إختبار الفصل الثالث في مادة الرياضيات

المدة: ساعتان

التمرين الأول: (10 نقاط)

I/ المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ حيث: $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=1cm$.

لتكن النقط $A(-1;2)$ ، $B(3;0)$ ، $C(-3;-2)$ و $D(1;-4)$ ،
ولتكن النقطة I منتصف القطعة: $[BC]$.

1/ أُحسب إحداثيي النقطة I ثم علّم النقط A ، B ، C ، D و I .

2/ ا/بين أن المثلث ABC قائم في A .

ب/أُكتب معادلة ديكارتية للدائرة (γ) المحيطة بالمثلث ABC .

ج/أُكتب معادلة ديكارتية للمستقيم (Δ) المماس للدائرة (γ) في النقطة A .

3/ لتكن (Γ) مجموعة النقط $M(x;y)$ من المستوي حيث: $x^2+y^2-2x+8y-23=0$.

ا/أثبت أن (Γ) هي دائرة مركزها النقطة D ونصف قطرها R يُطلب تعيينه.

ب/تحقق حسابيا أن $A\in(\Gamma)$ ، ثم حدد بدقة $d(D;(\Delta))$ المسافة بين النقطة D والمستقيم (Δ) .

ج/استنتج الوضعية النسبية لكل من المستقيم (Δ) و الدائرة (Γ) ، ثم أنشئ كلا منهما.

4/ ا/أُحسب $\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{BC}$ ، ثم استنتج قيمة بالدرجات لقيس الزاوية $\widehat{DBC}$.

ب/أُحسب مساحة المثلث DBC .

5/ حدد طبيعة وعناصر (E) مجموعة النقط N من المستوي التي تحقق: $NB^2+NC^2=22$.

II/ 1/ تأكد أن: $\frac{7\pi}{12}=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}$.

2/ أُحسب القيمة المضبوطة لـ $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$.

3/ علما أن: $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ ، أُحسب $\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)$.

التمرين الثاني: (10 نقاط)

لتكن (U_n) المتتالية المعرفة بـ: $U_0 = -1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} = \dfrac{3U_n + 4}{U_n + 3}$.

1/ على الشكل المرفق المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$ ، حيث :

(C_f) هو التمثيل البياني للدالة f المعرفة بـ: $f(x) = \dfrac{3x+4}{x+3}$ ، و (Δ) هو المستقيم ذو المعادلة $y = x$.

ا/مثّل -دون حساب- الحدود الأربع الأولى للمتتالية (U_n) على محور الفواصل (مبينا خطوط الإنشاء).

ب/ضع تخمينا حول إتجاه تغير وسلوك المتتالية (U_n) .

2/ لتكن (V_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $V_n = \dfrac{U_n + 2}{U_n - 2}$.

ا/بين أن (V_n) متتالية هندسية أساسها $q = 5$ ، ثم أُحسب حدها الأول.

ب/ماهو إتجاه تغير المتتالية (V_n) ؟ مع التعليل.

ج/أُكتب V_n بدلالة n .

3/ ا/بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $U_n = 2 + \dfrac{4}{V_n - 1}$ ، ثم استنتج عبارة U_n بدلالة n .

ب/أُحسب $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$ ، ماذا تستنتج؟

4/ ا/بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $\dfrac{1}{U_n - 2} = \dfrac{1}{4}V_n - \dfrac{1}{4}$ ،

ثم أُحسب عندئذ بدلالة n المجموع: $S_n = \dfrac{1}{U_0 - 2} + \dfrac{1}{U_1 - 2} + \cdots + \dfrac{1}{U_n - 2}$.

ب/أُحسب بدلالة n المجموع: $T_n = 1 + 2 + \cdots + n$ ،

ثم أُحسب بدلالة n الجداء: $P_n = V_0 \times V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n$.

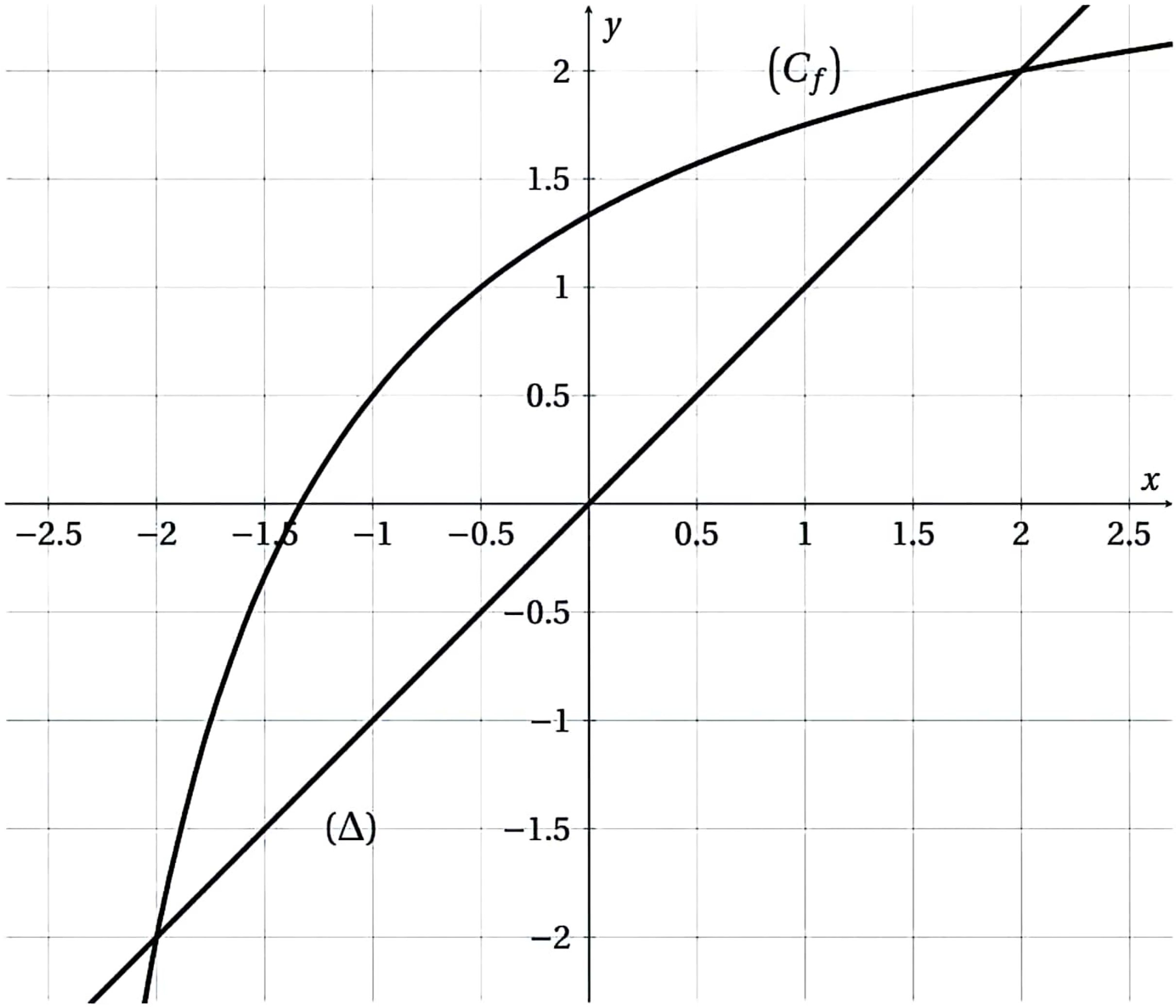
سؤال إضافي: (02 نقطة)

حل المعادلة ذات المجهول الحقيقي x التالية: $1 + \dfrac{x+1}{x-1} + \left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^2 + \left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^3 = 0$.

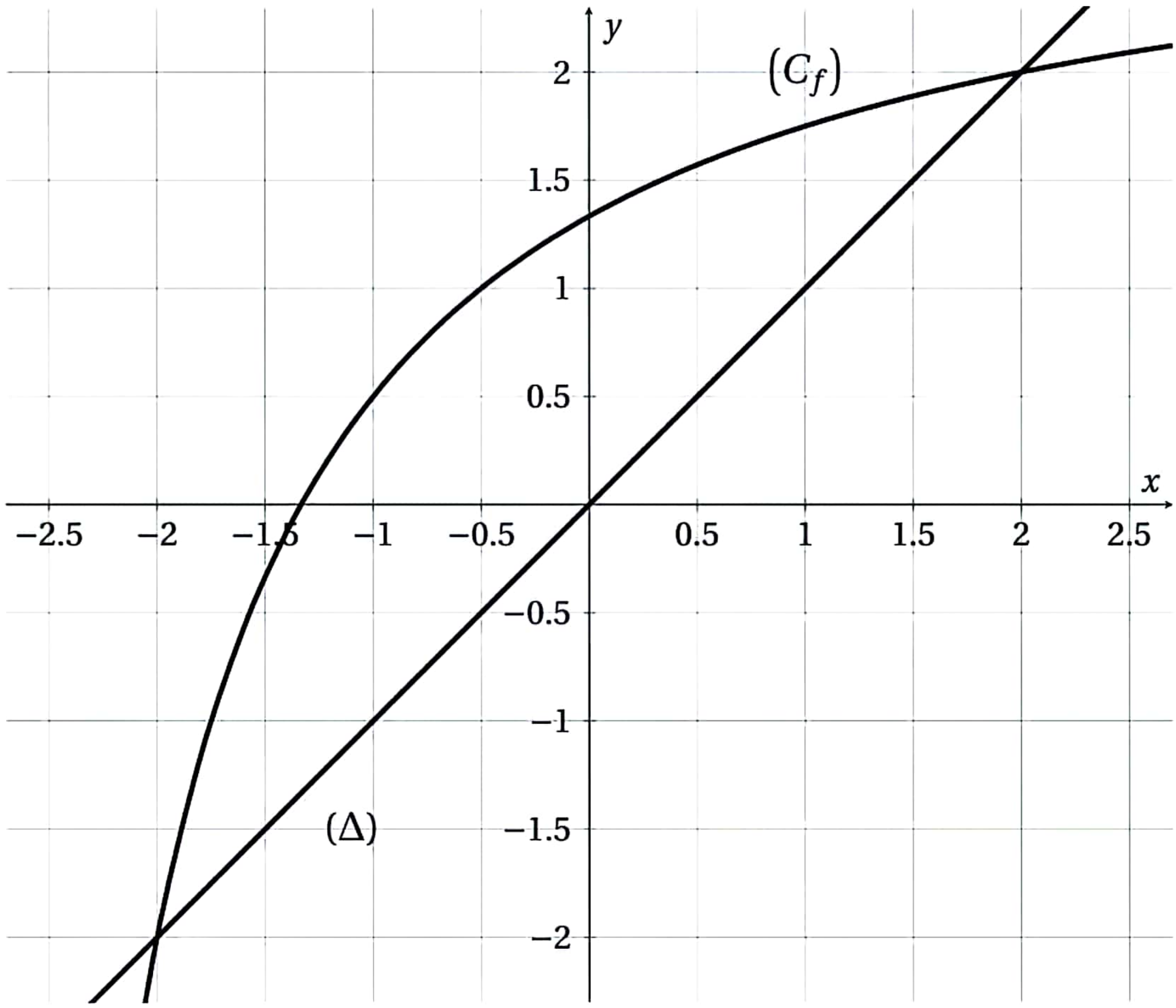
إرشاد: يمكنك وضع: $y = \dfrac{x+1}{x-1}$.

☺☺عطلة سعيدة☺☺

☺☺بالتوفيق للجميع☺☺



y
x
(C_f)
(Δ)
-2.5 -2 -1.5 -1 -0.5 0.5 1 1.5 2 2.5
2 1.5 1 0.5 -0.5 -1 -1.5 -2



y
x
(C_f)
(Δ)
-2.5 -2 -1.5 -1 -0.5 0.5 1 1.5 2 2.5
2 1.5 1 0.5 -0.5 -1 -1.5 -2

ثانوية راشدي محمد ابن ابراهيم
جيجل
-01-

وزارة التربية الوطنية

المؤسسة: ثانوية راشدي محمد - سيدي معروف اختبار الثلاثي: الثالث
التلميذ(ة): / القسم: 2 رياضيات
المادة: الرياضيات التاريخ: 2023/05/24م
أستاذ(ة) المادة: عمورة أيمن الرقم: /

ورقة الإجابة

الرقم: /

العلامة النهائية: 20/20

العلامات الجزئية
السؤال1: ......
السؤال2: ......
السؤال3: ......
السؤال4: ......
السؤال5: ......

التمرين الأول: (10 نقاط)

I) $A(-1;2)$ و $B(3;0)$ و $C(-3;-2)$
$D(1;-4)$ و I منتصف $[BC]$

1) حساب إحداثيي النقطة I:

$x_I = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{3-3}{2} = 0$

$y_I = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{0-2}{2} = -1$

ومنه: $\boxed{I(0;-1)}$ 0,25

• الإنشاء 0,5

2) أ- تبيان أن المثلث ABC قائم في A:

0,75

ط1/ لدينا:

$AB = \sqrt{(3-(-1))^2 + (0-2)^2} = \sqrt{4^2+2^2}$

$AB = \sqrt{20}$

$BC = \sqrt{(-6)^2 + (-2)^2} = \sqrt{40} = BC$

$AC = \sqrt{(-2)^2 + (-4)^2} = \sqrt{20} = AC$

نلاحظ أن:

$AB^2 + AC^2 = 20 + 20 = 40 = BC^2$

وحسب مبرهنة فيثاغورس المثلث
$\boxed{ABC \text{ قائم في } A}$

ط2/ لدينا:

$\vec{AB}\begin{pmatrix} 3-(-1) \\ 0-(+2) \end{pmatrix} = \vec{AB}\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\vec{AC}\begin{pmatrix} -3-(-1) \\ -2-2 \end{pmatrix} = \vec{AC}\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}$

ومنه:

$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 4(-2) + (-2)(-4) = -8+8 = 0$

ومنه: $(AC) \perp (AB)$

$\boxed{\text{إذن المثلث } ABC \text{ قائم في } A}$

ب- كتابة معادلة للدائرة (γ) المحيطة بالمثلث ABC: أي الدائرة (γ) قطرها هو القطعة $[BC]$. 0,75 + 0,25

ط1/ الدائرة (γ) هي مجموعة النقط $M(x;y)$ من المستوي بحيث: $\vec{BM} \cdot \vec{CM} = 0$

لدينا: $\vec{BM}\begin{pmatrix} x-3 \\ y \end{pmatrix}$ و $\vec{CM}\begin{pmatrix} x+3 \\ y+2 \end{pmatrix}$

ومنه: $(\gamma): (x-3)(x+3) + y(y+2) = 0$

ومنه: $\boxed{(\gamma): x^2 + y^2 + 2y - 9 = 0}$

ط2/ الدائرة (γ) مركزها $I(0;-1)$ ونصف قطرها

$r = \frac{BC}{2} = \frac{\sqrt{40}}{2} = \sqrt{10}$

ومنه: $(\gamma): (x-0)^2 + (y+1)^2 = \left(\frac{\sqrt{40}}{2}\right)^2$

إذن: $\boxed{(\gamma): x^2 + (y+1)^2 = 10}$

جـ- كتابة معادلة (Δ) المماس لـ (γ) عند A:

عند A ممثله الشعاع $\vec{IA}$ ناظمي لـ (Δ) و $A \in (\Delta)$.

لدينا: $\vec{IA}\begin{pmatrix}0-(-1)\\-1-(2)\end{pmatrix} = \vec{IA}\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$

ومنه: $(\Delta):\ x-3y+c=0$

ولدينا: $A(-1,2) \in (\Delta)$ إذن:

$-1-3(2)+c=0$

أي $C=+7$

ومنه $\boxed{(\Delta):\ x-3y+7=0}$

0,75

3) $(\Gamma):\ x^2+y^2+8y-2x-23=0$

أ- إثبات أن (Γ) دائرة:

لدينا: $(\Gamma):\ x^2+y^2-2x+8y-23=0$

تكافئ: $(x-1)^2-1+(y+4)^2-16-23=0$

تكافئ: $(\Gamma):\ (x-1)^2+(y+4)^2=40$

0,75

ومنه (Γ) دائرة مركزها $D(1;-4)$ ونصف قطرها $R=\sqrt{40}$.

ب- التحقق أن: $A(-1,2) \in (\Gamma)$

لدينا: $(-1)^2+(2)^2-2(-1)+8(2)-23$

$=1+4+2+16-23$

$=23-23=0$

0,25

إذن: $\boxed{A \in (\Gamma)}$

• حساب المسافة $d(D;(\Delta))$:

$$d(D,(\Delta)) = \frac{|1-3(-4)+7|}{\sqrt{(1)^2+(-3)^2}} = \frac{|20|}{\sqrt{10}}$$

$$= \frac{20\sqrt{10}}{10} = \boxed{2\sqrt{10} = d(D;(\Delta))}$$

0,5

جـ- استنتاج الوضعية النسبية:

لدينا: $A \in (\Delta)$ و $A \in (\Gamma)$

$R = DA = \sqrt{40} = 2\sqrt{10} = d(D;(\Delta))$

وإذن: $\boxed{\text{(Δ) مماس لـ (Γ) في } A}$

0,5

• الإنشاء:

1

4) أ- حساب الجداء السلمي: $\vec{BD}\cdot\vec{BC}$

لدينا: $\vec{BD}\begin{pmatrix}1-3\\-4-0\end{pmatrix} = \vec{BD}\begin{pmatrix}-2\\-4\end{pmatrix}$

$\vec{BC}\begin{pmatrix}-3-3\\-2-0\end{pmatrix} = \vec{BC}\begin{pmatrix}-6\\-2\end{pmatrix}$

ومنه:

0,5

$\vec{BD}\cdot\vec{BC} = (-2)(-6)+(-4)(-2) = 12+8$

$\boxed{\vec{BD}\cdot\vec{BC} = 20}$

• إيجاد قيس الزاوية $\widehat{DBC}$:

لدينا: $\vec{BD}\cdot\vec{BC} = BD\cdot BC\cdot\cos(\widehat{DBC})$

$=20$

ولدينا: $BD = \sqrt{(-2)^2+(-4)^2} = \sqrt{20}$

$BC = \sqrt{(-6)^2+(-2)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$

ومنه: $\sqrt{40}\times\sqrt{20}\times\cos(D\hat{B}C)=20$

أي: $\cos(D\hat{B}C)=\frac{20}{\sqrt{20}\times\sqrt{40}}=\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{40}}$

$=\sqrt{\frac{20}{40}}=\sqrt{\frac{2}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

ومنه: $D\hat{B}C=\frac{\pi}{4}\,rad=45°$

0,75

ب) حساب مساحة المثلث DBC:

$S_{DBC}=\frac{1}{2}\times DB\times BC\times\sin(D\hat{B}C)$

$=\frac{1}{2}\times\sqrt{20}\times\sqrt{40}\times\frac{\sqrt{2}}{2}$

$=\frac{\sqrt{1600}}{4}=\frac{40}{4}=\boxed{10\,cm^2=S_{DBC}}$

0,5

5) تعيين مجموعة النقط (E):

$NB^2+NC^2=22$

لتكن I منتصف [BC] حسب مبرهنة المتوسط من أجل كل نقطة N من المستوي:

$NB^2+NC^2=2NI^2+\frac{1}{2}BC^2=22$

ومنه التالي: $2NI^2+\frac{40}{2}=22$

أي: $2NI^2=22-20$

إذن: $NI^2=1$

أي أن: $NI=1$

ومنه (E) دائرة مركزها I ونصف قطرها $r=1$.

0,75

(II) 1) تبيان أن: $\frac{7\pi}{12}=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}$

لدينا: $\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}=\frac{4\pi+3\pi}{4\times3}=\frac{7\pi}{12}$

0,25

2) حساب القيمة المضبوطة لـ: $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$

لدينا: $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)$

$=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\times\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$

$=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\boxed{\cos\frac{7\pi}{12}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}}$

0,5

3) حساب: $\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)$

علما أن: $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$.

1b

$\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)=\sin\left(2\times\frac{7\pi}{12}\right)$

$=2\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$

$=2\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\right)\left(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}\right)$

$=\frac{2}{16}(2-6)$

$=\frac{-8}{16}=\boxed{-\frac{1}{2}=\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)}$

0,5

2b

$\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)=\sin\left(\frac{6\pi+\pi}{6}\right)$

$=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)$

$=-\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$

$\boxed{\sin\frac{7\pi}{6}=-\frac{1}{2}}$

انتهى التمرين الأول

التمرين الثاني: (10 نقاط)

$$(u_n): \begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n+4}{u_n+3} \end{cases}$$

1) أ- تمثيل الحدود الأربع الأولى لـ (u_n) ع الشكل المرفق.

ب- التخمين:

نلاحظ أن: $u_0 < u_1 < u_2 < u_3$ وأنها تتقارب من بعضها البعض

فتخمين أن (u_n) متزايدة ومتقاربة ع $\mathbb{N}$.

2) $v_n = \dfrac{u_n+2}{u_n-2}$.

أ- تبيان أن (v_n) هندسية:

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n:

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}+2}{u_{n+1}-2} = \frac{\frac{3u_n+4}{u_n+3}+2}{\frac{3u_n+4}{u_n+3}-2}$$

$$= \frac{\frac{3u_n+4+2u_n+6}{u_n+3}}{\frac{3u_n+4-2u_n-6}{u_n+3}}$$

$$= \frac{5u_n+10}{u_n+3} \times \frac{u_n+3}{u_n-2}$$

$$= \frac{5(u_n+2)}{u_n-2} = \boxed{5v_n = v_{n+1}}$$

ومنه: (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=5$ وحدها الأول:

$$v_0 = \frac{u_0+2}{u_0-2} = \frac{-1+2}{-1-2} = \boxed{-\frac{1}{3} = v_0}$$

ب- إتجاه تغير المتتالية (v_n):

بما أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=5>1$ وحدها الأول $v_0 = -\frac{1}{3} < 0$ فإن المتتالية (v_n)

$\boxed{\text{متتالية متناقصة تماما ع } \mathbb{N}}$

جـ- عبارة الحد العام:

بما أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=5$ وحدها الأول $v_0 = -\frac{1}{3}$

فإن:

$$v_n = \left(-\frac{1}{3}\right)\times 5^n = \boxed{\frac{-5^n}{3} = v_n}$$

ملاحظات الأستاذ(ة):

إمضاء الولي:

3) أ- تبيان أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = 2 + \frac{4}{v_n - 1}$$

0,5

الطريقة 1:

$$\boxed{2 + \frac{4}{v_n - 1}} = \frac{2v_n - 2 + 4}{v_n - 1} = 2\left(\frac{v_n + 1}{v_n - 1}\right)$$

$$= 2\left(\frac{\frac{u_n+2}{u_n-2} + 1}{\frac{u_n+2}{u_n-2} - 1}\right)$$

$$= 2 \times \left(\frac{u_n + \cancel{2} + u_n - \cancel{2}}{\cancel{u_n - 2}}\right) \times \left(\frac{\cancel{u_n - 2}}{\cancel{u_n} + 2 - \cancel{u_n} + 2}\right)$$

$$= 2 \times \frac{2u_n}{4} = \boxed{u_n}$$

م.ط.و

الطريقة 2:

$$v_n = \frac{u_n + 2}{u_n - 2}$$

$$= \frac{u_n - 2 + 4}{u_n - 2} = 1 + \frac{4}{u_n - 2}$$

ومنه: $\frac{4}{u_n - 2} = v_n - 1$

ومنه: $\frac{u_n - 2}{4} = \frac{1}{v_n - 1}$

أي: $u_n - 2 = \frac{4}{v_n - 1}$

ومنه: $\boxed{u_n = 2 + \frac{4}{v_n - 1}}$

الطريقة 3:

$$v_n = \frac{u_n + 2}{u_n - 2}$$

ومنه:

$$v_n(u_n - 2) = u_n + 2$$

أي: $v_n u_n - 2v_n = u_n + 2$

ومنه:

$$v_n u_n - u_n = 2v_n + 2$$

ومنه: $u_n(v_n - 1) = 2(v_n + 1)$

ومنه:

$$u_n = 2 \times \left(\frac{v_n + 1}{v_n - 1}\right) = 2 \times \left(\frac{v_n - 1 + 2}{v_n - 1}\right)$$

$$= 2\left(1 + \frac{2}{v_n - 1}\right)$$

$$\boxed{u_n = 2 + \frac{4}{v_n - 1}}$$

- عبارة u_n:

ومنه: $u_n = 2 + \frac{4}{(-\frac{1}{3})5^n - 1}$

$$\boxed{u_n = 2 - \frac{4}{\frac{5^n}{3} - 1}}$$ 1

$$u_n = 2 - \frac{12}{5^n - 3}$$ //

ب- حساب النهاية:

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty}\left(2 - \frac{4}{(\frac{1}{3})5^n + 1}\right) = 2$$

0,5 $+\infty$

- الاستنتاج:

المتتالية (u_n) متقاربة نحو 2.

0,5

4) أ- تبيان أن:

$$\frac{1}{u_n - 2} = \frac{1}{4}v_n - \frac{1}{4}$$

لدينا: $u_n = 2 + \frac{4}{v_n - 1}$ 0,5

ومنه:

$$u_n - 2 = \frac{4}{v_n - 1}$$

ومنه: $\frac{1}{u_n-2} = \frac{v_n-1}{4}$

أي: $(*)\ \boxed{\frac{1}{u_n-2} = \frac{1}{4}v_n - \frac{1}{4}}$

• حساب S_n بدلالة n:

$S_n = \frac{1}{u_0-2} + \frac{1}{u_1-2} + \dots + \frac{1}{u_n-2}$

$= (\frac{1}{4}v_0 - \frac{1}{4}) + (\frac{1}{4}v_1 - \frac{1}{4}) + \dots + (\frac{1}{4}v_n - \frac{1}{4})$

$= \frac{1}{4}(v_0 + v_1 + \dots + v_n) - (\underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{4}}_{n+1 \text{ مرة}})$

$= \frac{1}{4} \times \underset{-\frac{1}{3}}{v_0} \times (\frac{5^{n+1}-1}{5-1}) - \frac{1}{4}(n+1)$

$\boxed{S_n = -\frac{1}{48}(5^{n+1}-1) - \frac{1}{4}(n+1)}$

0,75

ب- حساب T_n:

$T_n = 1+2+3+\dots+n = \frac{(n+1)(n-1+1)}{2}$

$\boxed{T_n = \frac{(n+1)n}{2}}$

0,5

لأنه مجموع حدود متتابعة من متتالية حسابية أساسها $r=1$.

• حساب الجداء P_n:

$P_n = v_0 \times v_1 \times v_2 \times \dots \times v_n$

$= v_0 \times (v_0 \times q) \times (v_0 \times q^2) \times \dots \times (v_0 \times q^n)$

$= (\underbrace{v_0 \times v_0 \times v_0 \times \dots \times v_0}_{n+1 \text{ مرة}}) \times (q \times q^2 \times \dots \times q^n)$

0,75

$P_n = v_0^{n+1} \times q^{1+2+\dots+n}$

$P_n = (-\frac{1}{3})^{n+1} \times 5^{T_n}$

$\boxed{P_n = (-\frac{1}{3})^{n+1} \times 5^{\frac{n(n+1)}{2}}}$

التمرين الثاني

السؤال الإضافي: (2 نقطة)

بوضع: $y = \frac{x+1}{x-1}$ تصبح المعادلة

$1 + \underbrace{y + y^2 + y^3}$ $= 0$

مجموع حدود متتابعة من متتالية هندسية أساسها $q=y$

ومنه تكافئ:

$1 \times (\frac{1-y^4}{1-y}) = 0$ 0,5

أي: $\begin{cases} 1-y^4=0 \\ 1-y \neq 0 \end{cases}$ $\Leftarrow$ $\boxed{y \neq 1}$

أي: $1-(y^2)^2 = 0$

$(1-y^2)(1+y^2) = 0$ 0,5

$1-y^2=0$ أو $1+y^2=0$

ومنه: $y^2=1$ أي $|y|=1$

وبالتالي: $y=-1$ (لأن $y \neq 1$). 0,5

ومنه: $\frac{x+1}{x-1} = -1$ أي

$x+1 = -x+1$ ومنه $2x=0$ 0,5

إذن: $\boxed{x=0}$

ملاحظات الأستاذ(ة): عطلة سعيدة للجميع

إمضاء الولي:

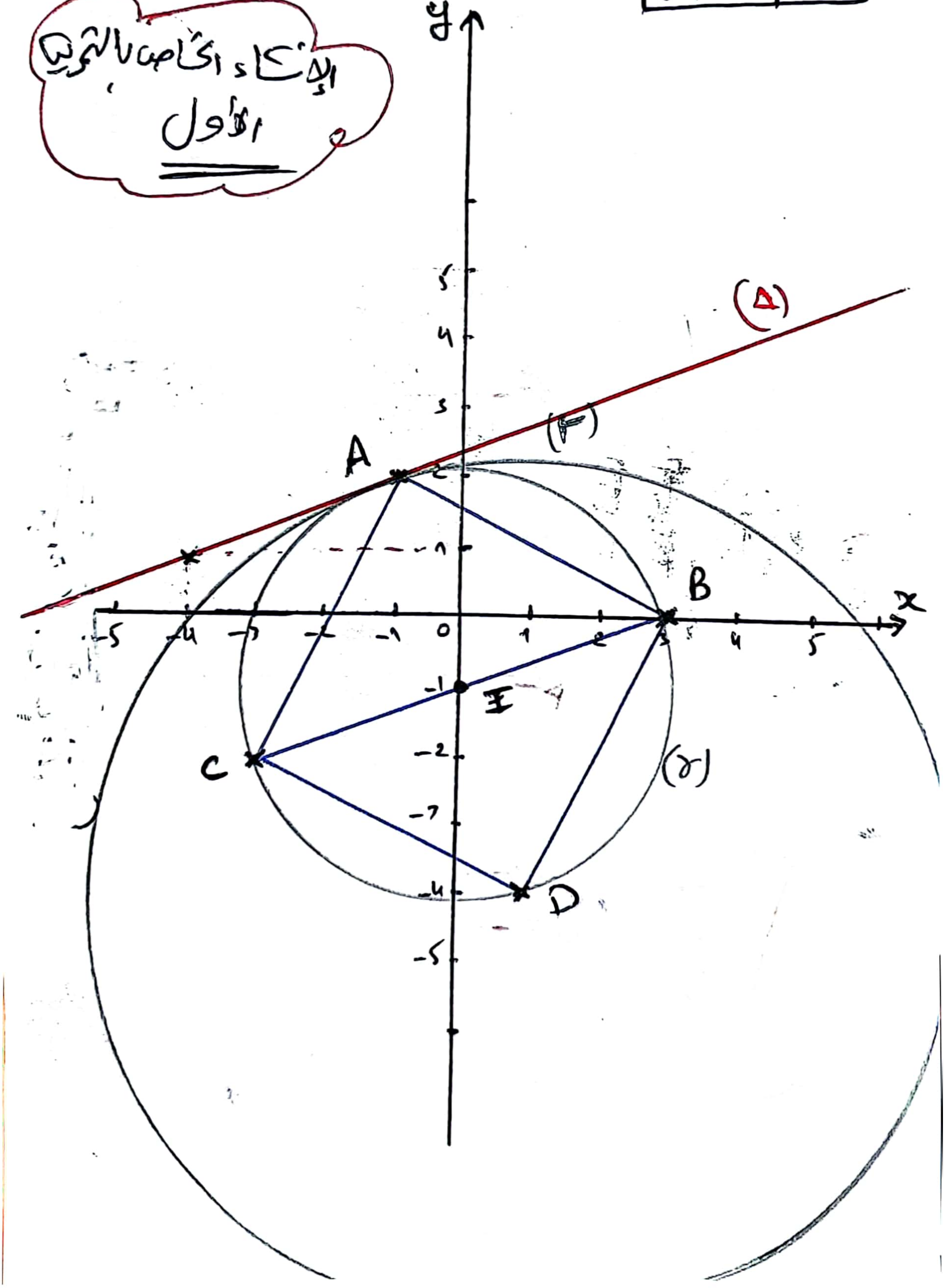
(Δ) : $x - 3y + 7 = 0$

جدول ساعد

(Δ) :

x	-4	-1
y	1	2

الإنشاء الخاص بالتمرين الأول



تمثيل الحدود الأربع الأولى من (u_n)

التمرين الثاني