الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية

الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات

امتحان بكالوريا التعليم الثانوي التجريبي — دورة: 2021

الشعبة: تقني رياضي — ثانوية مرسى الحجاج (وهران)

اختبار في مادة: الرياضيات — المدة: 04 سا و 30 د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين :

الموضوع الأول

التمرين الأول : (04 نقاط)

1) نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E) ذات المجهول $(x;y)$ التالية : $(E)...2011x-1432y=31$

أ) بين أن العدد 2011 أولي .

ب) باستعمال خوارزمية إقليدس عين حلا خاصا $(x_0;y_0)$ للمعادلة (E) ، ثم حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E).

2) **أ)** عين حسب قيم العدد الطبيعي n باقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 7 ، ثم جد باقي القسمة الإقليدية للعدد $2011^{1432^{2012}}$ على 7 .

ب) عين قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون : $2010^n+2011^n+1432^n\equiv 0[7]$.

3) N عدد طبيعي يكتب $\overline{2\gamma\alpha\beta}$ في نظام التعداد ذي الأساس 9 حيث α ، β و γ تشكل حدودا متتابعة بهذا الترتيب لمتتالية حسابية متزايدة تماما و الثنائية $(\beta;\gamma)$ حل للمعادلة (E) .

أ) عين α ، β و γ .

ب) أكتب N في النظام العشري .

التمرين الثاني : (05 نقاط)

يحوي كيس على أربع كريات حمراء تحمل الرقم α و ثلاث كريات خضراء تحمل الرقم $1-\alpha$ و كريتين بيضاوين تحملان الرقم 1 ، حيث α عدد طبيعي غير معدوم . الكريات متماثلة ولا نميز بينها عند اللمس .
نسحب عشوائيا من الكيس ثلاث كريات في آن واحد .
نعتبر الحوادث التالية : A " الحصول على كرية بيضاء على الأكثر" ، B "الحصول على ثلاث كريات تحمل نفس العدد" و C " الحصول على كريتين بالضبط تحملان الرقم $1-\alpha$" .

1) **أ)** أحسب إحتمال كل من الحوادث A ، B و C.

ب) ما هو احتمال الحصول على ثلاث كريات تحمل ألوان العلم الوطني ؟

2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب مجموع الأرقام الظاهرة على الكريات الحمراء المسحوبة والذي يأخذ القيمة 0 إذا لم يتم سحب أي كرية حمراء .

أ) برر أن القيم الممكنة لـ X هي $\{0,\alpha,2\alpha,3\alpha\}$ ثم عرف قانون احتماله .

ب) أحسب بدلالة α الأمل الرياضياتي $E(X)$ للمتغير العشوائي X ، ثم عين قيمة α من أجل $|E(X)-1|\leq 2$.

التمرين الثالث : (04 نقاط)

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بحدها الأول $u_1=-2$ ، و من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n :

$u_{n+1}=\dfrac{3(n+1)u_n-(8n+12)}{n}$.

1) **أ)** برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $u_n<0$.

ب) أثبت أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما .

2) لتكن المتتالية العددية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n كما يلي : $v_n=\dfrac{4-u_n}{n}$.

أ) بين أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها 3 يطلب تعيين حدها الأول ، ثم عبر عن v_n بدلالة n .

ب) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن : $u_n=4-2n\times 3^n$ ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

ج) أحسب بدلالة n الجداء : $P_n=(4-u_1)(4-u_2)...(4-u_n)$.

3) لتكن المتتالية العددية (w_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n كما يلي : $w_n=\ln\left(\dfrac{n}{4-u_n}\right)$.

- عبر عن w_n بدلالة n ثم أحسب بدلالة n المجموع : $S_n=w_1+w_2+...+w_n$.

التمرين الرابع : (07 نقاط)

I) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجموعة $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x)=(x+2)e^{x-2}-2$.

1) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$.

2) أدرس إتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها .

3) **أ)** بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$ ، ثم تحقق من أن $1,45<\alpha<1,46$.

ب) استنتج إشارة $g(x)$ تبعا لقيم العدد الحقيقي x .

II) f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=x^2-x^2e^{x-2}$

نسمي (C_f) التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $f(x)=0$.

2) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

3) **أ)** بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x)=-x.g(x)$. (f' هي الدالة المشتقة الأولى للدالة f)

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها .

ج) بين أن $f(\alpha)=\dfrac{\alpha^3}{\alpha+2}$ ، ثم أعط حصرا لـ $f(\alpha)$ حيث α هو العدد الحقيقي المعرف في الجزء I) .

4) ليكن (Γ) المنحنى الممثل للدالة $x\mapsto x^2$ على $\mathbb{R}$:

أ) بين أن $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-x^2\right]=0$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا .

ب) أدرس الوضعية النسبية للمنحنيين (C_f) و (Γ) .

5) عين معادلة لكل من المماسين (T) و (T') لـ (C_f) عند النقطتين ذات الفاصلتين 2 و -2 على الترتيب .

6) أنشي (T) ، (T') ، (Γ) و (C_f) .

7) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي الموجب تماما m عدد حلول المعادلة : $f(x)=-4x+\ln(m)$.

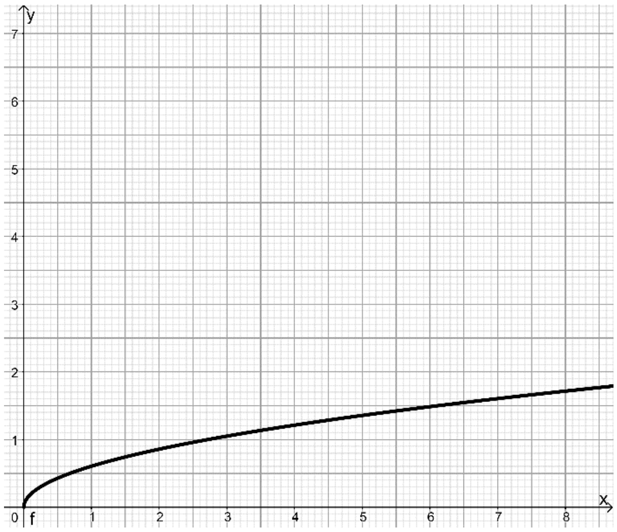
انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول : (05 نقاط)

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $f(x)=e^{-\frac{1}{2}}\sqrt{x}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ ، (الشكل المقابل) .



1) بين أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$

2) لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ : $u_1=e^2$
و من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $u_{n+1}=f(u_n)$.

أ) أنقل المنحنى المقابل ثم مثل الحدود الأربعة الأولى للمتتالية (u_n) على حامل محور الفواصل (دون حسابها) موضحا خطوط الإنشاء .

ب) أعط تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n)و تقاربها .

3) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $u_n>\frac{1}{e}$.

4) أ) أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

ب) برر تقارب المتتالية (u_n) ثم أوجد نهايتها .

5) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ : $v_n=\frac{1}{2}+\ln\sqrt{u_n}$.

أ) برهن أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ ، يطلب تعيين حدها الأول .

ب) أكتب عبارتي v_n و u_n بدلالة n ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

6) أحسب بدلالة n المجموع التالي : $S_n=\frac{1}{1+\ln u_1}+\frac{1}{1+\ln u_2}+...+\frac{1}{1+\ln u_n}$.

التمرين الثاني : (04 نقاط)

1) أ) أنشر العبارة $(n+2)(3n^2-6n+16)$ مع $n\in\mathbb{N}$.

ب) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، يكون العدد $3n^3+4n+32$ قابلا للقسمة على $n+2$.

2) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $3n^2-6n+16$ هو عدد طبيعي غير معدوم .

3) أ) بين أنه من أجل كل الأعداد الطبيعية غير المعدومة α ، β و γ ، تكون المساواة التالية صحيحة :
$PGCD(\alpha;\beta)=PGCD(\beta\gamma-\alpha;\beta)$.

ب) استنتج أنه من أجل عدد طبيعي n ، $PGCD(3n^3+4n;n+2)=PGCD(32;n+2)$.

4) أ) عين مجموعة القواسم الطبيعية للعدد 32 .

ب) استنتج مجموعة قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها العدد $A=\frac{3n^3+4n}{n+2}$ طبيعيا .

التمرين الثالث : (04 نقاط)

يحوي كيس على خمس كرات حمراء و ثلاث كرات بيضاء ، كل الكرات متماثلة ولا نميز بينها باللمس .

نسحب عشوائيا من الكيس ثلاث كرات في آن واحد .

1) أحسب احتمال كل من الحدثين التاليين :

A " الحصول على ثلاث كرات من نفس اللون" ، B " الحصول على كرة بيضاء على الأقل "

2) ننزع من الكيس الكرات البيضاء ونضع مكانها n كرة سوداء حيث $n \geq 2$ ، ثم يسحب لاعب كرتين على التوالي دون إرجاع الكرة المسحوبة الأولى .

إذا سحب اللاعب كرة سوداء يتحصل على 5 نقاط وإذا سحب كرة حمراء يخسر 10 نقاط . وليكن المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل سحب مجموع النقاط المحصل عليها .

أ) عرف قانون الاحتمال لـ X ، ثم بين أن أمله الرياضياتي هو $E(X)=\dfrac{10n^2-60n-400}{(n+4)(n+5)}$.

ب) ما هو أصغر عدد ممكن للكرات السوداء حتى تكون اللعبة مربحة .

التمرين الرابع : (07 نقاط)

I) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $g(x)=x^2+2-2\ln x$.

1) أحسب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

2) أدرس اتجاه تغير الدالة g على المجال $]0;+\infty[$ ، ثم شكل جدول تغيراتها .

3) حدد إشارة $g(x)$ حسب قيم x من المجال $]0;+\infty[$.

II) لتكن الدالة العددية f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $f(x)=-x+e-\dfrac{2\ln x}{x}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) أحسب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)$ وفسر النتيجة هندسيا ، ثم أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{-g(x)}{x^2}$.

3) استنتج إشارة $f'(x)$ ، ثم أدرس إتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها .

4) أ) بين أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=-x+e$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) .

ب) أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .

5) بين أن المنحنى (C_f) يقبل مماسا وحيدا (T) يوازي المستقيم (Δ) ، ثم جد معادلة له .

6) بين أن (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث $2<\alpha<2{,}1$.

7) أرسم كلا من (Δ) ، (T) و (C_f) .

8) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة : $x(e-m)=\ln(x^2)$.

انتهى الموضوع الثاني