

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

مديرية التربية لولاية الجزائر شرق

دورة: ماي 2024

امتحان بكالوريا التعليم الثانوي التجاري

الشعبة: رياضيات

المدة: 04 سا

إختبار في مادة: الرياضيات

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين

الموضوع الأول:

التمرين الأول: (05 نقاط)

I. المستوى المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجلانس $(O; \bar{u}, \bar{v})$ لتكن p النقطة ذات اللاحقة $10 = Z_p$

و (Γ) الدائرة ذات القطر $[OP]$ نسمى Ω مركز الدائرة (Γ) . نعتبر النقط C, B, A التي لاحقاتها على

الترتيب $Z_C = 8 - 4i$ ، $Z_B = 1 + 3i$ و $Z_A = 5 + 5i$

1) بين أن النقط C, B, A تنتهي إلى الدائرة (Γ) (يطلب إنشاء الشكل).

2) لتكن النقطة D ذات اللاحقة $2 + 2i = Z_D$. بين أن النقطة D هي المسقط العمودي للنقطة O على المستقيم (BC) .

II. من أجل كل نقطة M من المستوى مختلفه عن O ذات اللاحقة z نرفق النقطة $'M$ ذات اللاحقة \bar{z}

حيث : $\bar{z}' = \frac{20}{z}$ علما أن \bar{z} يرمز إلى مرافق z .

1) بين أن النقط O ، M و M' على استقامة واحدة.

2) لتكن (Δ) المستقيم ذو المعادلة $2 = x$ و M نقطة من (Δ) ذات اللاحقة z .

أ) تحقق أن: $z + \bar{z}' = 4$.

ب) عبر عن $z' + \bar{z}$ بدلالة z و \bar{z} ، ثم استنتج أن: $5(z' + \bar{z}) = z' \bar{z}$.

ج) استنتج أن M' تنتهي إلى نقاط المستقيم (OM) و الدائرة (Γ) ثم علم النقطة M في الشكل.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

1) تتحقق أن $5^6 \equiv 1 [7]$ و استنتج $5^{2016} \equiv 1 [7]$

2) من أجل كل عدد طبيعي n نضع $S_n = 1 + 5 + 5^2 + \dots + 5^n$

أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $4S_n = 5^{n+1} - 1 = 5^{n+1} - 5^n$ أوليان فيما بينهما.

ب) ليكن العدد الصحيح a . بين أن $4S_n \equiv a [7]$ إذا وفقط إذا كان $S_n \equiv 2a [7]$.

ج) بين أن $4S_{2015} \equiv 0 [7]$ واستنتج باقي قسمة S_{2015} على 7.

د) عين أصغر عدد طبيعي n غير معروف بحيث يكون 7 قاسم لـ S_n .

(3) ليكن n عدد طبيعي غير معدوم ، نعتبر في \mathbb{Z}^2 المعادلة (E) : $5^n x + S_n y = 1$. تتحقق أن (4) حل للمعادلة (E) .
ثم حل في \mathbb{Z}^2 المعادلة (E) .

التمرين الثالث: (04 نقاط)

- لتكن (z_n) متتالية أعداد مركبة معرفة بـ : $\begin{cases} z_0 = e^{i\theta} & ; \theta \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \\ z_{n+1} = z_n + |z_n| \end{cases}$
- (1) بين أن : $e^{i\theta} + 1 = 2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \times e^{i\left(\frac{\theta}{2}\right)}$
- (2) نعتبر (u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ : $u_n = \arg(z_n)$ حيث :
- بين أن (u_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ ، ثم أكتب u_n بدلالة n و θ .
- (3) نعتبر (v_n) المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n = z_n - \overline{z_n}$
- أكتب v_{n+1} بدلالة v_n . ماذا تستنتج ؟ .
 - (ب) بين أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $|z_n| \sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right) = \sin\theta$.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

- (I) دالة معرفة على \mathbb{R} بـ : $g(x) = e^{x-2} + 1 - x$
- 1) ادرس اتجاه تغير الدالة g وشكل جدول تغيراتها.
 - 2) استنتاج إشارة $g(x)$ على \mathbb{R} .
- (II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على \mathbb{R} بما يلي :
- $f(x) = x - 1 + \frac{x}{e^{x-2}}$
- (C_f) المنحني الممثل لها في مستوى مزود بمعلم متواز ومتناصف ($\vec{o}, \vec{i}, \vec{j}$) (وحدة الطول 1 cm).
- 1) احسب النهايات عند حدود مجال التعريف.
 - ب) اثبت أن المستقيم (d) ذو المعادلة $y = x - 1$ مقارب مائل للمنحني (C_f) عند $+\infty$.
 - ج) ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (d).
 - 2) اثبت أنه من أجل كل x من \mathbb{R} : $f'(x) = \frac{g(x)}{e^{x-2}}$ ثم استنتاج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها.
- (3) أ) بين أن المنحني (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة واحدة فاصلتها α حيث $0,1 < \alpha < 0,2$
- ب) اثبت أن المنحني (C_f) يقبل نقطة انعطاف I يطلب تعين احداثياتها.
 - ج) عين معادلة المماس (T) الذي يوازي المستقيم (d).
 - 4) ارسم (d) و (C_f) .
- (5) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة :
- $$\frac{x}{e^{x-2}} = m + 1$$
- (6) أ) باستعمال المتكاملة بالتجزئة عين H دالة أصلية للدالة h على \mathbb{R} حيث : $h(x) = xe^{2-x}$ والتي تتعدم عند $x = -1$.
- ب) احسب A مساحة الحيز المحدد بالمنحني (C_f) والمستقيم (d) والمستقيمين $x = 2$ و $x = 0$.

الموضوع الثاني:التمرين الأول: (04 نقاط)

- (1) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الاقليدية للعدد "3" على 7 .
ب) ما هو باقي القسمة الاقليدية للعدد $2017^{4n+2} + 2019^{6n+4}$ على 7 .
- (2) نعتبر المعادلة ذات المجهولين الصحيحين x و y : $343x - 648y = 76$ (E)
أ) بين أن المعادلة (E) تقبل حلولا في \mathbb{Z}^2 .
ب) حل في \mathbb{Z}^2 المعادلة (E) .
- (3) ليكن d القاسم المشترك الأكبر للعددين الطبيعين غير المعدومين x و y حلول المعادلة (E) .
أ) ما هي القيم الممكنة للعدد d ? .
ب) عين الثنائيات $(x; y)$ من الأعداد الطبيعية بحيث يكون $d = 76$.
- (4) λ عدد طبيعي يكتب $\overline{\beta 1 \alpha \beta}$ في نظام التعداد ذي الأساس 7 ، ويكتب $\overline{\alpha 1 \alpha \alpha \beta}$ في نظام التعداد ذي الأساس 5 .
جد العددين الطبيعين α و β ، ثم أكتب λ في نظام التعداد ذي الأساس 6 .

التمرين الثاني: (05 نقاط)

- (1) $P(z) = z^3 + (2 - \sqrt{3})z^2 + (3 - 2\sqrt{3})z + 6$ المعروف كما يلي: .
أ) احسب $P(-2)$ ، ثم عين العددين الحقيقيين α و β بحيث يكون: $P(z) = (z + 2)(z^2 + \alpha z + \beta)$.
ب) حل في مجموعة الأعداد المركبة \mathbb{C} المعادلة: $P(z) = 0$.
- (2) في المستوى المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ ، نعتبر النقط A ، B و C التي لواحقها على الترتيب $z_C = -2$ ، $z_B = \overline{z_A}$ ، $z_A = 1 + \sqrt{3}i$.

(أ) أكتب كل من الأعداد z_A ، z_B و z_C على الشكل الأسوي ، ثم استنتج أن النقط A ، B و C تنتهي إلى نفس الدائرة (C) التي يطلب تعين مراكزها ونصف قطرها .

- ب) عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون العدد $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n$ حقيقي .
ج) عين ثم أنشئ (Δ) مجموعة النقط ذات اللاحقة حيث: $\bar{z} = ke^{-i\frac{2\pi}{3}}$.

(3) أكتب على الشكل الأسوي العدد: $L = \frac{z_A - z_C}{z_B - z_C}$.

ب) استنتاج أن A صورة B بتحويل نقطي يطلب تعين عناصره المميزة .

ج) حدد مع التعليل طبيعة المثلث ABC .

د) عين اللاحقة z_D للنقطة D حتى يكون الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع .

التمرين الثالث: (04 نقاط)

لتكن $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ متالية هندسية متزايدة حدودها موجبة معرفة على المجموعة \mathbb{N}^* بـ :

(1) أحسب u_1, u_2 و u_3 ثم عين أساس المتالية q .

(2) عبر عن عبارة الحد العام u_n بدلالة n .

(3) أحسب بدلالة n كلا من المجموع : $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ و الجداء $P_n = u_1 \times u_2 \times \dots \times u_n$

(4) أ) ادرس تبعاً لقيم العدد الطبيعي n يوافي القسمة الأقلية للعدد 7 على 5 .

ب) عين باقي القسمة الأقلية للعدد $3 - 5n + 49^{2n+1} + 2016^{1436}$ على 5 .

$$S_n' = \frac{1}{\ln 2} \left[\ln 4 + \ln 4^2 + \dots + \ln 4^n \right]$$

- أحسب S_n' بدلالة n ثم عين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون : $S_n' + 4n^2 + 7^{4n} \equiv 0 [5]$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

(I) n عدد طبيعي غير معروف ، نعتبر f_n الدالة المعرفة على $[-1, +\infty)$ بـ :

• تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس (O, \vec{i}, \vec{j}) وحدته lcm .

(1) أحسب نهايات الدالة f_n عند حدود مجال التعريف.

ب) أحسب $(f_n'(x))$ و ادرس إشارتها.

ج) أنشئ جدول تغيرات الدالة f_n .

(2) بين أن جميع المنحنيات (C_n) تمر من نقطة ثابتة يطلب تعبيتها.

(3) أدرس حسب قيم العدد الحقيقي x الوضع النسبي للمنحنيات (C_1) و (C_2) .

ب) أرسم بدقة و في نفس المعلم المنحنيات (C_1) و (C_2) .

$$(II) \text{ من أجل كل عدد طبيعي } n \text{ غير معروف نعتبر المتالية } (I_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ المعرفة بـ : } I_n = \int_0^1 f_n(x) dx$$

• أكتب $(f_n'(x))$ بدلالة $f_n(x)$ و $f_{n+1}(x)$.

(2) بين أن المتالية $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ متناقصة.

ب) إستنتج أن المتالية $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ متقاربة.

(3) أ) بين أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ و $0 \leq x \leq 1$ لدينا : $\frac{1}{(1+x)^n} \leq f_n(x) \leq \frac{e^{-1}}{(1+x)^n}$

ب) إستنتج أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ لدينا : $\frac{1}{n-1} \left[1 - \frac{1}{2^{n-1}} \right] \leq I_n \leq \frac{1}{n-1} \left[1 - \frac{1}{2^{n-1}} \right]$

ج) أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

(4) اعتماداً على السؤال (I/II) بين أن : $I_n + nI_{n+1} = 1 - \frac{e^{-1}}{2^n}$

ب) إستنتج : $\lim_{n \rightarrow +\infty} nI_n$.

ج) أحسب بـ cm^2 مساحة الحيز المستوى A المحدد بالمنحنيات (C_1) و (C_2) و المستقيمين $x=1$ و $x=0$.

الموضع وع ال الأول

النقط	الأعداد المركبة	تصحيح التمارين الأول (05 نقاط)
0.75		(I) بما أن $\Omega C = 3 - 4i = 5$ و $\Omega B = -4 + 3i = 5$ و $\Omega A = 5i = 5$ اذن النقط A, B, C تنتهي إلى الدائرة (Γ) ذات القطر [OP].
0.25		* إنشاء الشكل : تمثيل النقط : Ω و C, B, A و الدائرة (Γ)
0.75		(-2) لدينا من جهة (\overline{BC}) و (\overline{DB}) اذن $\overline{DB} = -7\overline{DB}$ و منه $(\overline{DB})^2 = 49$ و من جهة ثانية : أي $\overrightarrow{OD} \perp (\overline{BC})$ أي $\overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ نستنتج أن D هي المسقط العمودي للنقطة O على المستقيم (BC)
0.25		(II) نفرض أن (x, y) نعلم أن $M(x, y)$ علمًا أن $Z' = \frac{20}{z}$ أي $\arg\left(\frac{Z'}{z}\right) = \arg\left(\frac{20}{z}\right)$ و بالتالي : $\arg\left(\frac{Z'}{z}\right) = \arg\left(\frac{20}{z}\right)$ حيث : $\frac{20}{z\bar{z}} \in \mathbb{R}_*^+$ أي $z\bar{z} \in \mathbb{R}_*^+$ و بالتالي $z\bar{z} = x^2 + y^2$
0.75		اذن $\arg\left(\frac{Z'}{z}\right) = 2k\pi$ مع k عدد صحيح و هذا يعني أن النقط M', M, O على استقامة واحدة
0.25		(-2) بما أن $Z + \bar{Z} = 4$ فإن $\bar{Z} = 2 - iy$ و منه $Z = 2 + iy$ بالجمع نجد : $Z + \bar{Z} = 4$
0.5		ب) لدينا : $Z' + \bar{Z}' = \frac{20}{z} + \frac{20}{\bar{z}} = \frac{20z + 20\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{20(z + \bar{z})}{z\bar{z}} = \frac{80}{z\bar{z}}$
0.5		(*) حسب الجواب السابق : $5(Z' + \bar{Z}') = 5\left(\frac{80}{z\bar{z}}\right) = \frac{400}{z\bar{z}} = \frac{20}{z} \times \frac{20}{\bar{z}}$ اذن $5(Z' + \bar{Z}') = Z' \times \bar{Z}'$
01		-ج) من جهة حسب الجواب II - (1) النقط O, M و M' في استقامة و منه $M' \in (OM)$ من جهة ثانية : $Z \times \bar{Z} = Z ^2$ علمًا أن $\Omega M' = Z' - 5 $ و بالتالي $\Omega M'^2 = (Z' - 5)(\bar{Z}' - 5)$ أي $\Omega M'^2 = Z' \bar{Z}' - 5(Z' + \bar{Z}') + 25$ و بما أن $4 = Z' \times \bar{Z}'$ و $Z' + \bar{Z}' = 5$ نحصل على : $\Omega M'^2 = 25$ أي $\Omega M' = 5$ و منه $M' \in (\Gamma)$ و بالتالي M' تنتهي إلى تقاطع المستقيم (OM) و الدائرة (Γ) .

0.25	$5^6 = 15625$ $5^6 \equiv 1 [7]$ ندرس بواقي قسمة 5^n على 7
0.25	$5^0 \equiv 1 [7]$, $5^1 \equiv 5 [7]$, $5^2 \equiv 4 [7]$ $5^3 \equiv 6 [7]$, $5^4 \equiv 2 [7]$, $5^5 \equiv 3 [7]$ $5^6 \equiv 1 [7]$ دوريّة و دورها $k = 6n$
0.25	$5^6 \equiv 1 [7]$ $5^{2016} \equiv 5^{6n} \equiv 1 [7]$ $2016 = 6 \times 336 = 6n$
0.25	$S_n = 1 + 5 + 5^2 + \dots + 5^n$ -2 (أ) بين أن من أجل كل عدد طبيعي n و لذلك نحسب $S_n = 1 + 5^0 + 5^1 + 5 \times 5 \dots 5^n$ مجموع حدود متتالية هندسية حدها الاول 1 و أساسها $q = 5$
0.25	$S_n = 1 \left(\frac{5^{n+1} - 1}{5 - 1} \right)$ و منه $4S_n = 5^{n+1} - 1$
0.25	$4S_n = 5^{n+1} - 1$ لدينا نكتب على الشكل $5 \times 5^n - 4S_n = 1$ يوجد (5, -4) بحيث
0.25	و منه $S_n \equiv 5^n$, أوليان فيما بينهما ب) بين إذا كان $4S_n \equiv a [7]$ فان $S_n \equiv 2a [7]$ لدينا $4S_n \equiv a [7]$ نضرب في 2
0.25	$8S_n \equiv 2a [7]$ $8 \equiv 1 [7]$ $S_n \equiv 2a [7]$ ومنه العكس : بين أنه إذا كان $4S_n \equiv a [7]$ فان $S_n \equiv 2a [7]$ لدينا $S_n \equiv 2a [7]$ نضرب في العدد 4 $4S_n \equiv 8a [7]$
0.25	$8a \equiv a [7]$ $4S_n \equiv a [7]$ ي

0.25	<p>4 $S_{2015} \equiv 0$ [7] باستعمال السؤال 1 نجد $5^{2016} \equiv 1$ [7] و منه $4 S_{2015} \equiv 5^{2016} - 1$ [7] $5^{2016} - 1 \equiv 0$ [7] $4 S_{2015} \equiv 0$ [7]</p> <p>استنتج باقي قسمة S_{2015} على 7 لدينا حسب ما سبق:</p>
0.25	<p>4 $S_{2015} \equiv 0$ [7] فان $S_{2015} \equiv 2 \times 0$ [7] ومنه باقي قسمة على 7 هو العدد 0</p> <p>د) عين اصغر عدد طبيعي n حيث يكون 7 قاسم لـ S_n</p> <p>$S_n \equiv 0$ [7] معناه:</p>
0.5	<p>$5^{n+1} - 1 \equiv 0$ [7] $5^{n+1} \equiv 1$ [7] $5^{n+1} \equiv 5^0$ [7]</p> <p>$n + 1 = 0, n = -1$ مرفوضة $n + 1 = 6, n = 5$ ، وهو المطلوب</p>
01	<p>$S_n = \frac{5^{n+1} - 1}{4}$</p> <p>-3 حلول المعادلة (E) هي : $(x, y) = (KS_n + 5, -K \times 5^n - 4)$ ، $K \in \mathbb{Z}$</p>
التفصيط	<p>تصحيح التمرين الثالث (04 نقاط)</p> <p>الأعداد المركبة + المتتاليات</p> <p>01</p> $e^{i\theta} + 1 = e^{i(\frac{\theta}{2} + \frac{\theta}{2})} + e^{i(\frac{\theta}{2} - \frac{\theta}{2})} = e^{i(\frac{\theta}{2})} [e^{i(\frac{\theta}{2})} + e^{-i(\frac{\theta}{2})}] = 2\cos(\frac{\theta}{2})e^{i(\frac{\theta}{2})} - 1$ <p>2- نضع $z_n = ae^{ib}$ حيث a عدد حقيقي و $b \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ومن جهة اخرى لدينا $u_n = \arg(z_n) = b$ و منه $u_n = \arg(z_{n+1}) = \arg(z_n + z_n)$ وبالتالي $u_{n+1} = \arg(z_{n+1}) = \arg(a(e^{ib} + 1)) = \arg(2a\cos(\frac{b}{2})e^{i\frac{b}{2}}) = \frac{b}{2} = \frac{u_n}{2}$ اساساً</p> <p>0.75</p> <p>0.25</p> <p>0.5</p> $u_n = \theta \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$ $v_{n+1} = z_{n+1} - \overline{z_{n+1}} = z_n + z_n - (\overline{z_n} + z_n) = z_n - \overline{z_n} = v_n$ (1 -3

- نستنتج ان $v_n = v_0 = z_0 - \bar{z}_0 = 2i \sin(\theta)$

ب) لدينا مما سبق $z_n = |z_n| e^{i\theta \times (\frac{1}{2})^n}$ لكن $v_n = z_n - \bar{z}_n = 2i \sin(\theta)$ وبالتالي

$$|z_n| \left(\sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)\right) = \sin(\theta) \text{ اي } z_n - \bar{z}_n = |z_n| \left(2i \times \sin\left(\theta \times \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)\right) = 2i \times \sin(\theta)$$

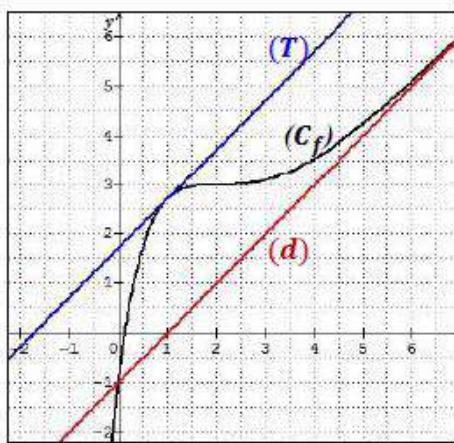
حل التمرين الرابع (07 نقاط)

ا) المنحنى C_f يقبل نقطة انعطاف $(2, 3)$

ج) معادلة المماس (T) الذي يوازي (d) هي:

$$y = x - 1 + e$$

التمثيل البياني (5)



5) المترافقه البيانية:

$m < -1$ \Rightarrow المعادلة تقبل حل واحدا سالبا

$m = -1$ \Rightarrow المعادلة تقبل حلان وهو معذوم

$-1 < m < e - 1$ \Rightarrow حلان موجبين تماما

حل واحدا موجبا $m = e - 1$

ليس لها حلول $m = e - 1$

6) باستعمال المتكاملة بالتجزئة نضع:

$$V'(x) = e^{2-x} \text{ و } U(x) = x$$

$$H(x) = (-x - 1)e^{2-x}$$

ب) حساب A :

$$A = \int_0^2 (f(x) - y) dx$$

$$A = \int_0^2 \frac{x}{e^{x-2}} dx = \int_0^2 x e^{2-x} dx$$

$$A = [H(x)]_0^2$$

$$A = H(2) - H(0)$$

$$A = (e^2 - 3) \text{ cm}^2$$

I. (1) حساب المشقة: جدول التغيرات:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	-		+
$g(x)$		↗ 0	↗

2) اشاره :

II. (1) النهايات:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

(b)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - y) = 0$$

ج) وضعية C_f بالنسبة الى (d)

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x) - y$	-	0	+
الوضعية	أسفل		أعلى

2) حساب المشقة:

ومنه اشاره (x) من اشاره $(f'(x))$ اذن الدالة f متزايدة

تماما على R

جدول التغيرات:

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

3) (a) معناه نحل المعادلة:

باستعمال مبرهنة القيم المتوسطة.

(b) حساب المشقة الثانية



الموضوع الثاني



العلامة	عناصر الإجابة	محاور الموضوع														
كاملة	جزأة															
04 ن	<p>أ) بواقي قسمة 3^n على 7 .</p> <table border="1" style="margin-left: 100px;"> <tr> <td>$n =$</td><td>$6k$</td><td>$6k+1$</td><td>$6k+2$</td><td>$6k+3$</td><td>$6k+4$</td><td>$6k+5$</td></tr> <tr> <td>$3^n \equiv$</td><td>1</td><td>3</td><td>2</td><td>6</td><td>4</td><td>5</td></tr> </table> <p>ب) $2019^{6n+4} \equiv 4[7]$ ومنه $2019 \equiv 3[7]$</p> <p>$2017^{4n+2} \equiv 1[7]$ ومنه $2017 \equiv 1[7]$</p> <p>إذن $2 \times 2019^{6n+4} + 2017^{4n+2} \equiv 2[7]$</p> <p>أ) (2) ليكن d القاسم المشترك الأكبر للعددين الطبيعيين غير المعدومين x و y حلول المعادلة (E) تقبل حلولا في \mathbb{Z}^2 .</p> <p>ب) حل في \mathbb{Z}^2 المعادلة (E) .</p> <p>أي $(x; y) = (648k + 4; 343k + 2)$ حيث $k \in \mathbb{Z}$</p> <p>أ) (3) ليكن d القاسم المشترك الأكبر للعددين الطبيعيين غير المعدومين x و y حلول المعادلة (E) .</p> <p>أي d يقسم x و y ومنه d يقسم $343x - 648y$.</p> <p>ومنه $d \in \{1; 2; 4; 19; 38; 76\}$</p> <p>أ) (4) $\begin{cases} 40k + 4 \equiv 0[76] \\ 39k + 2 \equiv 0[76] \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} 648k + 4 \equiv 0[76] \\ 343k + 2 \equiv 0[76] \end{cases}$ معناه $d = 76$.</p> <p>أي $\alpha \in \mathbb{N}$ مع $k \equiv 76\alpha + 74[76]$</p> <p>ومنه $(x; y) = (49248\alpha + 47956; 26068\alpha + 25384)$</p> <p>أ) (5) $\begin{cases} \lambda = 344\beta + 7\alpha + 49 \\ \lambda = 655\alpha + \beta + 125 \\ 0 < \alpha < 5 \\ 0 < \beta < 5 \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} \lambda = \beta \times 7^3 + 7^2 + \alpha \times 7 + \beta \\ \lambda = \alpha \times 5^4 + 5^3 + \alpha \times 5^2 + \alpha \times 5 + \beta \\ 0 < \alpha < 5 \\ 0 < \beta < 5 \end{cases}$ (4)</p> <p>أي $(\alpha; \beta) = (2; 4)$ ومنه $\begin{cases} 343\beta - 648\alpha = 76 \\ 0 < \alpha < 5 \\ 0 < \beta < 5 \end{cases}$</p> <p>أ) (6) كتابة λ في نظام التعداد ذي الأساس 6: $\lambda = 1439 = \overline{01355}^6$</p> <p>أ) (7) $P(z) = z^3 + (2 - \sqrt{3})z^2 + (3 - 2\sqrt{3})z + 6$ (1)</p> <p>أ) (8) $P(-2) = 0$</p>	$n =$	$6k$	$6k+1$	$6k+2$	$6k+3$	$6k+4$	$6k+5$	$3^n \equiv$	1	3	2	6	4	5	التمرير الأول
$n =$	$6k$	$6k+1$	$6k+2$	$6k+3$	$6k+4$	$6k+5$										
$3^n \equiv$	1	3	2	6	4	5										
05 ن	<p>أ) (1) عناصر الإجابة</p> <p>أ) (2) عناصر الإجابة</p> <p>أ) (3) عناصر الإجابة</p> <p>أ) (4) عناصر الإجابة</p> <p>أ) (5) عناصر الإجابة</p> <p>أ) (6) عناصر الإجابة</p> <p>أ) (7) عناصر الإجابة</p> <p>أ) (8) عناصر الإجابة</p>	التمرير الثاني														

$$\begin{aligned}
& \cdot P(z) = (z+2)(z^2 - \sqrt{3}z + 3) \\
& \cdot (z^2 - \sqrt{3}z + 3 = 0) \text{ أو } (z+2=0) \text{ تكافئ } P(z)=0 \text{ (ب)} \\
& \cdot z = -2 \text{ يكافيء } z+2=0 \\
& \cdot z^2 - \sqrt{3}z + 3 = 0 \\
& \cdot z_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i \text{ و } z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i \text{ ، } \Delta = -9 = (3i)^2
\end{aligned}$$

ن 0.5	$S = \left\{ -2; \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i; \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i \right\}$ مجموعة الحلول: $z_C = -2$ و $z_B = \overline{z_A}$ ، $z_A = 1 + \sqrt{3}i$ (2)
ن 0.75	(z_A, z_B, z_C) على الشكل الأسني: $z_C = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$ و $z_B = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$ و $z_A = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$
ن 0.25	الاستنتاج: لدينا $ z_A = z_B = z_C = 2$ أي $ z_A = z_B = z_C = 2$ ومنه النقط A ، B ، C تتنتمي إلى الدائرة (C) التي مرکزها O ونصف قطرها 2 .
ن 0.5	B ، A ، O ، C على الشكل الأسني (z_A, z_B, z_C) معناد $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n \in \mathbb{R}$ (ب) و $2n = 3k\pi$ و منه $2n\frac{\pi}{3} = k\pi$ و $e^{2n\frac{\pi}{3}} \in \mathbb{R}$ و $n \in \mathbb{N}$ حيث $n = 3k$. $\arg z = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ و منه $z = ke^{i\frac{2\pi}{3}}$ معناد $\bar{z} = ke^{-i\frac{2\pi}{3}}$ (ج)
ن 0.5	O ، E ، M باستثناء النقطة O و منه (Δ) هو نصف المستقيم (OE) [باستثناء النقطة O] حيث $z_E = -1 + i\sqrt{3}$ $L = \frac{z_A - z_C}{z_B - z_C}$ (3) كتابة على الشكل الأسني العدد :
ن 0.5	$L = \frac{3+i\sqrt{3}}{3-i\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}}{2\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{6}}} = e^{i\frac{\pi}{3}}$
ن 0.25	B (لدينا) $z_A - z_C = e^{i\frac{\pi}{3}}(z_B - z_C)$ و منه A صورة B بالدوران الذي مرکزه C وزاويته $\frac{\pi}{3}$
ن 0.5	$\text{ج) طبيعة المثلث } ABC : \text{ لدينا } \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$ و منه ABC متقايس الأضلاع $\left\{ \begin{array}{l} CB = CA \\ (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}) = \frac{\pi}{3} [2\pi] \end{array} \right.$
ن 0.5	$z_D - z_A = z_C - z_B$ أي $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ (د) $ABCD$ متوازي أضلاع معناد $z_D = z_C - z_B + z_A$ و منه $z_D = -2 + 2i\sqrt{3}$

التمرين الثالث

نقطة 04.5

لدينا $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ متتالية هندسية متزايدة حدودها موجبة معرفة على المجموعة \mathbb{N}^* بـ :

$$\begin{cases} u_1 + 2u_2 + u_3 = 100 \\ u_1 \times u_3 = 256 \end{cases}$$

(1) حساب u_3 و u_1 و u_2 :

لدينا : u_2 لأن $u_1 \times u_3 = u_2^2$ هو الوسط الهندسي للدين u_1 و u_3 .

ومنه : $u_2^2 = 256$ أو $u_2 = 16$ أو $u_2 = -16$

وبالتالي $u_2 = 16$ (لأن حدود المتتالية موجبة)

وبالتالي لدينا :

$$\begin{cases} u_1 + u_3 = 68 \\ u_1 \times u_3 = 256 \end{cases} \text{ ومنه} \quad \begin{cases} u_1 + 32 + u_3 = 100 \\ u_1 \times u_3 = 256 \end{cases}$$

إذن u_1 و u_3 هما حلّي للمعادلة

$$\Delta = (-68)^2 - 4 \times 256 = 3600$$

المعادلة تقبل حلّين متمايزين هما : $x_1 = \frac{68+60}{2} = 64$ و $x_2 = \frac{68-60}{2} = 4$

بما أن المتتالية متزايدة فإن $u_1 = 4$ و $u_3 = 64$

حساب الأساس q :

$$q = \frac{16}{4} = 4$$

(2) التعبير عن الحد العام u_n بدلالة n :

$$u_n = u_1 \times q^{n-1} = 4 \times 4^{n-1} = 4^n$$

أي $u_n = 4^n$

(3) حساب كلا من المجموع : $P_n = u_1 \times u_2 \times \dots \times u_n$ و $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ بدلالة n :

$$S_n = u_1 \times \left(\frac{1 - q^n}{1 - q} \right) = 4 \times \left(\frac{1 - 4^n}{1 - 4} \right) = -\frac{4}{3} (1 - 4^n) = \frac{4}{3} \times 4^n - \frac{4}{3}$$

$$S_n = \frac{4}{3} \times 4^n - \frac{4}{3}$$

حساب الجداء :

$$P_n = u_1 \times u_2 \times \dots \times u_n = 4 \times 4^2 \times \dots \times 4^n = 4^{1+2+\dots+n}$$

$$P_n = 4^{\frac{n(n+1)}{2}} \text{ أي}$$

(4) دراسة باقي القسمة الاقلدية للعدد 7^n على 5 تبعاً لقيمة العدد الطبيعي n :

لدينا :

$$7^4 \equiv 1[5] \quad 7^3 \equiv 3[5] \quad 7^2 \equiv 4[5] \quad 7^1 \equiv 2[5] \quad 7^0 \equiv 1[5]$$

إذن باقي القسمة الاقلدية للعدد 7^n على 5 تشكّل متتالية دورية دورها 4

من أجل كل عدد طبيعي k لدينا :

n	$4k$	$4k+1$	$4k+2$	$4k+3$
باقي قسمة العدد 7^n على 5	1	2	4	3

ب) تعيين باقي القسمة الأقلية للعدد $2016^{1436} + 49^{2n+1} + 5n - 3$ على 5

لدينا :

$$2016^{1436} \equiv 1[5] \quad \text{ومنه } 2016^{1436} \equiv 1^{1436}[5] \quad 2016 \equiv 1[5]$$

$$49^{2n+1} \equiv 4[5] \quad \text{أي } 49^{2n+1} \equiv 7^{4n+2}[5] \quad \text{ومنه } 49^{2n+1} \equiv (7^2)^{2n+1}[5]$$

$$5n - 3 \equiv 2[5] \quad \text{ومنه } 5n - 3 \equiv -3[5] \quad \text{وكذلك لدينا :}$$

$$2016^{1436} + 49^{2n+1} + 5n - 3 \equiv 1 + 4 + 2[5] \quad \text{وبالتالي :}$$

$$2016^{1436} + 49^{2n+1} + 5n - 3 \equiv 2[5] \quad \text{أي}$$

باقي القسمة الأقلية للعدد $2016^{1436} + 49^{2n+1} + 5n - 3$ على 5 هو 2

0.5

ج) حساب S_n' بدلالة n

$$S_n' = \frac{1}{\ln 2} [\ln 4 + \ln 4^2 + \dots + \ln 4^n] = \frac{1}{\ln 2} \ln(4 \times 4^2 \times \dots \times 4^n)$$

0.5

$$S_n' = \frac{1}{\ln 2} \times \ln P_n = \frac{1}{\ln 2} \times \ln 4^{\frac{n(n+1)}{2}} = \frac{1}{\ln 2} \times \ln (4)^{\frac{1}{2} \times (n^2+n)} \quad \text{أي}$$

$$S_n' = \frac{1}{\ln 2} \times (n^2 + n) \times \ln 2 = n^2 + n \quad \text{ومنه :}$$

$$S_n' = n^2 + n \quad \text{أي}$$

0.25

• تعيين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون : $S_n' + 4n^2 + 7^{4n} \equiv 0[5]$

$$n^2 + n + 4n^2 + 7^{4n} \equiv 0[5] \quad S_n' + 4n^2 + 7^{4n} \equiv 0[5]$$

$$n \equiv 4[5] \quad n \equiv -1[5] \quad \text{أي} \quad n + 5n^2 + 1 \equiv 0[5] \quad \text{ومنه :}$$

$$n \equiv 5\alpha + 4, (\alpha \in \mathbb{N}) \quad \text{وبالتالي}$$

التنقيط

الدوال

تصحيح التمرين الرابع 07 نقاط)

-I

2x0.25

1-1) حساب النهايات:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0, \lim_{x \rightarrow -1} f_n(x) = +\infty$$

$$f_n'(x) = \frac{-e^{-x}(1+x)^n - e^{-x}(n)(1+x)^{n-1}}{(1+x)^{2n}} = \frac{-e^{-x}(1+x+n)}{(1+x)^{n+1}}$$

لدينا المقدار $0 < x < -1$ لأن $1 + x + n > 0$ ومنه المشتقة سالبة تماما

(ج)

x	-1	$+\infty$
$f_n'(x)$	-	
$f_n(x)$		\downarrow

-2

0.5

بما أن جميع المحنويات تمر من نقطة ثابتة نضع $f_1(x_0) = f_2(x_0)$ وبالتالي

$$A(0,1) \quad x_0 = 0 \quad \text{ومنه } x \neq -1 \quad \text{لكن } \frac{e^{-x_0}}{(1+x_0)} = \frac{e^{-x_0}}{(1+x_0)^2} \Leftrightarrow (1+x_0)(x_0) = 0$$

-3

01

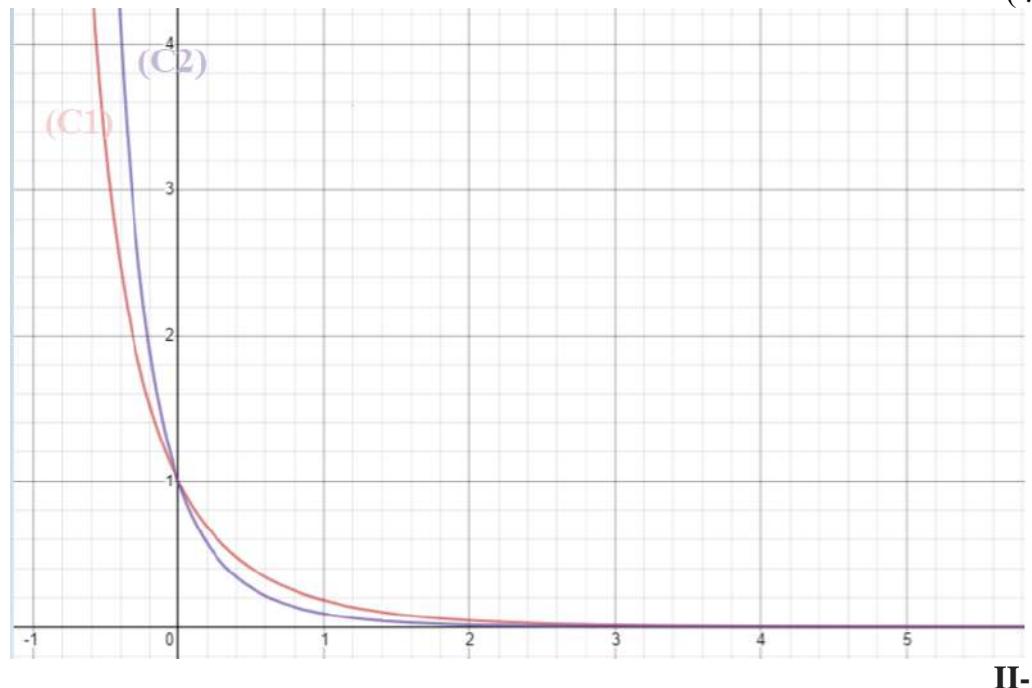
(١) دراسة الوضع النسبي للمنحنين (c_1) و (c_2) :

$$f_1(x) - f_2(x) =$$

$$\frac{e^{-x}}{(1+x)} = \frac{e^{-x}}{(1+x)^2} \Leftrightarrow e^{-x} \left[\frac{x}{(1+x)^2} \right]$$

ومنه من أجل $x < 0$ (c_1) فوق (c_2) ومن أجل $x = 0$ (c_1) و (c_2) منطبقانومن أجل $x > 0$ (c_2) فوق (c_1)

(ب)



II-

-1

لدينا مما سبق

$$f'_n(x) = \frac{-e^{-x}(1+x)^n - e^{-x}(n)(1+x)^{n-1}}{(1+x)^{2n}} = \frac{-e^{-x}(1+x+n)}{(1+x)^{n+1}}$$

$$f'_n(x) = -\frac{e^{-x}}{(1+x)^n} - \frac{ne^{-x}}{(1+x)^{n+1}} = -(f_n(x) + n \times f_{n+1}(x))$$

$$f'_n(x) = -(f_n(x) + n \times f_{n+1}(x))$$

-2

0.25

(١) لدينا $f_{n+1}(x) - f_n(x) < 0$ لأن $I_{n+1} - I_n = \int_0^1 [f_{n+1}(x) - f_n(x)]dx < 0$ من أجل $x > 0$ وبالتالي تكامل دالة سالبة هو عدد سالب ومنه I_n متناقصة

0.25

ب) استنتاج أن I_n متقاربة

-3

0.25

$$0 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow e^{-1} \leq e^x \leq 1 \Leftrightarrow \frac{e^{-1}}{(1+x)^n} \leq f_n(x) \leq \frac{1}{(1+x)^n} \quad (١)$$

ب) مما سبق

0.25

$$\int_0^1 \frac{e^{-1}}{(1+x)^n} dx \leq \int_0^1 f_n(x) dx \leq \int_0^1 \frac{1}{(1+x)^n} dx \Leftrightarrow \frac{e^{-1}}{1-n} [(1+x)^{1-n}]_0^1 \leq I_n \leq \frac{1}{1-n} [(1+x)^{1-n}]_0^1$$
$$\Leftrightarrow \frac{e^{-1}}{n-1} [1 - \frac{1}{2^{n-1}}] \leq I_n \leq \frac{1}{n-1} [1 - \frac{1}{2^{n-1}}]$$

ج) باستعمال الحصر نجد النهاية $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$

0.5

0.5

$$f'_n(x) = -(f_n(x) + n \times f_{n+1}(x)) \Leftrightarrow \int_0^1 f'_n(x) dx = - \int_0^1 [f_n(x) + n f_{n+1}(x)] dx$$
$$\Leftrightarrow \frac{e^{-1}}{2^n} - 1 = -(I_n + n I_{n+1}) \Leftrightarrow I_n + n I_{n+1} = 1 - \frac{e^{-1}}{2^n}$$

lim $n I_n = 1$ (ب)

0.25

0.25

ج) حساب مساحة الحيز