امتحان بكالوريا تجريبية | ثانوية أوبيناتر الخاصة

الشعبة: رياضيات | دورة ماي 2024

اختبار في مادة: الرياضيات | المدة: 4 سا ونصف

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

يحتوي كيس على خمس كريات حمراء تحمل الأرقام : -2 , -1 , 0, 1, 2 و ثلاث كريات خضراء تحمل الأرقام : -1 , 0, 1 و كرتان سوداوان تحملان الرقمين : -1 , 0 (الكريات لا نفرق بينها عند اللمس).

1) نسحب عشوائيا ودون إرجاع كريتين من هذا الكيس و ليكن الحدثان :

A : "الكريتان المسحوبتان لوناهما مختلفان", B : "الكريتان المسحوبتان تحمل كل منهما عددا موجبا تماما"

- أحسب $p(A)$ و $p(B)$ ثم بين أن $p(A\cup B)=\dfrac{32}{45}$.

2) نعيد الكريات المسحوبة إلى الكيس و نسحب منه كريتين في آن واحد .

ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحبة ممكنة العدد الحقيقي $|x-y|$ حيث x و y هما الرقمان اللذان تحملاهما الكريتان المسحوبتان من الكيس.

أ/ عين القيم الممكنة للمتغير العشوائي X ثم أكتب قانون إحتماله .

ب/ أحسب الأمل الرياضياتي $E(X)$.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بـ : $u_0=\dfrac{1}{5}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=\dfrac{2u_n}{2u_n+1}$

1) تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=1-\dfrac{1}{2u_n+1}$

2) أ/ برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $0<u_n<\dfrac{1}{2}$

ب/ تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}-u_n=\dfrac{u_n(1-2u_n)}{2u_n+1}$ ثم بين أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما .

3) هل (u_n) متقاربة ؟ عين نهايتها .

4) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n=\dfrac{3^n u_n}{2u_n-1}$

أ/ أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q=6$.

ب/ أحسب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج أن $u_n=\dfrac{2^n}{3+2^{n+1}}$.

ج/ أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

التمرين الثالث: (05 نقاط)

1) a و b عددان طبيعيان مكتوبان في النظام ذي الأساس ثلاثة على الشكل $a=\overline{201}$ و $b=\overline{100}$

أكتب العددين a و b في النظام العشري .

2) x و y عددان صحيحان و (E) المعادلة ذات المجهول $(x;y)$ التالية : $ax-by=3$

أ/ بين أنه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حلا للمعادلة (E) فإن : $x\equiv 0[3]$

ب/ استنتج حلا خاصا $(x_0;y_0)$ حيث $0\le x_0 \quad 5$ ثم حل المعادلة (E) .

3) نرمز بالرمز d إلى القاسم المشترك الأكبر للعددين x و y حيث $(x;y)$ حل للمعادلة (E) .

أ/ ماهي القيم الممكنة للعدد d ؟

ب/ بين ان $p\gcd(x,y)=pcgd(y,3)$.

ج/ عين الثنائيات $(x;y)$ حلول المعادلة (E) حتى يكون $\dfrac{y}{x}$ كسرا قابلا للاختزال .

4) (u_n) و (v_n) متتاليتان حسابيتان معرفتان على ب : $u_0=2$ ، $u_{n+1}=u_n+19$ و $v_0=5$ ، $v_{n+1}=v_n+9$

– عين كل الثنائيات $(p;q)$ للأعداد الطبيعية التي تحقق $u_p=v_q$ و $|q-p|\le 20$.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I. نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجموعة ب : $g(x)=1+(1-x)e^{-x+2}$.

1) أدرس تغيرات الدالة g

2) استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $g(x)\ge 0$

II. نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجموعة ب : $f(x)=x-1+xe^{-x+2}$

نسمي (C_f) المنحني الممثل لها في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس (O,i,j)

1) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

2) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x)=g(x)$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها .

3) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x-1)\right]$ ثم فسَر النتيجة هندسيا .

4) أدرس الوضعية النسبية للمنحني (C_f) بالنسبة الى المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y=x-1$

5) أ/ بين أن $I(2;3)$ نقطة انعطاف للمنحني (C_f)

ب/ بين ان المنحني (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة فاصلتها x_0 حيث $0<x_0<0.2$.

ج/ بين المنحني (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي المستقيم (Δ) يطلب تعيين معادلة ديكارتية له .

6) أحسب $f(-1)$ ثم أرسم (T)،(Δ) و (C_f)

7) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة ذات المجهول الحقيقي x التالية :

$$(E): xe^{-x+2}-1-m=0$$

8) نعتبر الدالة العددية F المعرفة على المجموعة ب : $F(x)=\dfrac{1}{2}x^2-x-(1+x)e^{-x+2}+3$

بين أن الدالة F دالة أصلية للدالة f على و التي تنعدم من أجل القيمة 2 للمتغير x.

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

n عدد طبيعي حيث: $n \geq 4$

يحتوي صندوق U على n كرية لا يمكن التمييز بينها في اللمس ، منها 3 حمراء و البقية سوداء . نسحب في آن واحد كريتين .

1) أحسب احتمال الحدثين التاليتين : A" سحب كريتين من نفس اللون" ، B" سحب كرية حمراء على الأكثر" .

2) أحسب احتمال الحدث C" سحب كرية حمراء على الأقل"

3) نعيد التجربة و نضيف صندوقين بحيث نرمز لـ U_k للصندوق k $(1 \leq k \leq 3)$ الذي يحتوي على k كرية حمراء و $n-k$ كرية سوداء ، نختار عشوائيا صندوق من الصناديق الثلاثة و نسحب في آن واحد كريتين.

نسمي RR الحدث: " الحصول على كريتين حمراويتين" و NN الحدث "الحصول على كريتين سوداويتين"

و RN الحدث " الحصول على كريتين مختلفتين في اللون "

ليكن المتغير X العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة سحب عدد الكرات الحمراء.

أ) انجز شجرة الاحتمالات.

ب) عين مجموعة قيم X.

جـ) أثبت أن: $P(X=1)=\dfrac{4(3n-7)}{3n(n-1)}$ و $P(X=2)=\dfrac{8}{3n(n-1)}$.

د) عين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ثم أحسب أمله الرياضياتي.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

I. حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة ذات المجهول المركب z التالية:

$$(z-2)(z^2+2z+4)=0$$

II. نعتبر في المستوي المركب المنسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس المباشر (O,u,v) النقط C,B,A لواحقها على الترتيب

$z_A=-1+i\sqrt{3}$, $z_B=-1-i\sqrt{3}$ و $z_C=2$

1) بين أن : $\dfrac{z_B-z_C}{z_A-z_C}=e^{i\frac{\pi}{3}}$.

أ) عين طبيعة المثلث ABC.

ب) عين مركز ونصف قطر الدائرة $(\mathcal{C})$ المحيطة بالمثلث ABC ثم أرسم $(\mathcal{C})$.

2) عين الطبيعة والعناصر الهندسية للمجموعة (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z و التي تحقق $2(z+\bar{z})+z\bar{z}=0$.

3) تحقق أن النقطتين A و B تنتميان إلى (Γ).

4) ليكن R الدوران الذي مركزه النقطة A وزاويته $\dfrac{\pi}{3}$.

أ) عين صورة النقطة B بالدوران R.

ب) عين z_D لاحقة النقطة D صورة النقطة C بالدوران R ثم استنتج طبيعة الرباعي $ABCD$.

ج) عين صورة المجموعة (Γ) بالدوران R.

التمرين الثالث: (04 نقاط)

نعتبر في المجموعة ^{2} المعادلة : $(E):5x-6y=3$

1) أ/ أثبت أنه إذا كانت الثنائية (x, y) حلا للمعادلة (E) فإن x مضاعف للعدد 3.

ب/ استنتج حلا خاصا للمعادلة (E) ثم حل في ^{2} المعادلة (E)

ج/ استنتج حلول الجملة $(S)\ :\ \begin{cases} x \equiv -1[6] \\ x \equiv -4[5] \end{cases}$

2) a و b عددان طبيعيان حيث :

$a=\overline{1\alpha0\alpha00}$ في النظام ذو الأساس 3 و $b=\overline{\alpha\beta0\alpha}$ في النظام ذو الأساس 5.

أ/ عين α و β حتى تكون الثنائية $(a;b)$ حلا للمعادلة (E).

التمرين الرابع: (08 نقاط)

I. نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجموعة ب : $g(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1}-\ln\left(e^x+1\right)$

وليكن (C_g) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس (O,i,j)

1) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ وفسر النتيجة هندسيا ثم أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

2) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x، $g'(x)=\dfrac{-e^{2x}}{\left(e^x+1\right)^2}$

ثم استنتج اتجاه تغير الدالة g وشكل جدول تغيراتها

3) بين أنه من أجل كل x عدد حقيقي ، $g(x)=\dfrac{1}{1+e^{-x}}-\ln\left(1+e^{-x}\right)-x$

أ) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[g(x)-(-x+1)\right]$ ثم فسر النتيجة هندسيا .

أرسم (Δ) و (C_g)

4) استنتج اشارة $g(x)$ عندما يتغير x في المجموعة .

II. f الدالة العددية المعرفة على المجموعة ب : $f(x)=e^{-x}\ln\left(e^x+1\right)$

1) برهن أن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$ ثم أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) بيَن أنَه من أجل كل عدد حقيقي x، $f'(x)=e^{-x}\times g(x)$ ثمَ استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها

3) تحقق أنَه من أجل كل x عدد حقيقي: $\dfrac{1}{e^x+1}=\dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$ ثم أحسب : $\int_{-\ln 3}^{0}\dfrac{1}{e^x+1}dx$

4) أحسب $\int_{-\ln 3}^{0} f(x)\,dx$

انتهى الموضوع الثاني

التصحيح النموذجي

الموضوع الأول

التمرين الأول:

1) حساب الاحتمالات :

$$P(A) = \frac{62}{90}$$

$$P(B) = \frac{6}{90}$$

$$P(A \cap B) = \frac{4}{90}$$

$$P(A \cup B) = \frac{64}{90} = \frac{32}{45}$$

2)

أ) المتغير العشوائي

$$P(X = 0) = \frac{7}{45}$$

$$P(X = 1) = \frac{20}{45}$$

$$P(X = 2) = \frac{12}{45}$$

$$P(X = 3) = \frac{5}{45}$$

$$P(X = 4) = \frac{1}{45}$$

ب) حساب الأمل الرياضياتي

$$E(X) = 1.4$$

التمرين الثاني:

- لدينا : $u_0=\frac{1}{5}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=\frac{2u_n}{2u_n+1}$

1) التحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=1-\frac{1}{2u_n+1}$

- لدينا : $u_{n+1}=\frac{2u_n}{2u_n+1}=\frac{2u_n+1-1}{2u_n+1}=1-\frac{1}{2u_n+1}$ ومنه : $u_{n+1}=1-\frac{1}{2u_n+1}$

2) أ) البرهان على أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0<u_n<\frac{1}{2}$

نسمي $P(n)$ هذه الخاصية .

-1 من أجل $n=0$ لدينا : $u_0=\frac{1}{5}$ و $0<\frac{1}{5}<\frac{1}{2}$ أي $0<u_0<\frac{1}{2}$

اذن $P(n)$ صحيحة من أجل $n=0$.

-2 نفرض صحة $P(n)$ أي نفرض أنَ : $0<u_n<\frac{1}{2}$ ونبرهن صحة $P(n+1)$ أي نبرهن أنَ :

$0<u_{n+1}<\frac{1}{2}$.

- لدينا : $0<u_n<\frac{1}{2}$ ومنه $0<2u_n<1$ أي $1<2u_n+1<2$

وبالتالي $\frac{1}{2}<\frac{1}{2u_n+1}<1$ إذن $-1<-\frac{1}{2u_n+1}<-\frac{1}{2}$

وأخيرا : $0<1-\frac{1}{2u_n+1}<\frac{1}{2}$ أي $0<u_{n+1}<\frac{1}{2}$ ومنه $P(n+1)$ صحيحة .

-3 حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فان $P(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n.

2) التحقق انه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}-u_n=\dfrac{u_n\left(1-2u_n\right)}{2u_n+1}$

- لدينا : . $u_{n+1}-u_n=\dfrac{2u_n}{2u_n+1}-u_n=\dfrac{2u_n-2u_n^2-u_n}{2u_n+1}=\dfrac{u_n-2u_n^2}{2u_n+1}=\dfrac{u_n\left(1-2u_n\right)}{2u_n+1}$
- تبيان أن المتتالية $\left(u_n\right)_{n\in}$ متزايدة :

ندرس اشارة الفرق : $u_{n+1}-u_n$

- لدينا : $u_{n+1}-u_n=\dfrac{u_n\left(1-2u_n\right)}{2u_n+1}$

ولدينا : $0<u_n<\dfrac{1}{2}$ ومنه $-1<-2u_n<0$ أي $0<1-2u_n<1$

وبالتالي : $0<u_n\left(1-2u_n\right)<\dfrac{1}{2}$

- ولدينا : $\dfrac{1}{2}<\dfrac{1}{2u_n+1}<1$ ومنه $0<\dfrac{u_n\left(1-2u_n\right)}{2u_n+1}<\dfrac{1}{2}$
- أي $u_{n+1}-u_n>0$ وبالتالي المتتالية $\left(u_n\right)_{n\in}$ متزايدة.

ج) دراسة تقارب المتتالية : $\left(u_n\right)_{n\in}$

$\left(u_n\right)_{n\in}$ متزايدة ومحدودة من الأعلى بالعدد $\dfrac{1}{2}$ فهي متقاربة وتتقارب من العدد . $\dfrac{1}{2}$

- تعيين نهاية المتتالية $\left(u_n\right)_{n\in}$: $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\dfrac{1}{2}$

3) لدينا من أجل كل عدد طبيعي n $v_n=\dfrac{3^n u_n}{2u_n-1}$:

1) اثبات أن المتتالية $\left(v_n\right)_{n\in}$ هندسية :

- لدينا : $v_{n+1}=\dfrac{3^{n+1}u_{n+1}}{2u_{n+1}-1}$

$$v_{n+1}=\frac{3^{n+1}u_{n+1}}{2u_{n+1}-1}=\frac{3\times 3^n\times\frac{2u_n}{2u_n+1}}{2\times\frac{2u_n}{2u_n+1}-1}=\frac{\frac{6\times 3^n\times u_n}{2u_n+1}}{\frac{4u_n-2u_n-1}{2u_n+1}}$$

أي

$$v_{n+1}=6\times\frac{3^n\times u_n}{\cancel{2u_n+1}}\times\frac{\cancel{2u_n+1}}{2u_n-1}=6\times\frac{3^n\times u_n}{2u_n-1}=6v_n$$

ومنه $(v_n)_{n\in}$ هندسية أساسها $q=6$ وحدها الأول

$$v_0=\frac{3^0\times u_0}{2u_0-1}=\frac{1\times\frac{1}{5}}{2\times\frac{1}{5}-1}=\frac{\frac{1}{5}}{-\frac{3}{5}}=-\frac{1}{3}$$

2) حساب عبارة الحد العام v_n بدلالة n :

- لدينا : $v_n=v_0\times q^n=-\frac{1}{3}\times 6^n$
- استنتاج أنَ : $u_n=\frac{2^n}{3+2^{n+1}}$

- لدينا : $v_n=\frac{3^n u_n}{2u_n-1}$ ومنه $2u_nv_n-v_n=3^nu_n$ أي $2u_nv_n-3^nu_n=v_n$
- ومنه $(2v_n-3^n)u_n=v_n$ وبالتالي : $u_n=\frac{v_n}{2v_n-3^n}$

إذن : $u_n=\frac{-\frac{1}{3}\times 6^n}{2\left(-\frac{1}{3}\times 6^n\right)-3^n}=-\frac{6^n}{-2\times 6^n-3\times 3^n}$ ومنه

$$u_n==-\frac{6^n}{-2\times 6^n-3\times 3^n}=\frac{2^n\times 3^n}{2\times 3^n\times 2^n+3\times 3^n}$$ أي $$u_n=\frac{2^n}{2^{n+1}+3}=\frac{2^n}{3+2^{n+1}}$$

- حساب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$: $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\frac{2^n}{2^{n+1}+3}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2^n}{2^n\left(2+\frac{3}{2^n}\right)}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{2+3\left(\frac{1}{2}\right)^n}=\frac{1}{2}$:

التمرين الثالث:

1) a,b في النظام العشري $b=9$ و $a=19$

2)

أ) تبيان أن $x \equiv 0[3]$

$19x - 9y = 3 \dots (E)$, $19x = 9y + 3$, $19x = 3(3y + 1)$, $19x \equiv 0[3]$

و 19 أولي مع 3 (حسب مبرهنة غوص) اذن $x \equiv 0[3]$

ب) الحل الخاص $(x_0, y_0) = (3,6)$

حل المعادلة (E)

$$S = \{(9k + 3, 19k + 6)/k\epsilon\mathbb{Z}\}$$

3)

أ) القيم الممكنة لـ d هي : $d \in \{1\,;3\}$

ب) $pgcd(x; y) = pgcd(y; 3)$

ج) $\frac{y}{x}$ قابلا للاختزال من أجل $(x; y) = \{(27k' + 3; 57k' + 6)/k' \in \mathbb{Z}\}$

4) $(p; q) = \{(3; 6); (12,25)\}$

التمرين الرابع:

1) لدينا : $g(x) = 1 + (1 - x)e^{-x+2}$

أ) دراسة تغيرات الدالة : g

- حساب النهايات :

- لدينا : $\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(1 + (1 - x)e^{-x+2}\right) = +\infty$ لأن $\lim_{x\to-\infty} e^{-x+2} = +\infty$

- لدينا : $\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(1 + (1 - x)e^{-x+1}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(1 + e^2 \times e^{-x} - e^2 \times xe^{-x}\right) = 1$

- حساب المشتقة :

$$g'(x) = -e^{-x+2} - (1 - x)e^{-x+1} = (x - 2)e^{-x+2}$$

- دراسة إشارة المشتقة :

x	$-\infty$ 2 $+\infty$
$g'(x)$	- 0 +

- جدول التغيرات :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	1

1) استنتاج أنه من أجل كل عدد حقيقي x ،: $g(x)\geq 0$

- من أجل $x\in$ فان $g(x)\in[0;+\infty[$ ومنه $g(x)\geq 0$

2) لدينا : $f(x)=x-1+xe^{-x+2}$

-1 حساب النهايات :

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x-1+xe^{-x+2}\right)=-\infty$ لأن $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{-x+2}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty}(x-1)=-\infty\end{cases}$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-1+xe^{-x+2}\right)=+\infty$ لأن

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x+2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^{x+2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^{x}}\times\dfrac{1}{e^{2}}=0\end{cases}$$

-2 تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا : $f'(x)=g(x)$

- لدينا : $f'(x)=1+e^{-x+2}-xe^{-x+2}=1+(1-x)e^{-x+2}=g(x)$

ومنه $f'(x)=g(x)$

- استنتاج اتجاه تغير الدالة f : إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	

- جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

3- حساب : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x-1)\right]$

- $$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x-1)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left(x-1+xe^{-x+2}-x+1\right)=\lim_{x\to+\infty}xe^{-x+2}=0$$
- التفسير الهندسي :

المستقيم ذي المعادلة $y=x-1$ مقارب مائل للمنحني (C_f) عند $+\infty$.

4- دراسة الوضعية النسبية للمنحني (C_f) بالنسبة إلى $(\Delta): y=x-1$

- ندرس إشارة الفرق : $f(x)-y$

- لدينا : $f(x)-y=xe^{-x+2}$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)-y$	$+$	0	$-$
الوضع النسبي	(C_f) فوق (Δ)	(C_f) يقطع (Δ)	(C_f) تحت (Δ)

5- أ) تبيان أنَ النقطة $I(2;3)$ نقطة انعطاف للمنحني (C_f) :

- لدينا : $f''(x)=g'(x)=(x-2)e^{-x+2}$
- جدول إشارة : $f''(x)$

x	$-\infty$ 2 $+\infty$
$f''(x)$	$+$ 0 $-$

- المشتقة الثانية f'' تنعدم من أجل $x=2$ مغيرة إشارتها أي النقطة $I(2;3)$ نقطة انعطاف للمنحني (C_f).

2) تبيان أن المنحني (C_f) في نقطة فاصلتها : $0<x_0<0.2$

- الدالة f مستمرة ورتيبة تماما على المجال $[0;0.2]$ ولدينا :

- $f(0)=-1$ و $f(0.2)=0.2-1+0.2\times e^{-0.2+2}=-0.8+1.21=0.41$

ومنه $f(0)\times f(0.2)<0$

- حسب مبرهنة القيم المتوسطة فان المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا x_0 حيث $0<x_0<0.2$
- أي (C_f)يقطع $(x'x)$ في النقطة $(x_0;0)$ حيث $0<x_0<0.2$

3) تبيان أنَ المنحني (C_f) يقبل مماسا(T) يوازي المستقيم : (Δ)

(T) يوازي (Δ) معناه معامل توجيه المماس (T) يساوي 1

أي $f'(x)=1$ ومنه $g(x)=1$ وبالتالي : $1+(1-x)e^{-x+2}=1$

إذن : $(1-x)e^{-x+2}=0$ ومنه $1-x=0$ أي $x=1$

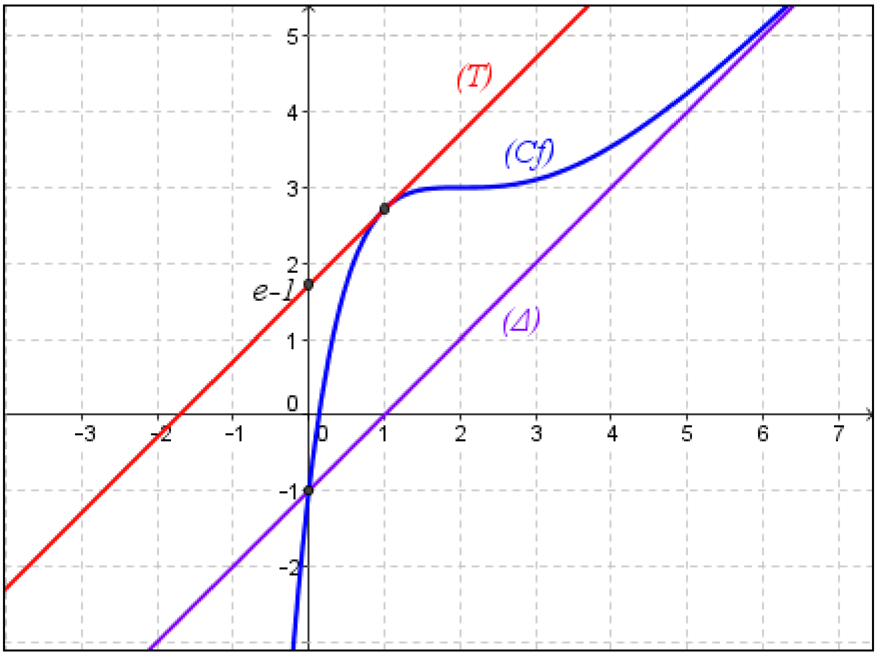
- كتابة معادلة ديكارتية للمماس : (T)

$y=f'(1)(x-1)+f(1)=1\times(x-1)+e=x-1+e$ أي $(T): y=x-1+e$

د) حساب : $f(-1)$

$$f(-1)=-1-1-e^3=-2-e^{-3}=-22.09$$

الرسم :



6- المناقشة البيانية لحلول المعادلة $(E): xe^{-x+2}-1-m=0$

$xe^{-x+2}-1-m=0$ معناه $xe^{-x+2}-1=m$

ومنه $x-1+xe^{-x+2}=x+m$ أي $f(x)=x+m$

- إذن حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع المنحني (C_f) مع المستقيم ذي المعادلة $y=x+m$ الموازي لكل من (Δ) و (T)
- إذا كان $m\in]-\infty;-1[$ فان المعادلة تقبل حلا وحيدا سالبا .
- إذا كان $m=-1$ المعادلة تقبل حلا معدوما .
- إذا كان $m\in]-1;e-1[$ المعادلة تقبل حلين موجبين .
- إذا كان $m=e-1$ المعادلة تقبل حلا وحيدا هو 1.
- إذا كان $m\in]e-1;+\infty[$ فان المعادلة ليس لها حل .

7- تبيان أنَ الدالة F دالة أصلية للدالة f على والتي تنعدم من أجل القيمة 2 للمتغير :

- لدينا : $F(x)=\frac{1}{2}x^2-x-(1+x)e^{-x+2}+3$

$$F'(x)=x-1-\left[e^{-x+2}+(1+x)\left(-e^{-x+2}\right)\right]=x-1-(1-1-x)e^{-x+2}$$

ومن $=x-1+xe^{-x+2}$

أي $F'(x)=f(x)$

- ولدينا : $F(2)=\frac{1}{2}\times 2^2-2-(1+2)e^{-2+2}+3=2-2-3e^0+3=-3+3=0$

وبالتالي F دالة أصلية للدالة f على والتي تنعدم من أجل القيمة 2 للمتغير

الموضوع الثاني

التمرين الأول:

1) احتمال الأحداث A، B، C :

$P(C) = \frac{6n-12}{n^2-n}$ ، $P(B) = \frac{n^2-n-6}{n^2-n}$ ، $P(A) = \frac{n^2-7n+18}{n^2-n}$

3) أ- شجرة الاحتمالات

ب- $X(\Omega) = \{0,1,2\}$

ج- $P(X=2) = \frac{8}{3n(n-1)}$ ، $P(X=1) = \frac{4(3n-7)}{3n(n-1)}$

د- $P(X=2) = \frac{8}{3n(n-1)}$ ، $P(X=1) = \frac{4(3n-7)}{3n(n-1)}$ ، $P(X=0) = \frac{3n^2-15n+20}{3n(n-1)}$

$E(X) = \frac{4}{n}$

التمرين الثاني:

I. حل المعادلة : $(E):(z-2)(z^2+2z+4)=0$

$(z-2)(z^2+2z+4)=0$ يكافئ $z-2=0$ أو $z^2+2z+4=0$

- $z-2=0$ معناه $z=2$
- حل المعادلة $z^2+2z+4=0...(*)$

- حساب المميز : $\Delta = 2^2-4\times1\times4 = 4-16 = -12$

نضع $\Delta = 12i^2 = \left(2i\sqrt{3}\right)^2$

- المعادلة $(*)$ تقبل حلين مركبين متمايزين هما :

$$z_2 = \frac{-2+2i\sqrt{3}}{2} = -1+i\sqrt{3} \text{ ، } z_1 = \frac{-2-2i\sqrt{3}}{2} = -1-i\sqrt{3}$$

- مجموعة حلول المعادلة (E) هي $S = \left\{2, -1+i\sqrt{3}, -1-i\sqrt{3}\right\}$

II. لدينا : $z_C = 2$ و $z_B = -1-i\sqrt{3}, z_A = -1+i\sqrt{3}$

1- أ) تبيان أنَ : $\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = e^{i\frac{\pi}{3}}$

- لدينا : $\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = \frac{-1-i\sqrt{3}-2}{-1+i\sqrt{3}-2} = \frac{-3-i\sqrt{3}}{-3+i\sqrt{3}} = \frac{\left(-3-i\sqrt{3}\right)\left(-3-i\sqrt{3}\right)}{\left(-3+i\sqrt{3}\right)\left(-3-i\sqrt{3}\right)}$

- ومنه $\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = \frac{9+6i\sqrt{3}-3}{12} = \frac{6}{12} + i\frac{6\sqrt{3}}{12} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

- أي $\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{\pi}{3}}$

لانَ : $\left|\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right| = \left|\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$

- $Arg\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi\left(k \in \quad\right)$

ب) تعيين طبيعة المثلث : ABC

- لدينا : $\left|\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right| = 1$ ومنه $\frac{CB}{CA} = 1$ أي $CB = CA$
- ولدينا : $Arg\left(\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi\left(k \in \quad\right)$ أي $\left(CA;CB\right) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi\left(k \in \quad\right)$ ومنه

ABC مثلث متقايس الأضلاع

ج) تعيين مركز ونصف قطر الدائرة $(\mathcal{C})$ المحيطة بالمثلث : ABC

- لدينا : $|z_A| = \sqrt{(-1)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4} = 2 = OA$

$|z_B| = \sqrt{(-1)^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4} = 2 = OB$ و $|z_C| = \sqrt{(2)^2} = \sqrt{4} = 2 = OC$

- وبالتالي : $OA = OB = OC = 2$ أي النقط B, A و C تنتمي إلى دائرة $(\mathcal{C})$ مركزها $O(0;0)$ ونصف قطرها $r = 2$

2- أ) تعيين طبيعة (Γ) مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي التي تحقق: $2\left(z + \bar{z}\right) + z\bar{z} = 0$

$2\left(z + \bar{z}\right) + z\bar{z} = 0$ معناه $2\left(x + iy + x - iy\right) + x^2 + y^2 = 0$

ومنه $x^2 + y^2 + 4x = 0$ وبالتالي : $\left(x+2\right)^2 + y^2 = 4$

أي أنَ (Γ) هي دائرة مركزها النقطة $\Omega(-2;0)$ ونصف قطرها $r=2$.

ب) التحقق من أنَ A و B تنتميان إلى (Γ) :

- لدينا : $\Omega A=|z_A-z_\Omega|=\left|-1+i\sqrt{3}+2\right|=\left|1+i\sqrt{3}\right|=2=r$

- ولدينا : $\Omega B=|z_B-z_\Omega|=\left|-1-i\sqrt{3}+2\right|=\left|1-i\sqrt{3}\right|=2=r$

وبالتالي A و B تنتميان إلى (Γ) .

3- لدينا R دوران مركزه النقطة A وزاويته $\frac{\pi}{3}$.

1) تعيين صورة النقطة B بالدوران R :

- لدينا : $R(B)=B'$ معناه $z_{B'}=az_B+b$

- ولدينا : $a=cos\frac{\pi}{3}+i\,sin\frac{\pi}{3}$ أي $a=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$

- ولدينا كذلك :

$$b=(1-a)z_A=\left(1-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-1+i\sqrt{3}\right)=\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-1+i\sqrt{3}\right)$$

أي $b=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}=1+i\sqrt{3}$

- إذن :

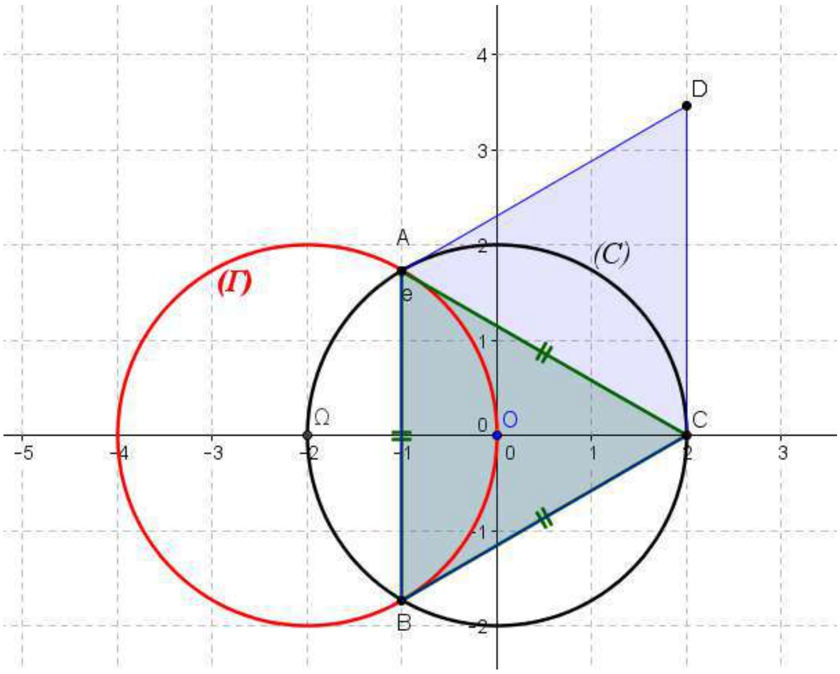
$$z_{B'}=\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-1-i\sqrt{3}\right)+1+i\sqrt{3}=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}+1+i\sqrt{3}$$

أي $z_{B'}=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}+1+i\sqrt{3}=2=z_C$ ومنه $R(B)=C$

2) تعيين z_D لاحقة النقطة D صورة النقطة C بالدوران R :

$$z_D=\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z_C+1+i\sqrt{3}=\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times 2+1+i\sqrt{3}=2+2i\sqrt{3}$$

أي $z_D=2+2i\sqrt{3}$



- استنتاج طبيعة الرباعي : $ABCD$

الرباعي $ABCD$ معين لأنَ :

- $ABCD$ متوازي أضلاع لأن : $z_{AB} = -1 + i\sqrt{3} + 1 + i\sqrt{3} = 2i\sqrt{3}$ و

$z_{DC} = 2 + 2i\sqrt{3} - 2 = 2i\sqrt{3}$

أي $z_{AB} = z_{DC} = 2i\sqrt{3}$

- ولدينا : $BC = CD$ لأن $R(B) = C$ و $R(C) = D$

ج) صورة (Γ) بالدوران : R

هي $(\mathcal{C})$ لأنَ $R(\Omega) = O$ و $R(B) = C$

التمرين الثالث:

لدينا : $(E): 5x - 6y = 3$

1) أ) اثبات أنه إذا كانت الثنائية $(x; y)$ حل للمعادلة (E) فإن x مضاعف للعدد 3:

- لدينا : $5x - 6y = 3$ تكافئ $5x = 3 + 6y$

أي $5x = 3(1 + 2y)$

- لدينا : $3 / 5x$ و $3 \wedge 5 = 1$ فإن $3 / x$ حسب مبرهنة غوص أي x مضاعف للعدد 3

2) تعيين حل خاص للمعادلة : (E)

- نفرض $x=3$ وبالتالي : $y=\dfrac{5\times3-3}{6}=\dfrac{12}{6}=2$ أي الثنائية $(3;2)$ حل للمعادلة (E)

- حل المعادلة: (E) لدينا : $5x-6y=5\times3-6\times2$ يكافئ $5x-5\times3=6y-6\times2$

أي $(*) : 5(x-3)=6(y-2)$

- لدينا : $6/5(x-3)$ و $6\wedge5=1$ فإن $6/(x-3)$ حسب مبرهنة غوص .

أي $x-3=6k\,(k\in\quad)$ وبالتالي $x=6k+3\,(k\in\quad)$

- من أجل $x=6k+3$ نعوض في المعادلة $(*)$ نجد : $5(6k+3-3)=6(y-2)$

ومنه $y-2=5k\,(k\in\quad)$ أي $y=5k+2\,(k\in\quad)$

- مجموعة حلول المعادلة : $S=\{(6k+3;5k+2),k\in\quad\}$

ج) استنتاج حلول الجملة : $(S):\begin{cases}x\equiv-1[6]\\x\equiv-4[5]\end{cases}$

- $\begin{cases}x\equiv-1[6]\\x\equiv-4[5]\end{cases}$ تكافئ $\begin{cases}x=6m-1\\x=5n-4\end{cases}$

أي $6m-1=5n-4$ ومنه $5n-6m=3$

ومنه : $n=6k+3$ وبالتالي $x=5(6k+3)-4=30k+11\,(k\in\quad)$

2- لدينا : $a=\overline{1\alpha0\alpha00}^{3}$ و $b=\overline{\alpha\beta0\alpha}^{5}$

- تعيين $(\alpha;\beta)$ بحيث تكون $(a;b)$ حل للمعادلة (E):

- لدينا : $a=1\times3^5+\alpha\times3^4+\alpha\times3^2=243+81\alpha+9\alpha=243+90\alpha$

ولدينا : $b=\alpha\times5^3+\beta\times5^2+\alpha\times5^0=125\alpha+25\beta+\alpha=126\alpha+25\beta$

مع $\alpha\le2$ و $\beta\le4$

- الثنائية $(a;b)$ حل للمعادلة (E) معناه $5a-6b=3$

ومنه $5(243+90\alpha)-6(126\alpha+25\beta)=3$

اي $1215+450\alpha-756\alpha-150\beta=3$ ومنه $-306\alpha-150\beta=-1212$

بعد تقسيم الطرفين على العدد -3 نجد :

$102\alpha+50\beta=404$ وبالتالي $(\alpha;\beta)=(2;4)$ حل للمعادلة

التمرين الرابع:

I. لدينا : $g(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1}-ln\left(e^x+1\right)$

1) حساب النهايات :

- حساب : $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)$

$$\lim_{x\to-\infty}g(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{e^x}{e^x+1}-ln\left(e^x+1\right)\right)=0$$

لانّ
$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x}{e^x+1}=0\\ \lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0\\ \lim\limits_{x\to-\infty}ln\left(e^x+1\right)=0\end{cases}$$

- التفسير الهندسي $y=0$: مستقيم مقارب أفقي للمنحني (C_g) بجوار $-\infty$

- حساب : $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^x}{e^x+1} - ln\left(e^x+1\right)\right) = -\infty$$

لأنَ

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{e^x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{e^x} = 1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} ln\left(e^x+1\right) = +\infty \end{cases}$$

2) تبيان أنَ $g'(x) = \dfrac{-e^{2x}}{\left(e^x+1\right)^2}$

- لدينا :

$$g'(x) = \frac{e^x\left(e^x+1\right) - e^x \times e^x}{\left(e^x+1\right)^2} - \frac{e^x}{e^x+1} = \frac{e^{2x}+e^x-e^{2x}-e^{2x}-e^x}{\left(e^x+1\right)^2}$$

أي

$$g'(x) = \frac{-e^{2x}}{\left(e^x+1\right)^2}$$

- استنتاج اتجاه تغير الدالة g :

x	$-\infty$ $\quad\quad$ $+\infty$
$-e^{2x}$	$-$
$g'(x)$	$-$

- جدول التغيرات :

x	$-\infty$ $\quad\quad$ $+\infty$
$g'(x)$	$-$
$g(x)$	0 $\searrow$ $-\infty$

3) تبيان أنَه من أجل كل عدد حقيقي x : $g(x) = \dfrac{1}{1+e^{-x}} + ln\left(1+e^{-x}\right) - x$

- لدينا :

$$g(x) = \frac{e^x}{e^x\left(1+\dfrac{1}{e^x}\right)} - ln\left[e^x\left(1+\frac{1}{e^x}\right)\right]$$

ومنه : $g(x) = \dfrac{1}{1+e^{-x}} - ln\left(e^x\right) - ln\left(1+e^{-x}\right)$ أي

$$g(x) = \frac{1}{1+e^{-x}} + ln\left(1+e^{-x}\right) - x$$

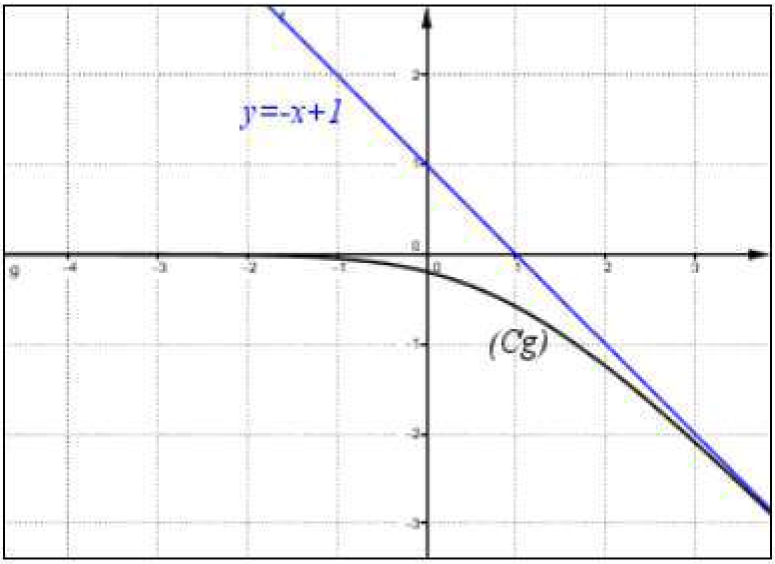
4) أ) حساب : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[g(x) - (-x+1)\right]$

● لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[g(x)-(-x+1)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{1}{1+e^{-x}}-ln\left(1+e^{-x}\right)-x+x-1\right]$

ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[g(x)-(-x+1)\right]=0$ لانَ $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{1+e^{-x}}=1\\ \lim\limits_{x\to+\infty}ln\left(1+e^{-x}\right)=0\end{cases}$

● تفسير النتيجة : المستقيم ذي المعادلة $y=-x+1$ مقارب مائل للمنحني $\left(C_g\right)$ عند $-\infty$.

5) الرسم :



استنتاج اشارة : $g(x)$

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$g(x)$	$-$

II. لدينا : $f(x)=e^{-x}ln\left(1+e^{x}\right)$

1) البرهان أنَ : $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=1$

● نضع $e^{x}=t$ وبالتالي عندما $x\to-\infty$ فانَ : $t\to 0$

إذن $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-x}ln\left(1+e^{x}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{ln\left(e^{x}+1\right)}{e^{x}}=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{ln(t+1)}{t}=1$

أي $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=1$

- حساب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$: $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} e^{-x}\ln\left(1+e^{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(e^{x}+1\right)}{e^{x}}=0$

2) تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، : $f'(x)=e^{-x}\times g(x)$

- لدينا : $f'(x)=-e^{-x}\times\ln\left(e^{x}+1\right)+e^{-x}\times\frac{e^{x}}{e^{x}+1}=e^{-x}\left(\frac{e^{x}}{e^{x}+1}-\ln\left(e^{x}+1\right)\right)$

أي $f'(x)=e^{-x}\times g(x)$

- استنتاج اتجاه تغير الدالة : f

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$g(x)$	$-$
$f'(x)$	$-$

اشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$

- جدول تغيرات الدالة : f

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$-$
$f(x)$	$1 \searrow 0$

3) التحقق من أنه من أجل كل عدد حقيقي $\frac{1}{e^{x}+1}=\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$: x

$$\frac{1}{e^{x}+1}=\frac{1}{e^{x}\left(1+\frac{1}{e^{x}}\right)}=\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$$

- من أجل كل عدد حقيقي x لدينا :

- حساب : $\int_{-\ln 3}^{0}\frac{1}{e^{x}+1}dx$

$$\int_{-ln3}^{0}\frac{1}{e^x+1}dx=\int_{-ln3}^{0}\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}dx=\left[-ln\left(1+e^{-x}\right)\right]_{-ln3}^{0}=-ln2+ln\left(1+e^{ln3}\right)$$

أي $$\int_{-ln3}^{0}\frac{1}{e^x+1}dx=-ln2+ln4=-ln2+2ln2=ln2$$

4) حساب $\int_{-ln3}^{0}f\left(x\right)dx$: بالمكاملة بالتجزئة

$$\int_{-ln3}^{0}f\left(x\right)dx=\int_{-ln3}^{0}e^{-x}ln\left(e^x+1\right)dx$$

نضع : $u'\left(x\right)=e^{-x}$ ومنه $u\left(x\right)=-e^{-x}$

و $v\left(x\right)=ln\left(e^x+1\right)$ ومنه $v'\left(x\right)=\frac{e^x}{e^x+1}$

إذن :

أي $$\int_{-ln3}^{0}f\left(x\right)dx=\int_{-ln3}^{0}e^{-x}ln\left(e^x+1\right)dx=\left[-e^{-x}ln\left(e^x+1\right)\right]_{-ln3}^{0}-\int_{-ln3}^{0}-e^{-x}\times\frac{e^x}{e^x+1}dx$$

$$\int_{-ln3}^{0}f\left(x\right)dx=-ln2+e^{ln3}ln\left(e^{-ln3}+1\right)+\int_{-ln3}^{0}\frac{1}{e^x+1}dx$$

$$\int_{-ln3}^{0}f\left(x\right)dx=-ln2+3ln\left(\frac{1}{3}+1\right)+ln2=3ln\frac{4}{3}$$ إذن $$\int_{-ln3}^{0}f\left(x\right)dx=3ln\frac{4}{3}$$