الخليل للرياضيات
قويسم

سنة ثالثة ثانوي

الشعب:

علوم تجريبية | رياضيات | تقني رياضي

بكالوريا 2022

شعبة رياضيات

مع حل مقترح مفصل

إعداد الأستاذ:

قويسم إبراهيم الخليل

آخر تحديث:

[18 جوان 2022]

الجمهورية الجزائرية اليمقراطية الشعبية
وزارة التربية الوطنية

الديوان الوطني للإمتحانات والمسابقات — **دورة: 2022**
امتحان بكالوريا التعليم الثانوي
الشعبة: رياضيات

اختبار مادة الرياضيات — **المدة: 04 سا و 30د**

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

1) أ- عيّن، حسب قيم العدد الطبيعي n، بواقي القسمة الاقليدية للعدد 2^n على 7

ب- بيّن أنه، من أجل كل عدد طبيعي n، $6^{2n} \equiv 1[7]$، ثم استنتج بواقي القسمة الاقليدية للعدد 6^n على 7

2) بيّن أنّ العدد $(2021^{2022} + 1962^{1443})^{1954} - 2$ يقبل القسمة على 7

3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n: $a_n = 2^n + 6^n$ و $S_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$

أ- استنتج، حسب قيم العدد الطبيعي n، بواقي القسمة الاقليدية للعدد a_n على 7

ب- بيّن أنه، من أجل كل عدد طبيعي n، $S_{n+6} \equiv S_n[7]$

ج- اثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $S_n \equiv 2^{n+1} + 3 \times 6^{n+1} + 3[7]$، ثم استنتج قيم n بحيث $S_n \equiv 0[7]$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

أجب بصحيح أو خاطئ في كل حالة من الحالات التالية:

1) α و β عددان حقيقيان غير معدومين، (u_n) و (v_n) المتتاليتان العدديتان المعرفتان بـ:

$u_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $5u_{n+1} = u_n + \alpha$ وَ $v_n = u_n + \beta$

- المتتالية (v_n) هندسية إذا فقط إذا كان $\alpha = -4\beta$

2) المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_n = \ln\sqrt{e^{n\ln 2}}$ هي متتالية حسابية أساسها $\ln\sqrt{2}$

3) x عدد صحيح، إذا كان $x \equiv 3[7]$ و $x \equiv 1[3]$ فإنّ $x \equiv 3[21]$

4) الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = \ln\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)$ دالة فردية

التمرين الثالث: (05 نقاط)

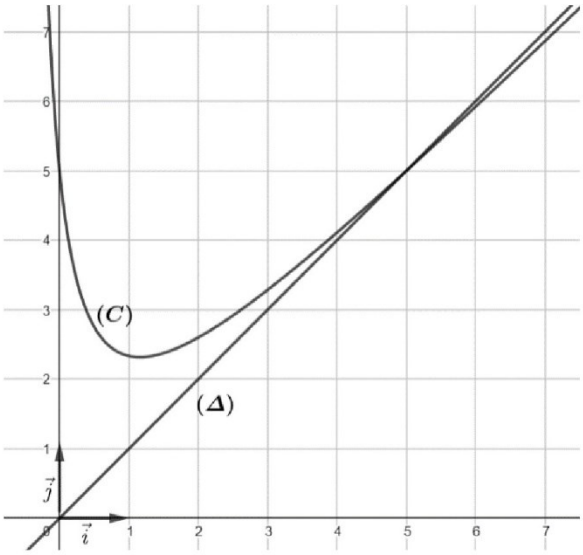
f الدالة العددية المعرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = \dfrac{2x^2+5}{2x+1}$ و (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ كما هو مبيّن في الشكل المرفق

(u_n) المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_0 = 2$ و $u_{n+1} = f(u_n)$

1) أ- ادرس وضعية (C) النسبة إلى المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y = x$

ب- انقل الشكل ومثّل على حامل محور الفواصل الحدود u_0، u_1 و u_2 وضع تخمينا حول اتجاه تغير (u_n)

2) أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $2 \leq u_n < 5$



ب- ادرس اتجاه تغير (u_n)، ثمّ استنتج أنها متقاربة

3) اثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n،

$$5 - u_{n+1} = \frac{2u_n}{2u_n + 1}(5 - u_n)$$

4) أ- بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $\frac{2u_n}{2u_n + 1} \leq \frac{10}{11}$

ب- استنتج أنّ $0 < 5 - u_n \leq 3\left(\frac{10}{11}\right)^n$، ثم احسب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

f الدالة العددية المعرفة على $]-\infty; 1[$ كما يلي: $f(x) = \frac{e^x - x^2}{x-1}$ و (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1) احسب $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x)$

2) أ- بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $e^x - x > 0$

ب- بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty; 1[$ ، $f'(x) = \frac{(x-2)(e^x - x)}{(x-1)^2}$

ج- استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها

3) أ- احسب $\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) + x)$ ، ثمّ فسر النتيجة بيانيا

ب- ادرس الوضع النسبي بين (C) و المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y = -x - 1$

4) اكتب معادلة للمستقيم (T) مماس المنحنى (C) في النقطة ذات الفاصلة 0

5) أ- بيّن أنّ المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $-0.8 < \alpha < -0.7$

ب- أنشئ (T)، (Δ) و (C)

6) ناقش بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m، عدد وإشارة حلول المعادلة: $\frac{e^x - x^2 + x - 1}{x-1} = mx$

7) g الدالة المعرفة على $]-\infty; 1[$ بـ: $g(x) = \frac{|e^x - x^2|}{x-1}$ و (C_g) تمثيلها البياني في المعلم السابق

- اكتب $g(x)$ دون رمز القيمة المطلقة، ثم أنشئ (C_g)

انتهى الموضوع الأول

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية

امتحان: شهادة البكالوريا

دورة: جوان 2022

الشعبة: رياضيات

اختبار مادة: الرياضيات

يوم: 13 جوان 2022

الديوان الوطني للإمتحانات والمسابقات

اللقب: قويسم

الاسم: ابراهيم الخليل

تاريخ ومكان الميلاد: 07 ماي 1996 بالجلفة

رقم التسجيل ⟸ 395??718

إمضاء المترشح (ة):

اسم ولقب وتوقيع الحراس:

1 ..... 2 ..... 3 .....

لا بد من ملأ أعلى هذه الوثيقة - ويمنع التوقيع في آخر ورقة الاختبار

إختبـــــار في الرياضيـــــــــات .....

الموضوع الأول:

◆ التمرين الأول:

❶ أ- تعيين بواقي القسمة الاقليدية للعدد 2^n على 7:

لدينا: $2^0 \equiv 1[7]$ ، $2^1 \equiv 2[7]$ ، $2^2 \equiv 4[7]$ ، $2^3 \equiv 1[7]$

ومنه بواقي القسمة الاقليدية للعدد 2^n على 7 نلخصها في الجدول التالي:

$n =$	$3k$	$3k+1$	$3k+2$	$k \in \mathbb{Z}$
$2^n \equiv$	1	2	4	[7]

ب- تبيين أنّ $6^{2n} \equiv 1[7]$،

لدينا: $6^{2n} \equiv 36^n[7] \equiv 1^n[7] \equiv 1[7]$

أو: $6^{2n} \equiv (-1)^{2n}[7] \equiv 1[7]$ لأن $2n$ عدد زوجي

- **استنتاج بواقي القسمة الاقليدية للعدد 6^n على 7:**

لدينا: $6^{2n} \equiv 1[7]$

ولدينا: $6^{2n+1} \equiv 6^{2n} \times 6[7] \equiv 1 \times 6[7] \equiv 6[7]$

ومنه بواقي القسمة الاقليدية للعدد 6^n على 7 نلخصها في الجدول التالي:

$n =$	$2k$	$2k+1$	$k \in \mathbb{Z}$
$6^n \equiv$	1	6	[7]

❷ تبيين أنّ العدد $2021^{2022} + 1962^{1443})^{1954} - 2$ يقبل القسمة على 7:

لدينا: $2021 \equiv 5[7] \equiv -2[7]$

ولدينا: $2022 = 3(674)$

تملأ هذه الخانة إجباريا من طرف المترشح في حالة تقديمه ورقة الإجابة بيضاء

أنا الموقع أسفله السيد (ة): .....

المترشيح (ة) في شعبة: .....

أشهد أنني قدمت يوم: ..... ورقة الإجابة بيضاء

وذلك في مادة: .....

إمضاء المترشح (ة):

مصادقة رئيس المركز
الإسم واللقب والختم والتوقيع

.....

إذن: $2021^{2022} \equiv (-2)^{3(674)}[7] \equiv 1[7]$

ولدينا: $1962 \equiv 2[7]$

ولدينا: $1443 = 3(481)$

إذن: $1962^{1443} \equiv 2^{3(481)}[7] \equiv 1[7]$

ولدينا: $1954 = 3(651) + 1$

ومنه:

$$\begin{aligned}(2021^{2022} + 1962^{1443})^{1954} - 2 &\equiv \left((-2)^{3(674)} + 2^{3(481)}\right)^{3(651)+1} - 2[7] \\ &\equiv (2)^{3(651)+1} - 2[7] \\ &\equiv 2 - 2[7] \\ &\equiv 0[7]\end{aligned}$$

❸ أ- استنتاج بواقي القسمة الاقليدية للعدد a_n على 7:

لدينا: $a_n = 2^n + 6^n$ ومنه:

$n =$	$6k$	$6k+1$	$6k+2$	$6k+3$	$6k+4$	$6k+5$	$k \in \mathbb{Z}$
$2^n + 6^n \equiv$	2	1	5	0	3	3	[7]

ب- تبيين أنّ $S_{n+6} \equiv S_n[7]$:

لدينا:

$$\begin{aligned}S_n &= a_0 + a_1 + \cdots + a_n \\ &= 2^0 + 6^0 + 2^1 + 6^1 + \cdots + 2^n + 6^n \\ &= (2^0 + 2^1 + \cdots + 2^n) + (6^0 + 6^1 + \cdots + 6^n) \\ &= \frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} + \frac{6^{n+1} - 1}{6 - 1} \\ &= 2^{n+1} - 1 + \frac{6^{n+1} - 1}{5}\end{aligned}$$

ومنه:

$$S_{n+6} = 2^{n+6+1} - 1 + \frac{6^{n+6+1} - 1}{5}$$
$$= 2^{n+1} \times 2^6 - 1 + \frac{6^{n+1} \times 6^6 - 1}{5}$$

ومنه:

$$S_{n+6} \equiv 2^{n+1} \times 2^6 - 1 + \frac{6^{n+1} \times 6^6 - 1}{5}[7]$$
$$\equiv 2^{n+1} \times (1) - 1 + \frac{6^{n+1} \times (1) - 1}{5}[7]$$
$$\equiv 2^{n+1} - 1 + \frac{6^{n+1} - 1}{5}[7]$$
$$\equiv S_n[7]$$

ج- اثبات أن $S_n \equiv 2^{n+1} + 3 \times 6^{n+1} + 3[7]$:

لدينا:

$$S_n \equiv 2^{n+1} - 1 + \frac{6^{n+1} - 1}{5}[7]$$

ومنه: $5S_n \equiv 5 \times 2^{n+1} - 5 + 6^{n+1} - 1[7]$

ومنه: $5S_n \equiv 5 \times 2^{n+1} + 6^{n+1} + 1[7]$

ومنه: $5S_n \equiv 5 \times 2^{n+1} + 15 \times 6^{n+1} + 15[7]$ لأنّ $15 \equiv 1[7]$

ومنه: $S_n \equiv 2^{n+1} + 3 \times 6^{n+1} + 3[7]$

- **استنتاج قيم n بحيث $S_n \equiv 0[7]$:**

لدينا: $S_n \equiv 0[7]$

ومنه: $S_n \equiv 2^{n+1} + 3 \times 6^{n+1} + 3[7]$

ولدينا:

$n =$	$6k$	$6k+1$	$6k+2$	$6k+3$	$6k+4$	$6k+5$	$k \in \mathbb{Z}$
$2^{n+1} + 3 \times 6^{n+1} + 3 \equiv$	2	3	1	1	4	0	[7]

ومنه قيم n بحيث $S_n \equiv 0[7]$ هي $n = 6k + 5$ مع $k \in \mathbb{Z}$

◆ التمرين الثاني:

❶ صحيح

- **التبرير:**

$$v_{n+1} = u_{n+1} + \beta$$
$$= \frac{1}{5}u_n + \frac{1}{5}\alpha + \beta$$
$$= \frac{1}{5}(u_n + \alpha + 5\beta)$$
$$= \frac{1}{5}(u_n + \beta + \alpha + 4\beta)$$
$$= \frac{1}{5}(v_n + \alpha + 4\beta)$$

الخليل للرياضيات

تكون (v_n) هندسية لما $\alpha + 4\beta = 0$ أي: $\alpha = -4\beta$

❷ صحيح

- التبرير:

$$u_{n+1} - u_n = \ln\sqrt{e^{(n+1)\ln 2}} - \ln\sqrt{e^{n\ln 2}}$$
$$= \ln\sqrt{\frac{e^{(n+1)\ln 2}}{e^{n\ln 2}}}$$
$$= \ln\sqrt{\frac{e^{\ln 2} \times e^{n\ln 2}}{e^{n\ln 2}}}$$
$$= \ln\sqrt{2}$$

إذن: (u_n) هي متتالية حسابية أساسها $\ln\sqrt{2}$

❸ خطأ

- التبرير:

نستعمل مثال مضاد:

لما $x = 10$ لدينا: $10 \equiv 3[7]$ و $10 \equiv 1[3]$ لكن $10 \not\equiv 3[21]$

❹ صحيح

- التبرير:

$$f(-x) = \ln\left(\sqrt{(-x)^2 + 1} - (-x)\right)$$
$$= \ln\left(\sqrt{x^2 + 1} + x\right)$$
$$= \ln\left(\frac{\left(\sqrt{x^2 + 1} + x\right)\left(\sqrt{x^2 + 1} - x\right)}{\sqrt{x^2 + 1} - x}\right)$$
$$= \ln\left(\frac{x^2 + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 + 1} - x}\right)$$
$$= \ln\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} - x}\right)$$
$$= -\ln\left(\sqrt{x^2 + 1} - x\right)$$
$$= -f(x)$$

إذن f دالة فردية.

◆ التمرين الثالث:

❶ أ-دراسة وضعية (C) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y = x$:

$$f(x) - x = \frac{2x^2 + 5}{2x + 1} - x$$
$$= \frac{2x^2 + 5 - 2x^2 - x}{2x + 1}$$
$$= \frac{5 - x}{2x + 1}$$

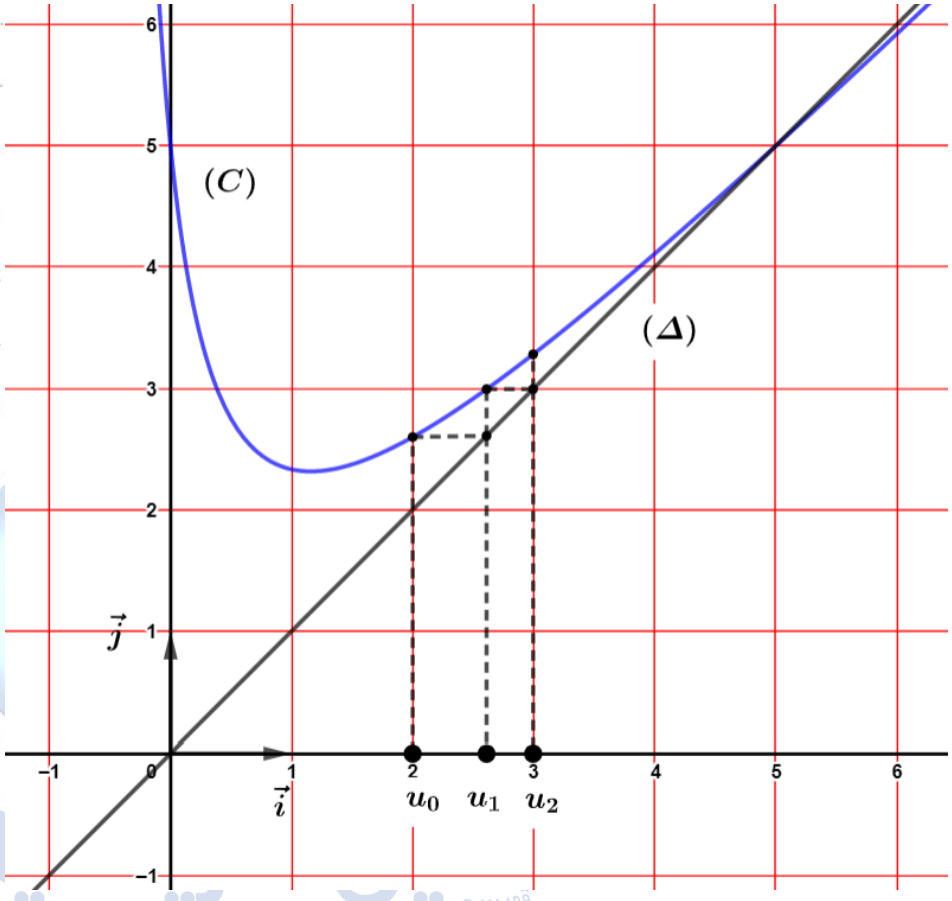
لدينا: $2x+1>0$ لما $x\in\mathbb{R}_+$

ومنه: إشارة الفرق من إشارة $x-5$

لدينا: $5-x=0$ ومنه: $x=5$

x	0	5	$+\infty$
$f(x)-x$	$+$	0	$-$

ب- تمثيل على حامل محور الفواصل الحدود u_0، u_1 و u_2 :



- **وضع تخمينا حول اتجاه تغير (u_n):**

نلاحظ أنّ $u_1<u_2<u_3$ إذن نخمن أن (u_n) متزايدة وتتقارب نحو العدد 5

❷ **أ- برهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $2\le u_n<5$:**

نسمي الخاصية: $P(n)$ ... $2\le u_n<5$

- لدينا: $2\le u_0<5$ ومنه: $2\le 2<5$ إذن $P(0)$ صحيحة
- نفرض صحة $P(n)$ ونثبت صحة $P(n+1)$
- لدينا: $2\le u_n<5$

وبما أن f دالة متزايدة (نلاحظ أن f دالة متزايدة على $[2;+\infty[$) فإن:

$$2\le u_n<5\Rightarrow f(2)\le f(u_n)<f(5)$$
$$\Rightarrow \frac{13}{5}\le u_{n+1}<5$$
$$\Rightarrow 2\le u_{n+1}<5$$

إذن $P(n+1)$ صحيحة، وعليه حسب البرهان بالتراجع فإنه من أجل كل عدد طبيعي n، $2\le u_n<5$

ب- دراسة اتجاه تغير (u_n):

لدينا: $f(x)-x>0$ لما $x\in[2;5[$ (الوضع النسبي)

معناه أنّ $u_{n+1}-u_n>0$ لما $2\le u_n<5$

إذن المتتالية (u_n) متزايدة على $\mathbb{N}$

- استنتاج أنها متقاربة:

بما أنّ (u_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى بـ 5 فهي متقاربة

❸ اثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $5-u_{n+1}=\frac{2u_n}{2u_n+1}(5-u_n)$:

$$\begin{aligned}5-u_{n+1}&=5-\frac{2(u_n)^2+5}{2u_n+1}\\&=\frac{10u_n+5-2(u_n)^2-5}{2u_n+1}\\&=\frac{10u_n-2(u_n)^2}{2u_n+1}\\&=\boxed{\frac{2u_n}{2u_n+1}(5-u_n)}\end{aligned}$$

❹ أ- تبيين أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $\frac{2u_n}{2u_n+1}\le\frac{10}{11}$:

لدينا:

$$\frac{2u_n}{2u_n+1}=\frac{2u_n+1-1}{2u_n+1}=\frac{2u_n+1}{2u_n+1}-\frac{1}{2u_n+1}=1-\frac{1}{2u_n+1}$$

ولدينا:

$$\begin{aligned}u_n<5&\Rightarrow 2u_n+1<11\\&\Rightarrow\frac{1}{11}<\frac{1}{2u_n+1}\\&\Rightarrow\frac{-1}{2u_n+1}<-\frac{1}{11}\\&\Rightarrow 1+\frac{-1}{2u_n+1}<\frac{10}{11}\\&\Rightarrow\boxed{\frac{2u_n}{2u_n+1}<\frac{10}{11}}\end{aligned}$$

ب- استنتاج أنّ $0<5-u_n\le 3\left(\frac{10}{11}\right)^n$:

لدينا: $5-u_{n+1}=\frac{2u_n}{2u_n+1}(5-u_n)$

ولدينا: $\frac{2u_n}{2u_n+1}\le\frac{10}{11}$

ومنه: $5-u_{n+1}\le\frac{10}{11}(5-u_n)$

ومنه:

الخليل للرياضيات

$$\begin{cases} n=0: 5-u_1 \le \frac{10}{11}(5-u_0) \\ n=1: 5-u_2 \le \frac{10}{11}(5-u_1) \\ \vdots \\ n=k-1: 5-u_k \le \frac{10}{11}(5-u_{k-1}) \end{cases}$$

بالضرب طرفا لطرف نجد:

$$(5-u_1)\times(5-u_2)\times\ldots\times(5-u_k) \le \frac{10}{11}(5-u_0)\times\frac{10}{11}(5-u_1)\times\ldots\times\frac{10}{11}(5-u_{k-1})$$

ومنه:

$$5-u_k \le \left(\frac{10}{11}\right)^k (5-u_0)$$

ومنه:

$$5-u_k \le 3\left(\frac{10}{11}\right)^k$$

أي:

$$5-u_n \le 3\left(\frac{10}{11}\right)^n$$

ولدينا: من جهة أخرى: $u_n < 5$ **ومنه:** $0 < 5-u_n$

إذن:

$$\boxed{0 < 5-u_n \le 3\left(\frac{10}{11}\right)^n}$$

- **حساب** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ **:**

$$0 < 5-u_n \le 3\left(\frac{10}{11}\right)^n \Rightarrow 0 < \lim_{n\to+\infty}(5-u_n) \le \lim_{n\to+\infty} 3\left(\frac{10}{11}\right)^n$$
$$\Rightarrow 0 < \lim_{n\to+\infty}(5-u_n) \le 0$$
$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty}(5-u_n) = 0$$
$$\Rightarrow \boxed{\lim_{n\to+\infty}(u_n) = 5}$$

◆ التمرين الرابع:

❶ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to1^<} f(x)$**:**

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{e^x}{x-1} - \frac{x^2}{x-1}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{e^x}{x-1} - x\right) = \boxed{+\infty}$
- $\lim\limits_{x\to1^<} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{e-1}{x-1}\right) = \boxed{-\infty}$

❷ أ- تبيين أنه من أجل كل عدد حقيقي x **،** $e^x - x > 0$**:**

لدينا: $e^x > x$ **مهما كان** $x \in \mathbb{R}$

إذن: $\boxed{e^x - x > 0}$ **مهما كان** $x \in \mathbb{R}$

أو نقوم بدراسة تغيرات الدالة $x \mapsto e^x - x$ نجدها متناقصة لما $x \leq 0$ ومتزايدة لما $x \geq 0$ وتبلغ قيمة حدية صغرى موجبة تماما إذن $e^x - x > 0$

ب- تبيين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty;1[$ ، $f'(x) = \frac{(x-2)(e^x-x)}{(x-1)^2}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(e^x - 2x)(x-1) - e^x + x^2}{(x-1)^2} \\ &= \frac{xe^x - e^x - 2x^2 + 2x - e^x + x^2}{(x-1)^2} \\ &= \frac{xe^x - 2e^x - x^2 + 2x}{(x-1)^2} \\ &= \frac{e^x(x-2) - x(x-2)}{(x-1)^2} \\ &= \boxed{\frac{(x-2)(e^x - x)}{(x-1)^2}} \end{aligned}$$

ج- استنتاج اتجاه تغير الدالة f وتشكيل جدول تغيراتها:

$$f'(x) = \frac{(x-2)(e^x - x)}{(x-1)^2}$$

لدينا: $e^x - x > 0$ و $(x-1)^2 > 0$ **مهما كان** $x \in \mathbb{R}$

ولدينا: $x - 2 < 0$ **لما** $x \in]-\infty;2[$

إذن: $f'(x) < 0$ **لما** $x \in]-\infty;2[$

x	$-\infty$	1
$f'(x)$	$-$	
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$-\infty$

❸ أ- حساب $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)+x)$ ، وتفسير النتيجة بيانيا:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to-\infty}(f(x)+x) &= \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{e^x - x^2}{x-1} + x\right) \\ &= \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{e^x - x^2 - x^2 - x}{x-1}\right) \\ &= \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{e^x}{x-1} - \frac{x}{x-1}\right) \\ &= \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{e^x}{x-1} - 1\right) \\ &= \boxed{-1} \end{aligned}$$

- **تفسير النتيجة بيانيا:**

لدينا:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to-\infty}(f(x)+x) = -1 &\Rightarrow \lim_{x\to-\infty}(f(x)+x+1) = 0 \\ &\Rightarrow \lim_{x\to-\infty}\big(f(x) - (-x-1)\big) = 0 \end{aligned}$$

الخليل للرياضيات

إذن: (C) يقبل مستقيما مقاربا مائلا معادلته $y=-x-1$ بجوار $-\infty$

ب- دراسة الوضع النسبي بين (C) و المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y=-x-1$:

لدينا:

$$\begin{aligned} f(x)-(-x-1) &= f(x)+x+1 \\ &= \frac{e^x-x^2}{x-1}+x+1 \\ &= \frac{e^x-x^2+x^2-1}{x-1} \\ &= \frac{e^x-1}{x-1} \end{aligned}$$

x	$-\infty$	0	1
e^x-1	$-$	0	$+$
$x-1$	$-$	$\|$	$-$
$f(x)-(-x-1)$	$+$	0	$-$

(C) فوق (Δ) لما $x\in\,]-\infty;0[$ وتحته لما $x\in\,]0;1[$ ويقطعه لما $x=0$

❹ كتابة معادلة للمستقيم (T) مماس المنحنى (C) في النقطة ذات الفاصلة 0:

$$(T): y=f'(0)x+f(0) \Longrightarrow \boxed{(T): y=-2x-1}$$

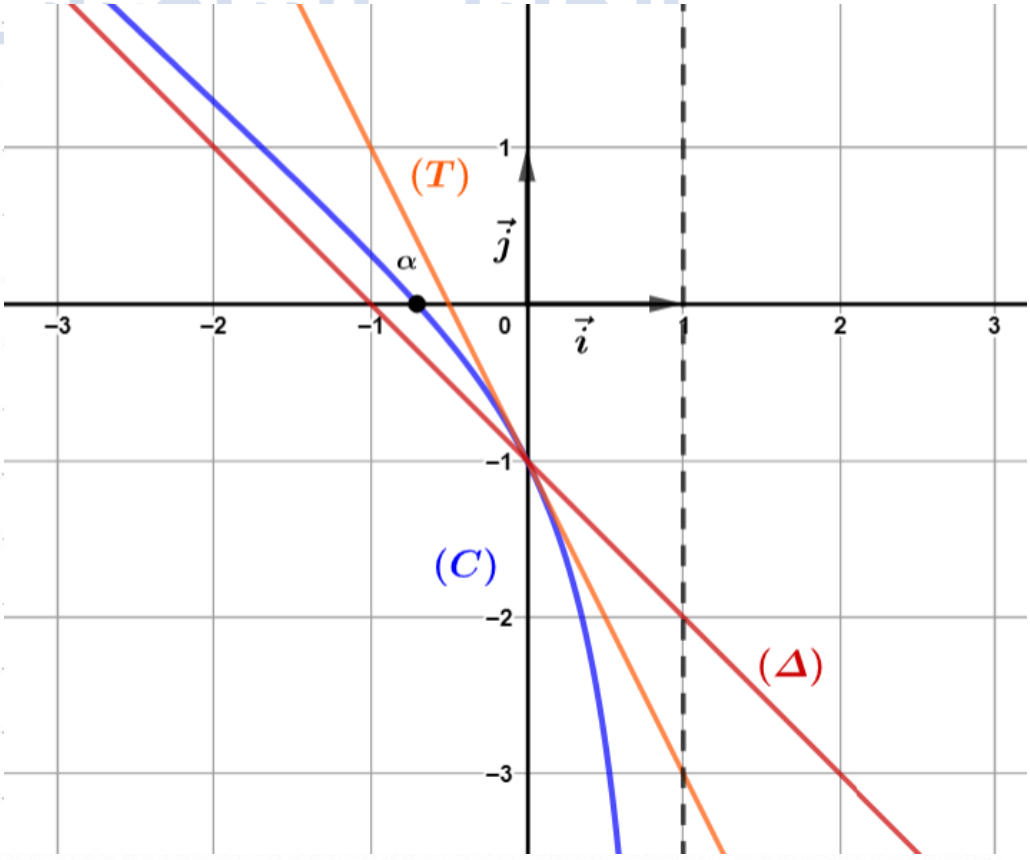
❺ أ- تبيين أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $-0.8<\alpha<-0.7$:

لدينا: الدالة f مستمرة ورتيبة تماما على $]-\infty;1[$

ولدينا: $f(-0.8)\times f(-0.7)<0$ لأنّ: $f(-0.7)\approx -0.01$ و $f(-0.8)\approx 0.11$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $-0.8<\alpha<-0.7$

ب- إنشاء (T)، (Δ) و (C):



❻ المناقشة البيانية لعدد وإشارة حلول المعادلة: $\frac{e^x-x^2+x-1}{x-1} = mx$:

لدينا:

$$\frac{e^x-x^2+x-1}{x-1} = mx \Rightarrow \frac{e^x-x^2}{x-1} + \frac{x-1}{x-1} = mx$$
$$\Rightarrow \frac{e^x-x^2}{x-1} + 1 = mx$$
$$\Rightarrow f(x) = mx - 1$$

حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع (C) مع المستقيمات ذات المعادلات $y = mx - 1$

لدينا: لما $m = 0$ نجد $y = -1 \dots (*)$

لما $m = 1$ نجد $y = x - 1 \dots (**)$

نعوض $(*)$ في $(**)$ نجد: $-1 = x - 1$ ومنه: $x = 0$

إذن جميع المستقيمات ذات المعادلة $y = mx - 1$ تمر من النقطة الثابتة ذات الإحداثيات $A(0;-1)$

ومنه المناقشة دورانية حول النقطة A:

لما $m \in]-\infty;-2[$ المعادلة تقبل حلا معدوما وحلا موجبا تماما

لما $m = -2$ المعادلة تقبل حلا وحيدا معدوما

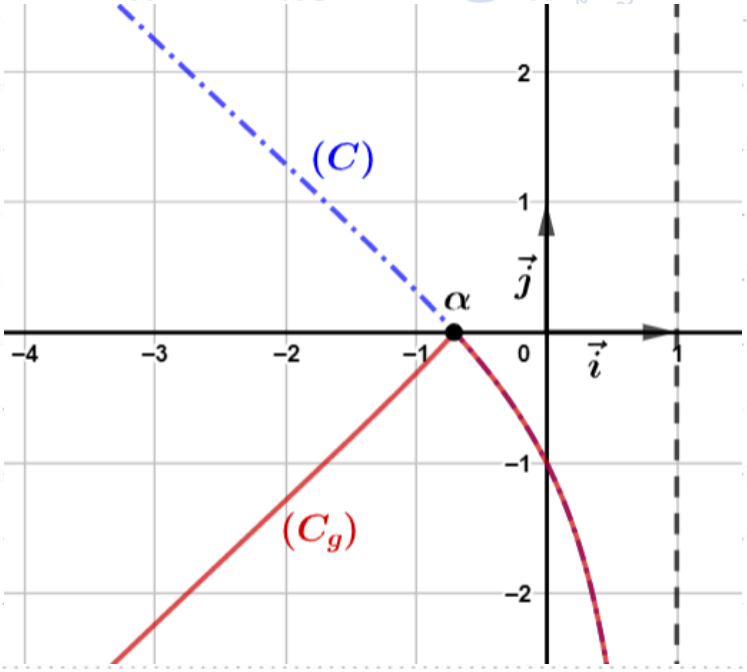
لما $m \in]-2;-1[$ المعادلة تقبل حلا معدوما وحلا سالبا تماما

لما $m > -1$ المعادلة تقبل حلا وحيدا معدوما

❼ كتابة $g(x)$ دون رمز القيمة المطلقة، وإنشاء (C_g):

$$g(x) = \frac{|e^x-x^2|}{x-1} = \begin{cases} \frac{e^x-x^2}{x-1} & ; \ x \in [\alpha;1[\\ -\frac{e^x-x^2}{x-1} & ; \ x \in]-\infty;\alpha] \end{cases} = \begin{cases} f(x) & ; \ x \in [\alpha;1[\\ -f(x) & ; \ x \in]-\infty;\alpha] \end{cases}$$

(C_g) ينطبق على (C) لما $x \in [\alpha;1[$ ، و(C_g) يناظر (C) بالنسبة لمحور التراتيب لما $x \in]-\infty;\alpha]$



❤ لا تنسونا من صالح دعائكم ❤

الأستاذ: قويسم براهيم الخليل

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

n عدد طبيعي، نضع $A_n = n^3 + 5n^2 + 7n + 9$ و $B_n = n + 2$

1) أ- بيّن أن $pgcd(A_n; B_n) = pgcd(B_n; 7)$

ب- استنتج القيم الممكنة لـ $pgcd(A_n; B_n)$

جـ- عيّن قيم العدد الطبيعي n حتى يكون A_n و B_n أوليان فيما بينهما

2) نعتبر المعادلة $(E) \dots 29 = A_2x - B_2y$ ذات المجهولين الصحيحين x و y

أ- بيّن أنه إذا كانت الثنائية $(x; y)$ حلا للمعادلة (E) فإنّ $x \equiv 3[4]$

ب- عيّن حلول المعادلة (E)

3) أ- استنتج حلول المعادلة $(E') \dots 51x - 4y = 45$

ب- عيّن الثنائيات $(x; y)$ حلول المعادلة (E') حيث $|y - 12x| \leq 3$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

f الدالة العددية المعرفة والموجبة على $]-1; +\infty[$ كما يلي: $f(x)=\frac{ax}{x+b}+\ln(x+b)$

حيث a و b عددان حقيقيان مع b موجب تماما، تمثيلها البياني (C) في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ يقبل حامل محور الفواصل مماسا له في النقطة O

1) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من $]-1; +\infty[$ ، $f(x)=-1+\frac{1}{x+1}+\ln(x+1)$

2) g الدالة العددية المعرفة على $]-1; +\infty[$ كما يلي، $g(x) = (x + 1)\ln(x + 1)$

- احسب $g'(x)$، ثم استنتج دالة أصلية للدالة f على $]-1; +\infty[$

3) (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ: $u_n = \int_{n-1}^{n} f(x)dx$

أ- احسب u_{2022} ، ثمّ فسّر النتيجة بيانيا

ب- بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم، $u_n = -2 + (n + 2)\ln(n + 1) - (n + 1)\ln n$

جـ- احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

التمرين الثالث: (05 نقاط)

(u_n) و (v_n) المتتاليتان العدديتان المعرفتان على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0 = 0$ ، $u_{n+1}=-\frac{1}{3}u_n^{\,2}+\frac{2}{3}u_n+\frac{2}{3}$ و $v_n = u_n - 1$

1) بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_{n+1}=-\frac{1}{3}(v_n)^2$

2) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $-3 \leq v_n < 0$

3) ادرس اتجاه تغير المتتالية (v_n) ، ثمّ استنتج أنّ (v_n) متقاربة

4) (w_n) المتتالية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $w_n = \ln\left(-\frac{3}{v_n}\right)$

أ- بيّن أنّ (w_n) متتالية هندسية أساسها 2 يطلب تعيين حدها الأول w_0

ب- اكتب w_n بدلالة n، ثم استنتج v_n و u_n بدلالة n واحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

5) احسب بدلالة n الجداء P_n حيث: $P_n = \frac{1}{v_0}\times\frac{1}{v_1}\times\ldots\times\frac{1}{v_n}$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I) h الدالة العددية المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي: $h(x) = x + \ln x$

1) ادرس اتجاه تغير الدالة h

2) أ- بيّن أنّ المعادلة $h(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $0.5 < \alpha < 0.6$

ب- استنتج إشارة $h(x)$ على $]0;+\infty[$

II) f الدالة العددية المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي: $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x - x\ln x + (\ln x)^2$

(C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$

1) احسب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2) أ- بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x موجب تماما، $f'(x) = \frac{(2-x)h(x)}{x}$

ب- استنتج اتجاه تغير الدالة f، ثمّ شكّل جدول تغيراتها

3) بيّن أنّ $f(\alpha) = \frac{3}{2}\alpha(\alpha+2)$ ، ثمّ عيّن حصرا لـ $f(\alpha)$

4) g الدالة العددية المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي: $g(x) = x^2 + x - 2 + 2\ln x$

أ- ادرس اتجاه اتجاه تغير الدالة g واحسب $g(1)$

ب- بيّن أن (C) يقبل نقطة انعطاف A يطلب تعيين إحداثييها

جـ- اكتب معادلة للمستقيم (T) مماس (C) في النقطة A

5) أنشئ (T) و (C) في المجال $]0;5]$

6) k الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $k(x) = f(e^{-x})$

أ- دون حساب عبارة $k(x)$، ادرس اتجاه تغير الدالة k، ثمّ احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} k(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} k(x)$

ب- شكّل جدول تغيرات الدالة k

انتهى الموضوع الثاني

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية

امتحان: شهادة البكالوريا .....

دورة: جوان 2022 .....

الشعبة: رياضيات .....

اختبار مادة الرياضيات .....

يوم: 13 جوان 2022 .....

الديوان الوطني للإمتحانات والمسابقات

اللقب: قويسم .....

الاسم: ابراهيم الخليل .....

تاريخ ومكان الميلاد: 07 ماي 1996 بالجلفة .....

رقم التسجيل ⟸ 39???17

إمضاء المترشح(ة):

اسم ولقب وتوقيع الحراس:

1..... 2..... 3.....

لا بد من ملأ أعلى هذه الوثيقة - ويمنع التوقيع في آخر ورقة الاختبار

إختبـــــارم الرياضيـــــــــات .....

الموضوع الثاني:

◆ التمرين الأول:

❶ أ- تبيين أن $pgcd(A_n;B_n)=pgcd(B_n;7)$:

لدينا:

n^3+5n^2+7n+9	$n+2$
n^3+2n^2	n^2+3n+1
$3n^2+7n+9$	
$-\ 3n^2+7n+9$	
$n+9$	
$-\ n+2$	
7	

ومنه: $A_n=n^3+5n^2+7n+9=(n+2)(n^2+3n+1)$

نضع: $d=pgcd(A_n;B_n)$

لدينا: $d\mid A_n$ و $d\mid B_n$

ومنه: $d\mid A_n-(n^2+3n+1)B_n$

ومنه: $d\mid 7$

إذن: $\boxed{pgcd(A_n;B_n)=pgcd(B_n;7)}$

ب- استنتاج القيم الممكنة لـ $pgcd(A_n;B_n)$:

الخليل للرياضيات

تملأ هذه الخانة إجباريا من طرف المترشح في حالة تقديمه ورقة الإجابة بيضاء

أنا الموقع أسفله السيد (ة): .....

المترشح (ة) في شعبة: .....

أشهد أنني قدمت يوم: ..... ورقة الإجابة بيضاء

وذلك في مادة: .....

إمضاء المترشح (ة):

مصادقة رئيس المركز
الإسم واللقب والختم والتوقيع

.....

لدينا مما سبق: $d \mid 7$

إذن d من قواسم العدد 7

أي: $\boxed{d \in \{1;7\}}$

جـ- تعيين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون A_n و B_n أوليان فيما بينهما:

A_n و B_n أوليان فيما بينهما معناه: $pgcd(A_n;B_n)=1$

إذا كان: $pgcd(A_n;B_n)=7$

فإنّ $B_n \equiv 0[7]$

أي: $n+2 \equiv 0[7]$

أي: $n \equiv -2[7]$

أي: $n \equiv 5[7]$

إذن: $n=7k+5$ مع $k \in \mathbb{Z}$

ومنه: إذا كان: $pgcd(A_n;B_n)=1$

فإنّ: $n \in \{7k;7k+1;7k+2;7k+3;7k+4;7k+6\}$ مع $k \in \mathbb{Z}$

❷ **أ- تبيين أنه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حلا للمعادلة (E) فإنّ $x \equiv 3[4]$:**

لدينا: $A_2x-B_2y=29 \dots (E)$

تكافئ: $51x-4y=29 \dots (E)$ (51 و 4 أوليان فيمابينهما)

لدينا: $51x-4y=29$

ومنه: $51x=4y+29$

أي: $51x \equiv 29[4]$

أي: $7x \equiv 5[4]$

أي: $21x \equiv 15[4]$

أي: $21x + x \equiv 15[4]$

أي: $x \equiv 15[4]$

ومنه: $\boxed{x \equiv 3[4]}$

ب- تعيين حلول المعادلة (E):

لدينا: $x \equiv 3[4]$

ومنه: $x = 4k + 3$ مع $k \in \mathbb{Z}$

بتعويض قيمة x في (E)

نجد: $51(4k + 3) - 4y = 29$

ومنه: $y = 51k + 31$

إذن حلول المعادلة (E) هي: $\boxed{S = \{(4k + 3; 51k + 31)\}}$ مع $k \in \mathbb{Z}$

❸ **أ- استنتاج حلول المعادلة (E') ... $51x - 4y = 45$:**

نلاحظ أنّ الثنائية $(3; 27)$ حل خاص لـ (E)

ومنه: حلول المعادلة (E') هي: $\boxed{S' = \{(4k + 3; 51k + 27)\}}$ مع $k \in \mathbb{Z}$

ب- تعيين الثنائيات $(x; y)$ حلول المعادلة (E') حيث $|y - 12x| \leq 3$:

لدينا: $|y - 12x| \leq 3$

تكافئ: $|51k + 27 - 12(4k + 3)| \leq 3$

تكافئ: $|3k - 9| \leq 3$

تكافئ: $|k - 3| \leq 1$

تكافئ: $-1 \leq k - 3 \leq 1$

تكافئ: $2 \leq k \leq 4$

إذن: $k \in \{2; 3; 4\}$

إذن الثنائيات $(x; y)$ حلول المعادلة (E') حيث $|y - 12x| \leq 3$ هي:

$\boxed{(x; y) = \{(11; 129); (15; 180); (19; 231)\}}$

الخليل للرياضيات
قويسم

◆ التمرين الثاني:

❶ **تبيين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]-1; +\infty[$ ، $f(x) = -1 + \frac{1}{x+1} + ln(x + 1)$:**

(C) يقبل حامل محور الفواصل مماسا له في النقطة O معناه: $\begin{cases} f(0) = 0 \\ f'(0) = 0 \end{cases}$

لدينا: $f(0) = 0$ ومنه: $\ln b = 0$ ومنه: $\boxed{b = 1}$

إذن:

$$f(x) = \frac{ax}{x + 1} + \ln(x + 1)$$

ولدينا:

$$f'(x)=\frac{a(x+1)-ax}{(x+1)^2}+\frac{1}{x+1}=\frac{a+x+1}{(x+1)^2}$$

لدينا: $f'(0)=0$ **ومنه:** $a+1=0$ **ومنه:** $\boxed{a=-1}$

إذن:

$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{-x}{x+1}+\ln(x+1)\\&=\frac{-x+1-1}{x+1}+\ln(x+1)\\&=\frac{-x-1}{x+1}+\frac{1}{x+1}+\ln(x+1)\\&=\boxed{-1+\frac{1}{x+1}+\ln(x+1)}\end{aligned}$$

❷ - حساب $g'(x)$:

$$\boxed{g'(x)=\ln(x+1)+1}$$

- استنتاج دالة أصلية للدالة f على $]-1;+\infty[$:

لدينا:

$$\begin{aligned}g'(x)=\ln(x+1)+1 &\Rightarrow \ln(x+1)=g'(x)-1\\&\Rightarrow \int \ln(x+1)\,dx=\int (g'(x)-1)dx\\&\Rightarrow \int \ln(x+1)\,dx=g(x)-x+c\end{aligned}$$

ومنه:

$$\begin{aligned}F(x)&=\int\left(-1+\frac{1}{x+1}+\ln(x+1)\right)dx\\&=-x+\ln(x+1)+g(x)-x+c\\&=-2x+\ln(x+1)+(x+1)\ln(x+1)+c\\&=\boxed{-2x+(x+2)\ln(x+1)+c}\end{aligned}$$

❸ أ- حساب u_{2022} :

$$\begin{aligned}u_{2022}&=\int_{2021}^{2022}f(x)dx\\&=[F(x)]_{2021}^{2022}\\&=-2(2022)+2024\ln(2023)+2(2021)-2023\ln(2022)\\&=-2+\ln(2023^{2024})-\ln(2022^{2024})\\&=\boxed{\ln\left(\frac{2023^{2024}}{2022^{2023}}\right)-2}\end{aligned}$$

- تفسير النتيجة بيانيا:

u_{2022} هي مساحة الحيز المستوي المحدد بـ (C) والمستقيمات ذات المعادلات $\begin{cases}y=0\\x=2021\\x=2022\end{cases}$

ب- تبيين أن $u_n=-2+(n+2)\ln(n+1)-(n+1)\ln n$ ،

$$u_n = \int_{n-1}^{n} f(x)dx$$
$$= [F(x)]_{n-1}^{n}$$
$$= -2n + (n+2)\ln(n+1) + 2n - 2 - (n-1+2)\ln(n-1+1)$$
$$= \boxed{-2 + (n+2)\ln(n+1) - (n+1)\ln n}$$

جـ- حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$:

$$\lim_{n\to+\infty}(u_n) = \lim_{n\to+\infty}[-2 + (n+2)\ln(n+1) - (n+1)\ln n]$$
$$= \lim_{n\to+\infty}[-2 + n\ln(n+1) + 2\ln(n+1) - n\ln n - \ln n]$$
$$= \lim_{n\to+\infty}\left[-2 + n\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) + \ln\left(\frac{(n+1)^2}{n}\right)\right]$$
$$= \lim_{n\to+\infty}\left[-2 + n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \ln\left(\frac{n^2+2n+1}{n}\right)\right]$$
$$= \lim_{n\to+\infty}\left[-2 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} + \ln\left(n+2+\frac{1}{n}\right)\right]$$

بوضع $t = \frac{1}{n}$ نجد:

$$\lim_{n\to+\infty}(u_n) = \lim_{t\overset{>}{\to}0}\left[-2 + \frac{\ln(1+t)}{t} + \ln\left(\frac{1}{t}+2+t\right)\right] = \boxed{+\infty}$$

لأنّ:

$$\begin{cases} \lim\limits_{t\overset{>}{\to}0}\left[\dfrac{\ln(1+t)}{t}\right] = 1 \\ \lim\limits_{t\overset{>}{\to}0}\left[\ln\left(\frac{1}{t}+2+t\right)\right] = +\infty \end{cases}$$

الخليل للرياضيات

◆ التمرين الثالث:

❶ تبيين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_{n+1} = -\frac{1}{3}(v_n)^2$:

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 1$$
$$= -\frac{1}{3}{u_n}^2 + \frac{2}{3}u_n + \frac{2}{3} - 1$$
$$= -\frac{1}{3}{u_n}^2 + \frac{2}{3}u_n - \frac{1}{3}$$
$$= -\frac{1}{3}({u_n}^2 - 2u_n + 1)$$
$$= -\frac{1}{3}(u_n - 1)^2$$
$$= \boxed{-\frac{1}{3}(v_n)^2}$$

❷ برهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $-3 \le v_n < 0$:

نسمي الخاصية: $P(n) \dots -3 \le v_n < 0$

- **نتحقق من صحة** $P(0)$: **لدينا:** $-3 \le v_0 < 0$ **ومنه:** $-3 \le -1 < 0$

إذن: $P(0)$ صحيحة

• نفرض صحة $P(n)$ نثبت صحة $P(n+1)$

• لدينا:

$$-3 \leq v_n < 0 \Rightarrow 9 \geq (v_n)^2 > 0$$
$$\Rightarrow -3 \leq -\frac{1}{3}(v_n)^2 < 0$$
$$\Rightarrow -3 \leq v_{n+1} < 0$$

إذن حسب البرهان بالتراجع $P(n)$ صحيحة من أجل كل $n \in \mathbb{N}$

❸ دراسة اتجاه تغير المتتالية (v_n) :

$$v_{n+1} - v_n = -\frac{1}{3}(v_n)^2 - v_n$$
$$= -v_n\left(\frac{1}{3}v_n + 1\right)$$

لدينا: $-3 \leq v_n < 0$ ومنه: $3 \geq -v_n > 0$

لدينا: $-3 \leq v_n < 0$ ومنه: $0 \leq \frac{1}{3}v_n + 1 < 1$

إذن: $v_{n+1} - v_n > 0$ وعليه (v_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$

- استنتاج أنّ (v_n) متقاربة:

بما أنّ: (v_n) متزايدة تماما ومحدودة من الأعلى بـ 0 فهي متقاربة نحو 0

❹ أ- تبيين أنّ (w_n) هندسية أساسها 2 :

$$w_{n+1} = \ln\left(-\frac{3}{v_{n+1}}\right)$$
$$= \ln\left(-\frac{3}{-\frac{1}{3}(v_n)^2}\right)$$
$$= \ln\left(\frac{3^2}{(v_n)^2}\right)$$
$$= \ln\left(\frac{3}{v_n}\right)^2$$
$$= 2\ln\left(\frac{3}{v_n}\right)$$
$$= 2w_n$$

ولدينا:

$$w_0 = \ln\left(-\frac{3}{v_0}\right) = \ln 3$$

ب- كتابة w_n و v_n و u_n بدلالة n :

لدينا:

$$w_n = 2^n \ln(3) \Rightarrow \boxed{w_n = \ln(3)^{2^n}}$$

ولدينا:

$$w_n = \ln\left(-\frac{3}{v_n}\right) \Rightarrow -\frac{3}{v_n} = e^{w_n}$$

الخليل للرياضيات

$$\Rightarrow v_n = -\frac{3}{e^{w_n}}$$
$$\Rightarrow v_n = -\frac{3}{e^{\ln(3)^{2^n}}}$$
$$\Rightarrow v_n = -\frac{3}{(3)^{2^n}}$$
$$\Rightarrow \boxed{v_n = -\left(3^{1-2^n}\right)}$$

ولدينا:

$$v_n = u_n - 1 \Rightarrow u_n = v_n + 1$$
$$\Rightarrow \boxed{u_n = 1 - \left(3^{1-2^n}\right)}$$

- **حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$:**

$$\lim_{n\to+\infty}(u_n) = \lim_{n\to+\infty}\left(1 - \left(3^{1-2^n}\right)\right) = 1$$

لأن: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(3^{1-2^n}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3^{2^n-1}}\right) = 0$

❺ حساب بدلالة n الجداء P_n :

لدينا:

$$w_n = \ln\left(-\frac{3}{v_n}\right) \Rightarrow -\frac{3}{v_n} = e^{w_n} \Rightarrow \frac{1}{v_n} = -\frac{1}{3}e^{w_n}$$

ومنه:

$$P_n = \frac{1}{v_0} \times \frac{1}{v_1} \times \ldots \times \frac{1}{v_n}$$
$$= \left(-\frac{1}{3}\right)e^{w_0} \times \left(-\frac{1}{3}\right)e^{w_1} \times \ldots \times \left(-\frac{1}{3}\right)e^{w_n}$$
$$= \left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1} e^{w_0+w_1+\cdots+w_n}$$
$$= \left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1} e^{\ln 3\left(\frac{1-2^{n+1}}{1-2}\right)}$$
$$= \left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1} e^{\ln 3\left(2^{n+1}-1\right)}$$
$$= \left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1} e^{\ln 3^{\left(2^{n+1}-1\right)}}$$
$$= \boxed{\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1} \times 3^{\left(2^{n+1}-1\right)}}$$

◆ التمرين الرابع:

(I

❶ دراسة اتجاه اتجاه تغير الدالة h:

$$h'(x) = 1 + \frac{1}{x} = \frac{x+1}{x}$$

لدينا: $h'(x) > 0$ **على المجال** $]0;+\infty[$

الخليل للرياضيات
فويسم

إذن الدالة h متزايدة تماما

❷ أ- تبيين أنّ المعادلة $h(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $0.5<\alpha<0.6$:

لدينا الدالة h مستمرة ورتيبة على $]0;+\infty[$

ولدينا: $h(0.6)\times h(0.5)<0$

حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $h(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $0.5<\alpha<0.6$

ب- استنتاج إشارة $h(x)$ على $]0;+\infty[$:

x	0		α		$+\infty$
$h(x)$	‖	$-$	0	$+$	

(II

❶ حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)$:

- $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)=\boxed{+\infty}$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x^2\left(-\frac{1}{2}+\frac{3}{x}-\frac{\ln x}{x}+\left(\frac{\ln x}{x}\right)^2\right)\right]=\boxed{-\infty}$

❷ أ- تبيين أنه من أجل كل عدد حقيقي x موجب تماما، $f'(x)=\frac{(2-x)h(x)}{x}$:

$$\begin{aligned}f'(x)&=-\frac{1}{2}(2x)+3-\ln x-1+\frac{2\ln x}{x}\\&=\frac{-x^2+3x-x\ln x-x+2\ln x}{x}\\&=\frac{(2-x)\ln x+x(2-x)}{x}\\&=\frac{(2-x)(\ln x+x)}{x}\\&=\frac{(2-x)h(x)}{x}\end{aligned}$$

ب- استنتاج اتجاه تغير الدالة f، وتشكيل جدول تغيراتها:

$$f'(x)=\frac{(2-x)h(x)}{x}$$

لدينا: $x>0$ على المجال $]0;+\infty[$

ومنه:

x	0		α		2		$+\infty$
$h(x)$	‖ $-$		0	$+$		$+$	
$2-x$	$+$			$+$	0		$-$
$f'(x)$	‖ $-$		0	$+$	0		$-$
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$f(2)$	↘	$-\infty$

❸ تبيين أنّ $f(\alpha)=\frac{3}{2}\alpha(\alpha+2)$

لدينا: $h(\alpha)=0$

ومنه: $\alpha + \ln\alpha = 0$

إذن: $\ln\alpha = -\alpha$

ولدينا:

$$f(\alpha) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x - x\ln x + (\ln x)^2$$
$$= \frac{3}{2}\alpha^2 + 3\alpha$$
$$= \boxed{\frac{3}{2}\alpha(\alpha+2)}$$

- تعيين حصرا لـ $f(\alpha)$:

لدينا: $0.5 < \alpha < 0.6$

ومنه: $2.5 < \alpha + 2 < 2.6$

ومنه: $1.25 < \alpha(\alpha+2) < 1.56$

ومنه: $1.875 < \frac{3}{2}\alpha(\alpha+2) < 2.34$

إذن: $\boxed{1.875 < f(\alpha) < 2.34}$

❹ أ- دراسة اتجاه اتجاه تغير الدالة g :

$$g'(x) = 2x + 1 + \frac{2}{x}$$

لدينا: $g'(x) > 0$ إذن الدالة g متزايدة تماما على $]0;+\infty[$

- حساب $g(1)$:

$$g(1) = 0$$

ب- تبيين أن (C) يقبل نقطة انعطاف A يطلب تعيين إحداثييها:

لدينا:

$$f''(x) = \frac{\left[-(\ln x + x) + \left(\frac{1}{x}+1\right)(2-x)\right]x - [(2-x)(\ln x + x)]}{x^2}$$
$$= \frac{-x\ln x - 2x^2 + 2 + x - 2\ln x - 2x + x\ln x + x^2}{x^2}$$
$$= \frac{-x^2 + 2 + x - 2\ln x}{x^2}$$
$$= \frac{-(x^2 - 2 - x + 2\ln x)}{x^2}$$
$$= \frac{-g(x)}{x^2}$$

لدينا: $x^2 > 0$ ومنه إشارة $f''(x)$ عكس إشارة $g(x)$

x	0		1		$+\infty$
$g(x)$	$-$	$\|$	0	$+$	
$f''(x)$	$+$	$\|$	0	$-$	

لدينا المشتقة الثانية تنعدم وتغير إشارتها عند 1

الخليل للرياضيات

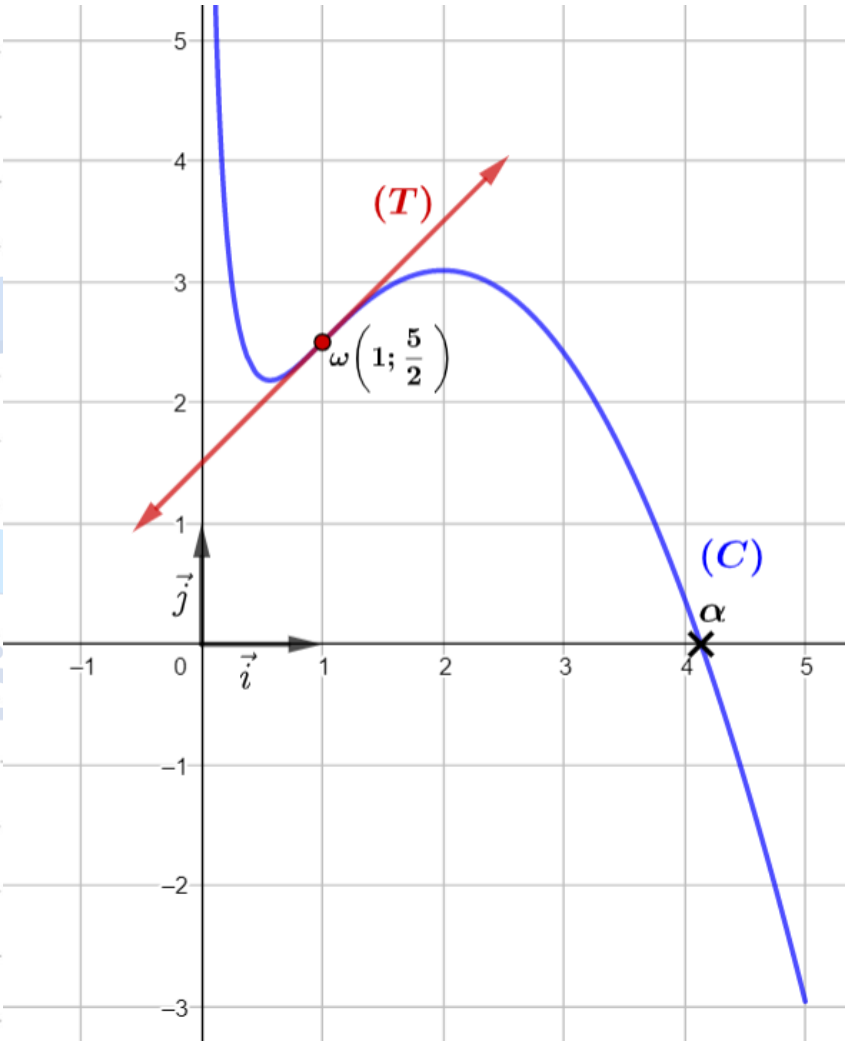
إذن (C) يقبل نقطة إنعطاف في النقطة ذات الفاصلة $x = 1$

أي في النقطة $\omega\left(1;\frac{5}{2}\right)$

جـ- كتابة معادلة للمستقيم (T) مماس (C) في النقطة A:

$$(T): y = f'(1)(x-1) + f(1)$$
$$= x - 1 + \frac{5}{2}$$
$$= \boxed{x + \frac{3}{2}}$$

❺ إنشاء (T) و (C) في المجال $[0;5]$:



❻ أ- دراسة اتجاه تغير الدالة k:

$$k'(x) = -e^{-x} f'(e^{-x})$$

- **لدينا:** $e^{-x} > 0$
- **ندرس إشارة** $f'(e^{-x})$:

لدينا:

x	0	α	2	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$f(\alpha)$ ↗	$f(2)$ ↘	$-\infty$

ولدينا: الدالة $x \mapsto e^{-x}$ متناقصة تماما على $\mathbb{R}$

ومنه:

- لما $\alpha < e^{-x} < 2$ أي: $-\ln 2 < x < -\ln \alpha$ فإنّ: $f'(e^{-x}) > 0$
- لما $e^{-x} > 2$ أي: $x < -\ln 2$ فإنّ: $f'(e^{-x}) < 0$
- لما $e^{-x} > \alpha$ أي: $x < -\ln \alpha$ فإنّ: $f'(e^{-x}) < 0$
- لما $e^{-x} = 2$ أي: $x = -\ln 2$ فإنّ: $f'(e^{-x}) = 0$
- لما $e^{-x} = \alpha$ أي: $x = -\ln \alpha$ فإنّ: $f'(e^{-x}) = 0$

ومنه:

x	$-\infty$		$-\ln 2$		$-\ln \alpha$		$+\infty$
$f'(e^{-x})$	$-$	0	$+$	0	$-$		
$-e^{-x}$	$-$		$-$		$-$		
$k'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$		

- حساب $\lim\limits_{x\to-\infty} k(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} k(x)$:

- $\lim\limits_{x\to-\infty} k(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(e^{-x}) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \boxed{-\infty}$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} k(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(e^{-x}) = \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ >}} f(x) = \boxed{+\infty}$

ب- تشكيل جدول تغيرات الدالة k:

x	$-\infty$		$-\ln 2$		$-\ln \alpha$		$+\infty$
$k'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$		
$k(x)$	$-\infty$	↗	$k(-\ln 2)$	↘	$k(-\ln 2)$	↗	$+\infty$

الخليل للرياضيات
قويسم

❤ لا تنسونا من صالح دعائكم ❤

الأستاذ: قويسم براهيم الخليل