الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية

مديرية التربية لولاية غرداية **ثانويات المقاطعة التفتيشية غرداية 02**

امتحان بكالوريا التجريبي **دورة: ماي 2024**

الشعبة: رياضيات

اختبار في مادة: الرياضيات **المدّة: 04 سا و 30 د**

على المترشّح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04نقاط)

1) حلّ في مجموعة الأعداد المركّبة ℂ المعادلة: $(z-4)(z^2+4z+16)=0$

2) المستوي المركب مزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$. A ، B و C ثلاث نقط لواحقها على الترتيب

$z_A=4$ ، $z_B=-2+2i\sqrt{3}$ و $z_C=\overline{z_B}$

- أكتب الأعداد المركبة z_A ، z_B و z_C على الشكل الأسي ثم بين أن النقط A ، B و C تنتمي إلى نفس الدائرة يطلب تعيين عناصرها المميزة.

3) نعتبر العدد المركب L حيث: $L=\dfrac{z_B-z_A}{z_C-z_A}$.

أ- أكتب العدد L على الشكل الأسي ثم فسر النتائج المحصل عليها هندسيا.

ب- استنتج طبيعة المثلث ABC.

ج- عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون العدد المركب L^n حقيقي سالب.

د- ما طبيعة التحويل r الذي مركزه A ويحول B إلى C. أوجد عبارته المركبة.

ه- عين z_E لاحقة النقطة E صورة C بالتحويل r.

و- ما طبيعة الرباعي $ABCE$ ؟ علل إجابتك.

4) (γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث $\left|iz+2i-2\sqrt{3}\right|=\left|z-4\right|$

أ- بين أن كلا من النقطتين E و B تنتميان إلى (γ)

ب- عين طبيعة المجموعة (γ).

التمرين الثاني: (04 نقاط)

نعتبر ثنائية $(x_0;q)$ حيث x_0 و q عددين طبيعيين غير معدومين و $p\gcd(x_0,q)=1$. (x_n) متتالية هندسية أساسها q وحدها الأول x_0 ، وتحقق من أجل كل عدد طبيعي n: $x_{n+1}+2x_{n+3}-44x_0{}^2q^n=0$

1) أ- بين أن: $q+2q^3=44x_0$

ب- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $p\gcd\left(1+2q^2,4\right)=1$ ثم حدد قيمة كل من x_0 و q

2) نأخذ فيما يلي $(x_0;q)=(3;4)$ ونضع من أجل عدد طبيعي غير معدوم n: $S_n=x_0+x_1+x_2+\cdots+x_n$

أ- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $S_n\equiv0[3]$

ب- تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $S_{n+1}=4S_n+3$ ، ثم حدد قيمة العدد: $p\gcd\left(S_{n+1};S_n\right)$

ج- عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون $S_n\equiv0[5]$

3) أ- حدد باقي قسمة العدد S_{27} على 17.

ب- استنتج ثلاثة قواسم أولية للعدد S_{27}

التمرين الثالث: (04 نقاط)

يحتوي وعاء U على **5** كريات حمراء و**3** كريات صفراء وكريتين خضراوين. الكريات متماثلة لانفرق بينها باللمس، نسحب عشوائيا في آن واحد ثلاث كريات من الوعاء U.

A و B و C ثلاثة أحداث حيث:

- A : " الحصول على ثلاث كريات حمراء"
- B : " الحصول على ثلاث كريات من نفس اللون"
- C : " الحصول على ثلاث كريات مختلفة اللون مثنى مثنى"

1) أحسب $P(A)$ و $P(B)$ و $P(C)$ احتمال الأحداث A و B و C على الترتيب.

2) X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحبة عدد ألوان الكريات المسحوبة.

- عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ثم أحسب أمله الرياضياتي.

3) نظيف $(n-5)$ كرية حمراء إلى الوعاء U حيث $n \geq 5$ ، ثم نسحب عشوائيا كريتين على التوالي دون إرجاع.

D و E حدثين حيث:

- D : " الحصول على كريتين حمراوين"
- E : " الحصول على كريتين من نفس اللون"

أ- برهن أن: $\mathrm{P}(D)=\dfrac{n(n-1)}{(n+5)(n+4)}$.

ب- أحسب بدلالة n العدد $\mathrm{P}(E)$ احتمال الحدث E .

ج- عين قيم العدد الطبيعي n بحيث: $P(E) \geq \dfrac{1}{2}$.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

f_m الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f_m(x)=e^{-2x}-(1+m)e^{-x}+m$ حيث m وسيط حقيقي

(C_m) التمثيل البياني للدالة f_m في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. حيث $\|\vec{i}\|=2\,cm$

I. في هذا الجزء نضع: $m=1$

1) أدرس تغيرات الدالة f_1

2) أ- برهن أن المنحني (C_1) يقبل A_0 نقطة انعطاف يطلب تعيين إحداثييها.

ب- أكتب معادلة لـ (T) المماس للمنحني (C_1) عند النقطة A_0 ثم أنشئه.

ج- أنشئ المنحني (C_1)

II.

1) أ- بين أن جميع المنحنيات (C_m) تشترك في نقطة ثابتة يطلب تعيين إحداثييها.

ب- ناقش حسب قيم العدد الحقيقي m وجود نقط تقاطع المنحني (C_m) مع حامل محور الفواصل.

2) أدرس تغيرات الدالة f_m ، ثم عين المستقيمات المقاربة للمنحني (C_m).

3) أ- m_1 و m_2 عددين حقيقين حيث: $m_1<m_2$ أدرس الوضع النسبي للمنحنيين (C_{m_1}) و (C_{m_2})

ب- أنشئ (دون دراسة التغيرات) المنحنيين (C_{-2}) و (C_3) في نفس المعلم السابق.

4) نعتبر y_m القيمة الحدية المحلية للدالة f_m التي تأخذها عند x_m أكتب كل من x_m و y_m بدلالة m.

استنتج معادلة مستقلة عن m للمنحني (P) مجموعة النقط $M(x_m;y_m)$ لما m يمسح $]-1;+\infty[$.

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط).

نعتبر المعادلة التالية: (E) .... $7x-5y=11$ حيث x و y عددان صحيحان

1) أ) بين أنه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حل للمعادلة (E) فإن $x\equiv 3[5]$

ب) استنتج حلول المعادلة (E)

ج) عين الثنائيات $(x;y)$ حلول المعادلة (E) بحيث يكون $PGCD(x;y)=11$

2) أ) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الاقليدية لكل من 5^n و 7^n على 11

ب) عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون 5^n+7^{2023} قابلا للقسمة على 11

3) a و b عددان طبيعيان غير معدومين كلاهما أصغر تماما من 7 ، N عدد طبيعي يكتب $\overline{a01b}$ في النظام العشري

أ) تحقق أن $10^3\equiv -1[11]$

ب) عين قيمة العدد N إذا علمت أن باقي قسمته على 11 هو 4

ج) أكتب العدد N في نظام التعداد ذي الاساس 11

التمرين الثاني: (04 نقاط).

يحتوي كيس U على 5 كريات بيضاء و3 كريات حمراء وكريتان خضراوان،الكريات متماثلة ولانفرق بينها عند اللمس ، نسحب عشوائيا وفي آن واحد ثلاث كريات من هذا الكيس

1) أحسب إحتمال الحادثتين التاليتين :

A : " الكريات الثلاثة المسحوبة من نفس اللون "

B : " من بين الكريات الثلاثة المسحوبة توجد كرة واحدة فقط خضراء "

2) نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل نتيجة سحب عدد الألوان الظاهرة

أ) عين قانون احتمال المتغير X

ب) احسب الأمل الرياضياتي والتباين للمتغير العشوائي X

3) في تجربة مستقلة نعتبر الكيس U وكيس آخر V به كريتين بيضاوين وكريتين حمراوين وكرية خضراء

نرمي حجر نرد غير مزيف مرقم من 1 إلى 6، إذا ظهر الرقم 6 نسحب كرة من الكيس U

وإلا نسحب كرية من الكيس V

أ) بين أن احتمال سحب كرية بيضاء هو $\frac{5}{12}$

ب) علما أن الكرية المسحوبة بيضاء فما احتمال ان تكون من الكيس V

التمرين الثالث: (04 نقاط).

a عدد حقيقي موجب تماما

f الدالة المعرفة والقابلة للاشتقاق على المجال $[0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\sqrt{1+ax^2}$

- بين أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$

(u_n) متتالية عددية معرفة بـحدها الأول $u_0=0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=f(u_n)$

1) نفرض أن $0 < a < 1$

أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \le u_n \le \dfrac{1}{\sqrt{1-a}}$

ب) بين أن (u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$ ، واستنتج أنها متقاربة ثم احسب نهايتها

2) نضع $a \succ 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n = u_{n+1}^2 - u_n^2$

أ) أثبت أن (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الاول.

ب) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}^2 - u_n^2 = a^n$

ج) من أجل كل عدد طبيعي n نعرف المتتالية (w_n) كالآتي:

$w_0 = 0$ ومن أجل كل $n \succ 1$ ، $w_n = 1 + a + a^2 + ... + a^{n-1}$

- أكتب عبارة الحد العام w_n بدلالة n و a
- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = \sqrt{w_n}$ ثم أحسب $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} u_n$

التمرين الرابع: (08 نقاط)

I) نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي : $g(x) = x \ \ + 2 - \ln x$

1) أدرس اتجاه تغير الدالة g

2) أحسب $g(1)$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$

II) لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بالعبارة التالية : $f(x) = \dfrac{1}{2}\left(-x + e - \dfrac{\ln(x^2)}{x}\right)$

(C_f) تمثيلها البياني المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1) أ) من أجل كل عدد حقيقي x من $]0;+\infty[$ أحسب $f(-x) + f(x)$ وفسر النتيجة بيانيا.

ب) أحسب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ ثم استنتج $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 0} f(x)$

2) أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم، $f'(x) = \dfrac{-g(x^2)}{2x^2}$

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها

3) بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{e}{2}$ مقارب لـ (C_f) ثم أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ).

4) أ) أثبت أنه يوجد مماسان (T) و (T') للمنحنى (C_f) يوازيان (Δ) يطلب تحديد معادلة كل منهما.

ب) بين أن (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين فاصلتاهما α و β حيث

$2 < \alpha < 2,1$ و $-0,5 < \beta < -0,4$

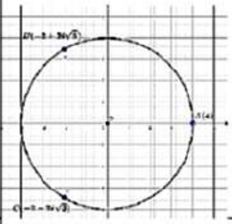
ج) أرسم كلاّ من (Δ)، (T)، (T') والمنحني (C_f).

5) عين بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m حتى تقبل المعادلة $x(e-2m) = \ln(x^2)$ حلا وحيدا

6) أحسب $A(\alpha)$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) والمستقيم (Δ) والمستقيمين اللذين معادلتهما: $x = 1$ و $x = \alpha$

انتهى الموضوع الثاني

نموذج تصحيح بكالوريا تجريبية 2024

عناصر الإجابة	النقطة	
الموضوع الاول		
التمرين الأول: (6 نقاط)		
1 / $z^2+4z+16=0$ إمّا : $z-4=0$ أي $z=4$ أو $z^2+4z+16=0$ و $\Delta=-12$ أي $\Delta=12i^2$ أي: $z_1=-2+2i\sqrt{3}$ ، $z_2=-2-2i\sqrt{3}$  	0.5 01	2
2 / كتابة كل من z_A ، z_B و z_C على الشكل الأسّي. $z_A=4e^{i0}$ ، $z_B=4e^{i\frac{2\pi}{3}}$ و $z_C=4e^{i\frac{-2\pi}{3}}$. استنتاج خصائص الدائرة المحيطة بالمثلث ABC بما أنّ: $\|z_A\|=\|z_B\|=\|z_C\|=4$ فإنّ النقط A، B و C تنتمي إلى الدائرة التي مركزها O نصف قطرها 4.	0.5	0.5
3 / أ / $L=\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}$ كتابة L على الشكل الأسي : $\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ، $\|L\|=1$ و $Arg(L)=-\frac{\pi}{3}+2k\pi\ \ /k\in\mathbb{Z}$ ومنه: $L=e^{-i\frac{\pi}{3}}$ التفسير الهندسي للنتائج: $\|L\|=1$ معناه $\left\|\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\right\|=1$ أي: $\frac{\|z_B-z_A\|}{\|z_C-z_A\|}=1$ أي: $\|z_B-z_A\|=\|z_C-z_A\|$ ومنه: $AB=AC$ و $Arg\left(\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\right)=-\frac{\pi}{3}$ معناه: $(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB})=-\frac{\pi}{3}$. ب / المثلّث ABC متقايس الأضلاع. ج / تعيين قيم n حتى يكون العدد المركّب L^n حقيقيا سالبا تماما. L^n حقيقي سالب تماما معناه: $Arg(L^n)=(2k+1)\pi\quad k\in\mathbb{Z}^-$ أي: $-\frac{n\pi}{3}=(2k+1)\pi\quad /\ k\in\mathbb{Z}^-$ $-n=6k+3\quad /\ k\in\mathbb{Z}^-$ أي: $n=-6k-3\quad /\ k\in\mathbb{Z}^-$. د / إيجاد طبيعة التحويل r الذي مركزه A ويحوّل B إلى C. لدينا: $\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}=e^{-i\frac{\pi}{3}}$ فإنّ $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=e^{i\frac{\pi}{3}}$ التحويل دوران زاويته $\frac{\pi}{3}$. أيجاد العبارة المركّبة للتحويل : $z'=az+b_r$ و $a=e^{i\frac{\pi}{3}}$ و $a=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ و $b=z_A(1-a)=z_A\left(1-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ومنه $b=2-2i\sqrt{3}$ وتصبح العبارة المركّبة من الشكل: $z'=\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z+2-2i\sqrt{3}$.		

هـ / تعيين z_E لاحقة النقطة E صورة C بالدوران r. لدينا: $z_E = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) z_C + 2 - 2i\sqrt{3}$.اي: $z_E = 4 - 4i\sqrt{3}$.

و / الرباعي ABCE معيّن لأن المثلثين ABC و ACE متقايسا الأضلاع ويشتركان في الضلع $[AC]$

4 / (γ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي تحقق : $|iz + 2i - 2\sqrt{3}| = |z - 4|$

أ / التبيين أنَ النقطتين B و E تنتميان إلى المجموعة (γ). $|iz_B + 2i - 2\sqrt{3}| = \left|i\left(-2 + 2i\sqrt{3}\right) + 2i - 2\sqrt{3}\right|$ أي:

$|iz_B + 2i - 2\sqrt{3}| = |-4\sqrt{3}| = 4\sqrt{3}$ و $|z_B - 4| = |-2 + 2i\sqrt{3} - 4| = |-6 + 2i\sqrt{3}| = 4\sqrt{3}$ أي: $B \in (\gamma)$

$$|iz_E + 2i - 2i\sqrt{3}| = \left|i\left(4 - 4i\sqrt{3}\right) + 2i - 2\sqrt{3}\right|$$

أي: $|iz_E + 2i - 2i\sqrt{3}| = |2\sqrt{3} + 6i| = 4\sqrt{3}$ و $|z_E - 4| = |4 - 4i\sqrt{3} - 4| = |-4i\sqrt{3}| = 4\sqrt{3}$ أي: $E \in (\gamma)$.

ب / تعيين طبيعة المجموعة (γ): لدينا:

$$|iz + 2i - 2\sqrt{3}| = |z - 4|$$

$$\left|i\left(z + 2 - \frac{2\sqrt{3}}{i}\right)\right| = |z - 4|$$

$$\left|i\left(z + 2 + 2i\sqrt{3}\right)\right| = |z - 4|$$

$$|i| \times |z + 2 + 2i\sqrt{3}| = |z - 4| \quad ; \quad |i| = 1$$

$$\left|z - \left(-2 - 2i\sqrt{3}\right)\right| = |z - 4|$$

$$|z - z_C| = |z - z_A|$$

$|z - z_C| = |z - z_A|$ معناه : $MC = MA$ ومنه المجموعة (γ): هي محور القطعة $[AC]$

أو بعبارة أخرى هي المستقيم (BE)

التمرين الثاني: (6 نقاط)

الاجابة النموذجية مادة الرياضيات الشعبة: رياضيات بك 2024

	عناصر الإجابة (الموضوع الأول)	العلامة	
		مجزأة	مجموع
	التمرين الثاني (04 نقاط)		
1	أ- لدينا: $x_{n+1}+2x_{n+3}=44x_0^2$ ؛ (x_n) هندسية أي: $x_n=x_0q^n$ ومنه: $x_0q^{n+1}+2x_0q^{n+3}-44x_0^2q^{2n}=0$ إذن: $q+2q^3=44x_0$ ب- لدينا: $q(1+2q^2)=44x_0$ q يقسم $44x_0$ وأولي مع x_0 فهو يقسم 44 (حسب غوص) $q\in\{1;4;11;44\}$ لما $q=1$ فإن: $1+2q^2=3$ ؛ لما $q=4$ فإن: $1+2q^2=33$ لما $q=11$ فإن: $1+2q^2=243$ لما $q=44$ فإن: $1+2q^2=1937$ في كل الحالات: $PGCD(1+2q^2;4)=1$ * تحديد x_0، q: لما $q=1$ أو $q=11$ فإن: $x_0\notin\mathbb{N}$ لما $q=4$ فإن: $x_0=3$ ؛ لما $q=44$ فإن: $x_0=3873$	0,5 0,5 0,5	1,5
2	أ- لدينا: $(x_0,q)=(3,4)$ ؛ $S_n=x_0+x_1+\dots+x_n$ $S_n=x_0\frac{q^{n+1}-1}{q-1}=3\frac{4^{n+1}-1}{4-1}=4^{n+1}-1$ لدينا: $4\equiv1[3]$ ومنه $4^{n+1}\equiv1[3]$ ومنه $4^{n+1}-1\equiv0[3]$ إذن $S_n\equiv0[3]$ ب- التحقق: $S_{n+1}=4^{n+2}-1=4\times4^{n+1}-4+3=4(4^{n+1}-1)+3=4S_n+3$ إذن $PGCD(S_{n+1};S_n)=3$ جـ- لدينا: $S_n\equiv0[5]$ أي $4^{n+1}-1\equiv0[5]$ ومنه $4^{n+1}\equiv1[5]$ لدينا: $4\equiv-1[5]$ ومنه $4^{n+1}\equiv(-1)^{n+1}[5]$ ومنه $(-1)^{n+1}\equiv1[5]$ ومنه $n+1$ زوجي أي n فردي إذن قيم n حتى يكون $S_n\equiv0[5]$ هي n فردي أي $n=2k+1$ حيث $k\in\mathbb{N}$	0,5 0,5 0,5	1,5

3

أ- باقي قسمة S_{28} على 17 : 0,5

لدينا : $S_{28}=4^{28+1}-1=4^{29}-1$

لدينا: $4^{29}=4\times4^{28}$ أي $4^{29}=4\times(4^{2})^{14}=4\times(16)^{14}$

نعلم أن $16\equiv-1[17]$ ومنه $(16)^{14}\equiv(-1)^{14}[17]$ أي $(16)^{14}\equiv1[17]$

ومنه $4\times(16)^{14}\equiv4[17]$ ومنه: $4\times(16)^{14}-1\equiv4-1[17]$

ومنه: $S_{28}\equiv3[17]$

اذن باقي قسمة S_{28} على 17 هو 3

ب- استنتاج القواسم الثلاث الأولية للعدد S_{27} : 0,5

لدينا: $S_{28}=4S_{27}+3$ و $S_{28}\equiv3[17]$

ومنه $4S_{27}+3\equiv3[17]$ أي $4S_{27}\equiv0[17]$

ومنه $S_{27}\equiv0[17]$

إذن: القواسم الأولية الثلاث المطلوبة لـ S_{27} هي

3 و 5 و 17

1

(1

(2

التمرين الثالث: (6 نقاط)

1) حساب الإحتمالات:

$p(A)=\frac{C_5^3}{C_{10}^3}=\frac{10}{120}$ 0.5

$p(B)=\frac{C_5^3+C_3^3}{C_{10}^3}=\frac{11}{120}.$ 0.5

$.p(C)=\frac{C_5^1\times C_3^1\times C_2^1}{C_{10}^3}=\frac{30}{120}.$ 0.5

2) قيم المتغير العشوائي هي: $X\in\{1;2;3\}$. 0.25

$$p(X=1)=\frac{C_5^3+C_3^3}{C_{10}^3}=\frac{11}{120}.$$

$$p(X=2)=\frac{C_3^2\times C_5^1+C_3^2\times C_2^1+C_2^2\times C_5^1+C_2^2\times C_3^1+C_5^2\times C_2^1+C_5^2\times C_3^1}{C_{10}^3}=\frac{79}{120}.$$

$$p(X=3)=\frac{C_5^1\times C_3^1\times C_2^1}{C_{10}^3}=\frac{30}{120}.$$

قانون إحتمال المتغير العشوائي:

3	2	1	$(X=x_i)$

0.75

$p(X=x_i)$	$\frac{11}{120}$	$\frac{79}{120}$	$\frac{30}{120}$	

0.25

الأمل الرياضياتي:

$$E(X)=1\times\frac{11}{120}+2\times\frac{79}{120}+3\times\frac{30}{120}=0{,}87.$$

3) أ) البرهان أن $p(D)=\frac{n(n-1)}{(n+5)(n+4)}$:

0.25

$$p(D)=\frac{A_n^2}{A_{n+5}^2}=\frac{\frac{n!}{(n-2)!}}{\frac{(n+5)!}{(n+3)!}}=\frac{n(n-1)}{(n+5)(n+4)}.$$

ب) حساب $p(E)$ بدلالة n :

0.5

$$p(E)=\frac{A_2^2+A_3^2+A_n^2}{A_{n+5}^2}=\frac{2+6+\frac{n!}{(n-2)!}}{\frac{(n+5)!}{(n+3)!}}=\frac{8+n(n-1)}{(n+5)(n+4)}=\frac{n^2-n+8}{n^2+9n+20}.$$

0.5

ج) تعيين قيم العدد الطبيعي n بحيث $p(E)\geq\frac{1}{2}$:

$p(E)\geq\frac{1}{2}$ يكافئ $\frac{n^2-n+8}{n^2+9n+20}\geq\frac{1}{2}$ أي $2n^2-2n+16\geq n^2+9n+20$.

وبالتالي: $n^2-11n-4\geq0$ نحسب Δ

$\Delta=137$

$n_1=-0{,}35$.

$n_2=11{,}35$.

أي قيم العدد الطبيعي n بحيث $p(E)\geq\frac{1}{2}$ هي: $n\geq12$

التمرين الرابع: (6 نقاط)

1.5

I) 1- لدينا : $f_1(x)=e^{-2x}-2e^{-x}+1$

دراسة تغيرات الدالة f_1 :

0.5

أ) حساب النهايات : $\lim\limits_{x\to+\infty}f_1(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[e^{-2x}-2e^{-x}+1\right]=1$

$$\lim_{x\to-\infty}f_1(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[e^{-2x}-2e^{-x}+1\right]=\lim_{x\to-\infty}e^{-2x}\left(1-2e^{x}+e^{2x}\right)=+\infty$$

0.25

ب) الدالة f_1 قابلة للإشتقاق على وعبارة دالتها المشتقة هي :

$f_1'(x)=-2e^{-2x}+2e^{-x}$ أي $f_1'(x)=2e^{-2x}\left(e^{x}-1\right)$

0.75

اشارة $f_1'(x)$ من اشارة $e^{x}-1$ ومنه نلخص اشارة قي الجدول التالي :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f_1'(x)$	$-$	0	$+$

أي f_1 متناقصة تماما على المجال $]-\infty,0]$

و f_1 متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$

و جدول تغيرات الدالة يكون :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f_1'(x)$		$-$	0	$+$	
$f_1(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	1

1) أ- برهان أن المنحنى (C_1) يقبل نقطة انعطاف A_0 و حساب احداثياتها :

نحسب f_1'' : الدالة f_1' قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة هي : $f_1''(x) = 4e^{-2x} - 2e^{-x}$ أي

$$f_1'(x)=2e^{-2x}\left(2-e^{x}\right)$$

0.5 نضع $f_1''(x)=0$ أي $2e^{-2x}\left(2-e^{x}\right)=0$ ومنه يكون إذا $2-e^{x}=0$ وبالتالي $x=\ln 2$

ويمكن تلخيص اشارة $f_1''(x)$ في الجدول التالي :

x	$-\infty$		$ln2$		$+\infty$
$f_1''(x)$		$+$	0	$-$	

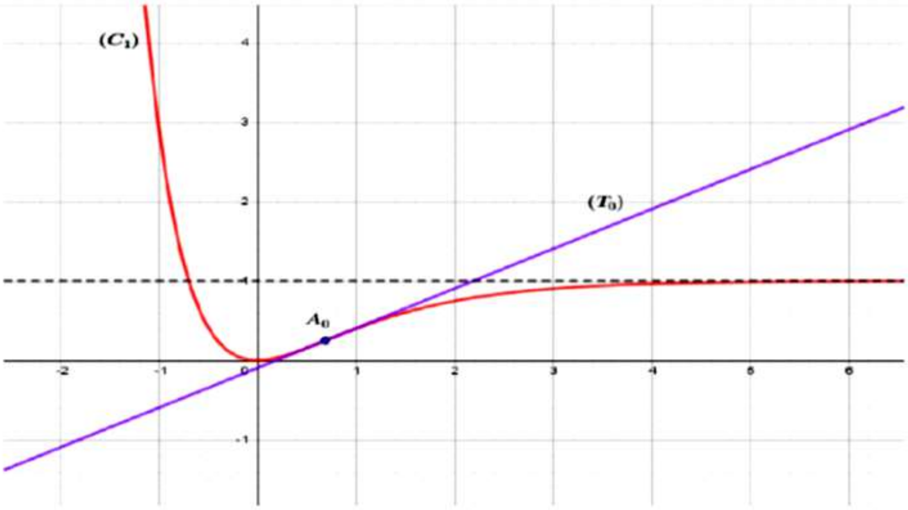
أي المشتقة الثانية للدالة f_1 تنعدم عند الفاصلة $\ln 2$ وتغير اشارتها

0.5 وبالتالي المنحنى (C_1) الممثل للدالة f_1 يقبل النقطة A_0 : $A_0(\ln 2; f_1(\ln 2))$ ومنه $A_0\left(\ln 2;\frac{1}{4}\right)$

ب – معادلة المماس للمنحنى (C_1) عند النقطة هي : $(T):\ y=f_1'(\ln 2)(x-\ln 2)+f_1(\ln 2)$

1.25 0.05 أي : $(T):\ y=\frac{1}{2}(x-\ln 2)+\frac{1}{4}$ و منه $(T):\ y=\frac{1}{2}x-\frac{\ln 2}{2}+\frac{1}{4}$

0.5 جـ - الانشاء



II) 1) أ - برهان أن جميع المنحنيات (C_m) تشترك في نقطة ثابتة و تعين احداثياتها :

نحل المعادلة $f_m(x)=f_{m'}(x)$ مع $(m\neq m')$ أ

0.25 $e^{-2x}-(1+m)e^{-x}+m=e^{-2x}-(1+m')e^{-x}+m'$ أي $(m'-m)e^{-x}=m'-m$ اذن $e^{-x}=1$

0.75 أي $x=0$ و بما أن من أجل كل عدد حقيقي m : $f_m(0)=0$ اذن جميع المنحنيات تمر من النقطة الثابتة

0.5 هي المبدأ $O(0,0)$ (كما يمكن استعمال طريقة الكثير الحدود المعدوم)

ب- المناقشة حسب قيم m وجود نقط تقاطع المنحنى (C_m) مع حامل محور الفواصل :

نحل المعادلة $f_m(x)=0$ أي $e^{-2x}-(1+m)e^{-x}+m=0$ بوضع $e^{-x}=t$ تصبح المعادلة :

$$t^2-(1+m)t+m=0$$

نحسب المميز Δ نجد : $\Delta=(1+m)^2-4m=m^2-2m+1=(m-1)^2$ أي $\sqrt{\Delta}=|m-1|$

لما $m>1$: $t=\dfrac{1+m-(m-1)}{2}=1$ أو $t=\dfrac{1+m+(m-1)}{2}=m$ وبالتالي $x=0$ أو $x=-\ln m$

لما $m<1$: $t=\dfrac{1+m-(1-m)}{2}=m$ أو $t=\dfrac{1+m+(1-m)}{2}=1$

- لما $0<m<1$ نجد : $x=-\ln m$ أو $x=0$
- لما $m\leq 0$ نجد : $t_1<0$ مرفوض ولما $t=1$ نجد $x=0$
- لما $m=1$ نجد : $t=1$ أي نجد $x=0$

إذن - لما $m=1$ أو $m\leq 0$ المنحنى (C_m) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة هي المبدأ $O(0,0)$

- لما $m\in]0;1[\cup]1;+\infty[$ المنحنى (C_m) يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين هما المبدأ $O(0,0)$ والنفطة $B(-\ln m,0)$

2

2) دراسة تغيرات الدالة f_m وتعين معادلة للمستقيمات المقاربة :

0.5

أ- النهايات : $\lim\limits_{x\to+\infty} f_m(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[e^{-2x}-(1+m)e^{-x}+m\right]=m$

$$\lim_{x\to-\infty} f_m(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[e^{-2x}-(1+m)e^{-x}+m\right]=\lim_{x\to-\infty} e^{-2x}\left(1-(1+m)e^{x}+me^{2x}\right)=+\infty$$

0.25

بماأن $\lim\limits_{x\to+\infty} f_m(x)=m$ فإن المنحنيات (C_m) تقبل نستقيما مفاربا معادلته $y=m$ بجوار $+\infty$

: : الدالة f_m قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ وعبارة دالتها المشتقة هي :

0.75

$f_m'(x)=-2e^{-2x}+(1+m)e^{-x}$ أي $f_m'(x)=e^{-2x}\left[(1+m)e^{x}-2\right]$

اشارة $f_m'(x)$ من اشارة $(1+m)e^{x}-2$ أي نناقش حسب قيم m اشارة $f_m'(x)$

أ) لما $m=-1$ أي $m+1=0$ تكون $f_m'(x)<0$ وبالتالي الدالة f_{-1} متناقصة تماما على $\mathbb{R}$

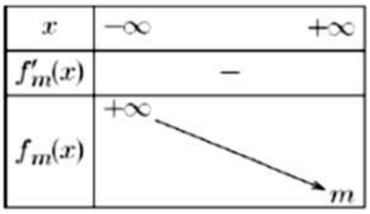
ب) لما $m<-1$ أي $m+1<0$: تكون $f_m'(x)<0$ وبالتالي الدالة f_m متناقصة تماما على $\mathbb{R}$

جـ) لما $-1<m$ أي $0<m+1$ نقول $(1+m)e^{x}-2=0$ نجد $e^{x}=\dfrac{2}{m+1}$ ومنه $x=\ln\left(\dfrac{2}{m+1}\right)$ وفي هذه الحالة نقول الدالة f_m متناقصة تماما على المجال $\left]-\infty,\ln\left(\dfrac{2}{m+1}\right)\right]$ ومتزايدة تمامل على المجال $\left[\ln\left(\dfrac{2}{m+1}\right);+\infty\right[$

جـ) جدول التغيرات :

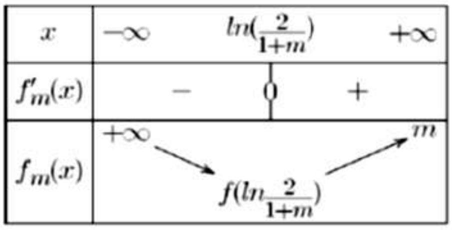
0.5

لما $m\leq -1$

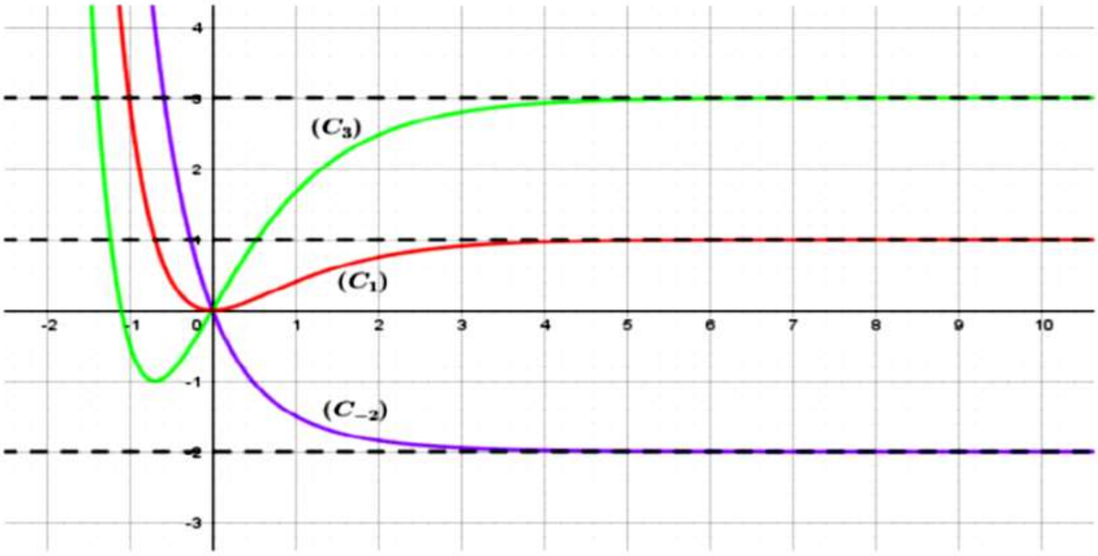


x	$-\infty$	$+\infty$
$f'_m(x)$	$-$	
$f_m(x)$	$+\infty$	m

لما $m>-1$



x	$-\infty$	$ln(\frac{2}{1+m})$	$+\infty$
$f'_m(x)$	$-$	0	$+$
$f_m(x)$	$+\infty$	$f(ln\frac{2}{1+m})$	m

3) دراسة الوضع النسبي للمنحنيين $\left(C_{m_2}\right)$ و $\left(C_{m_1}\right)$ لتدرس اشارة الفرق : $f_{m_2}(x)-f_{m_1}(x)=e^{-2x}-(1+m_2)e^{-x}+m_2-e^{-2x}+(1+m_1)e^{-x}-m_1$ أي $f_{m_2}(x)-f_{m_1}(x)=-(m_2-m_1)e^{-x}+m_2-m_1$ وبالتالي $f_{m_2}(x)-f_{m_1}(x)=(m_2-m_1)(1-e^{-x})$ بما أن $m_2\rangle m_1$ أي $m_2-m_{11}\rangle 0$ فان اشارة الفرق تتبع اشارة $1-e^{-x}$ وبالتالي الوضعية تكون 1- لما $x\in\left]-\infty;0\right[$ المنحنى $\left(C_{m_2}\right)$ يقع تحت المنحنى $\left(C_{m_1}\right)$ 2- لما $x=0$ المنحنى $\left(C_{m_2}\right)$ يقطع المنحنى $\left(C_{m_1}\right)$ في النقطة $O(0,0)$ 3- لما $x\in\left]0;+\infty\right[$ المنحنى $\left(C_{m_2}\right)$ يفع فوق المنحنى $\left(C_{m_1}\right)$	0.5	0.5
4) الانشاء : يمكن الاعتماد على الدراسة السابقة في انشاء المنحنيين $\left(C_{-2}\right)$ و $\left(C_3\right)$ 	0.25 0.25	0.5
5) كتابة كل x_m من و y_m بدلالة m للدالة f_m قبمة حدية محلية معناه $f_m(x)=0$ وحسب الأسئلة السايقة وجدنا أن لهذه المعادلة حلولا لما $m\rangle -1$ لدينا $f_m(x)=0$ أي أن $x_m=\ln\left(\frac{2}{m+1}\right)$ ومنه $y_m=f(x_m)=f\left(\ln\left(\frac{2}{m+1}\right)\right)=e^{-2\ln\left(\frac{2}{m+1}\right)}-(1+m)e^{-\ln\left(\frac{2}{m+1}\right)}+m=\left(\frac{m+1}{2}\right)^2-\frac{(m+1)^2}{2}+m$ اذا $y_m=\frac{(m+1)^2-2(m+1)^2+4m}{4}=\frac{-(m+1)^2+4m}{4}=\frac{-m^2-2m+1+4m}{4}=\frac{-(m^2-2m+1)}{4}$ ومنه $y_m=\frac{-(m-1)^2}{4}$ إيجاد معادلة مستقلة عن m للمنحنى (p) لما يمسح m المجال $\left]-1;+\infty\right[$ نعلم أن $x_m=\ln\left(\frac{2}{m+1}\right)$ فإن $e^{x_m}=\frac{2}{m+1}$ وبالتالي $m+1=\frac{2}{e^{x_m}}$ أي $m=2e^{-x_m}-1$ وبتعويض m في y_m نجد $y_m=\frac{-\left(2e^{x_m}-1-1\right)^2}{4}=\frac{-\left(2e^{x_m}-2\right)^2}{4}=\frac{-4\left(e^{x_m}-1\right)^2}{4}$	0.25 0.25	0.5

و بالتالي نحصل على معادلة للمنحنى (p) هي $y=-(e^x-1)$ لما يمسح m المجال $]-1;+\infty[$

عناصر الإجابة	النقطة

الموضوع الثاني 2024

التمرين الأول: (04 نقاط)

نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة التالية: (E) .... $7x-5y=11$

1) أ) الثنائية $(x;y)$ حل للمعادلة (E) معناه $7x=5y+11$ ومنه $7x\equiv1[5]$ ومنه $2x\equiv1[5]$ ومنه $6x\equiv3[5]$ إذن $x\equiv3[5]$ — 0.5

ب) استنتاج حلول المعادلة (E): لدينا $x\equiv3[5]$ معنها $x=5k+3$ حيث $k\in\mathbb{Z}$ — 0.5

بالتعويض في (E) نجد: $y=7k+2$ إذن $k\in\mathbb{Z}$ $(x;y)=(5k+3;7k+2)$

ج) تعيين الثنائيات $(x;y)$ حلول المعادلة (E) بحيث يكون $PGCD(x;y)=11$

من المعادلة (E) نستنتج أن $PGCD(x;y)$ يقسم 11 إذن $PGCD(x;y)=11$ معناه: $\begin{cases}x\equiv0[11]\\y\equiv0[11]\end{cases}$

ومنه $\begin{cases}7k+2\equiv0[11]\\5k+3\equiv0[11]\end{cases}$ ومنه $2k\equiv-10[11]$ ومنه: $k\equiv6[11]$ معناه : $k=11k'+6$ — 0.5

بالتعويض نجد: $k'\in\mathbb{Z}$ $(x;y)=(55k'+33;77k'+44)$.

1.5

أ) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الاقليدية لكل من 5^n و 7^n على 11 — 0.5

بواقي القسمة الاقليدية لـ: 7^n على 11

n	10k	10k+1	10k+2	10k+3	10k+4	10k+5	10k+6	10k+7	10k+8	10k+9
الباقي	1	7	5	2	3	10	4	6	9	8

بواقي القسمة الاقليدية لـ: 5^n على 11 — 0.5

n	5k	5k+1	5k+2	5k+3	5k+4
الباقي	1	5	3	4	9

ب) 5^n+7^{2023} قابلا للقسمة على 11 معناه: $5^n+7^{2023}\equiv0[11]$ لدينا: $2023=202\times10+3$ — 0.25

إذن: $5^n+2\equiv0[11]$ ومنه : $5^n\equiv9[11]$ إذن: $k\in\mathbb{N}$ $n=10k+8$

1.25

2) a و b عددان طبيعيان غير معدومين كلاهما أصغر من 8، N عدد طبيعي يكتب $\overline{a01b}^{10}$

أ) التحقق : لدينا أن $10\equiv-1[11]$ ومنه $10^3\equiv(-1)^3[11]$ إذن: $10^3\equiv-1[11]$ — 0.25

1.25

0.5 ب) العدد N باقي قسمته على 11 هو 4 معناه: $b\equiv a+5[11]$ إذن: $(a;b)=(1;6)$ أي $N=1016$

0.5 ج) العدد N في نظام التعداد ذي الاساس 11: $N=\overline{844}^{11}$

التمرين الثاني: (6 نقاط)

1) حساب احتمال الحدثين A و B

0.5 $$p(A)=\frac{C_5^3+C_3^3}{C_{10}^3}=\frac{11}{120}$$

0.5 $$p(B)=\frac{C_2^1\times C_8^2}{C_{10}^3}=\frac{7}{15}$$

(2

0.25

- تعيين قانون احتمال المتغير العشوائي X: لدينا $X(\Omega)=\{1;2;3\}$.

، $p(X=1)=p(A)=\frac{11}{120}$ ،

، $p(X=3)=\frac{C_5^1\times C_3^1\times C_2^1}{C_{10}^3}=\frac{30}{120}$

$p(X=2)=\frac{79}{120}$

0.75

x	1	2	3
$p(X=x)$	$\frac{11}{120}$	$\frac{79}{120}$	$\frac{30}{120}$

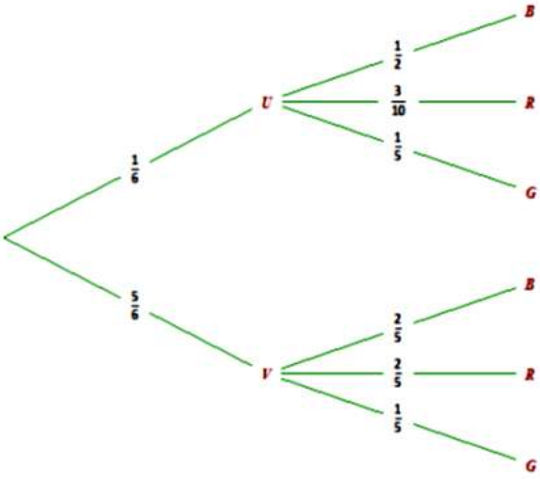
- حساب الأمل الرياضياتي:

0.5 $$E(X)=\frac{11}{120}\times(1)+\frac{79}{120}\times(2)+\frac{30}{120}\times(3)=\frac{259}{120}\simeq 2,16$$

- حساب التباين:

0.5 $$V(X)=\sum_{i=1}^{4}p_i(x_i)^2-(E(X))^2=(\frac{11}{120}\times(1)^2+\frac{79}{120}\times(2)^2+\frac{30}{120}\times(3)^2)-(2,16)^2=4,97-4,66$$

$$\simeq 0,31$$



0.25

- تبيين أن $p(B)=\frac{5}{12}$:

$$p(B)=\frac{5}{6}\times\frac{2}{5}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{12}=\frac{5}{12}$$

0.75

- حساب احتمال ان تكون الكرة المسحوبة من الكيس V علما انها بيضاء

V هي الحدث سحب كرة من الكيس

$$P_B(V)=\frac{p(B\cap V)}{P(B)}=\frac{1/3}{5/12}=\frac{4}{5}$$

التمرين الثالث: (6 نقاط)

0.5 **I.** لدينا f دالة معرفة وقابلة للاشتقاق على المجال $[0;+\infty[$ ولدينا: $f'(x)=\frac{2\alpha x}{2\sqrt{1+\alpha x^2}}=\frac{\alpha x}{\sqrt{1+\alpha x^2}}$

ولدينا من أجل كل x من المجال $[0;+\infty[$: $\alpha x\geq 0$ و $\sqrt{1+\alpha x^2}\succ 0$ ومنه $f'(x)$ موجبة على المجال $[0;+\infty[$ وبالتالي الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$

0.25

.II .1 أ. لدينا: $u_0=0$ ومنه $0\le u_0\le\frac{1}{\sqrt{1-\alpha}}$ اذن الخاصية محققة من أجل $n=0$ • نفرض أن: $0\le u_n\le\frac{1}{\sqrt{1-\alpha}}$ ونبين أن $0\le u_{n+1}\le\frac{1}{\sqrt{1-\alpha}}$ لدينا: $0\le u_n\le\frac{1}{\sqrt{1-\alpha}}$ ومنه $f(0)\le f(u_n)\le f\left(\frac{1}{\sqrt{1-\alpha}}\right)$ لأن الدالة f متزايدة تماما على $[0;+\infty[$ ولدينا $f\left(\frac{1}{\sqrt{1-\alpha}}\right)=\sqrt{1+\alpha\left(\frac{1}{\sqrt{1-\alpha}}\right)^2}=\sqrt{1+\frac{\alpha}{1-\alpha}}=\frac{1}{\sqrt{1-\alpha}}$ و $f(0)=1$ و $1\succ 0$ ومنه $0\le f(u_n)\le\frac{1}{\sqrt{1-\alpha}}$ وبالتالي $0\le u_{n+1}\le\frac{1}{\sqrt{1-\alpha}}$ اذن حسب مبدأ البرهان بالتراجع فإن من أجل كل عدد طبيعي n : $0\le u_n\le\frac{1}{\sqrt{1-\alpha}}$	0.25 0.75	
ب. لدينا(من أجل $n\neq 0$) : $u_{n+1}-u_n=\sqrt{1+\alpha u_n^2}-u_n=u_n\left(\sqrt{\frac{1}{u_n^2}+\alpha}-1\right)$ ولدينا: $u_n\le\frac{1}{\sqrt{1-\alpha}}$ ومنه $\frac{1}{u_n^2}\ge 1-\alpha$ وبالتالي : $\sqrt{\frac{1}{u_n^2}+\alpha}-1\ge 0$ ولدينا $u_n\ge 0$ ومنه $u_{n+1}-u_n\ge 0$ اذن المتتالية (u_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى، نستنتج أنها متقاربة لدينا مما سبق $f\left(\frac{1}{\sqrt{1-\alpha}}\right)=\frac{1}{\sqrt{1-\alpha}}$ ومنه $\lim u_n=\frac{1}{\sqrt{1-\alpha}}$	0.25 0.5 0.25	
التمرين الرابع: (6 نقاط)		
نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $g(x)=x+2-\ln x$ 1) دراسة اتجاه تغير الدالة g : الدالة g قابلة للاشتقاق على مجال تعريفها ودالتها المشتقة هي: $g'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$ الإشارة: • بما أن الدالة موجبة على المجال فإن الدالة متزايدة تماما على المجال • بما أن الدالة سالبة على المجال فإن الدالة متناقصة تماما على المجال • ومنه جدول التغيرات:		
2) الحساب: $g(1)=0$ انطلاقا من جدول التاغيرات نستنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$		
II) لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بالعبارة التالية: $f(x)=\frac{1}{2}\left(-x+e-\frac{\ln(x^2)}{x}\right)$ (c_f) تمثيلها البياني المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$ 1) أ) من أجل كل عدد حقيقي x من $]0;+\infty[$ لدينا :		

$$f(-x)+f(x)=\frac{1}{2}\left(x+e+\frac{\ln\left(x^2\right)}{x}\right)+\frac{1}{2}\left(-x+e-\frac{\ln\left(x^2\right)}{x}\right)=e$$

التفسير البياني: النقطة $\Omega\left(0;\frac{e}{2}\right)$ مركز تناظر للمنحني (c_f)

ب) أحسب $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

وبما أن النقطة $\Omega\left(0;\frac{e}{2}\right)$ مركز تناظر للمنحني (c_f) فإن: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0} f(x)=-\infty$

---

2) أ) من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم لدينا: $f'(x)=\frac{1}{2}\left(-1-\frac{\frac{2}{x}x-\ln\left(x^2\right)}{x^2}\right)=\frac{-g\left(x^2\right)}{2x^2}$

ت) استنتاج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها

الإشارة:

- بما أن الدالة موجبة على المجالين فإن الدالة متزايدة تماما على المجالين
- ومنه جدول التغيرات:

---

3) المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=-\frac{1}{2}x+\frac{e}{2}$ مقارب لـ(c_f): لدينا :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-\left(-\frac{1}{2}x+\frac{e}{2}\right)=\lim_{|x|\to+\infty}-\frac{\ln\left(x^2\right)}{x}=\lim_{|x|\to+\infty}-\frac{\ln(|x|)}{x}=0$$

إذن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=-\frac{1}{2}x+\frac{e}{2}$ مقارب لـ(c_f) بجوار $+\infty$ و $-\infty$

ثم أدرس وضعية (c_f) بالنسبة إلى (Δ). $f(x)-\left(-\frac{1}{2}x+\frac{e}{2}\right)=-\frac{\ln\left(x^2\right)}{x}$

---

4) أ) لإثبت أنه يوجد مماسان (T) و (T') للمنحنى (c_f) يوازيان (Δ) يكفي حل المعادلة. $f'(x)=-\frac{1}{2}$

$\frac{x^2+2-\ln x^2}{2x^2}=-\frac{1}{2}$ ومنه $\ln x^2=-2$ إذن $x=\frac{1}{e}$ أو $x=-\frac{1}{e}$

$(T):y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}e$ و $(T'):y=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{e}+\frac{3}{2}e$

ب) بين أن (c_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين فاصلتاهما α و β حيث

$2<\alpha<2,1$ و $-0,5<\beta<-0,4$

أرسم كل من (Δ)، (T)، (T') والمنحني (C_f)