

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: ( 06 نقاط )

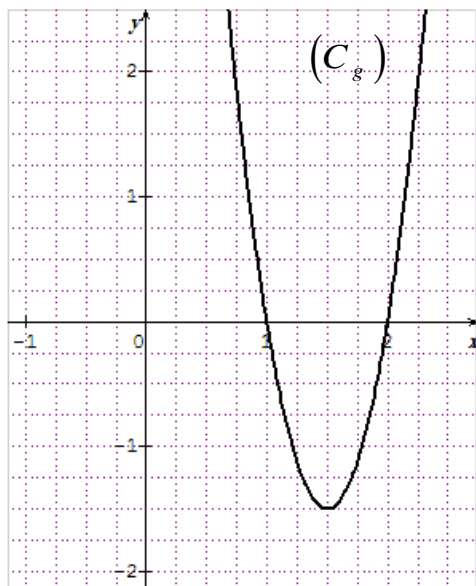
1. أدرس حسب قيم العدد الطبيعي  $n$  بواقي قسمة الإقليدية للعدد  $5^n$  على 7.
2. عين باقي القسمة الإقليدية للعدد  $2014^{1435}$  على 7.
3. بين أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  العدد  $(4 \times 5^{6n+1} - 3 \times 2014^{1435} + 2 \times 25^{6n})$  يقبل القسمة على 7.
4. عين الأعداد الطبيعية  $n$  حتى يكون:  $2014^{1435} + 2n + 1 \equiv 0 [7]$ .

التمرين الثاني: ( 06 نقاط )

لتكن المتتالية العددية  $(u_n)$  المعرفة على  $\mathbb{N}$  كما يلي:  $u_0 = 1$  و  $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 4$

1. أ - أحسب  $u_1; u_2$ .  
ب - برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$ :  $1 \leq u_n \leq 6$ .  
ج - بين أن المتتالية  $(u_n)$  متزايدة.
2.  $(v_n)$  متتالية عددية معرفة على  $\mathbb{N}$  كما يلي:  $v_n = u_n - 6$   
أ - عبر عن  $v_{n+1}$  بدلالة  $v_n$ ، ثم استنتج طبيعة المتتالية  $(v_n)$  (يطلب تعيين أساسها وحدها الأول).  
ب - بين أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$ :  $v_n = (-5) \left( \frac{1}{3} \right)^n$ .
3. أحسب المجموع  $S_n$  بدلالة  $n$ :  $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n$ .

**التمرين الثالث: ( 08 نقاط )**



$g$  دالة عددية معرفة على  $\mathbb{R}$  بـ:  $g(x) = 6x^2 - bx + c$  حيث  $c; b$  عدنان حقيقيان.  $(C_g)$  تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد

و متجانس  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ . (أنظر الشكل المقابل)

I. بقراءة بيانية :

1. عين  $g(1)$  ،  $g(2)$  و  $g'(\frac{3}{2})$ .

2. عين العدنان الحقيقيان  $c; b$ .

3. عين حسب قيم العدد الحقيقي  $x$  إشارة  $g(x)$ .

II.  $f$  دالة عددية معرفة على  $\mathbb{R}$  بـ:  $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 5$

$(C_f)$  تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

1. أدرس إتجاه تغير الدالة  $f$  ثم شكل جدول تغيراتها.

2. أ - بين أن النقطة  $A(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$  هي نقطة انعطاف للمنحنى  $(C_f)$ .

ب - أكتب معادلة المماس  $(T)$  للمنحنى  $(C_f)$  في النقطة  $A$ .

3. أ - تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :  $f(x) = (x-1)^2(2x-5)$

ب - استنتج نقط تقاطع المنحنى  $(C_f)$  مع محور الفواصل.

ج - أحسب  $f(0)$  ثم ارسم  $(C_f)$  و  $(T)$ .

د - حل بيانيا المعادلة :  $f(x) = -1$ .

## الموضوع الثاني :

### التمرين الأول: ( 06 نقاط )

من أجل كل عدد طبيعي  $k$  نضع :  $A_k = 2^k + 3^k + 4^k + 5^k + 6^k$ .

1. تحقق أن :  $4 \equiv -3[7]$  ، ثم بين أن :  $A_3 \equiv 6[7]$

2. أ - أدرس حسب قيم العدد الطبيعي  $n$  بواقي القسمة الإقليدية لكل من العددين  $2^n$  و  $5^n$  على 7.

ب - أوجد باقي القسمة الإقليدية للعددين  $A_{2014}$  و  $A_{1435}$  على 7.

### التمرين الثاني: ( 06 نقاط )

1.  $(v_n)$  متتالية حسابية حدّها الأول  $v_1$  وأساسها  $r$ .

$$\begin{cases} v_1 + v_2 + v_3 = 24 \\ v_4 + v_5 + v_6 + v_7 = 74 \end{cases}$$

أ - عين الحد الأول  $v_1$  و الأساس  $r$  علماً أن :

ب - أكتب  $v_n$  بدلالة  $n$  ، ثم عين أصغر عدد طبيعي  $n$  يحقق :  $v_n > 6023$ .

2. نضع من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم  $n$  :  $S_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n$

\* بين أن :  $2S_n = n(3n + 7)$  ، ثم عين العدد الطبيعي غير المعدوم  $n$  حتى يكون :  $S_n = 153$ .

3. لتكن المتتالية العددية  $(u_n)$  المعرفة على  $\mathbb{N}^*$  كما يلي :  $u_1 = 1$  و  $u_{n+1} = 3u_n + \alpha$  حيث  $\alpha$  عدد حقيقي.

أ - عين قيمة العدد الحقيقي  $\alpha$  حتى تكون المتتالية  $(u_n)$  ثابتة.

ب - عين قيمة العدد الحقيقي  $\alpha$  حتى تكون المتتالية  $(u_n)$  هندسية.

ج - أحسب المجموع  $S'_n$  بدلالة  $n$  في الحالتين  $\alpha = -2$  و  $\alpha = 0$  حيث :  $S'_n = (v_1 - u_1) + (v_2 - u_2) + \dots + (v_n - u_n)$

$f$  دالة عددية معرفة على  $]-\infty; 2[ \cup ]2; +\infty[$  بـ:  $f(x) = 2 - \frac{1}{x-2}$

$(C_f)$  تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

1. أ - تحقق أنه من أجل كل  $x$  من  $]-\infty; 2[ \cup ]2; +\infty[$  :  $f(x) = \frac{2x-5}{x-2}$

ب - أحسب نهايات الدالة  $f$  عند أطراف مجالات التعريف المفتوحة.

ج - أدرس اتجاه تغير الدالة  $f$  ثم شكل جدول تغيراتها.

2. أ - عين المستقيمات المقاربة للمنحنى  $(C_f)$  ، ثم استنتج إحداثيتي النقطة  $I$  مركز تناظر المنحنى  $(C_f)$ .

ب - بين أن المنحنى  $(C_f)$  يقبل مماسين  $(T_1)$  و  $(T_2)$  كل منهما يوازي المستقيم  $(\Delta)$  ذو المعادلة  $2x - 2y - 1 = 0$

ثم أكتب معادلتيهما .

3. أ - أرسم  $(C_f)$  و المماسين  $(T_1)$  و  $(T_2)$ .

ب - بين أن المستقيم  $(\Delta')$  ذو المعادلة :  $y = 2x - 5$  يقطع المنحنى  $(C_f)$  في نقطة يطلب تعيينها .

1

لدينا  $A_{1435} = 2^{1435} + 3^{1435} + 4^{1435} + 5^{1435} + 6^{1435}$   
لدينا:  $4 \equiv -3[7]$  ومنه:  $4^{1435} \equiv (-3)^{1435} [7]$  أي:  $4^{1435} \equiv -3^{1435} [7]$   
ولدينا  $5 \equiv -2[7]$  ومنه:  $5^{1435} \equiv (-2)^{1435} [7]$  أي:  $5^{1435} \equiv -2^{1435} [7]$   
ولدينا  $6 \equiv -1[7]$  ومنه:  $6^{1435} \equiv (-1)^{1435} [7]$  أي:  $6^{1435} \equiv -1[7]$   
ومنه:  $2^{1435} + 3^{1435} + 4^{1435} + 5^{1435} + 6^{1435} \equiv (2^{1435} + 3^{1435} - 3^{1435} - 2^{1435} - 1)[7]$   
معناه:  $A_{1435} \equiv -1[7]$  إذن:  $A_{1435} \equiv 6[7]$

### التمرين الثاني:

$(v_n)$  م. حسابية حدها الأول  $v_1$  حيث:  $\begin{cases} v_1 + v_2 + v_3 = 24 \\ v_4 + v_5 + v_6 + v_7 = 74 \end{cases}$

أ. حساب الحد الأول  $u_1$  والأساس  $r$ :

بما أن  $(v_n)$  م. حسابية فإن  $2v_2 = v_1 + v_3$  ومنه  $v_1 + v_2 + v_3 = 24$

تكافئ  $3v_2 = 24$  أي أن  $v_2 = \frac{24}{3} = 8$

وكذلك:  $v_4 + v_5 + v_6 + v_7 = 74$

ومنه  $(v_2 + 2r) + (v_2 + 3r) + (v_2 + 4r) + (v_2 + 5r) = 74$

تكافئ  $4v_2 + 14r = 74$  أي أن  $4 \times 8 + 14r = 74$  إذن  $r = 3$

ولدينا  $v_2 = v_1 + r$  ومنه  $v_1 = v_2 - r = 8 - 3 = 5$

ب. كتابة  $v_n$  بدلالة  $n$ : لدينا من أجل كل عدد طبيعي

$v_n = v_1 + (n-1)r$  ومنه  $v_n = 5 + 3(n-1)$  أي أن  $v_n = 3n + 2$

تعيين أصغر عدد طبيعي  $n$  يحقق:  $v_n > 6044$

$v_n > 6044$  تكافئ  $3n + 2 > 6044$  إذن  $n > 2014$

أي أصغر قيمة لـ  $n$  هي:  $n = 2015$

2. تبين أن  $2S_n = n(3n + 7)$ :

$S_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n = \frac{n}{2}(v_1 + v_n)$  ومنه:  $2S_n = n(3n + 7)$

$= \frac{n}{2}[5 + (3n + 2)] = \frac{n}{2}(3n + 7)$

تعيين العدد الطبيعي غير المعدوم  $n$  حتى يكون:  $S_n = 153$

لدينا:  $S_n = 153$  ومنه:  $2S_n = 306$  ومنه  $n(3n + 7) = 306$

أي:  $3n^2 + 7n - 306 = 0$  نحل المعادلة نجد:  $\Delta = 3721$ ;  $\sqrt{\Delta} = 61$

ومنه  $n_1 = 9$  و  $n_2 = -\frac{34}{3}$  (مرفوض)

3. أ. تعيين قيمة العدد الحقيقي  $\alpha$  حتى تكون المتتالية  $(u_n)$  ثابتة:

لدينا  $(u_n)$  متتالية ثابتة معناه:  $u_{n+1} = u_n = u_1 = 1$  ولدينا:

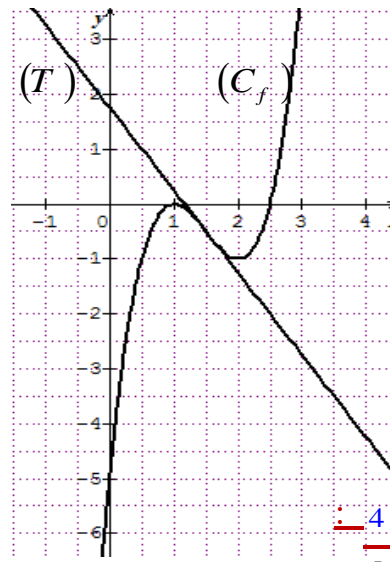
تكافئ:  $u_{n+1} = 3u_n + \alpha$  أي:  $3 + \alpha = 1$  أي:  $\alpha = -2$

ب. تعيين قيمة العدد الحقيقي  $\alpha$  حتى تكون المتتالية  $(u_n)$  هندسية:

لدينا  $(u_n)$  متتالية هندسية معناه:  $u_{n+1} = qu_n$  حيث  $q$  عدد حقيقي

ولدينا:  $u_{n+1} = 3u_n + \alpha$  ومنه:  $\alpha = 0$  و  $q = 3$

حساب المجموع  $S'_n$  بدلالة  $n$ :



### الموضوع الثاني:

#### التمرين الأول:

1. التحقق من أن:  $4 \equiv -3[7]$ :

لدينا:  $4 - (-3) = 7$  إذن  $4 \equiv -3[7]$

• إثبات أن:  $A_3 = 6[7]$ :

لدينا  $A_k = 2^k + 3^k + 4^k + 5^k + 6^k$  أي أن:  $A_3 = 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3$

لدينا:  $4 \equiv -3[7]$  ومنه:  $4^3 \equiv (-3)^3 [7]$  أي:  $4^3 \equiv -3^3 [7]$

ولدينا  $5 \equiv -2[7]$  ومنه:  $5^3 \equiv (-2)^3 [7]$  أي:  $5^3 \equiv -2^3 [7]$

ولدينا  $6 \equiv -1[7]$  ومنه:  $6^3 \equiv (-1)^3 [7]$  أي:  $6^3 \equiv -1[7]$

$A_3 \equiv -1[7]$  معناه  $2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 \equiv (2^3 + 3^3 - 3^3 - 2^3 - 1)[7]$

إذن:  $A_3 \equiv 6[7]$

2. أ. تعيين بواقي قسمة العدد  $2^n$  على 7 حسب قيم  $n$ :

$n =$	$3k$	$3k + 1$	$3k + 2$
باقي قسمة $2^n$ على 7	1	2	4

تعيين بواقي قسمة العدد  $5^n$  على 7 حسب قيم  $n$ :

$n =$	$6k$	$6k + 1$	$6k + 2$	$6k + 3$	$6k + 4$	$6k + 5$
باقي قسمة $5^n$ على 7	1	5	4	6	2	3

ب. تعيين باقي قسمة  $A_{2014}$  على 7: لدينا

$A_{2014} = 2^{2014} + 3^{2014} + 4^{2014} + 5^{2014} + 6^{2014}$

ولدينا:  $2014 = 671 \times 3 + 1$  ومنه  $2^{2014} \equiv 2[7]$

ولدينا  $2014 = 335 \times 6 + 4$  إذن  $5^{2014} \equiv 2[7]$

ولدينا:  $6 \equiv -1[7]$  ومنه:  $6^{2014} \equiv (-1)^{2014} [7]$  أي:  $6^{2014} \equiv 1[7]$

ولدينا:  $3 \equiv -4[7]$  ومنه:  $3^{2014} \equiv (-4)^{2014} [7]$  أي:  $3^{2014} \equiv 4^{2014} [7]$

$3^{2014} \equiv (2^2)^{2014} [7]$  ومنه  $3^{2014} \equiv (2)^{2 \times 2014} [7]$  أي أن:  $3^{2014} \equiv 2^{4028} [7]$

$2^{4028} \equiv 4[7]$  ومنه  $2^{4028} \equiv 4[7]$  إذن:  $2^{4028} \equiv 4[7]$

ولدينا:  $4^{2014} \equiv (2^2)^{2014} [7]$  ومنه:  $4^{2014} \equiv 2^{4028} [7]$

ولدينا:  $2^{4028} \equiv 4[7]$  ومنه:  $4^{2014} \equiv 4[7]$

ومنه:  $2^{2014} + 3^{2014} + 4^{2014} + 5^{2014} + 6^{2014} \equiv (2 + 4 + 4 + 2 + 1)[7]$

ومنه:  $2^{2014} + 3^{2014} + 4^{2014} + 5^{2014} + 6^{2014} \equiv 13[7]$

لكن:  $13 \equiv 6[7]$  إذن:  $A_{2014} \equiv 6[7]$

تعيين باقي قسمة  $A_{1435}$  على 7:

$y = 2$  معادلة مستقيم مقارب أفقي لـ  $(C_f)$  في جوار  $-\infty$  و  $+\infty$   
 $x = 2$  معادلة مستقيم مقارب لـ  $(C_f)$  موازي لمحور الترتيب  
 نستنتج أن:  $I(2; 2)$  نقطة تقاطع المستقيمين المقاربين هي مركز تناظر للمنحنى  $(C_f)$

**ب. إثبات أن  $(C_f)$  يقبل مماسين موازيين لـ  $(\Delta)$**

لدينا  $(\Delta)$  مستقيم معادلته  $2x - 2y - 1 = 0$  أي  $y = x - \frac{1}{2}$  :  $(\Delta)$

$f'(x) = 1$  معناه:  $\frac{1}{(x-2)^2} = 1$  أي أن  $(x-2)^2 = 1$

ومنه  $x^2 - 4x + 3 = 0$ ، لدينا  $\Delta = 4$  إذن:  $x_1 = 1$  أو  $x_2 = 3$   
 ومنه: المنحنى  $(C_f)$  يقبل مماسين معامل توجيههما هو 1 عند

النقطتين  $A(1; 3)$  و  $B(3; 1)$

معادلة المماس  $(T)$  عند  $A$ :  $y = x + 2$

معادلة المماس  $(T')$  عند  $B$ :  $y = x - 2$

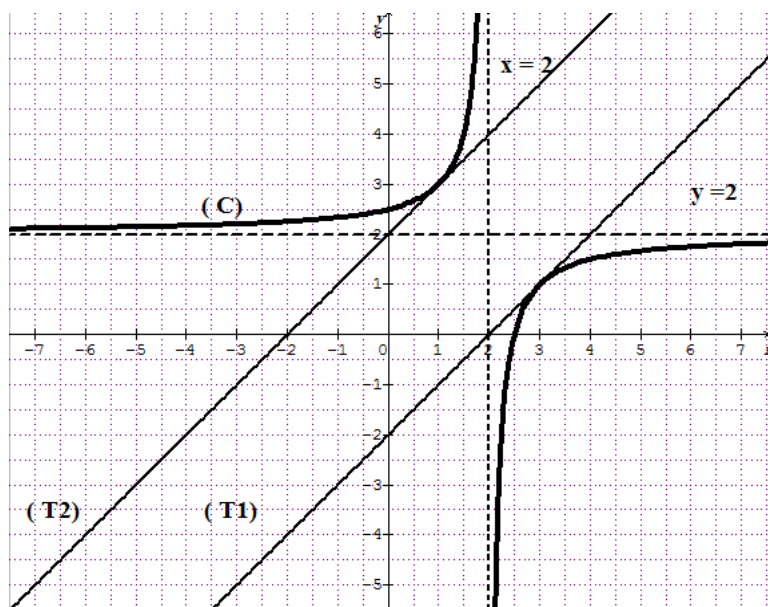
**ب. تعيين نقطتي تقاطع  $(C_f)$  مع المستقيم  $(\Delta)$  ذو المعادلة  $y = 2x - 5$**

$f(x) = 2x - 5$  تكافئ  $\frac{2x-5}{x-2} = 2x - 5$  ومنه  $2x - 5 = (x-2)(2x-5)$

أي أن  $(x-2)(2x-5) - (2x-5) = 0$  ومنه  $2x^2 - 11x + 15 = 0$  ،  $\Delta = 1$  ،  $x_1 = \frac{5}{2}$  ،  $x_2 = 3$

ومنه  $(C_f)$  يقطع المستقيم  $(\Delta')$  في النقطتين  $A(\frac{5}{2}; 0)$  و  $B(3; 1)$

**3. أ. إنشاء المنحنى  $(C_f)$  والمماسين  $(T)$  و  $(T')$**



**في حالة  $\alpha = -2$  : لدينا  $(u_n)$  متتالية ثابتة ومنه**

$$\begin{aligned} S'_n &= (v_1 - u_1) + (v_2 - u_2) + \dots + (v_n - u_n) \\ &= (v_1 + v_2 + \dots + v_n) - (u_1 + u_2 + \dots + u_n) \\ &= S_n - (1 + 1 + \dots + 1) \\ &= \frac{n}{2}(3n + 7) - n \end{aligned}$$

**في حالة  $\alpha = 0$  :**

لدينا:  $(u_n)$  م. هندسية أساسها  $q = 3$  وحدها الأول  $u_1 = 1$

$$\begin{aligned} S'_n &= (v_1 - u_1) + (v_2 - u_2) + \dots + (v_n - u_n) \\ &= (v_1 + v_2 + \dots + v_n) - (u_1 + u_2 + \dots + u_n) \\ &= S_n - \left[ u_1 \left( \frac{1 - q^n}{1 - q} \right) \right] \\ &= \frac{n}{2}(3n + 7) - \left[ \frac{1 - 3^n}{1 - 3} \right] \\ &= \frac{n}{2}(3n + 7) + \frac{1 - 3^n}{2} \end{aligned}$$

**التمرين الثالث :**

**1. أ. التحقق أن  $f(x) = \frac{2x-5}{x-2}$  من أجل كل  $x$**

$$f(x) = 2 - \frac{1}{x-2} = \frac{2(x-2)-1}{x-2} = \frac{2x-5}{x-2} : ]-\infty; 2[ \cup ]2; +\infty[$$

**ب. حساب نهايات الدالة  $f$  :**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$

ومنه المستقيم ذو المعادلة  $y = 2$  هو مستقيم مقارب أفقي للمنحنى  $(C)$  في جوار  $-\infty$  و  $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty \quad , \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty$$

ومنه المستقيم ذو المعادلة  $x = 2$  هو مستقيم مقارب للمنحنى  $(C_f)$  موازي لمحور الترتيب.

**ج. دراسة اتجاه تغير الدالة  $f$  :**

$f$  تقبل الاشتقاق على  $D$  ودالتها المشتقة  $f'$  معرفة بـ :

$$f'(x) = \frac{2(x-2) - (2x-5)}{(x-2)^2} = \frac{1}{(x-2)^2}$$

نلاحظ أن  $f'(x) > 0$  من أجل كل  $x$  من  $]-\infty; 2[ \cup ]2; +\infty[$

ومنه  $f$  متزايدة تماما على المجالين  $]-\infty; 2[$  و  $]2; +\infty[$

**جدول تغيرات الدالة  $f$  :**

$x$	$-\infty$	$2$	$+\infty$
$f'(x)$		+	+
$f(x)$	$2$	$+\infty$	$2$

**2. أ. تعيين المستقيمات المقاربة للمنحنى  $(C_f)$**

