$ لأنّ $\arg\left(\overline{z_A}\right)=-\arg\left(z_A\right)$ خاصية

لدينا : $\arg\left(z_A\right)=-\arg\left(z_A\right)+\frac{7\pi}{6}$ تكافئ $\arg\left(z_A\right)=\frac{7\pi}{12}$

جـ - استنتاج القيمة المضبوطة لكل من العددين $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$.

لدينا من الجواب (2 - أ) انّ $\left|z_A\right|^2=8$ ومنه $\left|z_A\right|=2\sqrt{2}$

ولدينا $\arg\left(z_A\right)=\frac{7\pi}{12}$ وعليه $\left|z_A\right|=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12}\right).....(1)$

ولدينا أيضا من جهة أخرى $z_A=\left(1-\sqrt{3}\right)+\left(1+\sqrt{3}\right).....(2)$

بالمطابقة بين الشكلين (1) و (2) نجد :

$$\begin{cases}\cos\frac{7\pi}{12}=\frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}\\ \sin\frac{7\pi}{12}=\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\end{cases} \text{ أي } \begin{cases}2\sqrt{2}\cos\frac{7\pi}{12}=1-\sqrt{3}\\ 2\sqrt{2}\sin\frac{7\pi}{12}=1+\sqrt{3}\end{cases}$$

(3) (أ)-حل المعادلة التالية في مجموعة الأعداد الصحيحة : $7x-2y=1$

لدينا $7x-2y=1$ تكافئ $7x=2y+1$ وتكافئ $7x\equiv 1[2]$

ومنه $x \equiv 1[2]$ أي $x = 2k+1$ حيث k عدد صحيح .

لدينا $7x-2y=1$ تكافئ $2y = 7x-1$

بعد تعويض قيمة $x = 2k+1$ في هذه المعادلة نجد : $2y = 7(2k+1)-1$

ومنه $2y = 7.2k+6$ أي $y = 7k+3$

حلول المعادلة $7x-2y=1$ هي $(x;y) = (2k+1;7k+3)$ حيث k عدد صحيح .

(ب)- تبيان أنه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حلا للمعادلة $7x-24y=12$ فإن x يكون مضاعفا للعدد 12

الثنائية $(x;y)$ حلا للمعادلة $7x-24y=12$ معناه $7x = 12(y+1)$

من المعادلة $7x = 12(y+1)$ نستنتج أنَ 12 يقسم $7x$ ومنه 12 يقسم x .

أي x مضاعفا للعدد 12 لأنَ 12 أولي مع 7 وذلك حسب مبرهنة غوص .

ج- استنتاج حلول المعادلة $7x-24y=12$

من الجواب السابق لدينا x مضاعفا للعدد 12 معناه $x = 12k'$ حيث $k' \in \mathbb{Z}$.

بعد تعويض قيمة $x = 12k'$ في المعادلة $7x-24y=12$ نجد : $24y = 7(12k')-12$

أي $2y = 7k'-1$ أي $2y = -1[7]$ أي $2y = 6[7]$

ومنه $y \equiv 3[7]$ إذن $y = 7k'+3$

حلول المعادلة $7x-24y=12$ هي $(x;y) = (12k';7k'+3)$ حيث $k' \in \mathbb{Z}$

د - تعيين مجموعة قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون $(z_A)^n$ عددا حقيقيا سالبا تماما .

$(z_A)^n$ عددا حقيقيا سالبا تماما معناه $\arg(z_A)^n \equiv \pi[2\pi]$

$\arg(z_A)^n \equiv \pi[2\pi]$ تكافئ $\frac{7n\pi}{12} \equiv \pi[2\pi]$ وتكافئ $7n \equiv 12[24]$

$7n \equiv 12[24]$ ومنه $n = 12p$ حيث $p \in \mathbb{N}$ حسب الجواب السابق .

التمرين 21 بكالوريا 2016// الموضوع الأوّل شعبة علوم تجريبية

المستوى المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$. من أجل كل نقطة M من المستوي لاحقتها العدد المركب z حيث $(z \neq 1)$ نرفق النقطة M' لاحقتها العدد المركب z' حيث $z' = \frac{z-2}{z-1}$.

1) حل في C المعادلة ذات المجهول z : $z' = z$.

2) النقطتان A و B لاحقتاهما على الترتيب z_1 و z_2 حيث : $z_1 = 1-i$ و $z_2 = \overline{z_1}$.

(أ)اكتب $\frac{z_2}{z_1}$ على الشكل الأسي.

(ب)بيَن أنَ النقطة B هي صورة للنقطة A بالدوران R الذي مركزه المبدأ O , يُطلب تعيين زاوية له.

3) نضع $z' \neq z$. نعتبر النقطتين C و D لاحقتيهما 2 و 1 على الترتيب.

عيَن (Γ) مجموعة النقط M حيث M' تنتمي إلى محور التراتيب ثمَ أنشئ (Γ).

4) h التحاكي الذي مركزه المبدأ O و نسبته 2.

أ- عيّن طبيعة التحويل النقطي $S=h\circ R$ و عناصره المميّزة.

ب- اكتب العبارة المركبة للتحويل S .

جـ)عين وأنشئ المجموعة (Γ') صورة (Γ) بالتحويل النقطي S

الحل

لدينا $z'=\dfrac{z-2}{z-1}$ حيث z' لاحقة M' حيث $z\neq 1$.

1) حل في C المعادلة $z'=z$

أي أنَ $z=\dfrac{z-2}{z-1}$ ومنه حل المعادلة $*.....z^2-2z+2=0$

ومنه $(*)$ معادلة من الدرجة 2 مميزها $\Delta=-4=4i^2$ ومنه $\sqrt{\Delta}=2i$ الحلين هما

$z_1=\dfrac{2-2i}{2}=1-i$ و $z_2=\dfrac{2+2i}{2}=1+i$ مجموعة الحلول $S=\{1-i;1+i\}$

2) النقط A و B لاحقتاهما على الترتيب $z_1=1-i$ و $z_2=1+i$

أ) كتابة $\dfrac{z_2}{z_1}$ على الشكل الأسي

لدينا $\dfrac{z_2}{z_1}=\dfrac{1+i}{1-i}$ ومنه $\dfrac{z_2}{z_1}=\dfrac{1+i}{1-i}\left(\dfrac{1+i}{1+i}\right)=\dfrac{2i}{2}=i$ ومنه الشكل الاسي : $\dfrac{z_2}{z_1}=e^{i\frac{\pi}{2}}$.

ب) إثبات أنَ B هي صورة A بالدوران R الذي مركزه O .

لدينا عبارة الدوران R هي $(z_B-z_O)=e^{i\theta}(z_A-z_O)$ اذن $\dfrac{(z_B-z_O)}{(z_A-z_O)}=e^{i\theta}$

ولدينا من السؤال السابق $\dfrac{z_2}{z_1}=e^{i\frac{\pi}{2}}$ اي ان $\dfrac{z_B-z_O}{z_A-z_O}=e^{i\frac{\pi}{2}}$ بالمطابقة نجد الدوران R الذي مركزه O زاويته $\dfrac{\pi}{2}$.

3) نضع $z'\neq z$ و لدينا $z_D=1$ و $z_C=2$.

تعيين (Γ) مجموعة النقط M من المستوي حيث M' تنتمي إلى محور التراتيب

M' تنتمي إلى محور التراتيب يعني أنَ $z'=re^{i\frac{\pi}{2}}....r\in\Re_+^*$ أو الجزء الحقيقي لـ z' معدوم أو z' تخيلي صرف

نعلم أنَ $z\neq z_D$. لدينا $z'=\dfrac{z-2}{z-1}$ ومنه $z'=\dfrac{z-2}{z-1}\left(\dfrac{\overline{z}-1}{\overline{z}-1}\right)$ أي أنَ $z'=\dfrac{(x-2+iy)(x-iy-1)}{(x+iy-1)(x-iy-1)}$.

ومنه بعد النشر $z'=\dfrac{x^2+y^2-3x+2}{x^2+y^2-2x+1}+\dfrac{y}{x^2+y^2-2x+1}i$.

ومنه z' تخيلي صرف يعني أنَ $\dfrac{x^2+y^2-3x+2}{x^2+y^2-2x+1}=0$.

إذن $x^2+y^2-3x+2=0$ أي $\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+y^2=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2$.

و $x^2+y^2-2x+1\neq 0$ أي $(x-1)^2+(y-0)^2\neq 0$ أي $(x;y)\neq(1;0)$.

ومنه المجموعة (Γ) هي الدائرة التي مركزها ω ذو اللاحقة $z_W=\dfrac{3}{2}$ و نصف قطرها $r=\dfrac{1}{2}$ باستثناء النقطة $D(1;0)$

(4) (أ) h التحاكي الذي مركزه المبدأ O و نسبته 2

تعيين طبيعة التحويل $S=h\circ R$

عبارة الدوران R هي : $z'=e^{i\frac{\pi}{2}}.z$ وعبارة التحاكي h هي $z'=2z$

ومنه $S=h\circ R$ تكافئ $z'=2e^{i\frac{\pi}{2}}.z$ وهذا يعني ان S هو تشابه مباشر مركزه 0 ونسبته 2 وزاويته $\frac{\pi}{2}$

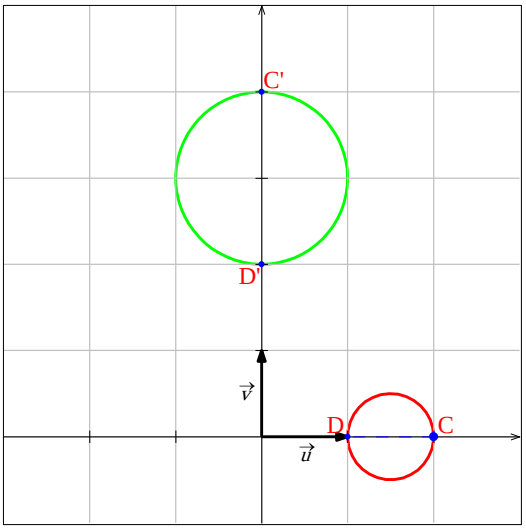
(ب) العبارة المركبة للتشابه S هي : $z'=2i.z$

(جـ) تعيين وانشاء المجموعة (Γ') صورة (Γ) بالتحويل النقطي S

لتكن ω' مركز (Γ') صورة المركز ω للدائرة (Γ) بواسطة التحويل S : أي ان $\omega'=S(\omega)$ ومنه $z'_{\omega'}=2i(z_\omega)$ ومنه $z'_{\omega'}=2i\left(\frac{3}{2}\right)$ وبالتالي لاحقة ω' هي : $3i$

ونصف قطر الدائرة (Γ) هو $r=\frac{1}{2}$, ومنه نصف قطر (Γ') هو $r'=|2|r=2\times\frac{1}{2}=1$

ومنه صورة الدائرة (Γ) هي دائرة (Γ') مركزها $\omega(0;3)$ ونصف قطرها 1



التمرين 22 بكالوريا 2016// الموضوع الثاني شعبة علوم تجريبية

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$, المعادلة : $\left(z-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)\left(z^2+\sqrt{3}z+1\right)=0$.

2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$. A , B و C نقط المستوي التي لاحقاتها على الترتيب : $z_A=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$, $z_B=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$ و $z_C=\overline{z_B}$.

أ- اكتب z_A , z_B و z_C على الشكل الأسي .

ب) بيّن أنّه يوجد تشابه مباشر S مركزه B و يحوّل النقطة C إلى النقطة A يطلب تعيين عناصره المميّزة .

3) (أ) عيّن لاحقة النقطة D حتى يكون الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع , ثمّ حدّد بدقة طبيعته.

(ب) عيّن (E) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z والتي تحقق : $|z-z_A|=|\overline{z}-z_B|$ حيث $\overline{z}$ هو مرافق z .

(جـ) عيّن (Γ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z والتي تحقق : $z=z_B+\sqrt{3}e^{i\theta}$ عندما θ يتغير على $\mathbb{R}$ ثمّ تحقّق أنّ النقطة A تنتمي إلى (Γ) .

الحل

1) حلول المعادلة $\left(z-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)\left(z^2+\sqrt{3}z+1\right)=0$ في C :

ومنه إما $\left(z-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)=0$ نجد $z_1=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$

أو $\left(z^2+\sqrt{3}z+1\right)=0$ معادلة من الدرجة الثانية ومنه $\Delta=-1$ و $\sqrt{\Delta}=i$,

نجد $z_2=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$, $z_3=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$

الحلول هي $z_1=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$, $z_2=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$, $z_3=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$.

2)النقط A , B و C لواحقها على الترتيب: $z_A=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$, $z_B=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$,

$z_C=\overline{z_B}=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$

أ) كتابة الاعداد z_A و z_B و z_C على الشكل الأسي :

$z_A=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$ ومنه $\left|z_A\right|=1$ و $\begin{cases}\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\theta=\frac{1}{2}\end{cases}$ ومنه $\theta=\frac{\pi}{6}+2\pi k$ ومنه الشكل الأسي هو $z_A=e^{i\frac{\pi}{6}}$

$z_B=e^{i\frac{5\pi}{6}}$

$z_C=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$ ومنه $\left|z_C\right|=1$ و $\begin{cases}\cos\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\theta=-\frac{1}{2}\end{cases}$ ومنه $\theta=-\frac{5\pi}{6}+2\pi k$ ومنه الشكل الأسي هو

$z_C=e^{i\frac{-5\pi}{6}}$.

ب)إثبات وجود تشابه مباشر S مركزه B ويحول C إلى A

صيغته هي $\frac{z_A-z_B}{z_C-z_B}=Ke^{i\theta}$ ومنه لدينا :

$$\frac{z_A-z_B}{z_C-z_B}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i+\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i}{-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i+\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i}=\frac{\sqrt{3}}{-i}=\sqrt{3}\cdot i=\sqrt{3}\cdot e^{i\frac{\pi}{2}}$$

أي $\frac{z_A-z_B}{z_C-z_B}=\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}$ ومنه $\left(z_A-z_B\right)=\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}\left(z_C-z_B\right)$

ومنه يوجد S تشابه مباشر مركزه B ويحول C إلى A وزاويته $\frac{\pi}{2}$ ونسبته $\sqrt{3}$.

3) أ) تعيين لاحقة النقطة D حتى يكون $ABCD$ متوازي الأضلاع : يعني $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CD}$ وهذا يعني ان

$z_A-z_B=z_D-z_C$ وتعني $\dfrac{z_A-z_B}{z_D-z_C}=1$ ومنه $z_D=z_A-z_B+z_C$ ومنه

$z_D=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i+\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i-\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i$ نجد $z_D=\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i$.

طبيعة الرباعي بدقة .

لدينا $\dfrac{z_A-z_B}{z_C-z_B}=\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}$ ومنه $\left|\dfrac{z_A-z_B}{z_C-z_B}\right|=\left|\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}\right|$ أي ان $\dfrac{AB}{CB}=\sqrt{3}$ و $\arg\left(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA}\right)=\dfrac{\pi}{2}$

ومنه $ABCD$ قائم في B فهو مستطيل

ب) تعيين (E) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z بحيث : $|z-z_A|=|\bar{z}-z_B|$

$|z-z_A|=|\bar{z}-z_B|$ يكافئ أن $|z-z_A|=\left|\overline{z-\bar{z}_B}\right|$ وبما أن $z_C=\overline{z_B}$

يصبح $|z-z_A|=\left|\overline{z-z_C}\right|$ بما أن $|z|=|\bar{z}|$ فإن $|z-z_A|=|z-z_C|$ أي أن $AM=CM$

وبالتالي (E) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z هي مستقيم محور القطعة $[AC]$

ج) تعيين (Γ) مجموعة النقط M : أي ان $z=z_B+\sqrt{3}e^{i\theta}$ ومنه $|z-z_B|=\sqrt{3}\cdot\left|e^{i\theta}\right|$

أي $BM=\sqrt{3}$ وبالتالي (Γ) هي دائرة مركزها B ونصف قطرها $R=\sqrt{3}$.

التحقق أن $A\in(\Gamma)$ يعني أن : $BA=R=\sqrt{3}$.

لدينا $|z_A-z_B|=AB=\left|\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i+\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i\right|=\sqrt{3}$. ومنه $A\in(\Gamma)$.

التمرين 23 بكالوريا 2016// الموضوع الأوّل شعبة تقني رياضي

1) حلّ في المجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $9z^2-6\sqrt{3}z+4=0$

2) في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ ، لتكن النقطتين A و B لاحقتاهما على الترتيب : $z_A=\dfrac{\sqrt{3}}{3}+\dfrac{1}{3}i$ و $z_B=\overline{z_A}$.

أ- أكتب كلّا من z_A و z_B على الشكل الأسّي .

ب- بيّن أنّ : $\left(\dfrac{z_A}{z_B}\right)^{2016}+\left(\dfrac{z_A}{z_B}\right)^{1437}=0$

جـ- عيّن قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون $\left(\dfrac{z_A}{z_B}\right)^n$ عددا حقيقيا .

3) f التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z النقطة M' لاحقتها z' حيث : $z'=\left(\dfrac{z_A}{z_B}\right)z$

أ- عيّن طبيعة التحويل النقطي f و عناصره المميّزة .

ب- أحسب z_C لاحقة النقطة C صورة النقطة A بالتحويل f .

جـ) عيّن z_D لاحقة النقطة D حتى تكون O مركز ثقل الرباعي $ABCD$.

الحل

1) حلول المعادلة $\left(9z^2-6\sqrt{3}z+4\right)=0$ في C : معادلة من الدرجة الثانية ومنه $\Delta=-36$ اي $\Delta=36\cdot i^2$

$z_1=\dfrac{6\sqrt{3}-6i}{18}$ و $z_2=\dfrac{6\sqrt{3}+6i}{18}$ ومنه نجد $z_1=\dfrac{\sqrt{3}}{3}-\dfrac{1}{3}i$ ، $z_2=\dfrac{\sqrt{3}}{3}+\dfrac{1}{3}i$

2) النقط A ، B و لواحقها على الترتيب $z_A=\dfrac{\sqrt{3}}{3}+\dfrac{1}{3}i$ ، $z_B=\overline{z_A}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}-\dfrac{1}{3}i$

أ- كتابة العدد z_A و z_B على الشكل الأسي

$z_A=\dfrac{\sqrt{3}}{3}+\dfrac{1}{3}i$ ومنه $|z_A|=\dfrac{2}{3}$ و $\begin{cases}\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\theta=\dfrac{1}{2}\end{cases}$ ومنه $\arg(z_A)=\dfrac{\pi}{6}+2\pi k$ ومنه الشكل الأسي هو $z_A=\dfrac{2}{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$

$z_B=\dfrac{\sqrt{3}}{3}-\dfrac{1}{3}i$ ومنه $|z_B|=\dfrac{2}{3}$ و $\begin{cases}\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\theta=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$ ومنه $\arg(z_B)=-\dfrac{\pi}{6}+2\pi k$ ومنه الشكل الأسي هو $z_B=\dfrac{2}{3}e^{i\frac{-\pi}{6}}$

(ب) اثبات أنَ $\left(\dfrac{z_A}{z_B}\right)^{2016}+\left(\dfrac{z_A}{z_B}\right)^{1437}=0$

لدينا $\left(\dfrac{z_A}{z_B}\right)=\dfrac{3}{2}\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{e^{i\frac{\pi}{6}}}{e^{-i\frac{\pi}{6}}}$ أي $\left(\dfrac{z_A}{z_B}\right)=e^{i\frac{\pi}{3}}$

ومنه $\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^{2016}+\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^{1437}=e^{i\frac{2016\pi}{3}}+e^{i\frac{1437\pi}{3}}=e^{i2\pi(336)}+e^{i(\pi+2\pi(239))}$

القيس الرئيسي لـ $\dfrac{1437\pi}{3}$ هو $\pi+2\pi k$

القيس الرئيسي لـ $\dfrac{2016\pi}{3}$ هو $0+2\pi k$

ومنه $e^{i\frac{2016\pi}{3}}+e^{i\frac{1437}{3}}=e^0+e^{\pi}=1-1=0$ لأن $e^{\pi}=-1$ إذن $\left(\dfrac{z_A}{z_B}\right)^{2016}+\left(\dfrac{z_A}{z_B}\right)^{1437}=0$

جـ) تعيين العدد الطبيعي n حيث $\left(\dfrac{z_A}{z_B}\right)^n\in\Re$

لدينا $\left(\dfrac{z_A}{z_B}\right)^n=e^{i\cdot n\frac{\pi}{3}}$ ومنه يكون $\left(\dfrac{z_A}{z_B}\right)^n$ حقيقيا اذا كان $\arg\left(\dfrac{z_A}{z_B}\right)^n=k\pi\ /\ k\in\mathrm{N}$ ومنه $n\dfrac{\pi}{3}=k\pi$ وبالتالي

$n=3k$ حيث $k\in\mathrm{N}$

3) f التحويل النقطي حيث $z'=\left(\dfrac{z_A}{z_B}\right)z$

أ) طبيعة التحويل f : لدينا $z'=\left(\frac{z_A}{z_B}\right)z$ أي $z'=e^{i\frac{\pi}{3}}\cdot z$ هي صيغة مركبة لدوران مركزه المبدأ O وزاويته $\frac{\pi}{3}$

ب) حساب لاحقة C صورة A بواسطة f

لدينا $z_C=e^{i\frac{\pi}{3}}z_A$ ونعلم ان $e^{i\cdot\frac{\pi}{3}}=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$

ومنه $z_C=\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{1}{3}i\right)$ اذن لاحقة النقطة C هي : $z_C=\frac{2}{3}i$

ج) تعيين لاحقة النقطة D حتى يكون O مركز ثقل الرباعي $ABCD$

يعني أنَ O مرجح الجملة $\{(A,1);(B,1);(C,1);(D,1)\}$

ومنه $\frac{z_A+z_B+z_C+z_D}{1+1+1+1}=z_O$ ومنه $z_D=-z_A-z_B-z_C$

نجد $z_D=-\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{1}{3}i-\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{1}{3}i-\frac{2}{3}i$ ومنه $z_D=-\frac{2\sqrt{3}}{3}-\frac{2}{3}i$

التمرين 24 بكالوريا 2016// الموضوع الثاني شعبة تقني رياضي

(I) (1) حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة التالية : $\left(z^2-2\sqrt{2}z+4\right)\left(2z-\sqrt{2}\right)=0$.

(2) أكتب الحلول على الشكل الأسي .

(II) المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$. نعتبر النقط A ، B ، C و D من المستوي التي لواحقها على الترتيب

$a=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ، $b=\sqrt{2}+i\sqrt{2}$ و $c=.\sqrt{2}-i\sqrt{2}$.

(1) علم النقط A ، B و C في المعلم السابق

(2) نعتبر النقطة D صورة النقطة C بالتشابه S الذي مركزه A و نسبته 3 و زاويته π .

والنقطة E صورة النقطة C بالدوران R الذي مركزه O و زاويته $-\frac{\pi}{2}$.أحسب اللاحقتين d و e للنقطتين D و E على الترتيب .

(III) نضع : $z=\frac{d-b}{e-b}$.

(1) أكتب العدد المركب z على الشكل المثلثي .

(2) نعتبر النقطة I منتصف القطعة المستقيمة $[DE]$ ، F نظيرة النقطة B بالنسبة إلى النقطة I .

ما طبيعة الرباعي $BDFE$ ؟ .

الحل

(I) حل المعادلة $\left(z^2-2\sqrt{2}z+4\right)\left(2z-\sqrt{2}\right)=0$

حلول المعادلة $z_0=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ، و $\Delta=\left(-2\sqrt{2}\right)^2-16=-8=\left(2\sqrt{2}i\right)^2$

ومنه $z_1=\frac{2\sqrt{2}+2\sqrt{2}i}{2}=\sqrt{2}+\sqrt{2}i$ ، $z_2=\frac{2\sqrt{2}-2\sqrt{2}i}{2}=\sqrt{2}-\sqrt{2}i$.

(2) الأشكال الأساسية : $z_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\times 0}$

الشكل الاسي للعدد z_1 و z_2 حيث $|z_1| = 2$ و $|z_2| = 2$

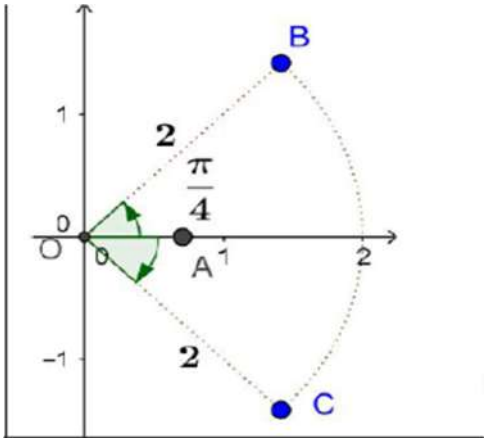
ومنه قيسا للعدد θ هو $\frac{\pi}{4}$ ومنه الشكل الاسي للعدد z_1 : $z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$

$\begin{cases} \cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

ومنه قيسا للعدد θ هو $-\frac{\pi}{4}$ ومنه الشكل الاسي للعدد z_2 : $z_2 = 2e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

و $\begin{cases} \cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

(II) (1) تعليم النقط A ، B و C



حساب اللاحقتين d و e :

$a = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ، $b = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ و $c = .\sqrt{2} - i\sqrt{2}$.

لدينا : النقطة D صورة النقطة C بالتشابه S الذي

مركزه A و نسبته 3 و زاويته π ومنه :

$d - a = 3e^{i\pi}(c - a)$ أي

اذن $d - \frac{\sqrt{2}}{2} = 3e^{i\pi}\left(\sqrt{2} - i\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$d = 3(-1)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\sqrt{2}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}$

ومنه : $d = -\sqrt{2} + 3\sqrt{2}i$

والنقطة E صورة النقطة C بالدوران R الذي مركزه O و زاويته $-\frac{\pi}{2}$ ومنه :

$e - 0 = e^{-i\frac{\pi}{2}}(c - 0)$ ومنه $e - 0 = e^{-i\frac{\pi}{2}}\left(\sqrt{2} - i\sqrt{2} - 0\right)$ أي $e = e^{-i\frac{\pi}{2}}\left(\sqrt{2} - i\sqrt{2} - 0\right)$

ومنه لاحقة النقطة E هي : $e = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i$

(III) $z = \frac{d - b}{e - b}$

(1) الشكل المثلثي للعدد z

لدينا : $z = \frac{d - b}{e - b} = \frac{-\sqrt{2} + 3\sqrt{2}i - \sqrt{2} - \sqrt{2}i}{-\sqrt{2} - \sqrt{2}i - \sqrt{2} - \sqrt{2}i} = \frac{-2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i}{-2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}i}$

$z = \frac{-2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i}{-2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}i} = \frac{-2\sqrt{2}(1 - i)}{-2\sqrt{2}(1 + i)} = \frac{(1 - i)(1 - i)}{(1 + i)(1 - i)} = -i$ ومنه : $z = -i$.

ومنه : $z=\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i.\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

نتيجة : من $\frac{d-b}{e-b}=-i$ نجد $\left|\frac{d-b}{e-b}\right|=|-i|=\frac{BD}{BE}=1$

$\begin{cases}BE=BD\\(\overrightarrow{BE},\overrightarrow{BD})=-\frac{\pi}{2}\end{cases}$.

(2) تعيين طبيعة الرباعي $BDFE$

لدينا : I منتصف $[DE]$ وكذلك I منتصف $[BF]$ (القطران متناصفان) إذن الشكل : $BDFE$ متوازي أضلاع .

ولدينا : من النتيجة السابقة : $BE=BD$ و $(BE)\perp(BD)$ ينتج : $BDFE$ مربع .

التمرين 25 بكالوريا 2016// الموضوع الأوّل شعبة رياضيات

(1)(أ)حل في مجموعة الأعداد المركبة C المعادلة : $z^2-4z+5=0$

(ب)استنتج حلول المعادلة ذات المجهول المركب z الأتية : $\left(z+1+i\left(1-\sqrt{3}\right)\right)^2-4z+1-4i\left(1-\sqrt{3}\right)=0$

(2) θ عدد حقيقي حيث : $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$ و z_0 عدد مركب طويلته 1 و θ عمدة له.

(أ)أكتب العدد المركب $1+i\sqrt{3}$ على الشكل الأسي .

(ب)عيّن θ علما أنّ : $\frac{z_0\left(1+i\sqrt{3}\right)}{\overline{z_0}}=2e^{i\frac{\pi}{2}}$. ($\overline{z_0}$ هو مرافق العدد المركب z_0).

(ج) n عدد طبيعي . من أجل قيمة θ المتحصل عليها , أكتب العدد المركب $\left[\frac{z_0\left(1+i\sqrt{3}\right)}{2}\right]^n$ على الشكل المثلثي.

(د)عيّن قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون $\left[\frac{z_0\left(1+i\sqrt{3}\right)}{2}\right]^n$ عددا حقيقيا موجبا تماما.

(3)المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$. نعتبر النقط A , B و C التي لاحقاتها على الترتيب : z_A , z_B و z_C حيث : $z_A=2-i$, $z_B=2+i$ و $z_C=1+i\sqrt{3}$

(أ)عيّن z_D لاحقة النقطة D مرجح الجملة المثقلة $\{(A,1);(B,-1);(C,1)\}$.

(ب)استنتج أن الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع .

(ج) E النقطة من المستوي المركب ذات اللاحقة z_E حيث : $\begin{cases}\arg(z_E-z_A)-\arg(z_E-z_B)=\frac{\pi}{2}\\\left|\frac{z_E-z_A}{z_E-z_B}\right|=2\end{cases}$

- بيّن أنّ : $z_E=\frac{14}{5}+\frac{3}{5}i$

- بيّن أن النقطة A هي صورة النقطة B بتشابه مباشر يطلب تعيين عناصره المميّزة.

(4) M نقطة من المستوي المركب لاحقتها z . النقطة I منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$.

(ا)عيّن z_I لاحقته النقطة I .

(ب) α عدد حقيقي , نسمي (Γ)مجموعة النقط M من المستوي المركب التي تحقّق : $z-z_I=e^{i\alpha}$

- تحقّق أن النقطة E تنتمي إلى المجموعة (Γ)

- عيّن طبيعة المجموعة (Γ) و عناصرها المميّزة عندما يتغيّر α في R .

الحل

(1) (أ) الحل في C للمعادلة : $z^2-4z+5=0$

$\Delta=-4$ و الحلين هما : $z'=2+i$ $z''=2-i$; ومنه مجموعة حلول المعادلة المعطاة هي : $S=\{2-i;2+i\}$.

ب) استنتاج حلول المعادلة :

$\left(z+1+i\left(1-\sqrt{3}\right)\right)^2-4\left(z+i\left(1-\sqrt{3}\right)\right)+1=0$ تكافئ $\left(z+1+i\left(1-\sqrt{3}\right)\right)^2-4z+1+4i\left(1-\sqrt{3}\right)=0\ldots(*)$

$\Leftrightarrow\left(z+1+i\left(1-\sqrt{3}\right)\right)^2-4\left(z+1+i\left(1-\sqrt{3}\right)\right)+5=0$

$z+1+i\left(1-\sqrt{3}\right)=2+i$ او $z+1+i\left(1-\sqrt{3}\right)=2-i$

$z=1+i\left(\sqrt{3}-2\right)$ او $z=1+i\sqrt{3}$

ومنه مجموعة حلول المعادلة $(*)$ هي : $S+\left\{1+i\sqrt{3};1+i\left(\sqrt{3}-2\right)\right\}$

(2 $z_0=e^{i\theta}$ و $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$

(أ) كتابة العدد المركب $\left(1+i\sqrt{3}\right)$على الشكل الأسي : $\left|1+i\sqrt{3}\right|=2$ و $\cos\alpha=\frac{1}{2}$و $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$ اي

$1+i\sqrt{3}=2e^{i\frac{\pi}{3}}$ ومنه : $\alpha=\frac{\pi}{3}+2\pi k$

(ب) تعيين θ : $\frac{z_0\left(1+i\sqrt{3}\right)}{\overline{z_0}}=2e^{i\frac{\pi}{2}}\ldots(1$ ومنه $\frac{e^{i\theta}\times e^{i\frac{\pi}{3}}}{e^{-i\theta}}=2e^{i\frac{\pi}{2}}$ اي $e^{i2\theta}\times2e^{i\frac{\pi}{3}}=2e^{i\frac{\pi}{2}}$

ومنه $2e^{i\left(2\theta+\frac{\pi}{3}\right)}=2e^{i\frac{\pi}{2}}$ أي $e^{i\left(2\theta+\frac{\pi}{3}\right)}=e^{i\frac{\pi}{2}}$ ومنه $2\theta+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+2\kappa\pi:\kappa\in Z$

$2\theta=\frac{\pi}{6}+2\kappa\pi$ اذن $\theta=\frac{\pi}{12}+\kappa\pi$ و بما أنّ : $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$فإنّ: $\theta=\frac{\pi}{12}$

(جـ) $\theta=\frac{\pi}{12}$ و $n\in N$ المطلوب : كتابة العدد المركب $\left(\frac{z_0\left(1+i\sqrt{3}\right)}{2}\right)^n$ على الشكل المثلثي :

$=\left(e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)}\right)^n=e^{in\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{3}\right)}=e^{i\frac{5\pi n}{12}}\left(\frac{z_0\left(1+i\sqrt{3}\right)}{2}\right)^n=\left(\frac{e^{i\theta}\times2e^{i\frac{\pi}{3}}}{2}\right)^n$

ومنه : $\left(\frac{z_0\left(1+i\sqrt{3}\right)}{2}\right)^n=e^{i\frac{5\pi n}{12}}=\left[1;\frac{5\pi n}{12}\right]$ أي : $\left(\frac{z_0\left(1+i\sqrt{3}\right)}{2}\right)^n=\cos\frac{5\pi n}{12}+i\sin\frac{5\pi n}{12}$

(د) تعيين قيم n : $\left(\frac{z_0\left(1+i\sqrt{3}\right)}{2}\right)^n \in \Re_+^*$ تعني $\arg\left(\frac{z_0\left(1+i\sqrt{3}\right)}{2}\right)^n = 2\kappa\pi \;:\kappa\in Z$

اي $\frac{5n\pi}{12}=2\kappa\pi$ ومنه $5n=24\kappa$ وتعني $24/5n$ وبما ان 24 اولي مع 5 فان 24 يقسم n

ومنه: $\boxed{n=24m \;;\mathrm{m}\in\mathrm{N}}$

(3) $z_C=1+i\sqrt{3}; z_B=2+i; z_A=2-i$

(أ) D مرجح الجملة : $\{(A;1);(B;-1);(C;1)\}$.

حساب z_D : $z_D=z_A-z_B+z_C=2-i-2-i+1+i\sqrt{3}$ ومنه $z_D=1+i\left(\sqrt{3}-2\right)$

(ب) استنتاج أنَ الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع . يكفي إثبات أن قطريه $[AC]$و $[BD]$متناصفان..

لدينا : $\frac{z_B+z_D}{2}=\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}-1}{2}$; $\frac{z_A+z_C}{2}=\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ ومنه الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع.

(جـ) E نقطة من المستوي :

$$\begin{cases}\arg\left(z_E-z_A\right)-\arg\left(z_E-z_B\right)=\frac{\pi}{2}\\ \left|\frac{z_E-z_A}{z_E-z_B}\right|=2\end{cases}\ldots(\mathrm{I})$$

المطلوب: 1) إثبات أنَ : $z_E+\frac{14}{5}+\frac{3}{5}i$

العلاقة (1) تكافئ $\begin{cases}\arg\left(\frac{z_E-z_A}{z_E-z_B}\right)=\frac{\pi}{2}\\ \left|\frac{z_E-z_A}{z_E-z_B}\right|=2\end{cases}$ وهذا يعني $z_E-z_A=2i\left(z_E-z_B\right)$

اذن $\left(1-2i\right)z_E=z_A-2iz_B$ ومنه $\left(1-2i\right)z_E=2-i-2i\left(2+i\right)$

اي $\left(1-2i\right)z_E=4-5i$ ومنه $z_E=\frac{4-5i}{1-2i}$

بضرب البسط و المقام في مرافق المقام نجد أنَ : $z_E=\frac{14}{5}+\frac{3}{5}i$

- إثبات أنَ A هي صورة B بتشابه مباشر.:

مما سبق لدينا $z_E-z_A=2i\left(z_E-z_B\right)$ اي $z_E-z_A=2e^{i\frac{\pi}{2}}\left(z_E-z_B\right)$

ومنه $z_A-z_E=2e^{i\frac{\pi}{2}}\left(z_B-z_E\right)$

وهذا يعني أنَ A هي صورة B بتشابه مباشر مركزه E و نسبته 2 وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

(4) Mنقطة من المستوي لاحقتها zو I منتصف $[AB]$.

(أ) تعيين z_I : $z_I=\frac{z_A+z_B}{2}=\frac{4}{2}=2$

(ب)..$\alpha\in\Re$و (Γ) مجموعة النقط Mمن المستوي : $z-z_I=e^{ia}$

المطلوب : التحقق من أنَ : $E\in(\Gamma)$ ولبرهان ذلك يكفي إثبات أنَ : $z-z_I=e^{ia}$

و بما أنَ aكيفي فيكفي إثبات أنَ : $|z_E-z_I|=1$

$|z_E - z_I| = \left|\frac{4}{5} + \frac{3}{5}i\right| = \sqrt{\frac{16}{25} + \frac{9}{25}} = 1$ ومنه : $E \in (\Gamma)$

- طبيعة (Γ) و تحديد عناصرها لما يمسح α المجموعة $\Re$.

$M \in (\Gamma) \Leftrightarrow z - z_I = e^{i\alpha} \Leftrightarrow z_M - z_I = e^{i\alpha}$

$\begin{cases} IM = 1 \\ (\vec{u}; \overrightarrow{IM}) \equiv \alpha [2\pi] \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} |z_M - z_I| = 1 \\ \arg(z_M - z_I) \equiv \alpha [2\pi] \end{cases}$

ومنه مجموعة النقط (Γ) لما يمسح α المجموعة $\Re$ هي الدائرة ذات المركز I و نصف قطر 1 .

التمرين 26 بكالوريا 2016// الموضوع الثاني شعبة رياضيات

(I) – (1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2 - 2z + 2 = 0$

(2) جد العددين المركبين z_1 و z_2 حيث : $\begin{cases} 2z_1 - 3z_2 = 5i\sqrt{2} \\ z_1 + 3z_2 = -2i\sqrt{2} \end{cases}$

(II) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$. النقط A, B, C, D و H لاحقاتها على الترتيب :

$z_A = i\sqrt{2}$, $z_B = -i\sqrt{2}$, $z_C = 1+i$, $z_D = 1-i$ و $z_H = \frac{z_c - z_B}{z_E - z_B}$ حيث E النقطة التي تحقّق : $\overline{DE} = 2\overline{DO}$

(1) اكتب z_H على الشكل الأسي و استنتج نوع المثلث BEC .

(2) S تحويل نقطي في المستوي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z النقطة M' لاحقتها z' حيث : $z' = z_A.z + z_B$

(أ) ما هي طبيعة التحويل S ؟ و ما هي عناصره المميّزة ؟

(ب) احسب مساحة الدائرة (γ) التي مركزها C و نصف قطرها CD .

ج() عيّن (γ') صورة (γ) بالتحويل S و استنتج مساحتها.

(3) عيّن (δ) مجموعة النقط M من المستوي (M تختلف عن B و C) ذات اللاحقات z التي يكون من أجلها العدد $\frac{z_B - z}{z_C - z}$ حقيقيا سالبا تماما.

الحل

(I) – (1) حل المعادلة: $z^2 - 2z + 2 = 0$

معادلة من الدرجة الثانية ومنه $\Delta = -4 = (2i)^2$ ومنه نجد $z_1 = 1+i$, $z_2 = 1-i$

(2) إيجاد العددين المركبين z_1 و z_2 حيث $\begin{cases} 2z_1 - 3z_2 = 5i\sqrt{2} & (1) \\ z_1 + 3z_2 = -2i\sqrt{2} & (2) \end{cases}$

بجمع (1) و (2) نجد $3z_1 = 3i\sqrt{2}$ ومنه $z_1 = i\sqrt{2}$

نعوّض في (2) نجد $z_2 = -i\sqrt{2}$

II/ النقط A, B, C, D, H لواحقها على الترتيب $z_A = i\sqrt{2}$, $z_B = -i\sqrt{2}$, $z_C = 1+i$, $z_D = 1-i$,

$z_H = \frac{z_C - z_B}{z_E - z_B}$ حيث E تحقق : $\overline{DE} = 2\overline{DO}$

II/ 1) ابة z_H على الشكل الأسي واستنتاج طبيعة المثلث BEC

3) E تحقق : $\overrightarrow{DE}=2\overrightarrow{DO}$ يعني أنَ : $z_E-z_D=-2z_D$ ومنه $z_E=-z_D$

ومنه $z_H=\dfrac{1+i+i\sqrt{2}}{-1+i+i\sqrt{2}}$ أي $z_H=\dfrac{1+i\left(1+\sqrt{2}\right)}{-1+i\left(1+\sqrt{2}\right)}$

ومنه $z_H=\dfrac{\left(1+i\left(1+\sqrt{2}\right)\right)}{\left(-1+i\left(1+\sqrt{2}\right)\right)}\left(\dfrac{-1-i\left(1+\sqrt{2}\right)}{-1-i\left(1+\sqrt{2}\right)}\right)$ نجد : $z_H=\dfrac{1+2i\left(1+\sqrt{2}\right)-\left(3+2\sqrt{2}\right)}{4+2\sqrt{2}}$

ومنه $z_H=\dfrac{i\left(1+\sqrt{2}\right)-\left(1+\sqrt{2}\right)}{2+\sqrt{2}}$ ومنه $z_H=\dfrac{(1-i)\left(1+\sqrt{2}\right)}{\sqrt{2}\left(1+\sqrt{2}\right)}$ نجد $\boxed{z_H=\dfrac{\sqrt{2}}{2}-i\dfrac{\sqrt{2}}{2}}$

ومنه $z_H=\dfrac{\sqrt{2}}{2}-i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ومنه $|z_H|=1$ و $\theta=-\dfrac{\pi}{4}+2\pi k$ $\arg(z_H)\begin{cases}\cos\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin\theta=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$

ومنه الشكل الأسي هو $\boxed{z_H=e^{-i\frac{\pi}{4}}}$

لدينا $z_H=e^{-i\frac{\pi}{4}}$ ومنه $\dfrac{z_C-z_B}{z_E-z_B}=e^{-i\frac{\pi}{4}}$ ومنه $\left|\dfrac{z_C-z_B}{z_E-z_B}\right|=1$ أي أنَ $\boxed{BC=BE}$

ومنه المثلث BEC متساوي الساقين .

2) S تحويل نقطي يرفق بكل M لاحقتها z النقطة M′ لاحقتها z' بحيث : $z'=z_A\cdot z+z_B$

أ) لدينا $z'=z_A\cdot z+z_B$ يكافئ $z'=\left(i\sqrt{2}\right)z-i\sqrt{2}$ ونعلم أيضا صيغة تحويل مركب هي $z'=az+b$

بما أنَ $a=\left(i\sqrt{2}\right)$ أي $a=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{2}}$ فإنَ S تشابه مباشر مركزه النقطة الصامدة W وزاويته $\dfrac{\pi}{2}$ و نسبته $k=\sqrt{2}$

لدينا $z_W=\dfrac{2-i\sqrt{2}}{3}$ ومنه $z_W=\dfrac{-i\sqrt{2}}{1-i\sqrt{2}}=\dfrac{-i\sqrt{2}\left(1+i\sqrt{2}\right)}{\left(1-i\sqrt{2}\right)\left(1+i\sqrt{2}\right)}$ أي $z_W=\dfrac{2}{3}-i\dfrac{\sqrt{2}}{3}$

ب) مساحة الدائرة (γ) التي مركزها C ونصف قطرها CD

لدينا $CD=|z_D-z_C|$ ومنه $CD=|1-i-1-i|=|-2i|$ ومنه $CD=2$ ومنه $S_{(\gamma)}=\pi r^2$ أي $S_{(\gamma)}=4\pi$ us

ج) تعيين (γ') صورة (γ) بواسطة S التشابه :

لدينا C' لاحقتها $z_{C'}$ صورة C حيث $z_C=1+i$ بواسطة S ومنه

$z_{C'}=\left(i\sqrt{2}\right)z_C-i\sqrt{2}$ ومنه $z_{C'}=\left(i\sqrt{2}\right)(1+i)-i\sqrt{2}$ اذن $z_{C'}=-\sqrt{2}$ وبما أنَ نصف قطر (γ) هو $r=CD=2$ فإن

r' هو نصف قطر (γ') حيث : $r'=|k|r$ ومنه $r'=2\sqrt{2}$

و مساحة (γ') هي $S_{(\gamma')}$ حيث : $S_{(\gamma')}=k^2S_{(\gamma)}$ ومنه us $S_{(\gamma')}=8\pi$

3) تعيين (δ) مجموعة النقط M (M تختلف عن B و C) ذات اللاحقة z حيث $\dfrac{z_B-z}{z_C-z}$ حقيقي سالب $\dfrac{z_B-z}{z_C-z}$

حقيقي سالب يعني أنَ $\dfrac{z_B-z}{z_C-z}=re^{i\pi}$ ومنه $\arg\left(\dfrac{z_B-z}{z_C-z}\right)=\pi+2\pi k$

مجموعة النقط (δ) هي القطعة المستقيمة $[BC]$ عدا النقطتين B و C

(1) نضع من أجل كل عدد مركب z : $p(z)=z^3-24\sqrt{3}$

(أ) تحقق أنّ : $p\left(2\sqrt{3}\right)=0$

(ب) جد العددين الحقيقيين a و b بحيث من أجل كل عدد مركب z : $p(z)=\left(z-2\sqrt{3}\right)\left(z^2+az+b\right)$

(ج) حل في مجموعة الأعداد المركبة C ، المعادلة $p(z)=0$

(2) المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $A\left(o;\vec{u};\vec{v}\right)$ ، B و C نقط من المستوي لواحقها على الترتيب $z_A=-\sqrt{3}+3i$ و $z_B=-\sqrt{3}-3i$ و $z_C=2\sqrt{3}$:

(أ) أكتب على الشكل الجبري العدد المركب $\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$

(ب) بين أنه يوجد دوران r مركزه A ويحول النقطة B الى النقطة C ، يطلب تعيين زاويته .

(ج) استنتج طبيعة المثلث ABC

(د) عين z_D لاحقة النقطة D صورة النقطة C بالإنسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AB}$ ، ثم حدد بدقة طبيعة الرباعي $ABDC$

(3) عين (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z غيرالمعدومة بحيث : $\arg\left(\dfrac{z}{\overline{z}}\right)=2k\pi$ حيث $k\in Z$ (العدد $\overline{z}$ هو مرافق العدد z)

الحل

(1)(أ) التحقق : $P\left(2\sqrt{3}\right)=0$ $P\left(2\sqrt{3}\right)=\left(2\sqrt{3}\right)^3-24\sqrt{3}=24\sqrt{3}-24\sqrt{3}=0$

(ب) ايجاد العددين a و b :

بالنشر والمطابقة مع $P(z)=z^3-24\sqrt{3}$ نجد : $\begin{cases}a-2\sqrt{3}=0\\ b-2a\sqrt{3}=0\\ -2\sqrt{3}b=-24\sqrt{3}\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}a=2\sqrt{3}\\ b=12\end{cases}$

(ج) حل المعادلة $P(z)=0$ معناه $\left(z-2\sqrt{3}\right)\left(z^2-2\sqrt{3}z+12\right)=0$ ومنه

$\left(z-2\sqrt{3}\right)=0$ او $z^2-2\sqrt{3}z+12=0$ اي ان $z=2\sqrt{3}$ وحل المعادلة الاخرى بحساب

المميز نجد : $\Delta=-36=(6i)^2$ ومنه الحلول هي :

$z_0=2\sqrt{3}$ و $z_1=-\sqrt{3}+3i$ و $z_2=-\sqrt{3}-3i$

(2)(أ) الشكل الجبري للعدد المركب : $\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ حيث : $z_A=-\sqrt{3}+3i$ و $z_B=-\sqrt{3}-3i$ و $z_C=2\sqrt{3}$

$$\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{3}-3i}{-\sqrt{3}-3i+\sqrt{3}-3i}=\frac{3\sqrt{3}-3i}{-6i}=\frac{\sqrt{3}-i}{-2i}=\frac{\left(\sqrt{3}-i\right)2i}{(-2i)2i}=\frac{2+2i\sqrt{3}}{4}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

(ب) وجود الدوران الذي مركزه A يحول B الى C :

لدينا $\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ و $\left|\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right|=\left|\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right|=1$

$Arg\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\frac{\pi}{3}+2\pi k$ اذن $z_C-z_A=e^{i\frac{\pi}{3}}\left(z_B-z_A\right)$ وهذا معناه يوجد دوران مركزه A

يحول B الى C وزاويته $\frac{\pi}{3}$

(ج) طبيعة المثلث :

مما سبق ينتج ان $\left|\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right|=\frac{AC}{AB}=1$ اذن $AB=AC$ و $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\frac{\pi}{3}$ ومنه المثلث ABC

متقايس الاضلاع

(د) تعيين Z_D لاحقة D صورة C بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AB}$:

$Z_D=Z_C+Z_{\overrightarrow{AB}}$ ومنه $Z_D=Z_C+Z_B-Z_A$ اذن $Z_D=2\sqrt{3}-6i$

– طبيعة الرباعي $ABDC$:

بما ان $AB=AC$ و $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ و $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\frac{\pi}{3}$ فان الرباعي $ABDC$ معين

(3) تعيين (Γ) مجموعة النقط :

$\arg\left(\frac{z}{\overline{z}}\right)=\arg(z)-\arg\left(\overline{z}\right)=2\pi k$ ونعلم $\arg\left(\overline{z}\right)=-\arg(z)$ اذن $2\arg(z)=2\pi k$ اي

$\arg(z)=\pi k$ ادن مجموعة النقط هي محور الفواصل باستثناء المبدأ

التمرين 28 بكالوريا 2016// الموضوع الأوّل شعبة علوم تجريبية – الدورة الثانية –

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة C ، المعادلة ذات المجهول z : (E) . . . $2\overline{z}^3+3\overline{z}^2-3\overline{z}+5=0$

يشير الرمز $\overline{z}$ إلى مرافق العدد المركب z

(1) (أ) اثبت أن المعادلة (E) تكافئ المعادلة $\left(2\overline{z}+5\right)\left(\overline{z}^2-\overline{z}+1\right)=0$

(ب) حل في المجموعة C المعادلة (E)

(2) في المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(o;\vec{u};\vec{v}\right)$ نعتبر النقط A , B , C و D التي لواحقها

على الترتيب : $z_A=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ و $z_B=\overline{z_A}$ و $z_C=-1$ و $z_D=-\frac{5}{2}$

(أ) اكتب كلا من العددين z_A و z_B على الشكل الأسي

(ب) أنشئ النقط A , B , C و D

(ج) اثبت أن : $z_B-z_C=z_B\left(z_A-z_C\right)$

(د) استنتج طبيعة المثلث ABC

(3) ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه C وزاويته $\frac{\pi}{3}$ ونسبته 2 ولتكن F صورة A بالتحويل S

أنشئ النقطة F ثم حدد طبيعة المثلث AFC

(4) عين طبيعة المجموعة (Γ) للنقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث $z+1=k\cdot z_B$ لما يتغير k في $\Re_+$

الحل

(1) (أ) تكافؤ المعادلتين : بالنشر والتبسيط

$\left(2\cdot\overline{z}+5\right)\left(\overline{z}^{2}-\overline{z}+1\right)=2\overline{z}^{3}-2\cdot\overline{z}^{2}+2\cdot\overline{z}+5\overline{z}^{2}-5\overline{z}+5=2\overline{z}^{3}+3\overline{z}^{2}-3\overline{z}+5$ اذن متكافئتان

(ب) حلول (E) :

$z_1=-\frac{5}{2}$ $\Delta=-3=\left(i\sqrt{3}\right)^2$ و وبالتالي الحلان $\overline{z}_2=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$ و $\overline{z}_3=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$

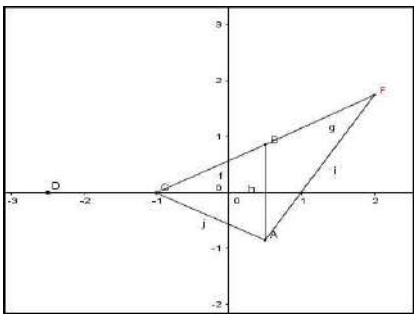
اذن الحلول هي $z_1=-\frac{5}{2}$ و $z_2=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ و $z_3=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$

(2) (أ) الشكل الاسي للاعداد :

$|z_A|=1$ و $\arg(z_A)=-\frac{\pi}{3}$ ومنه $z_A=e^{-i\frac{\pi}{3}}$

$z_B=\overline{z}_A=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ و $|z_B|=1$ و $\arg(z_B)=\frac{\pi}{3}$ ومنه $z_B=e^{i\frac{\pi}{3}}$

(ب) انشاء النقط D,C,B,A



(ج) اثبات ان $z_B-z_C=z_B\left(z_A-z_C\right)$

$z_B-z_C=\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

و

$z_B\left(z_A-z_C\right)=\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

(د) طبيعة المثلث ABC :

$z_B-z_C=z_B\left(z_A-z_C\right)$ تعني $\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}=z_B=e^{i\frac{\pi}{3}}$ ومنه ينتج $\frac{BC}{AC}=1$

و $\left(\overline{CA},\overline{CB}\right)=\frac{\pi}{3}$ وهذا يعني المثلث ABC متقايس الاضلاع

(3) انشاء النقطة F بالتشابه S :

العبارة المركبة للتشابه هي: $z'-z_C=2e^{i\frac{\pi}{3}}\left(z-z_C\right)$ وبما ان F هي صورة A فان :

$z_F-z_C=2e^{i\frac{\pi}{3}}\left(z_A-z_C\right)$ وبالتعويض باللواحق نجد $z_F+1=2\cdot\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i+1\right)$

وبالتالي : $z_F=2+\sqrt{3}i$

- طبيعة المثلث AFC : لدينا $AF=3$ و $AC=\sqrt{3}$ و $FC=\sqrt{12}$ باستعمال فيثاغورس :

$FC^2=AC^2+AF^2$ اي $\left(\sqrt{12}\right)^2=\sqrt{3}^2+3^2$ ومنه AFC قائم في A

(4) طبيعة المجموعة (Γ) :

$z+1=k\cdot z_B$ تعني $z-z_C=k\cdot e^{i\frac{\pi}{3}}$ ومنه $\arg(z-z_C)=\arg\left(k\cdot e^{i\frac{\pi}{3}}\right)$

اي $\left(\vec{u},\overrightarrow{CM}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$ اذن (Γ) هي نصف المستقيم الذي بدايته C والموجه بزاوية $\frac{\pi}{3}$

التمرين 29 بكالوريا 2017// الموضوع الأوّل شعبة علوم تجريبية

(I) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $(z+2)(z^2-4z+8)=0$.

II) المستوي المركب منسوب إلى معلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$.

نعتبر النقط A ، B و C التي لاحقاتها : $z_A=2-2i$ ، $z_B=\overline{z}_A$ و $z_C=-2$

(1) أكتب كلا من z_A و z_B على الشكل الأسَي .

(2) عيّن z_D لاحقة النقطة D حتى تكون النقطة B مركز ثقل المثلث ACD .

(3) (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z (M تختلف عن A و B) حيث $\arg\left(\frac{z_B-z}{z_A-z}\right)=\frac{\pi}{2}$

تحقق أنَ مبدا المعلم O هو نقطة من (Γ) ثمّ عيّن طبيعة المجموعة (Γ) وأنشئها .

(4) ليكن h التحاكي الذي مركزه النقطة C ونسبته 2، (Γ') صورة (Γ) بالتحاكي h

عيّن طبيعة المجموعة (Γ') مع تحديد عناصرها المميزة .

الحل

I) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $(z+2)(z^2-4z+8)=0$.

$(z+2)=0$ ومنه $z_0=-2$ او $z^2-4z+8=0$ وتحل بالمميز : $\Delta=-16=(4i)^2$

ومنه $z_1=\frac{4-4i}{2}=2-2i$ و $z_2=\frac{4+4i}{2}=2+2i$

II)(1) $z_A=2-2i$ ، $z_B=\overline{z}_A$ و $z_C=-2$:

كتابة كلا من z_A و z_B على الشكل الأسي :

$|z_A|=|2-2i|=2\sqrt{2}$ و $z_A=2\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)=2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$ ومنه $z_A=2\sqrt{2}\cdot e^{-i\frac{\pi}{4}}$

$z_B=\overline{z}_A=2+2i$ ومنه $z_B=2\sqrt{2}\cdot e^{i\frac{\pi}{4}}$

2)تعيين z_D لاحقة النقطة D حتى تكون النقطة B مركز ثقل المثلث ACD :

B مركز ثقل المثلث ACD معناه : $z_B=\frac{z_A+z_C+z_D}{3}$ ومنه $3z_B=z_A+z_C+z_D$

وبالتالي $z_D=3z_B-z_A-z_C=6+6i-2+2i+2=6+8i$ اذن $z_D=6+8i$

3) (Γ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث $\arg\left(\frac{z_B-z}{z_A-z}\right)=\frac{\pi}{2}$

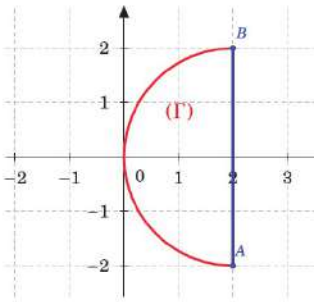
التحقق أنَ مبدا المعلم O هو نقطة من (Γ) : هذا يعني

$$\arg\left(\frac{z_B-z_O}{z_A-z_O}\right)=\arg\frac{z_B}{z_A}=\arg\frac{2\sqrt{2}\cdot e^{i\frac{\pi}{4}}}{2\sqrt{2}\cdot e^{-i\frac{\pi}{4}}}$$

$$=\arg\frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{e^{-i\frac{\pi}{4}}}=\arg e^{i\frac{\pi}{4}}.e^{i\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$$

ومنه النقطة O هي نقطة من (Γ)

تعيين طبيعة المجموعة (Γ) : $\arg\left(\frac{z_B-z}{z_A-z}\right)=\frac{\pi}{2}$ تعني $\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right)=\frac{\pi}{2}$



وهذا يعني $\overrightarrow{MA}$ و $\overrightarrow{MB}$ متعامدان ومنه مجموعة النقط (Γ) هي القوس $\overset{\frown}{BA}$ من الدائرة ذات القطر $[BA]$ باستثناء النقطتين A و B

4) h التحاكي الذي مركزه النقطة C ونسبته 2 : عبارته المركبة هي :

$$z'-z_C=2\left(z-z_C\right)$$

ومنه : $z'=2z-z_C=2z+2$ وصورة (Γ) بالتحاكي h هي (Γ') وهي القوس $\overset{\frown}{B'A'}$ من الدائرة ذات القطر $[A'B']$ باستثناء A' و B' حيث A' و B' هما صورتا A و B بهذا التحاكي

لاحقة B' هي $z_{B'}=2z_B+2=2(2+2i)+2=6+4i$

و لاحقة A' هي $z_{A'}=2z_A+2=2(2-2i)+2=6-4i$

التمرين 30 بكالوريا 2017// الموضوع الثاني شعبة علوم تجريبية

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$.

أجب بصحيح أو خطأ مع التعليل في كل حالة مما يلي :

1) مجموعة حلول المعادلة $\left(\frac{z+1-i}{z-i}\right)^2=1$ في المجموعة $\mathbb{C}$ هي : $S=\left\{-\frac{1}{2}+i\right\}$.

2)من اجل كل عدد مركب z ، $(z+2)\times(\overline{z}+2)=|z+2|^2$

3) من أجل كل عدد طبيعي n ، $\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{3n}=1$

4) S التشابه المباشر الذي مركزه النقطة Ω ذات اللاحقة 1 ونسبته 3 و زاويته $\frac{\pi}{2}$

صورة الدائرة (C) ذات المركز $\omega(0;1)$ ونصف القطر 3 بالتشابه S هي الدائرة (C') ذات المركز $\omega'(-2;-3)$ ونصف القطر 9

5) من اجل كل عدد حقيقي α : إذا كان $Z=(\sin\alpha+i\cos\alpha)\times(\cos\alpha-i\sin\alpha)$

فإنَ : $\arg(Z)=\frac{\pi}{2}-2\alpha+2k\pi$ ، حيث k عدد صحيح .

الحل

1) مجموعة حلول المعادلة $\left(\frac{z+1-i}{z-i}\right)^2=1$ في المجموعة $\mathbb{C}$ هي : $S=\left\{-\frac{1}{2}+i\right\}$. **صحيحة**

التبرير : $\left(\frac{z+1-i}{z-i}\right)^2=1$ تعني $\frac{z+1-i}{z-i}=-1$ او $\frac{z+1-i}{z-i}=1$

$\frac{z+1-i}{z-i}=-1$ تعني : $z+1-i=-z+i$ وبالتالي : $2z=-1+2i$ اذن $z=-\frac{1}{2}+i$

$\frac{z+1-i}{z-i}=1$ تعني : $z+1-i=z-i$ لا تقبل حلا

2)من اجل كل عدد مركب z ، $(z+2)\times(\overline{z}+2)=|z+2|^2$ **صحيحة** لان:

من خواص الطويلة والمرافق : $z\cdot\overline{z}=|z|^2$ و $\overline{z+2}=\overline{z}+2$

اذن $(z+2)\cdot\overline{(z+2)}=(z+2)(\overline{z}+2)=|z+2|^2$

3) من أجل كل عدد طبيعي n ، $\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{3n}=1$ **خاطئة** لان : $\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=e^{i\cdot\frac{\pi}{3}}$

و $\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{3n}=\left(e^{i\cdot\frac{\pi}{3}}\right)^{3n}=e^{i\cdot n\pi}=(e^{i\pi})^n=(\cos\pi+i\sin\pi)^n=(-1)^n$

في حالة n فردي فان $(-1)^n=-1$ وفي حالة n زوجي $(-1)^n=1$

4) القضية **صحيحة** : S التشابه المباشر الذي مركزه النقطة Ω ذات اللاحقة 1 ونسبته 3 و زاويته $\frac{\pi}{2}$

صورة الدائرة (C)ذات المركز $\omega(0;1)$ونصف القطر 3بالتشابه S هي الدائرة (C')ذات المركز $\omega'(-2;-3)$ ونصف القطر 9

العبارة المركبة للتشابه S هي : $z'-1=3e^{i\frac{\pi}{2}}(z-1)$ اي : $z'=3iz-3i+1$ اذن صورة الدائرة (C)هي دائرة (C')

مركزها ω' صورة ω بالتشابه S لاحقتها $z_{\omega'}=3iz_{\omega}-3i+1=3i(i)-3i+1=-2-3i$

ونصف قطر الدائرة (C') هو $r'=3\cdot r=3\cdot 3=9$

5) α عدد حقيقي: إذا كان $Z=(\sin\alpha+i\cos\alpha)\times(\cos\alpha-i\sin\alpha)$ فإنّ : $\arg(Z)=\frac{\pi}{2}-2\alpha+2k\pi$ ، حيث k صحيح .

العبارة **صحيحة** لان : نعلم ان : $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$ و $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$ وبالتالي :

$Z=(\sin\alpha+i\cos\alpha)\times(\cos\alpha-i\sin\alpha)=\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right)\cdot(\cos(-\alpha)+i\sin(-\alpha))$

اذن : $\arg(Z)=\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+(-\alpha)+2k\pi=\frac{\pi}{2}-2\alpha+2k\pi$

التمرين 31 بكالوريا 2017// الموضوع الأوّل شعبة تقني رياضي

المستوي منسوب الى معلم م .و.م .نعتبر النقط A ، B و C التي لواحقها : $z_A=-1$ ، $z_B=2+i$ ، $z_C=-i$

(1) اكتب العدد المركب $\frac{z_A-z_C}{z_B-z_C}$ على الشكل الاسي ثم استنتج طبيعة المثلث ABC

(2) عين العبارة المركبة للتشابه المباشر S الذي مركزه C و يحول B الى A .

(3) نعتبر النقطة D نظيرة B بالنسبة الى C و النقطة E صورة D بالتشابه S .

(أ) عين z_D لاحقة D ثم تحقق ان : $z_E = 1-2i$ حيث z_E لاحقة E .

(ب) حدد طبيعة الرباعي $ADEB$.

(4) (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z . (M تختلف عن A و B)

حيث $\arg(z-z_A)-\arg(z-z_B)=\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in Z$

تحقق ان النقطة C تنتمي الى (Γ) ثم حدد طبيعة المجموعة (Γ) و انشئها .

الحل

A ، B و C لواحقها على الترتيب : $z_A=-1$ ، $z_B=2+i$ ، $z_C=-i$

1) كتابة العدد $\frac{z_A-z_C}{z_B-z_C}$ على الشكل الاسي ثم استنتاج طبيعة المثلث ABC :

$$\frac{z_A-z_C}{z_B-z_C}=\frac{-1+i}{2+2i}=\frac{(-1+i)(2-2i)}{(2+2i)(2-2i)}=\frac{(-1+i)(2-2i)}{2^2+2^2}=\frac{4i}{8}=\frac{1}{2}i$$

$$\left|\frac{z_A-z_C}{z_B-z_C}\right|=\left|\frac{1}{2}i\right|=\frac{1}{2} \quad \text{و} \quad \arg\left(\frac{z_A-z_C}{z_B-z_C}\right)=\arg\left(\frac{1}{2}i\right)=\frac{\pi}{2}+2k\pi\ /\ k\in\mathbb{Z}$$

إذن $\frac{z_A-z_C}{z_B-z_C}=\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{2}}$

طبيعة المثلث ABC :

لدينا $\arg\left(\frac{z_A-z_C}{z_B-z_C}\right)==\frac{\pi}{2}+2k\pi \quad /\ k\in Z$ معناه $(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CA})=\frac{\pi}{2}+2k\pi\ /\ \ k\in Z$

وعليه المثلث ABC قائم في C .

2) عبارة التشابه المباشر S الذي مركزه C و يحول B الى A نسبته هي : $\left|\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{2}}\right|=\frac{1}{2}$

وزاويته هي : $\arg\left(\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{2}}\right)==\frac{\pi}{2}+2k\pi\ /\ \ k\in Z$

ومنه من أجل كل نقطة $M(z)$ صورتها $M'(z)$ بالتشابه S فإنَ : $z'-z_C=\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{2}}(z-z_C)$

ومنه $z'=\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{2}}z+\left(1-\frac{1}{2}i\right)(-i)$ اذن $z'=\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{2}}z-\frac{1}{2}-i$ أي ان : $z'=\frac{1}{2}i\cdot z-\frac{1}{2}-i$

وهي العبارة المركبة للتشابه S.

3) D نظيرة B بالنسبة الى C و E صورة D بالتشابه S .

أ) تعيين z_D لاحقة D ثم التحقق ان : $z_E=1-2i$:

D نظيرة B بالنسبة الى C معناه $\frac{z_D+z_B}{2}=z_C$ ومنه $z_D=2z_C-z_B$ أي $z_D=2(-i)-2-i$ إذن

$z_D=-2-3i$

- التحقق أنَ $z_E=1-2i$: لدينا $z'=\frac{1}{2}iz-\frac{1}{2}-i$

$S(D)=E$ معناه $z_E=\frac{1}{2}iz_D-\frac{1}{2}-i$ ومنه $z_E=\frac{1}{2}i(-2-3i)-\frac{1}{2}-i$ أي $z_E=-i+\frac{3}{2}-\frac{1}{2}-i$ ومنه $z_E=1-2i$

ب) طبيعة الرباعي $ADEB$:

لدينا $\frac{z_E-z_A}{z_B-z_D}=\frac{1-2i+1}{2+i+2+3i}=\frac{2-2i}{4+4i}=\frac{1-i}{2+2i}=\frac{(1-i)(2-2i)}{2^2+2^2}=-\frac{1}{2}i$

أي $\frac{z_E-z_A}{z_B-z_D}=-\frac{1}{2}i$ ومنه $\overrightarrow{AE}$ و $\overrightarrow{DB}$ متعامدان .....(1)

لدينا أيضا $\frac{z_D+z_B}{2}=z_C$ وبما أنّ $\frac{z_A+z_E}{2}=\frac{-1+1-2i}{2}=-i=z_C$ أي $\frac{z_A+z_E}{2}=\frac{z_D+z_B}{2}=z_C$.....(2)

من (1) و (2) القطران متعامدان ومتناصفان إذن الرباعي $ADEB$ معين.

4) (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z . $\arg(z-z_A)-\arg(z-z_B)=\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in Z$

التحقق ان النقطة C تنتمي الى (Γ) :

$\arg(z-z_A)-\arg(z-z_B)=\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in Z$ تكافئ $\arg\left(\frac{z-z_A}{z-z_B}\right)=\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in Z$

ولدينا $\arg\left(\frac{z-z_A}{z-z_B}\right)=\arg\left(\frac{1}{2}i\right)=\frac{\pi}{2}+2k\pi/k\in Z$ إذن $C\in(\Gamma)$

- تحديد طبيعة المجموعة (Γ) :

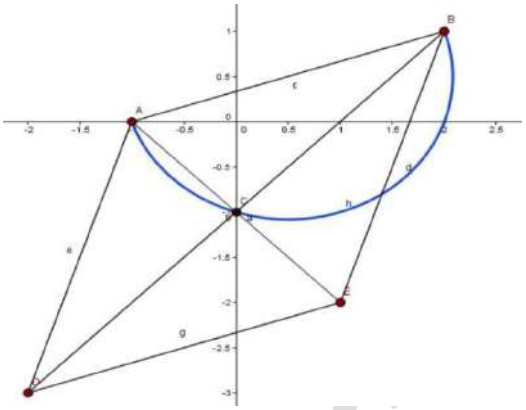
لدينا $\arg(z-z_A)-\arg(z-z_B)=\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in Z$ تكافئ $\arg\left(\frac{z-z_A}{z-z_B}\right)=\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in Z$

معناه $(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{BM})=\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in Z$ تكافئ

$(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB})=\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbb{Z}$

ومنه (Γ) هي نصف القوس من الدائرة التي مركزها Ω ذات اللاحقة $\frac{z_A+z_B}{2}$ وقطرها $[AB]$ باستثناء النقطتين A و B.

الإنشاء :



التمرين 32 بكالوريا 2017// الموضوع الثاني شعبة تقني رياضي

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.

نعتبر النقط A ، B ، C و D التي لواحقها : $z_A=1+i$ ، $z_B=\overline{z}_A$ ، $z_C=\frac{1}{2}(1-i)$ ، $z_D=\overline{z}_C$

(1) (أ)- أكتب z_A و z_C على الشكل الأسي ثمّ استنتج الشكل الأسي للعددين z_B و z_D .

(ب)- عيّن قيم العدد الطبيعي n التي تحقق : $(z_A)^n=(z_B)^n$.

(2) (أ)- أوجد نسبة ومركز التحاكي h الذي يحول D إلى A ويحول C إلى B.

(ب)- أحسب طويلة العدد المركب $\frac{z_C-z_B}{z_D-z_A}$ ثمّ استنتج طبيعة الرباعي $ADCB$.

(3) جد z_G لاحقة النقطة G مرجح الجملة $\{(A;2),(B;2),(C;-1),(D;-1)\}$.

(4) لتكن (Γ) مجموعة النقط M من المستوي بحيث : $\|2\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MD}\|=\sqrt{5}$

بيّن أنّ A نقطة من (Γ)، ثمّ حدّد طبيعة المجموعة (Γ) وعناصرها المميزة وأنشئها.

الحل

A ، B ، C و D لواحقها على الترتيب : $z_A=1+i$ ، $z_B=\overline{z}_A$ ، $z_C=\frac{1}{2}(1-i)$ ، $z_D=\overline{z}_C$

1) أ- أكتابة z_A و z_C على الشكل الأسي ثمّ استنتاج الشكل الأسي للعددين z_B و z_D :

• كتابة z_A على الشكل الأسي : طويلة z_A : $|z_A|=|1+i|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$

عمدة للعدد z_A : ولتكن θ_1 ومنه $\begin{cases}\cos\theta_1=\frac{x}{|z_A|}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin\theta_1=\frac{y}{|z_A|}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$ ومنه $\theta_1=\frac{\pi}{4}+2k\pi\,/\,k\in Z$

وعليه $z_A=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

• كتابة z_C على الشكل الأسي : $|z_C|=\left|\frac{1}{2}(1-i)\right|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

عمدة للعدد z_C : $\begin{cases}\cos\theta=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin\theta=\frac{-\frac{1}{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{-\sqrt{2}}{2}\end{cases}$ ومنه $\theta=-\frac{\pi}{4}+2k\pi\,/\,k\in\mathbb{Z}$ وعليه : $z_C=\frac{1}{\sqrt{2}}^{-i\frac{\pi}{4}}$

• استنتاج z_B و z_D على الشكل الأسي :

• $z_B=\overline{z_A}=\left(\overline{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}\right)=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ أي : $z_B=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$

• $z_D=\overline{z_C}=\left(\overline{\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\frac{\pi}{4}}}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ أي $z_D=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{4}}$

ب- تعيين قيم العدد الطبيعي n التي تحقق : $(z_A)^n=(z_B)^n$.

$(z_A)^n=(z_B)^n$ تكافئ $\left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^n=\left(\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^n$ ومنه $\sqrt{2}^n e^{i\frac{n\pi}{4}}=\sqrt{2}^n e^{-i\frac{n\pi}{4}}$ ومنه $e^{i\frac{n\pi}{4}}=e^{-i\frac{n\pi}{4}}$

وعليه $\frac{n\pi}{4}=-\frac{n\pi}{4}+2k\pi\,/\quad k\in Z$ ومنه $n\pi=-n\pi+8k\pi$ ومنه $2n=8k\pi$ وعليه فإنّ $n=4k\pi\,/\,k\in\mathbb{Z}$

2) أ- إيجاد نسبة ومركز التحاكي h الذي يحول D إلى A ويحول C إلى B :

النسبة : $\begin{cases}h(D)=A\\ h(C)=B\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}z_A=az_D+b & .(1)\\ z_B=az_C+b & (2)\end{cases}$ وبالطرح نجد $z_A-z_B=a(z_D-z_C)$ ومنه

$a=\frac{z_A-z_B}{z_D-z_C}$

أي $a=\frac{1+i-1+i}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i}=\frac{2i}{i}=2$ وبالتعويض بقيمة a في المعادلة (1) نجد $1+i=1+i+b$ ومنه

$b=0$. ومنه عبارة التحاكي h هي : $z'=2z$

مركز التحاكي h : لتكن النقطة الصامدة Ω ذات اللاحقة z_Ω وعليه $h(\Omega)=\Omega$ ومنه $z_\Omega=2z_\Omega$

إذن $z_\Omega = \frac{0}{1-2} = 0$ أي $\Omega(0,0)$

ب)- حساب العدد المركب $\frac{z_C - z_B}{z_D - z_A}$ ثمّ استنتاج طبيعة الرباعي $ADCB$:

$$\frac{z_C - z_B}{z_D - z_A} = \frac{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right) - (1-i)}{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right) - (1-i)} = \frac{-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i}{-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i} = \frac{-1+i}{-1-i} = \frac{-i(-i-1)}{-1-i} = -i$$

- طبيعة الرباعي $ADCB$:

لدينا $\begin{cases} \frac{z_C - z_B}{z_D - z_A} = -i \\ h(D) = A \\ h(C) = B \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} \left|\frac{z_C - z_B}{z_D - z_A}\right| = |-i| = 1 \\ AB = 2DC \end{cases}$ أي $\begin{cases} BC = AD \\ AB = 2DC \end{cases}$ و

لدينا التحاكي يحافظ على التوازي . أي $(DC)//(AB)$ وبالتالي نستنتج ان الرباعي $ADCB$ هو شبه منحرف متساوي الساقين

3)إيجاد z_G لاحقة G مرجح الجملة $\{(A;2),(B;2),(C;-1),(D;-1)\}$:

$$z_G = \frac{2z_A + 2z_B - z_C - z_D}{2+2-1-1} = \frac{2(1+i) + 2(1-i) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)}{2}$$

$$= \frac{2 + 2i + 2 - 2i - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i}{2} = \frac{4-1}{2}$$

ومنه $G\left(\frac{3}{2}, 0\right)$

4) $\|2\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD}\| + \sqrt{5}$

تبيَان أنَ A نقطة من (Γ): لدينا $\|2\overrightarrow{AA} + 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}\| = \|2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}\|$

بما أنَ : $\begin{cases} \overrightarrow{AB}(0,-4) \\ \overrightarrow{AC}\left(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right) \\ \overrightarrow{AD}\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \end{cases}$ فإنَ $\begin{cases} 2\overrightarrow{AB}(0,-4) \\ -\overrightarrow{AC}\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right) \\ -\overrightarrow{AD}\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \end{cases}$ وعليه $2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}\left(0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}; -4 + \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\right)$

أي $2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}(1;-2)$

ومنه $\|2\overrightarrow{AA} + 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}\| = \|2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}\| = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$ وعليه $A \in (\Gamma)$

- طبيعة المجموعة (Γ) وعناصرها المميزة :

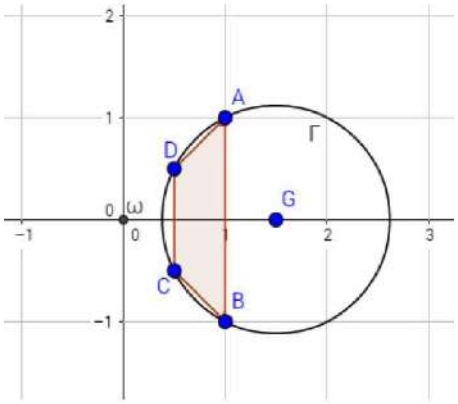
$\|2\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD}\| = \sqrt{5}$ تكافئ

$\|2\overrightarrow{MG} + 2\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{MG} + 2\overrightarrow{GB} - \overrightarrow{MG} - \overrightarrow{GC} - \overrightarrow{MG} - \overrightarrow{GD}\| = \sqrt{5}$

ومنه $\|2\overrightarrow{GM}\|=\sqrt{5}$ أي $GM=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

ومنه (Γ) هي دائرة ذات المركز G ونصف القطر $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

- الإنشاء :



التمرين 33 بكالوريا 2017// الموضوع الأوّل شعبة رياضيات

(1) حل في مجموعة الاعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة ذات المجهول z : $(z-2+2i)\left(z^2-2\sqrt{2}z+8\right)=0$

(2) المستوي المركب منسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$, نعتبر النقط A ، B و C التي لاحقاتها $z_A=\sqrt{2}+i\sqrt{6}$ ، $z_B=\overline{z}_A$ و $z_C=2(1-i)$

(أ) اكتب z_A ، z_B و z_C على الشكل الاسي ثم استنتج ان النقط A ، B و C تنتمي الى دائرة (Ω) يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها

(ب) عين قيم العدد الطبيعي n التي من اجلها يكون العدد المركب $\left(\dfrac{z_A}{z_C}\right)^n$ تخليا صرفا

(جـ) نسمي (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث : $z=z_C-k\left(\dfrac{z_A}{z_B}\right)$ ، مع k يسمح $\mathbb{R}_+$

تحقق ان النقطة C تنتمي الى (Γ) ، ثم عين و انشئ (Γ)

(3) Υ الدوران الذي مركزه النقطة O و زاويته $\dfrac{2\pi}{3}$ ، h التحاكي الذي مركزه النقطة O و نسبته -2

عين طبيعة التحويل $h\circ r$ و عناصره المميزة ، ثم استنتج ثورة الدائرة (Ω) بالتحويل $h\circ r$

الحل

1) حل المعادلة $(z-2+2i)\left(z^2-2\sqrt{2}z+8\right)=0$ في $\mathbb{C}$ ، المعادلة تكافئ : $\begin{cases}z-2+2i=0....(1)\\ z^2-2\sqrt{2}z+8...(2)\end{cases}$ أي

حلول المعادلة هي $\begin{cases}z=2-2i\\ z^2-2\sqrt{2}z+8=0...(1)\end{cases}$ $\begin{cases}z_0=2-2i\\ z_1=\sqrt{2}+i\sqrt{6}\\ z_2=\sqrt{2}-i\sqrt{6}\end{cases}$

2) أ)- كتابة z_A ، z_B و z_C على الشكل الاسي $|z_A|=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$ ومنه $z_A=2\sqrt{2}\left[\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right]=2\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{3}i}$

$z_B=\overline{z_A}=2\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{3}i}$ و $z_C=2(1-i)$ ومنه $|z_C|=2\sqrt{2}$ ومنه $z_C=2\sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}i\right)=2\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}$

بما أنّ $|z_A|=|z_B|=|z_C|=2\sqrt{2}$ ومنه النقط A ، B و C تنتمي الى الدائرة (Ω) التي مركزها O و نصف قطرها $2\sqrt{2}$.

ب) تعيين قيم العدد الطبيعي n التي من اجلها يكون العدد المركب $\left(\frac{z_A}{z_C}\right)^n$ تخيلي صرفا

لدينا $\left(\frac{z_A}{z_C}\right)=\frac{2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{3}}}{2\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}}e^{\frac{7\pi}{12}i}$ ومنه $\left(\frac{z_A}{z_C}\right)=e^{\frac{7n\pi}{12}}$ عدد تخيلي صرف يعني انّ $\frac{7n\pi}{12}=\frac{\pi}{2}+\pi k$ و k عدد صحيح ومنه بالضرب في $\frac{12}{\pi}$ نجد $7n=6+12k$ أي أنّ $7n\equiv 6[12]$ ومنه بالضرب في 5 نجد $35n\equiv 30[12]$

أي $-n\equiv 6[12]$ ومنه $n\equiv 6[12]$ إذن $n=6+12k'$ و k' عدد طبيعي .

جـ) التحقق ان Cتنتمي إلى (Γ) : $z_C=z_C-k\left(\frac{z_A}{z_B}\right)$ يعني $-k\left(\frac{z_A}{z_B}\right)=0$ ، ومنه $k=0$ بما أنه عدد من $\mathbb{R}_+$

فان Cتنتمي إلى (Γ)

$z=z_C-k\left(\frac{z_A}{z_B}\right)$تعني ان : $z-z_C=-k\left(\frac{z_A}{z_B}\right)$ اي $z-z_C=-k\cdot e^{i\frac{2\pi}{3}}$ ومنه

$z-z_C=k\cdot e^{i\frac{5\pi}{3}}$ اي ومنه $\begin{cases}\arg(z-z_C)=\frac{5\pi}{3}+2\pi k'' & k''\in\mathbb{Z}\\ |z-z_C|=k & k\in\mathbb{R}_+^*\end{cases}$

ومنه مجموعة النقط (Γ) لما يمسح k المجموعة $\mathbb{R}_+^*$ هي نصف $\begin{cases}(\vec{u},\overrightarrow{CM})\equiv\frac{5\pi}{3}[2\pi]\\ CM=k \quad k\in\mathbb{R}_+^*\end{cases}$

مستقيم مبدؤه C وشعاع توجيهه $\vec{w}$ حيث $(\vec{u},\vec{w})\equiv\frac{5\pi}{3}[2\pi]$ باستثناء النقطة C

3) r الدوران الذي مركزه النقطة O و زاويته $\frac{2\pi}{3}$ ، hالتحاكي الذي مركزه النقطة O و نسبته -2

تعيين طبيعة التحويل $h\circ r$:

العبارة المركبة للدوران r هي : $z'-z_O=e^{i\frac{2\pi}{3}}(z-z_O)$ اي $z'=e^{i\frac{2\pi}{3}}\cdot z$

و العبارة المركبة للتحاكي h هي : $z'-z_O=-2(z-z_O)$ اي $z'=-2z$ و باستعمال مخطط تركيب التحويلين r و h نجد : $\underbrace{M(z)\xrightarrow{r}M_1(z_1)\xrightarrow{h}M'(z')}_{hor}$ من هذا نجد :

$r(M)=M_1$ تعني : $z_1=e^{i\frac{2\pi}{3}}\cdot z$ و $h(M_1)=M'$ تعني : $z'=-2z_1$ وبالتالي : $hor(M)=M'$ اي :

$z'=-2\left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\cdot z\right)$

$z'=2\cdot e^{i\left(\frac{2\pi}{3}+\pi\right)}\cdot z$ ومنه العبارة المركبة للتحويل $h\circ r$: $z'=2\cdot e^{i\frac{5\pi}{3}}\cdot z$

اذن $h\circ r$ هو تشابه مباشر نسبته 2 و زاويته $\frac{5\pi}{3}$ و مركزه O

صورة الدائرة (Ω) بالتحويل $h\circ r$: بما ان (Ω) دائرة مركزها O و نصف قطرها $R=2\sqrt{2}$ فان صورتها بالتحويل $h\circ r$ هي دائرة (Ω')

مركزها هو صورة O بالتحويل $h\circ r$ اي $h\circ r(O)=O$ ونصف قطرها $2R=4\sqrt{2}$

التمرين 34 بكالوريا 2017// الموضوع الثاني شعبة رياضيات

I) اكتب العدد $\left(\frac{5}{2}+i\right)^2$ على الشكل الجبري ثم استنتج الجذرين التربيعين للعدد المركب : $\frac{21}{4}+5i$

II) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$ ، نعتبر النقط A ، B ، C و I ذات اللواحق

$z_A=\frac{3}{2}+\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ ، $z_B=-\frac{3}{2}i$ ، $z_C=-\overline{z}_A$ و $z_I=i$.

1) أكتب z_A و z_B على الشكل الجبري .

2) اكتب العدد المركب $\frac{z_C-z_B}{z_A-z_B}$ على الشكل الأسي مستنتجا طبيعة المثلث ABC .

3) ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه B و يحول A إلى I .

أ- اكتب العبارة المركبة للتشابه المباشر S ثمّ عيّن نسبته و زاويته .

ب- نعرف من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n\geq 2$ التحويل النقطي T_n كما يلي : $T_n=\underbrace{S\circ S\circ....\circ S}_{n\text{ مرة}}$

عيّن قيم n حتى يكون T_n تحاكيا ، عين عندئذ عناصره المميزة .

الحل

I) (أ) كتابة العدد $\left(\frac{5}{2}+i\right)^2$ على الشكل الجبري: $\left(\frac{5}{2}+i\right)^2=\left(\frac{5}{2}\right)^2+(i)^2+2\times\frac{5}{2}i=\frac{21}{4}+5i$

(ب) نستنتج ان الجذرين التربيعيين للعدد $\frac{21}{4}+5i$ هما : $\frac{5}{2}+i$ و $-\frac{5}{2}-i$

II) النقط A ، B ، C و I لواحقها : $z_A=\frac{3}{2}+\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ ، $z_B=-\frac{3}{2}i$ ، $z_C=-\overline{z}_A$ و $z_I=i$.

1) كتابة z_A و z_C على الشكل الجبري .

$$z_A=\frac{3}{2}+\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}=\frac{3}{2}+\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=\frac{3}{2}+\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{5}{2}+i$$

$$z_C=-\overline{z}_A=-\overline{\left(\frac{5}{2}+i\right)}=-\left(\frac{5}{2}-i\right)=-\frac{5}{2}+i$$

2) كتاب العدد $\frac{z_C-z_B}{z_A-z_B}$ على الشكل الأسي:

$\frac{z_C-z_B}{z_A-z_B}=\frac{-\frac{5}{2}+i+\frac{3}{2}i}{\frac{5}{2}+i+\frac{3}{2}i}=\frac{-5+5i}{5+5i}=\frac{-1+i}{1+i}=\frac{(-1+i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{2i}{2}=i$ ومنه $\frac{z_C-z_B}{z_A-z_B}=e^{i\frac{\pi}{2}}$

ومنه $\left|\frac{z_C-z_B}{z_A-z_B}\right|=1$ اذن $BC=BA$ و $\arg\left(\frac{z_C-z_B}{z_A-z_B}\right)=\arg(i)$ اذن $(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC})=\frac{\pi}{2}+2\pi k$

نستنتج ان المثلث ABC قائم في B ومتقايس الساقين .

3) (أ)- كتابة العبارة المركبة للتشابه المباشر S الذي مركزه B و يحول A إلى I اي $s(A)=I$

العبارة المركبة هي من البشكل : $z'=a\cdot z+b$ ومنه (f) $z_I=a\cdot z_A+b$ وبما ان مركزه B فهي اذن نقطة صامدة

وبالتالي : (ب) $z_B=a\cdot z_B+b$ ومن (أ) و(ب) نجد بالطرح : $z_I-z_B=a\cdot(z_A-z_B)$ ومنه

$a=\frac{z_I-z_B}{z_A-z_B}=\frac{i+\frac{3}{2}i}{\frac{5}{2}+i+\frac{3}{2}i}=\frac{\frac{5}{2}i}{\frac{5}{2}+\frac{5}{2}i}=\frac{i}{1+i}=\frac{i(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{1}{2}+i\frac{1}{2}$ وبالتعويض في (ب) نجد :

$b=z_B-a\cdot z_B=-\frac{3}{2}i-\left(\frac{1}{2}+i\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}i\right)=-\frac{3}{4}-\frac{3}{4}i$

ومنه العبارة المركبة للتشابه S : $z'=\left(\frac{1}{2}+i\frac{1}{2}\right)\cdot z+\left(-\frac{3}{4}-\frac{3}{4}i\right)$

نسبة التشابه هي : $\left|\frac{1}{2}+i\frac{1}{2}\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}$ و زاويته هي $\arg\left(\frac{1}{2}+i\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{4}$

(ب)- T_n تحويل نقطي حيث : $T_n=\underbrace{S\circ S\circ....\circ S}_{n\text{ مرة}}$ و $n\geq 2$ و $S\left(B,\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\pi}{4}\right)$

تعيين قيم n حتى يكون T_n تحاكيا : T_n هو التشابه الذي مركزه B ونسبته $\underbrace{\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\cdots\times\frac{\sqrt{2}}{2}}_{n\text{ مرة}}$ وزاويته

ومنه T_n تشابه مباشر نسبته $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$ وزاويته $n\frac{\pi}{4}$ ومركزه B $\underbrace{\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}+\cdots+\frac{\pi}{4}}_{n\text{ مرة}}$

وحتى يكون T_n تحاكيا يجب ان يكون $n\frac{\pi}{4}=k\pi$ اي أن $n=4k$ حيث $k\in\mathbb{N}^*$ اذن

$T_n=S\left(B,\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{4k},k\pi\right)$

ونميز حالتين : - اذا كان k زوجيا اي $k=2p$ فان T_n هو تحاكي مركزه B ونسبته $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{8p}$

- اذا كان k فرديا اي $k=2p+1$ فان T_n هو تحاكي مركزه B ونسبته $-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{8p}$

I) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول التالية : $z^2-\sqrt{3}.z+1=0$.

II) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$.

A ، B و C ثلاث نقط من المستوي لاحقاتها على الترتيب : z_A ، z_B و z_C حيث :

$z_A=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ، $z_B=\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}$ و $z_C=\overline{z}_B$ (يرمز بـ $\overline{z}_B$ لمرافق z_B)

اكتب z_A و z_B على الشكل الاسي ثم عين عدد قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون : $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$

3) أ) تحقق ان : $\frac{z_B}{z_C}=e^{i\frac{\pi}{3}}$ وحدد طبيعة المثلث OBC

ب) استنتج ان : B هي صورة C بدوران r يطلب تعيين عناصره المميزة .

4) نسمي (γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z التي تحقق : $|z|=\left|\overline{z}-\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right|$

عين طبيعة المجموعة (γ)ثم عين صورتها بالدوران r .

الحل

1) حل المعادلة : $z^2-\sqrt{3}.z+1=0$.

$\Delta=-1$ و منه للمعادلة حلان مترافقان $z_1=\frac{\sqrt{3}-i}{2}$ و $z_2=\frac{\sqrt{3}+i}{2}$

2) $z_A=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ و $z_B=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$ و $z_C=\overline{z_B}=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$

كتابة z_A و z_B على الشكل الاسي:

لدينا $z_A=\cos\theta+i\sin\theta$ حيث $\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$ و $\cos\theta=\frac{1}{2}$ و منه $\arg(z_A)=\frac{\pi}{3}$

و $|z_A|=\left|\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right|=1$ اذن $z_A=e^{i\frac{\pi}{3}}$

لدينا $|z_B|=\left|\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right|=1$ و $\sin\theta=\frac{1}{2}$ و $\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$ و منه $\arg(z_B)=\frac{\pi}{6}$ اذن $z_B=e^{\frac{\pi}{6}i}$

- تعيين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$:

$\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n=\left(\frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{e^{i\frac{\pi}{6}}}\right)^n=\left(e^{\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)i}\right)^n=e^{i.n\frac{\pi}{6}}$ و منه $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ تكافئ $e^{i\frac{\pi}{6}n}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$

يكافئ $e^{i\frac{\pi}{6}n}=e^{\frac{\pi}{3}i}$ يكافئ $\frac{\pi n}{6}=\frac{\pi}{3}+2\pi k:k\in\mathbb{Z}$ و منه $\frac{n}{6}=\frac{1}{3}+2k$ اذن: $n=12k+2$ حيث $k\in\mathbb{Z}$

3) أ) التحقق ان : $\frac{z_B}{z_C}=e^{i\frac{\pi}{3}}$ حيث $z_C=\overline{z_B}=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i=e^{-i\frac{\pi}{6}}$

$\left(\frac{z_B}{z_C}\right)=\frac{z_B}{\overline{z_B}}=\frac{e^{\frac{\pi}{6}i}}{e^{-i\frac{\pi}{6}}}=e^{\frac{2\pi}{6}i}=e^{i\frac{\pi}{3}}$ و منه $\left|\frac{z_B}{z_C}\right|=1$ و هذا يعني ان $\frac{|z_B|}{|z_C|}=\frac{OB}{OC}=1$ اذن $OB=OC$ و

$\arg\left(\frac{z_B}{z_C}\right)=\frac{\pi}{3}$

يعني $\left(\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OB}\right)=\frac{\pi}{3}+2\pi k$ و منه المثلث OBC متقايس الاضلاع

ب) استنتاج ان : B هي صورة C بدوران r

بما ان $\frac{z_B}{z_C}=e^{\frac{\pi}{3}i}$ فان $z_B=z_C.e^{\frac{\pi}{3}i}$ اي $z_B-z_O=e^{\frac{\pi}{3}i}\left(z_C-z_O\right)$

وهذا يعني ان B هي صورة C بالدوران r الذي مركزه O و زاويته $\frac{\pi}{3}$

4) تعيين مجموعة النقط (γ) التي تحقق: $|z|=\left|\overline{z}-\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right|$ ...(*)

(*) تكافئ $|z|=\left|\overline{z}-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)\right|$ يكافئ $|z|=\left|\overline{z-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)}\right|$ وتكافئ $|z|=\left|z-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)\right|$ و تكافئ

$|z-z_O|=|z-z_C|$

اذن $OM=CM$ ومنه المجموعة (γ) للنقط M هي محور القطعة المستقيمة $[OC]$

- تعيين صورة (γ) بالدوران r :

بما ان $r(C)=B$ و $r(O)=O$ فإن صورة (γ) بالدوران r هي محور القطعة المستقيمة $[OB]$ لان الدوران تقايس يحافظ على المسافات و الزوايا الموجهة

التمرين 36 بكالوريا 2018// الموضوع الثاني شعبة علوم تجريبية

I) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $\left(\overline{z}-4+i\right)\left(z^2-4z+5\right)=0$ (يرمز $\overline{z}$ لمرافق العدد z).

II) المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$. نعتبر النقط A ، B و C التي لاحقاتها على الترتيب $z_A=2+i$ ، $z_B=4+i$ و $z_C=\overline{z_A}$.

1) تحقق أنّ $\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}=i$ ثمّ عين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون العدد $\left(\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\right)^n$ تخيليا صرفا .

2) D نقطة من المستوي لاحقتها z_D حيث : $\begin{cases}|z_D-z_A|=|z_B-z_A| \\ Arg\left(\frac{z_D-z_A}{z_B-z_A}\right)=\frac{\pi}{3}+2k\pi\left(k\in\mathbb{Z}\right)\end{cases}$

بيّن أنّ المثلث ABD متقايس الأضلاع وأحسب z_D .

3) أحسب z_G لاحقة النقطة G مركز ثقل المثلث ABD ثمّ عيّن نسبة و زاوية التشابه المباشر الذي مركزه A ويحول G إلى D .

4) عيّن (Γ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z (M تختلف عن z) بحيث : $Arg\left(\frac{z_G-z}{z_C-z}\right)=\pi+2k\pi\left(k\in\mathbb{Z}\right)$

الحل

I) حل المعادلة $(\overline{z}-4+i)(z^2-4z+5)=0$:

معناه : $\overline{z}-4+i=0$ أو $z^2-4z+5=0$ ، أي : $\overline{z}=4-i$ ، و منه : $z_0=4+i$.

و $\Delta=-4=(2i)^2$ ، و منه المعادلة تقبل حلين مترافقين ،أي : $\sqrt{\Delta}=2i$

إذن : $z_1=\dfrac{-(-4)-2i}{2}=2-i$ ، $z_2=2+i$.

II)(1)التحقق أنّ $\dfrac{z_B-z_A}{z_C-z_A}=i$ حيث : $z_A=2+i$ ، $z_B=4+i$ و $z_C=\overline{z}_A=2-i$.

لدينا : $\dfrac{z_B-z_A}{z_C-z_A}=\dfrac{4+i-2-i}{2-i-2-i}=\dfrac{2}{-2i}=\dfrac{1}{-i}=i$ ، و هو المطلوب .

- تعيين قيم n حتي يكون $\left(\dfrac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\right)^n$ تخيليا صرفا : $\left(\dfrac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\right)^n=(i)^n=\left(e^{i.\frac{\pi}{2}}\right)^n$

$\left(\dfrac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\right)^n$ تخيلي صرف معناه $\left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^n$ تخيلي صرف أي $e^{i\frac{n\pi}{2}}$ تخيلي صرف

وهذا معناه : $\arg\left(e^{i\frac{n\pi}{2}}\right)=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ ، أي : $\dfrac{n\pi}{2}=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ ، أي : $\dfrac{n}{2}=\dfrac{1}{2}+k$ ،و منه: $n=2k+1$ حيث k عدد صحيح

(2) تبيان أنّ المثلث ABD متقايس الأضلاع :

لدينا : $|z_D-z_A|=|z_B-z_A|$ وهذا يعني أي : $AD=AB$ و $Arg\left(\dfrac{z_D-z_A}{z_B-z_A}\right)=\dfrac{\pi}{3}+2k\pi$ وتعني $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}\right)=\dfrac{\pi}{3}$،

و منه المثلث ABD متقايس الأضلاع .

- حساب z_D:

لدينا $|z_D-z_A|=|z_B-z_A|$ ومنه $\left|\dfrac{z_D-z_A}{z_B-z_A}\right|=1$ اذن $\dfrac{z_D-z_A}{z_B-z_A}=e^{i\frac{\pi}{3}}$، ومنه : $z_D-z_A=e^{i\frac{\pi}{3}}(z_B-z_A)$

اذن : $z_D-(2+i)=\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)(4+i-2-i)$ ، أي : $z_D=1+\sqrt{3}i+2+i$

$z_D=3+\left(1+\sqrt{3}\right)i$.

(3) حساب z_G: z_G هي لاحقة مركز ثقل المثلث ABD ، اذن : $z_G=\dfrac{z_A+z_B+z_D}{3}$ ، و منه :

$z_G=\dfrac{2+i+4+i+3+\left(1+\sqrt{3}\right)i}{3}=3+\left(1+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)i$.

- تعيين نسبة و زاوية التشابه المباشر S الذي مركزه A و $S(G)=D$

لدينا اذن $\begin{cases}z_A=a.z_A+b\\z_D=a.z_G+b\end{cases}$ بالطرح نجد : $a=\dfrac{z_D-z_A}{z_G-z_A}$

ومنه

$$a=\frac{z_D-z_A}{z_G-z_A}=\frac{3+\left(1+\sqrt{3}\right)i-2-i}{3+\left(1+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)i-2-i}=\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i\frac{\sqrt{3}}{3}}=\frac{3+i3\sqrt{3}}{3+i\sqrt{3}}=\frac{\left(3+i3\sqrt{3}\right)\left(3-i\sqrt{3}\right)}{12}=\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

إذن نسبة التشابه هي : $|a|=\sqrt{3}$ ، و زاويته هي : $\arg(a)=\arg\left(\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\pi}{6}+2k\pi$.

(4) تعيين (Γ) مجموعة النقط $M(z)$ حيث $Arg\left(\frac{z_G-z}{z_C-z}\right)=\pi+2k\pi$

$\arg\left(\frac{z_G-z}{z_C-z}\right)=\pi+2k\pi$ تعني : $(\overrightarrow{MC};\overrightarrow{MG})=\pi+2k\pi$ ، و منه : (Γ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z هي القطعة المستقيمة $[GC]$ باستثناء النقطتين G و C

التمرين 37 بكالوريا 2018// الموضوع الأوّل شعبة تقني رياضي

(I) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $z^2-2\sqrt{2}.z+4=0$

(II) المستوي المركب منسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$

لتكن النقطتين A ، B لاحقتاهما : $z_A=\sqrt{2}+i\sqrt{2}$ و $z_B=\overline{z_A}$ ($\overline{z_A}$ هو مرافق z_A)

(1)اكتب على الشكل الاسي كلا من العددين المركبين z_A و $\frac{1}{z_B}$ ثم بين ان العدد $\left(\frac{2}{z_B}\right)^{2018}$ تخيلي صرف

(2) لتكن النقطة C صورة B بالتحاكي h الذي مركزه ω ذات اللاحقة $z_\omega=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ونسبته (-3)

بين ان لاحقة C هي $z_C=-\sqrt{2}+i.3\sqrt{2}$

(3) احسب z_D لاحقة النقطة D صورة B بالدوران الذي مركزه O و زاويته $(-\frac{\pi}{2})$

(4)(أ) بين ان $\frac{z_C-z_A}{z_D-z_A}=-i$ ثم استنتج طبيعة المثلث ACD

(ب) اوجد لاحقة النقطة E بحيث يكون الرباعي $ACED$ مربعا .

الحل

(I) حل في المعادلة : $z^2-2\sqrt{2}z+4=0$

$\Delta=\left(-2\sqrt{2}\right)^2-4(1)(4)=-8$ ومنه $\sqrt{\Delta}=\sqrt{i^2\times 8}=2\sqrt{2}i$

ومنه $z_1=\frac{2\sqrt{2}-2\sqrt{2}i}{2}=\sqrt{2}-\sqrt{2}i$ ؛ $z_2=\frac{2\sqrt{2}+2\sqrt{2}i}{2}=\sqrt{2}+\sqrt{2}i$

$(II)(1)$ $z_A=\sqrt{2}+\sqrt{2}i$ ؛ $z_B=\sqrt{2}-\sqrt{2}i$ كتابة z_A ؛ $\frac{1}{z_B}$ على الشكل الأسي :

- طويلة z_A : $|z_A|=\left|\sqrt{2}+\sqrt{2}i\right|=\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}=2$

عمدة لـ z_A : $\begin{cases}Cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}\\ Sin\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$ ومنه $\theta=\frac{\pi}{4}+2k\pi \quad / k\in\mathbb{Z}$ ومنه $z_A=2e^{i\frac{\pi}{4}}$

لدينا $z_B=\overline{z_A}=2e^{-i\frac{\pi}{4}}$ ومنه - الطويلة : $\left|\frac{1}{z_B}\right|=\frac{1}{2}$ ؛ و $\arg\left(\frac{1}{z_B}\right)=\arg(1)-\arg(z_B)=0-\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{4}$

ومنه $\frac{1}{z_B}=\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

اثبات أن $\left(\frac{2}{z_B}\right)^{2018}$ تخيلي صرف:

لدينا $\left(\frac{2}{z_B}\right)^{2018}=\left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^{2018}=\left(e^{i\left(\frac{2018\pi}{4}\right)}\right)=\left(e^{i\left(\frac{2016\pi+2\pi}{4}\right)}\right)=\left(e^{i\left(\frac{\pi}{2}+2\pi(252)\right)}\right)$

ومنه $\left(\frac{2}{z_B}\right)^{2018}=Cos\frac{\pi}{2}+iSin\frac{\pi}{2}=0+i=i$ ومنه $\left(\frac{2}{z_B}\right)^{2018}$ تخيلي صرف .

(2) إثبات أن لاحقة C هي : $z_C=-\sqrt{2}+i3\sqrt{2}$

C صورة B بالتحاكي h الذي مركزه ω لاحقتها $z_\omega=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ونسبته (-3) معناه

$(z_C-z_\omega)=-3(z_B-z_\omega)$ ومنه $z_C=-3z_B+4z_\omega$ ومنه $z_C=-\sqrt{2}+i3\sqrt{2}$

(3) حساب z_D لاحقة D صورة B بالدوران r الذي مركزه O وزاويته $\frac{-\pi}{2}$:

لدينا $r(B)=D$ معناه : $z_D=e^{-i\frac{\pi}{2}}z_B$ تكافيء $z_D=-i\left(\sqrt{2}-i\sqrt{2}\right)$ ومنه $z_D=-\sqrt{2}-i\sqrt{2}$

4) (أ) – إثبات أن $\frac{z_C-z_A}{z_D-z_A}=-i$ واستنتاج طبيعة المثلث ACD :

$$\frac{z_C-z_A}{z_D-z_A}=\frac{\left(-\sqrt{2}+i3\sqrt{2}\right)-\left(\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)}{\left(-\sqrt{2}-i\sqrt{2}\right)-\left(\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)}=\frac{-2\sqrt{2}+i2\sqrt{2}}{-2\sqrt{2}-i2\sqrt{2}}$$

$$=\frac{-2\sqrt{2}(1-i)}{-2\sqrt{2}(1+i)}=\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)^2}{2}=-i$$

طبيعة المثلث ACD :

لدينا

$$\begin{cases}\left|\frac{z_C-z_A}{z_D-z_A}\right|=\frac{AC}{AD}=|-i|=1\\ \arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_D-z_A}\right)=\left(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AC}\right)=\arg(-i)=-\frac{\pi}{2}+2k\pi \quad /\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

ومنه المثلث ACD قائم في A ومتقايس الساقين .

(ب) – تعيين لاحقة E حتى يكون $ACED$: مربع : لدينا $AC=AD$

$ACED$ مربع معناه $z_E+z_A=z_C+z_D$ ومنه $z_E=z_C+z_D-z_A$ ومنه

$z_E=-3\sqrt{2}+i\sqrt{2}$ و منه $z_E=\left(-\sqrt{2}+i3\sqrt{2}\right)+\left(-\sqrt{2}-i\sqrt{2}\right)-\left(\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)$

التمرين 38 بكالوريا 2018// الموضوع الثاني شعبة تقني رياضي

I) أ)– حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية : $4z^2-2z+1=0....(E)$

ب)– أكتب العددان $\frac{1}{z_1}$ و $\frac{1}{z_2}$ على الشكل الأسي حيث z_1 و z_2 حلا المعادلة .

II) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ نعتبر النقط A ، B و C التي لواحقها :

$z_A=4$ ، $z_B=1+i\sqrt{3}$ ، $z_C=1-i\sqrt{3}$.

1) (أ)- أحسب $\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}$ ثمّ حدد طبيعة المثلث ABC .

(ب)- استنتج أنّ B هي صورة C بدوران مركزه A يطلب تعيين زاويته .

(2) أوجد لاحقة النقطة D صورة النقطة A بالإنسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{CB}$ واستنتج بدقة طبيعة الرباعي $ACBD$.

(3) حدّد طبيعة (γ) مجموعة النقط M من المستوي المركب ذات اللاحقة z التي تحقق مايلي : $\left|iz+\sqrt{3}-i\right|=\left|z-1+i\sqrt{3}\right|$

(4) بيّن أنّ النقطة G مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABC تنتمي إلى (γ) .

الحل

(1)(أ) حل المعادلة $(E).....4z^2-2z+1=0$

$\Delta=(-2)^2-4(4)(1)=-12$ ؛ $\sqrt{\Delta}=i2\sqrt{3}$

ومنه $z_1=\frac{2+i2\sqrt{3}}{8}=\frac{1+i\sqrt{3}}{4}$ ؛ $z_2=\frac{2-i2\sqrt{3}}{8}=\frac{1-i\sqrt{3}}{4}$

(ب) كتابة الشكل الأسي :

لدينا $z_1=\frac{1+i\sqrt{3}}{4}$ ومنه $\frac{1}{z_1}=\frac{4}{1+i\sqrt{3}}=1-i\sqrt{3}$

طويلة $\frac{1}{z_1}$: $\left|\frac{1}{z_1}\right|=\left|1-i\sqrt{3}\right|=2$

عمدة للعدد $\frac{1}{z_1}$ $\arg\left(\frac{1}{z_1}\right)=\arg\left(1-i\sqrt{3}\right)=-\frac{\pi}{3}$ ومنه $\frac{1}{z_1}=2e^{-i\frac{\pi}{3}}$

طويلة العدد $\frac{1}{z_2}$: لدينا $z_2=\frac{1+i\sqrt{3}}{4}$ ومنه $\frac{1}{z_2}=\frac{4}{1-i\sqrt{3}}=\frac{4\left(1+i\sqrt{3}\right)}{\left(1-i\sqrt{3}\right)\left(1+i\sqrt{3}\right)}=1+i\sqrt{3}$

$\left|\frac{1}{z_2}\right|=\frac{4}{\left|1-i\sqrt{3}\right|}=\left|1+i\sqrt{3}\right|=2$

عمدة للعدد $\frac{1}{z_2}$ $\arg\left(\frac{1}{z_2}\right)=\arg\left(1+i\sqrt{3}\right)=\frac{\pi}{3}$ ومنه $\frac{1}{z_2}=2e^{i\frac{\pi}{3}}$

II) $z_A=4$ ؛ $z_B=1+i\sqrt{3}$ ؛ $z_C=1-i\sqrt{3}$

(1) (أ) حساب $\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}$ ثم تحديد طبيعة المثلث ABC :

$\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}=\frac{1+i\sqrt{3}-4}{1-i\sqrt{3}-4}=\frac{-3+i\sqrt{3}}{-3-i\sqrt{3}}=\frac{\left(-3+i\sqrt{3}\right)\left(-3+i\sqrt{3}\right)}{(-3)^2+\left(-\sqrt{3}\right)^2}=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$

ومنه $\left|\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\right|=\frac{AB}{AC}=\left|\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right|=1$ و $\arg\left(\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\right)=\arg\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}\right)=-\frac{\pi}{3}+2k\pi$

ومنه المثلث ABC متقايس الأضلاع .

(2) إيجاد لاحقة D :

D صورة A بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{CB}$ معناه : $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CB}$ ومنه $z_D-z_A=z_B-z_C$

وعليه $z_D=z_B-z_C+z_A$ ومنه $z_D=1+i\sqrt{3}-1+i\sqrt{3}+4$ ومنه $z_D=4+i2\sqrt{3}$

طبيعة الرباعي $ACBD$:

لدينا $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CB}$ ومنه الرباعي $ACBD$ متوازي اضلاع و $\overrightarrow{CD}\perp\overrightarrow{AB}$ والمثلث ABC متقايس الاضلاع ومنه الرباعي $ACBD$ معين .

(3) تحديد طبيعة (γ) مجموعة النقط M حيث : $|iz+\sqrt{3}-i|=|z-1+i\sqrt{3}|$

$|iz+\sqrt{3}-i|=|z-1+i\sqrt{3}|$ معناه $\left|i\left(z+\frac{\sqrt{3}}{i}-1\right)\right|=|z-1+i\sqrt{3}|$ تكافيء $|i\left(z-i\sqrt{3}-1\right)|=|z-1+i\sqrt{3}|$

ومنه $|z-\left(1-i\sqrt{3}\right)|=|z-\left(1+i\sqrt{3}\right)|$ تكافيء $|z-z_B|=|z-z_C|$ ومنه $MB=MC$ ومنه (γ) هي المستقيم المحوري للقطعة $[BC]$.

(4) تبيان أن النقطة G مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABC تنتمي إلى (γ) :

G هي مركز ثقل المثلث ABC ومنه : $z_G=\frac{z_A+z_B+z_C}{3}=\frac{4+1+i\sqrt{3}+1-i\sqrt{3}}{3}=2$

لدينا $\begin{cases}|z_B-z_G|=|1+i\sqrt{3}-2|=|-1+i\sqrt{3}|=2\\|z_C-z_G|=|1-i\sqrt{3}-2|=|-1-i\sqrt{3}|=2\end{cases}$ ومنه $GB=GC$

ومنه G مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABC تنتمي إلى (γ) .

التمرين 39 بكالوريا 2018// الموضوع الأوّل شعبة رياضيات

المستوي المركب منسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$, θ عدد حقيقي من المجال $]-\pi;\pi]$

(I) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة ذات المجهول z التالية :

$$\left(z^2-2z+2\right)\left(z^2-2(\sin\theta)z+1\right)=0$$

(II) A ، B ، C و D نقط من المستوي لاحقاتها على الترتيب

$z_A=-\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}$ ، $z_B=1-i$ و $z_C=\sin\theta+i\cos\theta$ ، $z_D=\overline{z_c}$ (يرمز $\overline{z_c}$ إلى مرافق z_c)

1) اكتب الأعداد z_A ، z_B و z_C و z_D على الشكل الاسي .

2) E نقطة من المستوي لاحقتها z_E حيث $z_E=\frac{z_A}{z_B}$.

- بيّن انّ النقط C ، D و E تنتمي إلى دائرة يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها .

(3) ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه النقطة A و زاويته $\frac{\pi}{4}$ ونسبته $\left(2\sqrt{2}-2\right)$.

- عيّن قيمة θ حتى تكون النقطة B صورة النقطة C بالتشابه المباشر S .

(4) نضع $\theta=\frac{-3\pi}{4}$ ، عيّن قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون العدد $(z_D)^n$ تخيليا صرفا .

الحل

(I) حل المعادلة: $\left(z^2-2z+2\right)\left(z^2-2(\sin\theta)z+1\right)=0$:

ومنه إما $z^2-2z+2=0$ او $z^2-2(\sin\theta)z+1=0$

$z^2-2z+2=0$ مميزها : $\Delta=-4=4i^2=(2i)^2$ ومنه الحلول : $z_1=1+i$ و $z_2=1-i$

$z^2-2(\sin\theta)z+1=0$: بحساب المميز

$\Delta=4\sin^2\theta-4=4(\sin^2\theta-1)=4(-\cos^2\theta)=4i^2\cos^2\theta=(2i\cos\theta)^2$

$\sqrt{\Delta}=2i\cos\theta$ ومنه $z_3=\sin\theta+i\cos\theta$ و $z_4=\sin\theta-i\cos\theta$

إذن المعادلة تقبل أربعة حلول وهي : $\{1+i;1-i;\sin\theta+i\cos\theta;\sin\theta-i\cos\theta\}$.

II) 1) كتابة الأعداد على الشكل الأسي:

$z_A=-\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}=\sqrt{2}e^{i\pi}e^{i\frac{5\pi}{4}}=\sqrt{2}e^{i\left(\pi+\frac{5\pi}{4}\right)}=\sqrt{2}e^{i\left(\pi+\pi+\frac{\pi}{4}\right)}=\sqrt{2}e^{i\left(2\pi+\frac{\pi}{4}\right)}=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ ،

$z_B=1-i=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ ،

$z_C=\sin\theta+i\cos\theta=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}$ و $z_D=\overline{z_C}=e^{i\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)}$.

2) تبيان أن النقط C ، D و E تنتمي إلى دائرة وتعيين مركزها ونصف قطرها:

لدينا $z_E=\frac{z_A}{z_B}$ ومنه $|z_E|=\left|\frac{z_A}{z_B}\right|=\frac{|z_A|}{|z_B|}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=1$ و منه $OE=1$

ولدينا أيضا $|z_D|=|z_C|$ ومنه $OD=OC=1$ إذن نجد : $\boxed{OE=OD=OC=1}$ وهذا يعني أن النقط C ، D و E تنتمي إلى الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها $\mathbf{r=1}$.

3) S هو التشابه المباشر الذي مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{4}$ ونسبته $2\sqrt{2}-2$:

تعيين قيمة θ حتى تكون النقطة B صورة النقطة C بالتشابه S :

$S(C)=B$ معناه : $\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}=(2\sqrt{2}-2)e^{i\frac{\pi}{4}}$ اي $z_B-z_A=(z_C-z_A)(2\sqrt{2}-2)e^{i\frac{\pi}{4}}$

$\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}-\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}=(2\sqrt{2}-2)e^{i\frac{\pi}{4}}\left(e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}-\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)$ ومنه

$e^{-i\frac{\pi}{4}}-e^{i\frac{\pi}{4}}=(2-\sqrt{2})e^{i\frac{\pi}{4}}\left(e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}-\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)$ اذن

$e^{-i\frac{\pi}{2}}-1=(2-\sqrt{2})\left(e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}-\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)$ وينتج $-i-1=(2-\sqrt{2})\left(e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}-1-i\right)$

$-i-1=(2-\sqrt{2})e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}-(2-\sqrt{2})(1+i)$ اي

$(2-\sqrt{2})e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}=-i-1+(2-\sqrt{2})(1+i)$

$(2-\sqrt{2})e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}=(1-\sqrt{2})(1+i)$ اذن $(2-\sqrt{2})e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}=(\sqrt{2}-2)e^{i\frac{\pi}{4}}$

$(2-\sqrt{2})e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}=(2-\sqrt{2})e^{i\frac{5\pi}{4}}$ ومنه $e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}=e^{i\frac{5\pi}{4}}$ أي $\frac{\pi}{2}-\theta=\frac{5\pi}{4}+2k\pi$

واخيرا $\theta = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi$

(4) تعيين قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون العدد $(z_D)^n$ تخيليا صرفا : $\theta = \frac{-3\pi}{4}$

$(z_D)^n = \left[e^{i\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)}\right]^n = e^{in\left(-\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{2}\right)} = e^{-i\left(\frac{5\pi}{4}\right)n}$ ويكون تخيليا صرفا إذا كان $\cos\left(-n\frac{5\pi}{4}\right) = 0$

أي $-n\frac{5\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi$ وبالتالي : $-5n = 2 + 4k$ حيث $k \in \mathbb{N}$ اي $-5n \equiv 2[4]$ اي $n \equiv 2[4]$

ومنه $n = 4k + 2$ حيث $k \in \mathbb{N}$

التمرين 40 بكالوريا 2018// الموضوع الثاني شعبة رياضيات

1) m عدد حقيقي ، نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية :

$z^2 + (m+1)z + (2m-1) = 0 \ldots (E)$

- عيّن قيم العدد الحقيقي m التي من أجلها تقبل المعادلة (E) حلين مركبين غير حقيقيين .

2) نضع $m = 3$ ، حل المعادلة (E) .

3) نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ النقط A ، B ، C و E التي لاحقاتها $z_A = -2 + i$ ، $z_B = -2 - i$ و $z_C = \alpha$ ، $z_E = \sqrt{3}$ حيث α عدد حقيقي و $\alpha \succ -2$.

-بيّن أنَ قيمة α التي يكون من أجلها المثلث ABC متقايس الأضلاع هي $\left(-2+\sqrt{3}\right)$.

- نضع في كل ما يأتي $z_C = -2 + \sqrt{3}$.

4) أكتب العدد المركب : $\frac{z_C - z_E}{z_A - z_B}$ على الشكل الأسي ثم استنتج أنَ :

(أ)- المستقيمان (AB) و (EC) متعامدان .

(ب)- النقط A ، B و E تنتمي إلى نفس الدائرة (γ) التي يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها .

5) ليكن r الدوران الذي يحوّل النقطة B إلى C ويحوّل C إلى A ، عبارته المركبة هي :

$z' = az + \left(\frac{\sqrt{3}-6}{2}\right) + i\left(\frac{2\sqrt{3}-1}{2}\right)$ حيث a عدد مركب .

(أ)- أحسب العدد المركب a ثم استنتج زاوية الدوران r .

(ب)- تحقق أنَ النقطة G مركز ثقل المثلث ABC هي مركز الدوران r .

الحل

$z^2 + (m+1)z + (2m-1) = 0 \ldots\ldots (E)$

(1) تعيين قيم العدد الحقيقي m : تقبل المعادلة (E) حلين غير حقيقيين إذا كان : $\Delta \prec 0$

$\Delta = (m+1)^2 - 4(2m-1) = m^2 - 6m + 5$

جذرا المميز هما : $m_1 = \frac{6+4}{2} = 5$ و $m_2 = \frac{6-4}{2} = 1$

وبالتالي يكون $m^2 - 6m + 5 \prec 0$ اذا كان $m \in]1;5[$

(2) نضع $m = 3$ ، تصبح المعادلة : $z^2 + 4z + 5 = 0 \ldots (E)$

$\Delta = -4 = (2i)^2$ ومنه $z_1 = \frac{-4+2i}{2} = \boxed{-2+i}$ ، $z_2 = \frac{-4-2i}{2} = \boxed{-2-i}$.

(3) $z_A = -2+i$ ، $z_B = -2-i$ ، $z_C = \alpha$ حيث $\alpha \succ -2$

المثلث ABC متقايس الأضلاع معناه : $AB = AC = BC$

$AB = |z_B - z_A| = |-2-i+2-i| = |-2i| = 2$ ، $AC = |z_C - z_A| = |\alpha+2-i| = \sqrt{(\alpha+2)^2+1}$ ،

$BC = |z_C - z_B| = |\alpha+2+i| = \sqrt{(\alpha+2)^2+1}$.

$AB = AC$ اي $\sqrt{(\alpha+2)^2+1} = 2$ ومنه $(\alpha+2)^2+1 = 4$ ومنه $(\alpha+2)^2 - 3 = 0$

أي $(\alpha+2+\sqrt{3})(\alpha+2-\sqrt{3}) = 0$ ومنه إما $\alpha = -2+\sqrt{3}$ أو $\alpha = -2-\sqrt{3}$

وبما ان $\alpha \succ -2$ فان القيمة $-2-\sqrt{3} \prec -2$ فهي مرفوض ومنه $\alpha = -2+\sqrt{3}$

إذن المثلث ABC متقايس الأضلاع إذا كان $\boxed{\alpha = -2+\sqrt{3}}$.

4) نضع $z_C = -2+\sqrt{3}$: الشكل الاسي للعدد $\frac{z_C - z_E}{z_A - z_B}$

$$\frac{z_C - z_E}{z_A - z_B} = \frac{-2+\sqrt{3}-\sqrt{3}}{-2+i+2+i} = \frac{-2}{2i} = \frac{-1}{i} = i = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

(أ)-استنتاج ان المستقيمين (AB) و (EC) متعامدان :

$\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{EC}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \,/\, k \in \mathbb{Z}$ ومنه $\frac{z_C - z_E}{z_A - z_B} = e^{i\frac{\pi}{2}}$ أي المستقيمان (BA) و (EC) متعامدان.

(ب) النقط A ، B و E تنتمي إلى نفس الدائرة (γ)

المثلث ABC متقايس الأضلاع معناه : $AB = AC = BC$

ومن جهة أخرى وجدنا $\frac{z_C - z_E}{z_A - z_B} = i$ أي $\left|\frac{z_C - z_E}{z_A - z_B}\right| = |i| = 1$ أي $AB = CE$

اذن نستنتج ان : $EC = AC = BC$ أي ان النقط A ، B و E تنتمي إلى الدائرة التي مركزها النقطة C ونصف قطرها $EC = BC = 2$

5) حساب a : العبارة المركبة لهذا الدوران هي $z' = az + \left(\frac{\sqrt{3}-6}{2}\right) + i\left(\frac{2\sqrt{3}-1}{2}\right)$

لدينا $r(B) = C$ و $r(C) = A$

ومنه $z_C = az_B + \left(\frac{\sqrt{3}-6}{2}\right) + i\left(\frac{2\sqrt{3}-1}{2}\right)$ ومنه بالتعويض نجد

ومنه $-2+\sqrt{3} = a(-2-i) + \left(\frac{\sqrt{3}-6}{2}\right) + i\left(\frac{2\sqrt{3}-1}{2}\right)$

$a(4+2i)=-\sqrt{3}-2+i\left(2\sqrt{3}-1\right)$ ومنه $-4+2\sqrt{3}=-4a-2ai+\sqrt{3}-6+2\sqrt{3}i-i$ ومنه

$$a=\frac{-\sqrt{3}-2+i\left(2\sqrt{3}-1\right)}{4+2i}=\frac{\left[-\sqrt{3}-2+i\left(2\sqrt{3}-1\right)\right](4-2i)}{(4+2i)(4-2i)}$$

$$=\frac{-4\sqrt{3}+2\sqrt{3}i-8+4i+8\sqrt{3}i-4i+4\sqrt{3}-2}{16+4}=$$

$$=\frac{-10+10\sqrt{3}i}{20}=\boxed{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}$$

زاوية هذا الدوران هي θ عمدة للعدد a ومنه $\begin{cases}\cos\theta=-\frac{1}{2}\\ \sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$

اذن $\theta=\pi-\frac{\pi}{3}+2k\pi=\frac{2\pi}{3}+2k\pi$

ب) اثبات ان النقطة G مركز ثقل المثلث هي مركز الدوران r :

مركز الدوران هي النقطة الصامدة أي :

$$z_G=\frac{b}{1-a}=\frac{\left(\frac{\sqrt{3}-6}{2}\right)+i\left(\frac{2\sqrt{3}-1}{2}\right)}{\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i}=\frac{\sqrt{3}-6+i\left(2\sqrt{3}-1\right)}{3-\sqrt{3}i}=$$

$$=\frac{\left[\sqrt{3}-6+i\left(2\sqrt{3}-1\right)\right]\left(3+\sqrt{3}i\right)}{\left(3-\sqrt{3}i\right)\left(3+\sqrt{3}i\right)}$$

$$=\frac{3\sqrt{3}-18+6\sqrt{3}i-3i+3i-6\sqrt{3}i-6+\sqrt{3}}{12}=\frac{4\sqrt{3}-24}{12}=-2+\frac{\sqrt{3}}{3}$$

و لاحقة مركز ثقل المثلث ABC المتقايس الأضلاع : هي $\frac{-2+i-2-i-2+\sqrt{3}}{3}=\frac{\sqrt{3}-6}{3}=-2+\frac{\sqrt{3}}{3}$ إذن $z_G=\frac{z_A+z_B+z_C}{3}$.

نستنتج أن مركز هذا الدوران هو فعلا مركز ثقل المثلث ABC .

التمرين 41 بكالوريا 2019// الموضوع الأوّل شعبة علوم تجريبية

(I) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية : $(z-i)\left(z^2-4z+5\right)=0$

(II) نعتبر في المستوي المركب المنسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، النقط A ، B و C التي لاحقاتها i ، $2-i$ و $2+i$ على الترتيب .

(1) اكتب العدد المركب $\frac{z_C-z_A}{z_C-z_B}$ على الشكل الاسي , ثم استنتج طبيعة المثلث ABC

(2) من اجل كل عدد مركب z يختلف عن $2+i$ نضع $f(z)=\frac{iz-1-2i}{2z-4-2i}$

(أ) عين المجموعة (E) للنقط M من المستوي ذات اللاحقة z التي تحقق : $|f(z)|=\frac{1}{2}$

(ب) بين ان العدد $[f(i)]^{1440}$ حقيقي موجب .

(3) نعتبر الدوران r الذي مركزه C و زاويته $\frac{\pi}{2}$.

(أ) عين لاحقة D صورة B بالدوران r و بين ان النقط D ، A و C في استقامية.

(ب) استنتج ان D هي صورة النقطة A بتحويل نقطي بسيط يطلب تحديد طبيعته و عناصره

الحل

I) $(z-i)\left(z^2-4z+5\right)=0$ ومنه اما $z-i=0$ أي $\boxed{z=i}$ او $z^2-4z+5=0$

$z^2-4z+5=0$ للمعادلة $\Delta=(-4)^2-4(1)(5)=16-20=-4<0$ ومنه $z^2-4z+5=0$ حلان مترافقان هما

$z_1=\dfrac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}=\dfrac{4-i\sqrt{4}}{2}=\boxed{2-i}$ و $z_2=\dfrac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}=\dfrac{4+i\sqrt{4}}{2}=\boxed{2+i}$ ومنه فان حلول المعادلة

$(z-i)\left(z^2-4z+5\right)=0$ هي $\boxed{S=\{i\,;2-i\,;2+i\}}$.

II) 1) $\boxed{e^{-i\frac{\pi}{2}}}=-i=\dfrac{1}{i}=\dfrac{2}{2i}=\dfrac{2+i-i}{2+i-2+i}=\dfrac{z_C-z_A}{z_C-z_B}$.

التفسير الهندسي : $\left|\dfrac{z_C-z_A}{z_C-z_B}\right|=\dfrac{AC}{BC}=|-i|=1$ و $\arg\left(\dfrac{z_C-z_A}{z_C-z_B}\right)=\arg(-i)=-\dfrac{\pi}{2}$

اذن $AC=BC$ و $\left(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{AC}\right)=-\dfrac{\pi}{2}$ اذن المثلث ABC قائم في C ومتساوي الساقين.

2) $f(z)=\dfrac{iz-1-2i}{2z-4-2i}$

أ) $|f(z)|=\dfrac{1}{2}$ ومنه $\left|\dfrac{iz-1-2i}{2z-4-2i}\right|=\dfrac{1}{2}$ ومنه $\left|\dfrac{i\left(z-\frac{1}{i}-2\right)}{2(z-2-i)}\right|=\dfrac{1}{2}$ ومنه $\left|\dfrac{i}{2}\times\dfrac{(z-(2-i))}{(z-(2+i))}\right|=\dfrac{1}{2}$

$\left|\dfrac{i}{2}\right|\times\left|\dfrac{z-(2-i)}{z-(2+i)}\right|=\dfrac{1}{2}$ ومنه نجد $\dfrac{1}{2}\times\left|\dfrac{z-z_B}{z-z_C}\right|=\dfrac{1}{2}$ أي $\left|\dfrac{z-z_B}{z-z_C}\right|=\dfrac{BM}{CM}=1$ ومنه $BM=CM$ ومنه المجموعة

(E) للنقط M هي نقط محور القطعة المستقيمة $[BC]$.

ب) تبيان ان العدد $[f(i)]^{1440}$ حقيقي موجب : $f(i)=\dfrac{-1-1-2i}{2i-4-2i}=\dfrac{-2-2i}{-4}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}i=\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

$$[f(i)]^{1440}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^{1440}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{1440}e^{i\frac{1440\pi}{4}}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{1440}e^{i360\pi}=$$

$$=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{1440}(\cos 360\pi+i\sin 360\pi)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{1440}(1+0.i)=\boxed{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{1440}}$$

اذن $\left(f(i)\right)^{1440}$ عدد حقيقي موجب.

3) أ) D هي صورة B بالدوران r الذي مركزه C وزاويته $\dfrac{\pi}{2}$ معناه $z_D-z_C=e^{i\frac{\pi}{2}}(z_B-z_C)$ ومنه

$z_D=i(2-i-2-i)+2+i=\boxed{4+i}$

وجدنا سابقا $\left(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{AC}\right)=-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$ .....(1)

ولدينا $z_D - z_C = e^{i\frac{\pi}{2}}(z_B - z_C)$ أي $\frac{z_D - z_C}{z_B - z_C} = e^{i\frac{\pi}{2}}$ ومنه $\frac{z_C - z_D}{z_C - z_B} = e^{i\frac{\pi}{2}}$ أي $\left(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{DC}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k'\pi$ ومنه

$$\left(\overrightarrow{DC};\overrightarrow{BC}\right) = -\frac{\pi}{2} + 2k"\pi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

من (1) و (2) وحسب علاقة شال نجد $\boxed{-\pi + 2k_1\pi}$ $\left(\overrightarrow{DC};\overrightarrow{AC}\right) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi - \frac{\pi}{2} + 2k"\pi =$

والنقط D, A, C في استقامية.

طريقة ثانية : $\frac{z_D - z_C}{z_A - z_C} = -1$ أي $z_D - z_C = -1(z_A - z_C)$ ومنه $\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{CA}$ أي ان النقط في استقامية

ب) وجدنا $\left(\overrightarrow{DC};\overrightarrow{AC}\right) = -\pi + 2k_1\pi$ ولدينا حسب ما سبق $AC = BC$ وأيضا $CD = BC$

اذن $\boxed{CD = AC}$ وعليه نستنتج $\frac{z_C - z_A}{z_C - z_D} = e^{-\pi i}$ ومنه $\frac{z_A - z_C}{z_D - z_C} = e^{-\pi i} = -1$ ومنه $\boxed{z_A - z_C = (-1)(z_D - z_C)}$

ينتج ان A هي صورة D بالتحاكي الذي مركزه C ونسبته $k = -1$

التمرين 42 بكالوريا 2019// الموضوع الثاني شعبة علوم تجريبية

المستوى المركب منسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$

نعتبر النقط A ، B و C التي لاحقتها على الترتيب : $z_A = \sqrt{2} + i\sqrt{6}$ و $z_B = \overline{z_A}$ و $z_C = -2z_A$

1) أ) اكتب العدد المركب z_A على الشكل الأسي

ب) أحسب العدد $\left(\frac{z_A}{2\sqrt{2}}\right)^{2019} + \left(\frac{z_B}{2\sqrt{2}}\right)^{2019}$

2) أ) T الانسحاب الذي يحول A الى C ، عين z_D لاحقة النقطة D صورة B بالانسحاب T

ب) استنتج طبيعة الرباعي $ABDC$

3) اكتب العدد المركب $z_C - z_A$ على الشكل الاسي

4) جد قيم العدد الطبيعي n التي يكون من اجلها العدد المركب $\left(\frac{-6\sqrt{2}}{z_C - z_A}\right)^n$ عددا حقيقيا

5) لتكن M نقطة كيفية من المستوي لاحقتها z حيث M تختلف عن A وتختلف عن C

عين (E) مجموعة النقط M التي من اجلها يكون $\frac{z_A - z}{z_C - z}$ عددا حقيقيا موجبا تماما

الحل

$z_A = \sqrt{2} + i\sqrt{6}$ و $z_B = \sqrt{2} - i\sqrt{6}$ و $z_C = -2\sqrt{2} - 2i\sqrt{6}$

1) أ) كتابة $z_A = \sqrt{2} + i\sqrt{6}$ على الشكل الأسي:

$|z_A| = \sqrt{\sqrt{2}^2 + \sqrt{6}^2} = \sqrt{8} = \boxed{2\sqrt{2}}$ ، لتكن θ عمدة له ومنه

$$\begin{cases} \cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \rightarrow \boxed{\theta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}}$$

اذن $\boxed{z_A = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{3}}}$

ب) حساب : $\left(\frac{z_A}{2\sqrt{2}}\right)^{2019}+\left(\frac{z_B}{2\sqrt{2}}\right)^{2019}$ لدينا $z_B=\overline{z_A}=2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{3}}$ ومنه نعوض فنجد:

$$\left(\frac{2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{3}}}{2\sqrt{2}}\right)^{2019}+\left(\frac{2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{3}}}{2\sqrt{2}}\right)^{2019}=\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^{2019}+\left(e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)^{2019}=e^{i\frac{2019\pi}{3}}+e^{-i\frac{2019\pi}{3}}$$

$$=e^{i673\pi}+e^{-i673\pi}=\cos 673\pi+i\sin 673\pi+\cos(-673\pi)+\sin(-673\pi)=$$

$$\cos\pi+i\sin\pi+\cos(-\pi)+\sin(-\pi)=-1+0-1+0=\boxed{-2}$$

2) أ) T الانسحاب الذي يحول A الى C اذن شعاعه $\overrightarrow{AC}$ و D صورة B معناه $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AC}$ ومنه $z_{\overrightarrow{BD}}=z_{\overrightarrow{AC}}$ أي $z_D-z_B=z_C-z_A$ ومنه :

$$z_D=z_C-z_A+z_B=-2\left(\sqrt{2}+i\sqrt{6}\right)-\sqrt{2}-i\sqrt{6}+\sqrt{2}-i\sqrt{6}$$

$$=-2\sqrt{2}-i2\sqrt{6}-i\sqrt{6}-i\sqrt{6}=\boxed{-2\sqrt{2}-4\sqrt{6}i}$$

اذن : $z_D=\boxed{-2\sqrt{2}-4\sqrt{6}i}$

ب) استنتاج طبيعة الرباعي : حسب ما سبق وجدنا $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AC}$ وعليه فان الرباعي $ABDC$ متوازي اضلاع.

3) كتابة العدد z_C-z_A على الشكل الاسي

$$z_C-z_A=-2z_A-z_A=-3z_A=-6\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{3}}=6\sqrt{2}(-1)e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$=6\sqrt{2}\left(e^{i\pi}\right)e^{i\frac{\pi}{3}}=6\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\pi\right)}=\boxed{6\sqrt{2}e^{i\frac{4\pi}{3}}}$$

4) تعيين قيم العدد الطبيعي n :

$$\left(\frac{-6\sqrt{2}}{z_C-z_A}\right)^n=\left(\frac{-6\sqrt{2}}{6\sqrt{2}e^{i\frac{4\pi}{3}}}\right)^n=\left(-e^{i\frac{4\pi}{3}}\right)^n=(-1)^n e^{i\frac{4\pi}{3}n}$$

$\left(\frac{-6\sqrt{2}}{z_C-z_A}\right)^n$ حقيقيا معناه $\frac{4\pi n}{3}=k\pi/k\in\mathbb{Z}$ ومنه $4n=3k$ ومنه $n=\frac{3}{4}k$ وبما ان n عدد طبيعي اذن يجب ان يكون $k=4k'$ فنجد $\boxed{n=3k'}$ حيث k' عدد طبيعي.

5) تعيين مجموعة النقط : $\frac{z_A-z}{z_C-z}$ حقيقي موجب تماما معناه $\arg\frac{z_A-z}{z_C-z}=2k\pi$ حيث $(k\in\mathbb{Z})$

أي $\left(\overrightarrow{MC};\overrightarrow{MA}\right)=2k\pi$ وهذا يعني ان النقط A و C و M تقع في استقامية بحيث M لا تقع بينهما ومنه فان المجموعة (E) هي نقط المستقيم (CA) باستثناء القطعة المستقيمة $[CA]$.

التمرين 43 بكالوريا 2019// الموضوع الأوّل شعبة تقني رياضي

المستوي منسوب الى المعلم م . م $(O,\vec{u},\vec{v})$. A و B و C النقط التي لاحقاتها على الترتيب :

$z_B=2+i$ و $z_A=1+i$ و $z_C=\frac{3}{2}+i\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ و (Γ) الدائرة ذات المركز A و نصف القطر 1

(1) (أ) تحقق ان النقطة C من الدائرة (Γ)

(ب)عين قيسا بالراديان للزاوية $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$ ثم استنتج أن C هي صورة B بالدوران r الذي مركزه A يطلب تعيين زاويته

(2) S التشابه المباشر الذي يحول النقطة M ذات اللاحقة z الى النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث :

$$z'=\left(1+i\sqrt{3}\right)z+\sqrt{3}-i\sqrt{3}$$

(أ) حدد العناصر المميزة للتشابه S

(ب) عين z_D لاحقة D صورة B بالتشابه S

(3) ماهي نسبة التحاكي h الذي مركزه A حيث $S=hOr$ ؟ استنتج ان النقط A و C و D في استقامية

(4) (E) مجموعة النقط M من المستوي التي لاحقتها z حيث : $z=z_A+ke^{i\frac{\pi}{3}}$ مع $k\in\mathbb{R}_+^*$

. تحقق ان النقطة C من المجموعة (E) . ثم حدد طبيعة (E)

الحل

$z_B=2+i$ و $z_A=1+i$ و $z_C=\frac{3}{2}+i\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. و (Γ) الدائرة ذات المركز A و نصف القطر 1

(1)(أ). التحقق $C\in(\Gamma)$ يعني أن $AC=1$ أي أن $|z_C-z_A|=1$ يعني أن $\left|\frac{3}{2}+i\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-1-i\right|=1$

$\left|\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right|=1$ محققة .

ب)-تعيين قيس الزاوية $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$ نحسب عمدة العدد $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\frac{\frac{3}{2}+i\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-1-i}{2+i-1-i}$ أي أن

$\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$ و منه $\arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)=\frac{\pi}{3}$ إذن $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=\frac{\pi}{3}$.

$\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$ يعني $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=e^{i\frac{\pi}{3}}$ و منه نستنتج أن C صورة B بالدوران الذي مركزه A و زاويته $\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

(2) لدينا $z'=\left(1+i\sqrt{3}\right)z+\sqrt{3}-i\sqrt{3}$: S

(أ) S هو تشابه مباشر نسبته $\left|\left(1+i\sqrt{3}\right)\right|=\sqrt{1^2+\sqrt{3}^2}=2$ و زاويته $\arg\left(1+i\sqrt{3}\right)=\frac{\pi}{3}$ (لان $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$) و مركزه النقطة ذات اللاحقة z_0 و منه $z_0=\frac{\sqrt{3}-i\sqrt{3}}{1-1-i\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}-i\sqrt{3}}{-i\sqrt{3}}$

إذن $z_0=1+i$ و منه A مركز التشابه المباشر S

(ب) تعيين لاحقة D : $z_D=\left(1+i\sqrt{3}\right)z_B+\sqrt{3}-i\sqrt{3}$ أي $z_D=\left(1+i\sqrt{3}\right)(2+i)+\sqrt{3}-i\sqrt{3}$ بالحساب

$z_D=2+i+2i\sqrt{3}-\sqrt{3}+\sqrt{3}-i\sqrt{3}$ و منه $z_D=2+i\left(1+\sqrt{3}\right)$

(3) تعيين نسبة التحاكي h : $S=h\circ r$ نسبة التحاكي هي نسبة التشابه المباشر و هي 2 و الذي مركزه A

$r(B)=C$ و $S(B)=D$ أي أن $S(B)=h\circ r(B)=h(C)$ منه $h(C)=D$ و مركز التحاكي

إذن النقط A ; C ; D في استقامية

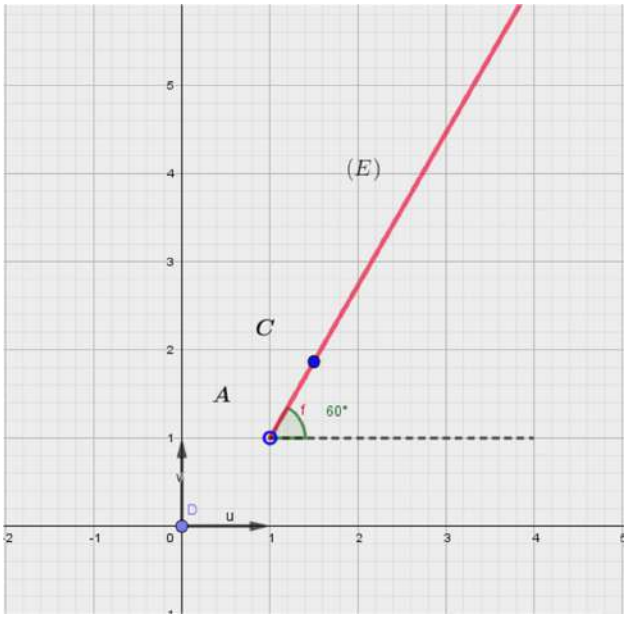
(4) (E)مجموعة النقط $M(z)$ حيث $z=z_A+ke^{i\frac{\pi}{3}}$ و k عدد حقيقي موجب تماما

التحقق أن النقطة C من المجموعة (E) يعني أن $z_C = z_A + ke^{i\frac{\pi}{3}}$ لها حل أي أن

$1+\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)i = 1+i+ke^{i\frac{\pi}{3}}$ يعني أن $\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2} = ke^{i\frac{\pi}{3}}$ يعني أن $k=1$ و منه محققة .

(E) نصف مستقيم الذي معامل توجيهه $\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)$ و يمر من النقطة C على يمين النقطة A و هذه الأخيرة لا تنتمي لهذه المجموعة .

الرسم للتوضيح .



التمرين 44 بكالوريا 2019// الموضوع الثاني شعبة تقني رياضي

(I) (أ) تحقق أن $\left(2-2\sqrt{3}\right)^2 = 16-8\sqrt{3}$

(ب) عين على الشكل الجبري الجذرين التربيعيين L_1 و L_2 للعدد المركب Z حيث: $Z=-16\sqrt{3}-16i$

(II) في المستوي المركب المنسوب الى المعلم م . م $(O,\vec{u},\vec{v})$ نعتبر النقط A و B و C التي لاحقاتها

$z_A = 4e^{i\frac{\pi}{3}}+4e^{i\frac{5\pi}{6}}$ و $z_B = \frac{1}{2}iz_A$ و $z_C = -\frac{1}{4}z_A$.

(1) أكتب z_A على الشكل الجبري ، ثم بين أن $z_A = 4\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}$

(2) استنتج القيمتين المضبوطتين للعددين الحقيقيين $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$

(3) S التشابه المباشر الذي يحول A الى B و يحول B الى C

لتكن M' النقطة ذات اللاحقة z' صورة النقطة M ذات اللاحقة z بالتشابه S

(أ) بين ان : $z' = \frac{1}{2}iz$

(ب) حدد العناصر المميزة للتشابه S

(4) G النقطة ذات اللاحقة z_G مرجح الجملة $\{(A;2),(B;-2),(C;4)\}$

(أ) بين ان : $z_G = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$

(ب) (E) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z بحيث : $\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right\| = 2\sqrt{2}$

حدد طبيعة (E) و عناصرها المميزة ، ثم احسب محيط (E') صورة (E) بالتشابه S

الحل

(I) (أ) التحقق : $\left(2-2\sqrt{3}\right)^2=4-8\sqrt{3}+12=16-8\sqrt{3}$.

(ب) تعيين الجذرين التربيعيين للعدد $z=-16\sqrt{3}-16i$ نضع $L=x+iy$ جذرا للعدد المركب z أي $L^2=z$

وهذا يعني $|z|=|L|^2$ أي أن $\begin{cases}x^2+y^2=32\\2xy=-16\\x^2-y^2=-16\sqrt{3}\end{cases}$ و منه $2x^2=32-16\sqrt{3}$ أي أن $x^2=16-8\sqrt{3}$

ومن السؤال (أ) $\left(2-2\sqrt{3}\right)^2=16-8\sqrt{3}$ إذن $x=2-2\sqrt{3}$ أو $x=-(2-2\sqrt{3})$.

لما $x=2-2\sqrt{3}$ فإن $y=\dfrac{-8}{2-2\sqrt{3}}=2+2\sqrt{3}$ و لما $x=-2+2\sqrt{3}$ فإن

$y=-2\sqrt{3}-2$

و منه $L_1=2-2\sqrt{3}+i\left(2+2\sqrt{3}\right)$ و $L_2=2\sqrt{3}-2-i\left(2+2\sqrt{3}\right)$.

(II) $z_A=4e^{i\frac{\pi}{3}}+4e^{i\frac{5\pi}{6}}$ و $z_B=\dfrac{1}{2}iz_A$ و $z_C=-\dfrac{1}{4}z_A$.

(1) كتابة z_A على الشكل الجبري: وتعني $z_A=4e^{i\frac{\pi}{3}}+4e^{i\frac{5\pi}{6}}$

$z_A=4(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3})+4(\cos\dfrac{5\pi}{6}+i\sin\dfrac{5\pi}{6})$

اذن $z_A=4\cos\dfrac{\pi}{3}+4i\sin\dfrac{\pi}{3}+4\cos\dfrac{5\pi}{6}+4i\sin\dfrac{5\pi}{6}$ أي $z_A=2+2i\sqrt{3}-2\sqrt{3}+2i$

أي $z_A=2-2\sqrt{3}+\left(2\sqrt{3}+2\right)i$

الشكل الاسي للعدد z_A :

يعني $z_A=4e^{i\frac{\pi}{3}}+4e^{i\frac{5\pi}{6}}$ أن أي $z_A=4e^{i\frac{\pi}{3}}\left(1+e^{-i\frac{\pi}{3}}\times e^{i\frac{5\pi}{6}}\right)$ أي $z_A=4e^{i\frac{\pi}{3}}\left(1+e^{i\frac{3\pi}{6}}\right)$

يعني أن $z_A=4e^{i\frac{\pi}{3}}\left(1+e^{i\frac{\pi}{2}}\right)$ $z_A=4e^{i\frac{\pi}{3}}(1+i)$

و $1+i=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ و منه $z_A=4\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{3}}\times e^{i\frac{\pi}{4}}$ إذن $z_A=4\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}$.

(2) لدينا $z_A=4\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}$. يعني أن $z_A=4\sqrt{2}\cos\left(\dfrac{7\pi}{12}\right).+4\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)$ بالمطابقة بالشكل الجبري نجد

$4\sqrt{2}\cos\left(\dfrac{7\pi}{12}\right).=2-2\sqrt{3}$ و $4\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{7\pi}{12}\right).=2+2\sqrt{3}$

و منه $\cos\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)=\dfrac{2-2\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}=\dfrac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ و $\sin\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)=\dfrac{2+2\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$

أي $\cos\left(\dfrac{7\pi}{12}\right).=\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ و $\sin\left(\dfrac{7\pi}{12}\right).=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$.

(3) لدينا $S(A)=B$ و $S(B)=C$ و $z_B=\dfrac{1}{2}iz_A$ و $z_C=-\dfrac{1}{4}z_A$

(أ) إثبات صحة عبارة التشابه : $S(A)=B$ تعني $z_B=\dfrac{1}{2}iz_A$ وهي محققة حسب المعطى $z_B=\dfrac{1}{2}iz_A$

و $S(B)=C$ تعني $z_C=\dfrac{1}{2}iz_B$ ومن $z_B=\dfrac{1}{2}iz_A$ نجد $z_C=\dfrac{1}{2}i\times(\dfrac{1}{2}iz_A)=-\dfrac{1}{4}z_A$ محققة

نستنتج أن عبارة التشابه S هي $z'=\dfrac{1}{2}iz$.

طريقة ثانية : نفرض أن عبارة التشابه المباشر S هي $z'=az+b$ ومن $S(A)=B$ و $S(B)=C$

نجد أن : $a=\dfrac{z_C-z_B}{z_B-z_A}$ أي $a=\dfrac{-\frac{1}{4}z_A-\frac{1}{2}iz_A}{\frac{1}{2}iz_A-z_A}$ بالتبسيط نجد $a=\dfrac{1+2i}{-2i+4}=\dfrac{i(-i+2)}{2(-i+2)}=\dfrac{1}{2}i$

و $z_B=\dfrac{1}{2}iz_A+b$ و منه $b=0$ إذن العبارة المركبة للتشابه هي $z'=\dfrac{1}{2}iz$.

(ب) S تشابه مباشر نسبته $\left|\dfrac{1}{2}i\right|=\dfrac{1}{2}$ و زاويته $\arg\left(\dfrac{1}{2}i\right)=\dfrac{\pi}{2}$ و مركزه O .

(3) G مرجح الجملة $\{(A;2);(B;-2);(C;4)\}$.

(أ) لدينا $z_G=\dfrac{2z_A-2z_B+4z_C}{4}$ ومن النتائج السابقة نجد $2z_B=iz_A$ و $4z_C=-z_A$

أي $z_G=\dfrac{2z_A-iz_A-z_A}{4}=\dfrac{1-i}{4}z_A$ و $z_A=4\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}$ و منه نجد $z_G=\left(\dfrac{1-i}{4}\right)4\sqrt{2}\ e^{i\frac{7\pi}{12}}$

ونعلم ان $1-i=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ و منه نجد $z_G=\dfrac{\sqrt{2}}{4}e^{-i\frac{\pi}{4}}.4\sqrt{2}\ e^{i\frac{7\pi}{12}}$ و منه $z_G=2e^{i\frac{\pi}{3}}$.

(ب) تعيين المجموعة (E) : $\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right\|=2\sqrt{2}$ يكافئ

$\left\|2\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+4\overrightarrow{MC}\right\|=4\sqrt{2}$

أي أن $4MG=4\sqrt{2}$ يكافئ $MG=\sqrt{2}$ منه (E) دائرة مركزها G و نصف قطرها $\sqrt{2}$.

لدينا $S(E)=(E')$ و منه (E') دائرة نصف قطرها $r'=k\times r=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

محيط (E') هو : $p=2\times r'\times\pi=2\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\pi=\pi\sqrt{2}$.

التمرين 45 بكالوريا 2019// الموضوع الأوّل شعبة رياضيات

في المستوي المركب المنسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ نعتبر النقط A و B و C و D حيث :

$z_A=1+i\sqrt{2}$ و $z_B=i$ و $z_C=\overline{z_A}$ و $z_D=\overline{z_B}$ و $z_E=1$

(1) حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة ذات المجهول z : $(z^2+1)(z^2-2z+3)=0$

(2) (أ) احسب كلا من $|z_A-1|$ ، $|z_B-1|$ و $|z_C-z_E|$ ثم تحقق ان النقط الأربعة A و B و C و D تنتمي الى نفس الدائرة التي يطلب تعيين مركزها و طول نصف قطرها

(ب) بين ان : $z_B-z_E=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i)(z_A-z_E)$ ثم استنتج ان B هي صورة A بتحويل نقطي يطلب تعيين عناصره المميزة

- ما طبيعة المثلث ABE ؟

(3) عين لاحقتي الشعاعين $\overrightarrow{BD}$ و $\overrightarrow{AE}$ محددا طبيعة الرباعي $ABDE$

(4) $\overrightarrow{w_1}$ و $\overrightarrow{w_2}$ شعاعان من المستوي لاحقتاهما على الترتيب z_1 و z_2

أ) برهن أن : ($\overrightarrow{w_1}$ و $\overrightarrow{w_2}$ متعامدان) يكافئ ($z_1.\overline{z_2}+\overline{z_1}.z_2=0$)

ب) عين مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث : $(z-z_A)(\overline{z}-z_D)+(z-z_B)(\overline{z}-z_C)=0$

الحل

1) حل المعادلة $(z^2+1)(z^2-2z+3)=0$:

المعادلة تكافئ : $(z^2+1=0$ او $z^2-2z+3=0)$ اي $z^2+1=0$ ومنه : $z_0=-i$ او $z_1=i$ ،

و مميز $z^2-2z+3=0$ هو $\Delta=-8=(i2\sqrt{2})$ ومنه $z_2=\dfrac{2-i2\sqrt{2}}{2}=1-i\sqrt{2}$ و $z_3=1+i\sqrt{2}$

2) أ) الحساب و التحقق : $z_A=1+i\sqrt{2}$ و $z_B=i$ و $z_C=1-i\sqrt{2}$ و $z_D=-i$ و $z_E=1$

$|z_A-1|=|i\sqrt{2}|=\sqrt{2}$ و $|z_B-1|=|i-1|=\sqrt{2}$ و $|z_C-z_E|=|1-i\sqrt{2}-1|=|i\sqrt{2}|=\sqrt{2}$

و لدينا : $|z_D-1|=\overline{|z_B-1|}=\sqrt{2}$ وهذا يعني : $EC=EB=EA=ED=\sqrt{2}$

إذن : النقط A,B,C,D تنتمي إلى الدائرة التي مركزها E و نصف قطرها $\sqrt{2}$.

ب) بيان صحة المساواة $z_B-z_E=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i)(z_A-z_E)$

لدينا من جهة : $z_B-z_E=i-1$ و من جهة أخرى :

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)(z_A-z_E)=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)(1+i\sqrt{2}-1)=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i).i\sqrt{2}=i-1$$

ومنه صحة المساواة : $z_B-z_E=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i)(z_A-z_E)$

استنتاج تحويل نقطي : من المساواة $z_B-z_E=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i)(z_A-z_E)$ نجد ان $\left|\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\right|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}.\sqrt{2}=1$

و $\arg\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right)=\dfrac{\pi}{4}$ ومنه فان B هي صورة A بالدوران r الذي مركزه E و زاويته $\dfrac{\pi}{4}$.

*)طبيعة المثلث ABE :

لدينا : B هي صورة A بالدوران r الذي مركزه E هذا يعني : $EA=EB$ و $(\overrightarrow{EA};\overrightarrow{EB})=\dfrac{\pi}{4}+2k\pi$ و منه نستنتج أنّ

المثلث ABE متقايس الساقين في E

3) تحديد طبيعة الرباعي $ABDE$:

لدينا : $z_{\overrightarrow{BD}}=z_D-z_B=-2i$ و $z_{\overrightarrow{AE}}=z_E-z_A=-i\sqrt{2}$ أي أنّ : $\dfrac{z_D-z_B}{z_E-z_A}=\dfrac{-2i}{-i\sqrt{2}}=\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

أي أن $z_D-z_B=\sqrt{2}(z_E-z_A)$ وتعني $\overrightarrow{BD}=\sqrt{2}\overrightarrow{AE}$ و منه نستنتج أنّ : $\overrightarrow{BD}\ //\ \overrightarrow{AE}$

و من جهة أخرى لدينا : $BD=\sqrt{2}AE$ أي $(BD\neq AE)$ ، إذن : الرباعي $ABDE$ **شبه منحرف** .

4) أ) البرهان : $\overrightarrow{w_1}$ لاحقته z_1 و $\overrightarrow{w_2}$ لاحقته z_2

ط1) $\overrightarrow{w_1}$ يعامد $\overrightarrow{w_2}$ معناه أنّ $\dfrac{z_1}{z_2}$ تخيلي صرف ، ويكافئ : $\dfrac{z_1}{z_2}=-\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)$ أي $\dfrac{z_1}{z_2}=-\dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ وتكافئ $\overline{z_1}.z_2=-z_1.\overline{z_2}$

و منه : $\overline{z_1}.z_2+z_1.\overline{z_2}=0$

ط2) نضع $\overrightarrow{w_1}\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}$ يعامد $\overrightarrow{w_2}\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}$ معناه أنّ : $\overrightarrow{w_1}\overrightarrow{w_2}=0$ أي : $x_1x_2+y_1y_2=0$ و منه : $\mathrm{Re}\left(z_1\overline{z_2}\right)=0$

ونضع : $z_1=x_1+iy_1$ و $z_2=x_2+iy_2$ و $\overline{z_1}=x_1-iy_1$ و $\overline{z_2}=x_2-iy_2$

و $z_1.\overline{z_2} = x_1x_2 + y_1y_2 + i(x_2y_1 - x_1y_2)$ و $\overline{z_1}.z_2 = x_1x_2 + y_1y_2 + i(x_1y_2 - x_2y_1)$ مع $x_1x_2 + y_1y_2 = 0$

و نلاحظ بالجمع ان $\overline{z_1}.z_2 + z_1.\overline{z_2} = 2(x_1x_2 + y_1y_2) = 0$ تعني $2\text{Re}(z_1.\overline{z_2}) = 0$ أي أنّ : $\text{Re}(z_1.\overline{z_2}) = 0$.

وبالتالي نستنتج أنّ : $\overrightarrow{w_1} \perp \overrightarrow{w_2}$ يكافئ $z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}.z_2 = 0$.

ب) تعيين طبيعة مجموعة النقط : حيث $z_C = \overline{z_A}$ و $z_D = \overline{z_B}$

لدينا: $(z - z_A)(\overline{z} - z_D) + (z - z_B)(\overline{z} - z_C) = 0$ وتعني : $(z - z_A)(\overline{z} - \overline{z_B}) + (z - z_B)(\overline{z} - \overline{z_A}) = 0$ أي :

$(z - z_A)\overline{(z - z_B)} + (z - z_B)\overline{(z - z_A)} = 0$ ومن السؤال السابق $z_1.\overline{z_2} + \overline{z_1}.z_2 = 0$ تعني $\overrightarrow{w_1} \perp \overrightarrow{w_2}$

إذن نستنتج أنّ : $\overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{BM}$ و منه مجموعة النقط هي **الدائرة** التي قطرها $[AB]$.

التمرين 46 بكالوريا 2019// الموضوع الثاني شعبة رياضيات

(1) نضع من اجل كل عدد مركب z ، $P(z) = z^4 - 6z^3 + 29z^2 - 24z + 100$

(أ) بين انه من اجل كل عدد مركب z ، $\overline{P(z)} = P(\overline{z})$ ثم استنتج انه اذا كان z حلا للمعادلة $P(z) = 0$ فإن $\overline{z}$ حل لها

(ب) حل في مجموعة الاعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z) = 0$ علما انها تقبل حلا تخيليا صرفيا

(2) نعتبر في المستوي المركب المنسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ ، النقط A ، B ، M و M'

التي لاحقاتها على الترتيب : $2i$ ، $3-4i$ ، z و z' حيث : $z' = \dfrac{-iz + 4 + 3i}{z - 2i}$ مع $z \neq 2i$

و لتكن I مرجح الجملة $\{(A;2),(B;1)\}$ و J مرجح الجملة $\{(A;-2),(B;1)\}$

(أ) عين اللاحقتين z_I و z_J للنقطتين I و J على الترتيب

(ب) لتكن (E) مجموعة النقط $M(z)$ التي يكون من اجلها $|z'| = 2$

بين ان (النقطة M من (E)) يكافئ ($\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{JM} = 0$) ، ثم عين (E) و أنشئها

(جـ) لتكن (Γ) مجموعة النقط $M(z)$ التي يكون من اجلها $\arg(z') = 2k\pi$ حيث k عدد صحيح

تحقق ان النقطة D ذات اللاحقة $\dfrac{9}{2} - \dfrac{5}{2}i$ تنتمي الى (Γ) ، ثم عين و أنشئ (Γ)

(3) عين الشكل الجبري للاحقة النقطة G تقاطع المجموعتين (E) و (Γ)

الحل

1) أ) تبيان أنّ $\overline{P(z)} = P(\overline{z})$:

لدينا : $P(\overline{z}) = \overline{z}^4 - 6\overline{z}^3 + 29\overline{z}^2 - 24\overline{z} + 100$ أي : $P(\overline{z}) = \overline{z^4} - 6\overline{z^3} + 29\overline{z^2} - 24\overline{z} + 100$

و منه : $P(\overline{z}) = \overline{z^4 - 6z^3 + 29z^2 - 24z + 100}$ ، إذن : $P(\overline{z}) = \overline{P(z)}$.

ومنه إذا كان z حلا للمعادلة $P(z) = 0$ فإنّ : $\overline{P(z)} = 0$ أي : $P(\overline{z}) = 0$ و منه سيكون $\overline{z}$ حلا للمعادلة $P(z) = 0$

ب)حل المعادلة $P(z) = 0$: نضع : $z = i\alpha$ حيث : $\alpha \neq 0$ هذا الأخير حل للمعادلة يعني أنّ : $\overline{z} = -i\alpha$ حل للمعادلة أيضا .

لدينا : $\begin{cases} P(z)=z^4-6z^3+29z^2-24z+100 \ldots(1) \\ P(\overline{z})=\overline{z}^4-6\overline{z}^3+29\overline{z}^2-24\overline{z}+100 \ldots(2) \end{cases}$ بطرح (1) من (2) نجد :

$\alpha^4+i\,6\alpha^3-29\alpha^2-i\,24\alpha+100=0$ بالتعويض نجد $\left(z^4-\overline{z}^4\right)-6\left(z^3-\overline{z}^3\right)+29\left(z^2-\overline{z}^2\right)+24\left(z-\overline{z}\right)=0$

ومنه

$\alpha^4-29\alpha^2+100+i\left(6\alpha^3-24\alpha\right)=0$ أي $\alpha^4-29\alpha^2+100=0\ldots$ (*) و $\alpha i\left(\alpha^2-4\right)=0$

و منه $\alpha=0$ أو $\alpha=2$ أو $\alpha=-2$ ، لكن $\alpha=0$ لا تحقق (*) إذن الحلان هما : $z_1=2i$ و $z_2=-2i$.

و بتحليل $P(z)$ أي : $P(z)=(z-2i)(z+2i)\left(az^2+bz+c\right)=\left(z^2+4\right)\left(az^2+bz+c\right)$

بعد النشر و التبسيط و المطابقة نجد : $\begin{cases} a=-6 \\ b+4=29 \\ 4a=-24 \\ 4b=100 \end{cases}$ ومنه $a=-6$ و $b=25$ اذن

$P(z)=\left(z^2+4\right)\left(z^2-6z+25\right)$ ، وبحل المعادلة $P(z)=0$ نجد : $z^2+4=0$ او $z^2-6z+25=0$

مميزها : $\Delta=-64=(8i)^2$ ومنه حلاها هما : $z_3=3-4i$ و $z_4=3+4i$

وبالتالي مجموعة حلول المعادلة هي : $S=\{-2i;2i;3-4i;3+4i\}$

2) أ) تعيين اللاحقتين z_I و z_J :

*) $z_I=\dfrac{2z_A+z_B}{2+1}$ أي : $z_I=\dfrac{4i+3-4i}{3}$ ، و منه : $z_I=1$.

*) $z_J=\dfrac{-2z_A+z_B}{-2+1}$ أي : $z_J=\dfrac{-4i+3-4i}{-1}$ ، و منه : $z_J=-3+8i$.

ب) التبيان ثم تعيين و إنشاء المجموعة (E) : $z'=\dfrac{-iz+4+3i}{z-2i}$ و $|z'|=2$

لدينا : $M\in(E)$ يعني أنّ : $\left|\dfrac{-iz+4+3i}{z-2i}\right|=2$ أي : $|-iz+4+3i|=2|z-2i|$ ، تصبح :

$|z+4i-3|=2|z-2i|$ أي : $|z-z_B|=2|z-z_A|$ و منه : $MB=2MA$.

والأخيرة تصبح : $MB^2=4MA^2$ أي : $MB^2-4MA^2=0$ أي أنّ : $\overline{MB}^2-4\overline{MA}^2=0$ ومنه نجد

$\left(\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MA}\right).\left(\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MA}\right)=0$ ونعلم ان : I مرجح الجملة $\{(A;2),(B;1)\}$ و J مرجح الجملة

$\{(A;-2),(B;1)\}$ أي ان : $\overrightarrow{IB}+2\overrightarrow{IA}=\vec{0}$ و $\overrightarrow{JB}-2\overrightarrow{JA}=\vec{0}$ و منه العبارة

$\left(\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MA}\right).\left(\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MA}\right)=0$ تكافئ $\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}+2\overrightarrow{MI}+2\overrightarrow{IA}\right).\left(\overrightarrow{MJ}+\overrightarrow{JB}-2\overrightarrow{MJ}-2\overrightarrow{JA}\right)$ اي

$-\overrightarrow{MJ}.3\overrightarrow{MI}=0$ وبالتالي ينتج : $\overrightarrow{MJ}.\overrightarrow{MI}=0$ و عليه مجموعة النقط (E) هي الدائرة التي قطرها $[IJ]$.

ج) التحقّق ثم تعيين و إنشاء المجموعة (Γ) : مجموعة النقط $M(z)$: $\arg(z')=2k\pi$

*) التحقق أنّ $D\in(\Gamma)$: نعوض $z_D=\dfrac{9}{2}-\dfrac{5}{2}i$ في $\dfrac{-iz+4+3i}{z-2i}$ نجد :

$\dfrac{-iz_D+4+3i}{z_D-2i}=\dfrac{-i\left(\frac{9}{2}-\frac{5}{2}i\right)+4+3i}{\left(\frac{9}{2}-\frac{5}{2}i\right)-2i}=\dfrac{-3i+3}{9-9i}=\dfrac{1}{3}$ و منه : $\arg\left(\dfrac{1}{3}\right)=2k\pi$ ومنه فإن D تنتمي إلى (Γ) .

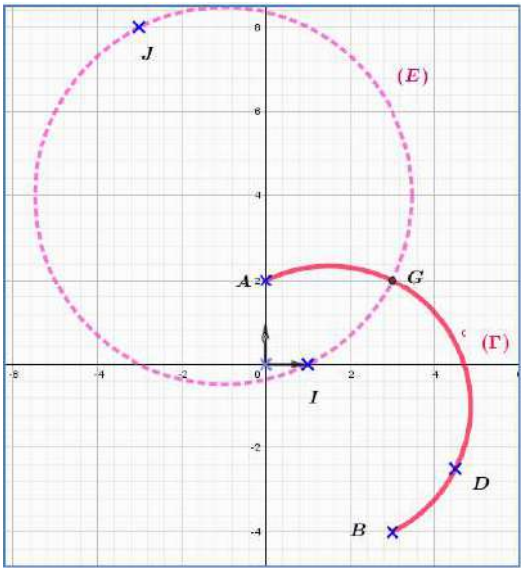
*) تعيين (Γ) : $\arg(z')=2k\pi$ تعني $\arg\left(\frac{-iz+4+3i}{z-2i}\right)=2k\pi$ أي

$\arg\left(\frac{-i(z-3+4i)}{z-2i}\right)=2k\pi$ ومنه $\arg\left(\frac{-i(z-z_B)}{z-z_A}\right)=2k\pi$ أي :

$\arg(-i)+\arg\left(\frac{z-z_B}{z-z_A}\right)=2k\pi$ أي : $\arg\left(\frac{z-z_B}{z-z_A}\right)=\frac{\pi}{2}+2k\pi$

و منه: $\left(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}\right)=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ اذن (Γ) هي القوس من الدائرة التي قطرها $[AB]$ و الذي يشمل النقطة D باستثناء النقطتين A و B

*) الإنشـــاء :



3) تعيين الشكل الجبري للاحقة النقطة G :

لدينا : $\arg(z')=2k\pi$ و $|z'|=2$ وهذا يعني $z'=2$ أي : $\frac{-iz+4+3i}{z-2i}=2$ أي : $-iz+4+3i=2z-4i$

أي أنّ : $-iz-2z=-4i-3i-4$ ، أي : $z(-i-2)=-4-7i$ و منه : $z=\frac{4+7i}{2+i}$ و بكتابة العدد على الشكل الجبري نجد : $z=3+2i$ و عليه تكون : $z_G=3+2i$.

عين الاقتراح الصحيح الوحيد من بين الاقتراحات الثلاثة في كل حالة من الحالات الآتية مع التبرير.

1) حلا المعادلة $8Z^2-4Z+1=0$ ذات المجهول Z في C هما :

أ) $\frac{1}{4}-\frac{1}{4}i$ و $-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}i$ ب) $-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}i$ و $-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}i$ جـ) $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}i$ و $\frac{1}{4}-\frac{1}{4}i$

2) الشكل الجبري للعدد المركب $\frac{1+\sqrt{3}+i}{1-i}$ هو :

أ) $\frac{\sqrt{3}}{2}+i\left(\frac{2+\sqrt{3}}{2}\right)$ ب) $\frac{\sqrt{3}}{2}-i\left(\frac{2+\sqrt{3}}{2}\right)$ جـ) $\frac{\sqrt{3}}{2}+i\left(\frac{-2+\sqrt{3}}{2}\right)$

3) الجذران التربيعيان للعدد المركب $-8+6i$ هما :

أ) $1+3i$ و $-1-3i$ ب) $1+3i$ و $1-3i$ جـ) $3+i$ و $-3-i$

4) الشكل المثلثي للعدد المركب $\frac{1+i}{\sqrt{3}-i}$ هو :

أ) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$ ب) $\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12}\right)$ جـ) $\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12}\right)$

الحل

تعيين الإقتراح الصحيح مع التبرير في كل حالة :

1) **حلا المعادلة** $8z^2-4z+1=0$ **ذات المجهول** z **في** $\mathbb{C}$ **هما :**

$$\Delta=b^2-4a\times c=(-4)^2-4\times8\times1=-16$$

و منه $\Delta=16i^2$ مع $i^2=-1$

للمعادلة حلان هما : $z_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{4-4i}{16}=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}i$ و $z_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{4+4i}{16}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}i$

الاقتراح الصحيح : جـ

2) **الشكل الجبري للعدد المركب** $\frac{1+\sqrt{3}+i}{1-i}$ **هو :**

$$\frac{1+\sqrt{3}+i}{1-i}\times\frac{1+i}{1+i}=\frac{\left(1+\sqrt{3}+i\right)+i\left(1+\sqrt{3}+i\right)}{2}=\frac{1+\sqrt{3}+i+i+i\sqrt{3}-1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\left(2+\sqrt{3}\right)}{2}i$$

الاقتراح الصحيح : أ

3) **الجذران التربيعيان للعدد المركب** $-8+6i$ **هما :**

$\alpha=x+iy$ عدد مركب يحقق : $z=-8+6i=\alpha^2$ و $\alpha^2=x^2-y^2+2xyi$

$$\begin{cases}|\alpha^2|=|z|\\ \text{Re}(\alpha^2)=\text{Re}(z)\\ \text{Im}(\alpha^2)=\text{Im}(z)\end{cases}\text{ معناه } z=\alpha^2 \quad \text{أي} \quad (s)\begin{cases}x^2+y^2=10.....(1)\\ x^2-y^2=-8.....(2)\\ 2xy=6.....(3)\end{cases}$$

بجمع (1) و (2) نجد: $x=1$ أوإما $x=-1$

و بالتعويض في (3) نجد : $y=3$ أوإما $y=-3$ على الترتيب و منه الجذران التربيعيان للعدد المركب $-8+6i$ هما :

$1+3i$ و $-1-3i$

الاقتراح الصحيح : أ

4) **الشكل المثلثي للعدد المركب** $\dfrac{1+i}{\sqrt{3}-i}$ **هو :**

لدينا : $|1+i|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$ و $\begin{cases}\cos\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$ أي $\theta=\dfrac{\pi}{4}+2\pi k$ مع $(k\in\mathbb{Z})$ و منه: $\arg(1+i)=\dfrac{\pi}{4}+2\pi k$

و لدينا : $|\sqrt{3}-i|=\sqrt{3+1}=2$ و $\begin{cases}\cos\theta'=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\theta'=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$ أي: $\theta'=-\dfrac{\pi}{6}+2\pi k$ مع $(k\in\mathbb{Z})$ و منه: $\arg(\sqrt{3}-i)=-\dfrac{\pi}{6}+2\pi k$

و بالتالي : $\left|\dfrac{1+i}{\sqrt{3}-i}\right|=\dfrac{|1+i|}{|\sqrt{3}-i|}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ و $\arg\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{3}-i}\right)=\arg(1+i)-\arg(\sqrt{3}-i)=\dfrac{\pi}{4}-\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{5\pi}{12}+2\pi k$

نستنتج أن: $\dfrac{1+i}{\sqrt{3}-i}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\dfrac{5\pi}{12}+i\sin\dfrac{5\pi}{12}\right)$

الاقتراح الصحيح : ب

التمرين 48 بكالوريا 2024// الموضوع الأوّل شعبة علوم تجريبية

I)حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z الآتية :

$$\left(z-1+2\sqrt{3}\right)\left[z^2-2\left(1-\sqrt{3}\right)z+5-2\sqrt{3}\right]=0$$

II) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ نعتبر النقط A ؛ B ؛ C التي لواحقها على الترتيب z_A ، z_B و z_C حيث : $z_A=1-\sqrt{3}+i$ ؛ $z_B=1-2\sqrt{3}$ و $z_C=\overline{z_A}$

1 -) أكتب كلا من z_A-1 ؛ z_C-1 و z_B على الشكل المثلثي .

2 -) جد لاحقة النقطة D مرجح الجملة المثقلة $\{(A;1),(B;-1),(C;1)\}$.

3 -) بين انّ الرباعي $ABCD$ معين.

الحل

I -) نحل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z الآتية :

$\left(z-1+2\sqrt{3}\right)\left[z^2-2\left(1-\sqrt{3}\right)z+5-2\sqrt{3}\right]=0$ المعادلة مكافئة لـ :

$$\begin{bmatrix} z=1-2\sqrt{3} \\ z^2-2\left(1-\sqrt{3}\right)z+5-2\sqrt{3}=0\ ...\ (1) \end{bmatrix}$$

نحل في $\mathbb{C}$ المعادلة (1)

ليكن Δ' المميز المختصر للمعادلة (1)

$\Delta'=b'^2-ac \quad ; b=-2\left(1-\sqrt{3}\right); b'=-\left(1-\sqrt{3}\right)$ أي $\Delta'=-1=i^2$

$=\left(1-\sqrt{3}\right)^2-\left(5-2\sqrt{3}\right)$

$\Delta'<0$ ، للمعادلة (1) حلان مترافقان هما :

$z_1=\dfrac{-b'-i}{a}=1-\sqrt{3}-i$ و $z_2=\overline{z_1}=1-\sqrt{3}+i$.

إذا كانت S هي مجموعة حلول المعادلة المعطاة فإنّ: $S=\left\{1-2\sqrt{3},(1-\sqrt{3})-i,\left(1-\sqrt{3}\right)+i\right\}$

II) -1) 1 -) نكتب كلا من z_A-1 ؛ z_C-1 و z_B على الشكل المثلثي

لدينا : $z_A-1=-\sqrt{3}+i=2\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i\right)$ أي $z_A-1=2\left(-\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$

$z_A-1=2\left[\cos\left(\pi-\dfrac{\pi}{6}\right)+i.\sin\left(\pi-\dfrac{\pi}{6}\right)\right]$ اي $z_A-1=2\left(\cos\dfrac{5\pi}{6}+i.\sin\dfrac{5\pi}{6}\right)=\left[2;\dfrac{5\pi}{6}\right]$.

◄

◄ $z_B\in\mathbb{R}^*_{-1}$ وبالتالي : $z_B=\left[2\sqrt{3}-1;\pi\right]=\left(2\sqrt{3}-1\right)(\cos\pi+i.\sin\pi)$

◄ $z_C=-\sqrt{3}-i$ أي $z_C=\overline{z_A-1}$ وبالتالي : $z_C=2\left(\cos\left(-\dfrac{5\pi}{6}\right)+i.\sin\left(-\dfrac{5\pi}{6}\right)\right)$

2 -) إيجاد لاحقة النقطة D مرجح الجملة المثقلة

$z_D=z_A-z_B+z_C$ أي $z_D=1$.

3) نبين أنّ الرباعي $ABCD$ معين

لدينا ما يلي :

◄ من جهة :

$z_{\overrightarrow{AB}}=z_B-z_A$ $\quad$ و $\quad$ $z_{\overrightarrow{DC}}=z_C-z_D$

$=-\sqrt{3}-i$ $\quad$ $\quad$ $=-\sqrt{3}-i$

$z_{\overrightarrow{AB}}=z_{\overrightarrow{DC}}$ معناه $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ معناه $ABCD$ متوازي أضلاع

◄ من جهة أخرى

$z_{\overrightarrow{AC}}=z_C-z_A$

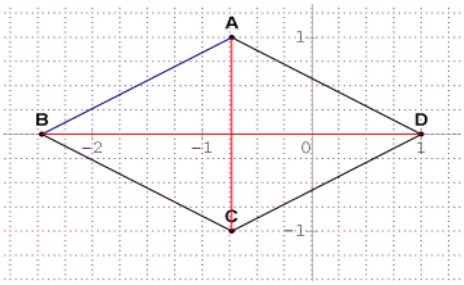
$=-2i$ أي $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix}$

$z_{\overrightarrow{DB}} = z_B - z_D$
$= -2\sqrt{3}$
أي $\overrightarrow{DB}\begin{pmatrix}-2\sqrt{3}\\0\end{pmatrix}$

نلاحظ أن :

$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB} = 0$ اي (AC) عمودي على (DB)

مما سبق نستنتج أن في متوازي الأضلاع $ABCD$ يوجد قطران متعامدين فهو إذا معين.



التمرين 49 بكالوريا 2024// الموضوع الثاني شعبة علوم تجريبية

عين الاقتراح الصحيح الوحيد من بين الاقتراحات الثلاثة مع التبرير في كل حالة مما يلي :

1) z عدد مركب مرافقه $\bar{z}$. مرافق العدد المركب $z+i$ هو :

(أ) $\bar{z}-i$ (ب) $\bar{z}+i$ (جـ) $z-i$

2 -) العدد المركب $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2024}$ يساوي : (أ) 1 ، (ب) i ، (جـ) (-1)

3 -) z عدد مركب حيث : $2\left(1+i\sqrt{3}\right)$.

من أجل كل عدد طبيعي n، نضع : $S_n = \ln|z| + \ln|z|^2 + ... + \ln|z|^n$ لدينا :

(أ) $S_n = (n+1)^2 \ln 2$ ، (ب) $S_n = n(n+1)\ln 2$ ، (جـ) $S_n = 2\left(\left[\frac{1-(2\ln 2)^n}{1-2\ln 2}\right]\right)\ln 2$

4 -) z عدد مركب حيث : $z = \sin\frac{\pi}{8} + i\cos\frac{\pi}{8}$. الشكل المثلثي للعدد المركب z هو :

(أ) $-\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}$ ؛ (ب) $\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}$ ؛ (جـ) $\cos\frac{3\pi}{8} + i\sin\frac{3\pi}{8}$

الحل

■ **نعين الجواب الصحيح من بين الاقتراحات الآتية :**

1 -) $\overline{z+i} = \bar{z} + \bar{i}$ أي $\overline{z+i} = \bar{z} - i$

الجواب الصحيح هو الجواب (أ)

2 -) لدينا : $\left(\frac{1+i}{1-i}\right) = \frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)} = i$

وعليه : $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2024} = i^{2024} = \left(i^2\right)^{1012} = 1$ أي $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2024} = (-1)^{1012}$

الجواب الصحيح هو الجواب (أ)

$$S_n = \ln\left(|z|\times|z|^2\times\ldots\times|z|^n\right) = \ln\left(|z|^{1+2+\ldots+n}\right)$$

3 -) لدينا :

المجموع $(1+2+\ldots+n)$ هو مجموع n حدا متعاقبة من متتالية حسابية حدها الأوّل 1 وأساسها 1 . إذا :

$1+2+\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$. وبالتالي : $S_n=\ln\left(|z|^{\frac{n(n+1)}{2}}\right)$ لكن : $|z|=2\left|1+i\sqrt{3}\right|=4$ وعليه :

$S_n=\ln\left(4^{\frac{n(n+1)}{2}}\right)$ يعني : $S_n=\ln\left(\left(2^2\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}\right)=\ln(2)^{n(n+1)}$ وبالتالي يكون : $S_n=n(n+1)\ln 2$.

الجواب الصحيح هو الجواب (ب) .

4 -) لدينا ما يلي :

$$z=\sin\frac{\pi}{8}+i\cos\frac{\pi}{8} = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}\right)+i.\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}\right) = \cos\left(\frac{4\pi-\pi}{8}\right)+i.\sin\left(\frac{4\pi-\pi}{8}\right)$$

أي :

$$\cos\frac{\pi}{8}+i.\sin\frac{\pi}{8}=\cos\frac{3\pi}{8}+i.\sin\frac{3\pi}{8}$$

الجواب الصحيح هو الجواب (جـ).

التمرين 50 بكالوريا 2024// الموضوع الثاني شعبة رياضيات

I) حل في مجموعة الأعداد المركّبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z الآتية: $\left(z^2+2i\right)\left(z^2-2\sqrt{3}z+6\right)=0$.

II) في المستوي المركّب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ نعتبر النقط A ، B و C التي لواحقها على التّرتيب z_A ، z_B و z_C حيث: $z_A=1-i$ ، $z_B=-z_A$ و $z_C=\sqrt{3}(1+i)$.

1) أكتب كلاّ من z_A ، z_B و z_C على الشّكل المثلّثي .

2) أكتب العدد المركّب $\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ على الشكل الجبري ثمّ المثلّثي وبيّن أنّ المثلّث ABC متقايس الأضلاع.

3) – أ) عيّن لاحقة النّقطة G مركز الدّائرة المحيطة بالمثلّث ABC ثمّ احسب نصف قطرها.

- ب) النقطة D هي نظيرة C بالنسبة إلى مبدأ المعلم .

- بيّن أنّ الرّباعي $ABCD$ معيّن .

الحل

I) حلّ المعادلة (1) ... $(z^2+2i)(z^2-2\sqrt{3}z+6)=0$.

(1) تكافئ $\begin{cases} z^2=-2i...(*) \\ z^2-2\sqrt{3}z+6=0...(**) \end{cases}$

■(*) تكافئ z جذر تربيعي للعدد $-2i$

بوضع $z=x+iy$ حيث $(x;y)\in\mathbb{R}^2$: z جذر تربيعي للعدد $(-2i)$ معناه $\begin{cases} (x+iy)^2=-2i \\ |x+iy|^2=|-2i| \end{cases}$

ومنه الجملة : $\begin{cases} x^2-y^2=0...(1') \\ 2xy=2...(2') \\ x^2+y^2=2...(3') \end{cases}$ من $(1')$ و $(3')$: $x^2=1$

$x^2=1$ يكافئ $x=1$ أو $x=-1$. من $(3')$:

← من أجل $x=1$ نجد $y=1$ أي $z=1+i$

← من أجل $x=-1$ نجد $y=-1$ أي $z=-1-i$.

■ المميز المختصر Δ' للمعادلة (**)هو : $\Delta'=\left(-\sqrt{3}\right)^2-6=-3$

$\Delta'<0$ ، للمعادلة (**) حلاّن مترافقان هما :

$z_1=\dfrac{-b'+i\sqrt{|\Delta|}}{a}=\sqrt{3}+i\sqrt{3}$ و $z_2=\overline{z_1}=\sqrt{3}-i\sqrt{3}$.

■ وإذا كانت S هي مجموعة حلول المعادلة المعطاة ، فإنّ : $S=\left\{1+i,-1-i,\sqrt{3}+i\sqrt{3},\sqrt{3}-i\sqrt{3}\right\}$

II)- 1) كتابة z_A ، z_B و z_C على الشّكل المثلّثي

■ $z_A=\sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}-i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ أي $z_A=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}-i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$

ومنه : $z_A=\sqrt{2}\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$

■ $z_B=-z_A$ إذا : $z_B=\left[\sqrt{2},\pi+\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right]$ إي :

$z_B=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{3\pi}{4}+i\sin\dfrac{3\pi}{4}\right)$

■ نلحظ أنّ : $z_C=\sqrt{3}.\overline{z}_A$ إذا $z_C=\sqrt{6}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$