حل ت 01.

$U_0 = 3$; $U_{n+1} = \dfrac{5U_n - 4}{1+U_n}$ $\Rightarrow$

$5U_n - 4$	$U_n + 1$
$-5U_n - 5$	5
-9	

$U_{n+1} = 5 - \dfrac{9}{1+U_n}$

1.1 البرهان بالتراجع أن: $U_n > 2$

- نضع: $P(n) : U_n > 2$
- مرحلة ①: من أجل $n = 0$ لدينا $U_0 = 3$ أي $U_0 > 2$ ومنه $P(0)$ محققة
- مرحلة ②: نفرض صحة $P(n)$ ونبرهن أن $P(n+1)$ صحيحة

$U_n > 2$ حسب الفرضية

$U_n + 1 > 3$

$\dfrac{1}{U_n+1} < \dfrac{1}{3}$

$-\dfrac{9}{U_n+1} > -3$

$5 - \dfrac{9}{U_n+1} > 2$

أي $U_{n+1} > 2$ ومنه $P(n+1)$ صحيحة

- خلاصة: حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فإنه من أجل كل عدد طبيعي n: $U_n > 2$ أي (U_n) محدودة من الأسفل"

ب) إثبات أن (U_n) متناقصة تماما:

$U_{n+1} - U_n = \dfrac{5U_n - 4}{1+U_n} - \dfrac{U_n(1+U_n)}{1+U_n}$

$= \dfrac{5U_n - 4 - U_n - U_n^2}{1+U_n}$

$= \dfrac{-U_n^2 + 4U_n - 4}{1+U_n}$

U_n	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$-U_n^2+4U_n-4$	$-$	$-$	0	$-$
$1+U_n$	$-$	0	$+$	$+$
$U_{n+1}-U_n$	$+$	$\|\|$	$-$	0 $-$

لما $U_n > 2$ فإن $U_{n+1} - U_n < 0$

ومنه (U_n) متناقصة تماما.

* إتباع تقارب (U_n): بما أن المتتالية (U_n) متناقصة تماما ومحدودة من الأسفل فهي متقاربة.

2) $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$: $V_n = \dfrac{U_n+3}{U_n-2}$

أ/ إثبات أن (V_n) م. حسابية

(V_n) م. حسابية يكافئ $V_{n+1} - V_n = r$

* لدينا: $V_{n+1} = \dfrac{U_{n+1}+3}{U_{n+1}-2}$

$$= \frac{\frac{5U_n-4}{1+U_n}+3\frac{(1+U_n)}{(1+U_n)}}{\frac{5U_n-4}{1+U_n}-2\frac{(1+U_n)}{1+U_n}} = \frac{5U_n-4+3U_n+3}{5U_n-4-2U_n-2} = \frac{8U_n-1}{3U_n-6}$$

ومنه: $V_{n+1} - V_n = \dfrac{8U_n-1}{3U_n-6} - \dfrac{(U_n+3)\times 3}{3(U_n-2)}$

$$= \frac{8U_n-1-3U_n-9}{3(U_n-2)}$$

$$= \frac{5U_n-10}{3(U_n-2)}$$

$$= \frac{5(U_n-2)}{3(U_n-2)} \Longrightarrow V_{n+1} - V_n = \frac{5}{3}$$

أي: $r = \frac{5}{3}$ وحدها الأول $V_0 = 6$ وهذا (V_n) م. حسابية أساسها

* عبارة V_n بدلالة n: بما أن (V_n) م. حسابية فإن $V_n = V_0 + nr$ أي $V_n = 6 + \frac{5}{3}n$

$$V_n = \frac{5n+18}{3}$$

* عبارة U_n بدلالة n:

(U_n) متتالية معرفة بـ $V_n = \dfrac{U_n+3}{U_n-2}$

ومنه $V_n U_n - 2V_n = U_n + 3$

$$V_n U_n - U_n = 2V_n + 3$$

$$(V_n - 1)U_n = 2V_n + 3$$

ومنه: $U_n = \dfrac{2V_n+3}{V_n-1}$ — (*)

نعوض عبارة V_n في (*) نجد:

$$U_n = \frac{2\left(\frac{5n+18}{3}\right)+3\frac{(3)}{3}}{\frac{5n+18}{3}-\frac{1(3)}{3}} = \frac{10n+36+9}{5n+18-3}$$

ومنه: $U_n = \dfrac{10n+45}{5n+15}$

* حساب $\lim U_n$

$$\lim U_n = \lim \frac{10n}{5n} = 2$$

3) حساب المجموع S_n حيث: $S_n = \frac{1}{U_0-2} + \frac{1}{U_1-2} + \cdots + \frac{1}{U_n-2}$

• نضع: $t_n = \frac{1}{U_n-2}$ و نكتب t_n بدلالة V_n "

$$t_n = \frac{1}{U_n-2} = \frac{1}{\frac{2V_n+3}{V_n-1} - 2\frac{(V_n-1)}{(V_n-1)}} = \frac{V_n-1}{2V_n+3-2V_n+2}$$

$$t_n = \frac{1}{5}V_n - \frac{1}{5} \quad : \text{ومنه}$$

$$S_n = t_0 + t_1 + \cdots + t_n$$

$$= \left(\frac{1}{5}V_0 - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5}V_1 - \frac{1}{5}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{5}V_n - \frac{1}{5}\right)$$

$$= \frac{1}{5}V_0 + \frac{1}{5}V_1 + \cdots + \frac{1}{5}V_n \underbrace{- \frac{1}{5} - \frac{1}{5} - \cdots - \frac{1}{5}}_{\text{عدد } (n+1)}$$

$$= \frac{1}{5}(V_0 + V_1 + \cdots + V_n) - \frac{1}{5}(n+1)$$

$$= \frac{1}{5}\,\frac{n+1}{2}(V_0 + V_n) - \frac{1}{5}(n+1)$$

$$= \frac{n+1}{10}\left(6 + \frac{5n+18}{3}\right) - \frac{1}{5}(n+1)$$

$$= \frac{n+1}{10}\left(\frac{5n+36}{3}\right) - \frac{1}{5}(n+1)$$

$$= (n+1)\left(\frac{5n+36}{30} - \frac{1\times 6}{5\times 6}\right)$$

$$= (n+1)\left(\frac{5n+30}{30}\right)$$

$$= (n+1)\left(1 + \frac{n}{6}\right)$$

تمرين 02:

① احتمال تكوين لجنة تضم رجل وزائب لها من بين 12 مختلفين بساوي $\frac{16}{33}$ لما $m=8$ و $n=4$

$$P_1 = \frac{A_n^1 \times A_m^1 + A_m^1 \times A_n^1}{A_{12}^2}$$

$$= \frac{(A_n^1 A_{12-n}) \times 2}{132}$$

$$= \frac{n(12-n)2}{132}$$

$$= \frac{-2n^2+24n}{132}$$

الحل المقترح:

لدينا: $m+n=12$

$(m=12-n)$

$$\frac{-2n^2+24n}{132} = \frac{16}{33}$$

$$-66n^2+792n = 2112$$

$$-66n^2+792n-2112=0$$ أي

$n=8$ أو $n=4$

مرفوض: ليس ضمن الخيارات

$m=12-4=8$ ومنه:

② المتتالية (V_n) هندسية لما: $\alpha=-1$

لدينا: $U_{n+1}=2U_n-1$ و $V_n=U_n+\alpha$

نعوض كل من ② و ③ في ① نجد:

$$U_n = V_n - \alpha \quad ②$$

$$U_{n+1} = V_{n+1} - \alpha \quad ③$$

$$V_{n+1} - \alpha = 2(V_n - \alpha) - 1 \quad ①$$

$$V_{n+1} - \alpha = 2V_n - 2\alpha - 1$$

$$V_{n+1} = 2V_n - \alpha - 1$$

(V_n) هندسية لما $V_{n+1} = qV_n$

$-\alpha - 1 = 0$ أي

$\alpha = -1$

③ مجموعة حلول المتراجحة $-(\ln x)^2 + 3\ln x - 2 \geq 0$ هي $[e, e^2]$

الحل:

$$-(\ln x)^2 + 3\ln x - 2 = 0$$

$\ln x = 1$ ، $x = e$

$\ln x = 2$ ، $x = e^2$

x	0		e		e^2		$+\infty$
$-(\ln x)^2 + 3\ln x - 2$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	
		مرفوض		مقبول		مرفوض	

تمرين رقم 03

* نظام المعطيات:

حسب اللون	حسب الرقم	حسب اللون والرقم
B ← 5	1 ← 5	1 ← 2
R ← 3	2 ← 4	2 ← 2
V ← 4	3 ← 3	3 ← 1
		1 ← 2
		2 ← 1
		3 ← 1

1 1 1
1 1 2
1 2 3
2 2
2 3
3

1 ← 1
2 ← 1
3 ← 1

1) سحب 3 كريات في آن واحد من الصندوق.

طريقة العد ← توفيقة ← عدد حالات السحب

$C_{12}^3 = 220$

① حساب $P(E)$

"E" سحب كريتين من الأخضر وكريتين الأخضر حمراء"

E ← BRV أو BBR أو BRR

$$P(E) = \frac{C_5^1 C_3^1 C_4^1 + C_5^2 C_3^1 + C_5^1 C_3^2}{220} = \frac{105}{220} = \frac{21}{44}$$

4. حساب $P(G)$ حيث G: "الأرباث تحمل ألوان العلم الوطني"

$G \to BRV$

$$P(G) = \frac{C_5^1 C_3^1 C_4^1}{220} = \frac{60}{220} = \frac{3}{11}$$

5. حساب $P(H)$ حيث H: "الأرباث تحمل نفس الرقم"

$H \to 111$ أو 222 أو 333

$$P(H) = \frac{C_5^3 + C_4^3 + C_3^3}{220} = \frac{15}{220} = \frac{3}{44}$$

حساب احتمال $P(G \cap H) = \frac{7}{220}$

"$G \cap H$" ← "الأرباث تحمل ألوان العلم الوطني وتحمل نفس الرقم"

$G \cap H \to$ (1)(1)(1) أو (2)(2)(2) أو (3)(3)(3)

$$P(G \cap H) = \frac{C_2^1 C_1^1 C_2^1 + C_2^1 C_1^1 C_1^1 + C_1^1 C_1^1 C_1^1}{220}$$

$$= \frac{4 + 2 + 1}{220} = \frac{7}{220}$$

استنتاج $P_G(H)$:

$$P_G(H) = \frac{P(G \cap H)}{P(G)} = \frac{7/220}{60/220} = \frac{7}{60}$$

استنتاج $P(G \cup H)$

$$P(G \cup H) = P(G) + P(H) - P(G \cap H)$$

$$= \frac{60 + 15 - 7}{220} = \frac{68}{220} = \frac{17}{55}$$

2. حساب الحالات كرباث بلون واحد دون إرجاع:

ترتيب العدد ← ترتيب ← عدد العناصر

$A_{12}^3 = 1320$

① المتغير العشوائي X: عدد الألوان المحصل عليها

وعليه $X = \{1, 2, 3\}$

قيم X	المجموعة
1	BBB أو RRR أو VVV (نفس اللون)
3	BRV (ثلاثة ألوان مختلفة)
2	(حالات أخرى)

ب) قانون احتمال X:

$$P(X=1) = \frac{A_5^3 + A_3^3 + A_4^3}{1320} = \frac{3}{44}$$

$$P(X=3) = \frac{\alpha \times A_5^1 A_3^1 A_4^1}{1320} = \frac{3}{11}$$

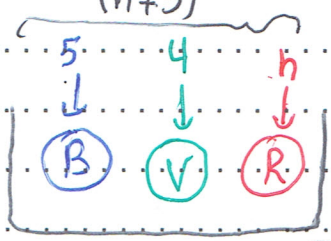
$$\alpha = \frac{3!}{1!\,1!\,1!} = 6$$

$$P(X=2) = 1 - \left(P(X=1) + P(X=3)\right) = \frac{29}{44}$$

ولخص قانون الاحتمال في الجدول التالي:

x_i	1	2	3
$P(X=x_i)$	$\frac{3}{44}$	$\frac{29}{44}$	$\frac{3}{11}$

3) سحب كريتان على التوالي مع الارجاع



عدد حالات السحب $\longrightarrow$ قائمة مع الكلمات المكتبة $(n+9)^2$

أ) حساب $P(D)$ حيث D "سحب كريتان لونهما أحمر"

$D \to RR$

$$P(D) = \frac{n^2}{(n+9)^2} = \left(\frac{n}{n+9}\right)^2$$

* حساب $\lim_{n \to +\infty} P(D)$

$$\lim_{n \to +\infty} P(D) = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{n}{n+9}\right)^2 = 1$$

نفسر النتيجة: نقول أن D حادثة شبه أكيدة

ج) حساب $P(F)$ حيث F "سحب كريتان لهما نفس اللون"

$F \to BB$ أو VV أو RR

$$P(F) = \frac{5^2 + 4^2 + n^2}{(n+9)^2} = \frac{n^2 + 41}{n^2 + 18n + 81}$$

* نعين أصغر عدد طبيعي n بحيث $P(F) \geq \frac{1}{2}$

$\frac{n^2+41}{n^2+18n+81} \geq \frac{1}{2}$ يكافئ $P(F) \geq \frac{1}{2}$

$\frac{2(n^2+41)}{2(n^2+18n+81)} - \frac{1}{2}\frac{(n^2+18n+81)}{(n^2+18n+81)} \geq 0$

$\frac{n^2-18n+1}{2(n^2+18n+81)} \geq 0$

n	$-\infty$		$0,055$		$17,94$		$+\infty$
$n^2-18n+1$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$2(n^2+18n+81)$		$+$		$+$		$+$	
الكسر		$+$	0	$-$	0	$+$	

$n \in \{18; 19; 20; 21; \dots\}$ لـ $P(F_n) \geq \frac{1}{2}$

و منه أصغر قيمة لـ n حتى يكون $P(F) \geq \frac{1}{2}$ هي $n = 18$

حل ت 03

الجزء الأول: $g(x) = (2x+1)e^x - 1$ ، $D_g = \mathbb{R}$

1) دراسة تغيرات g

- النهايات:

$\lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty} (2x+1)e^x - 1$ ت.ع.ت $(-\infty \times 0)$

$= \lim_{x \to -\infty} 2xe^x + e^x - 1 = -1$ (لأن $\lim xe^x = 0$ و $\lim e^x = 0$)

$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} (2x+1)e^x - 1 = +\infty$ (لأن $2x+1 \to +\infty$ و $e^x \to +\infty$)

- المشتقة: حتى $x \in \mathbb{R}$

$g'(x) = 2e^x + e^x(2x+1)$

$= (2x+3)e^x$

إشارة المشتقة:

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		$+\infty$
$2x+3$		$-$	0	$+$	
e^x		$+$		$+$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	

اتجاه التغير: g متناقصة تماما على $]-\infty, -\frac{3}{2}]$

g متزايدة تماما على $[-\frac{3}{2}, +\infty[$

جدول التغيرات:

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	$\|$	$+$	
$g(x)$	-1	↘	$-2e^{-\frac{3}{2}}-1$	↗	0	↗	$+\infty$

② إثبات أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حل وحيد α:

- على المجال $]-\infty, -\frac{3}{2}]$: المعادلة $g(x)=0$ لا تقبل حل لأن $0 \notin]-2e^{-\frac{3}{2}}-1, -1[$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -1$ و $g(-\frac{3}{2}) = -2e^{-\frac{3}{2}} - 1$
- على المجال $[-\frac{3}{2}, +\infty[$: g مستمرة ورتيبة تماما على المجال $[-\frac{3}{2}, +\infty[$ و $g(-\frac{3}{2}) = -2e^{-\frac{3}{2}} - 1$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ أي $0 \in]-2e^{-\frac{3}{2}}-1 ; +\infty[$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل حل وحيد α على المجال $]-\frac{3}{2}, +\infty[$

مما سبق نستنتج أن $g(x)=0$ تقبل حل وحيد α على $\mathbb{R}$

* التحقق أن $\alpha = 0$

$g(0) = 0$

③ إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

الجزء الثاني: $f(x) = x(1-e^{-x})^2$; $D_f = \mathbb{R}$

① حساب النهايات

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} x\left(1-e^{-x}\right)^2 = -\infty$ ($-\infty$; $-\infty$; $+\infty$)

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x\left(1-e^{-x}\right)^2 = +\infty$ ($+\infty$; 0)

② إثبات أن $f'(x) = (e^{-x}-1)g(-x)$ حيث $x \in \mathbb{R}$

$f'(x) = (1)(1-e^{-x})^2 + (2)(e^{-x})(1-e^{-x})x$ (ع.ج ; ع.ج)

$= (1-e^{-x})\left[(1-e^{-x}) + 2e^{-x}\cdot x\right]$

$= (1-e^{-x})\left[(2x-1)e^{-x} + 1\right]$

$= (e^{-x}-1)\left[(-2x+1)e^{-x} - 1\right]$

$= (e^{-x}-1)\cdot g(-x)$

• إثبات أن f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

إشارة $f'(x)$

$e^{-x}-1 = 0$

$e^{-x} = 1$

$x = 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$e^{-x}-1$		$+$	0	$-$	
$g(-x)$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$+$	0	$+$	

ومنه f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

جدول تغيرات f

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

ملاحظة: $O(0,0)$ نقطة انعطاف لـ $(\mathcal{C}_f)$ لأن $f'(x)$ تنعدم عند $x_0 = 0$ وتغير إشارتها.

* إثبات أن $(\Delta): y = x$ مقارب مائل لـ (C_f)

لدينا:

$$f(x) - y = x(1 - e^{-x})^2 - x$$
$$= x(1 + e^{-2x} - 2e^{-x}) - x$$
$$= x(e^{-2x} - 2e^{-x})$$
$$= x e^{-x}(e^{-x} - 2)$$

ولدينا:

$$\lim_{x \to +\infty} x e^{-x}(e^{-x} - 2) = 0$$

($x e^{-x} \to 0$ ، $e^{-x} - 2 \to -2$)

وعليه $(\Delta): y = x$ م.م. مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$

الوضع النسبي: لدينا $f(x) = x e^{-x}(e^{-x} - 2)$

$e^{-x} - 2 = 0$
$e^{-x} = 2$
$-x = \ln 2$
$x = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$

x	$-\infty$		$\ln\left(\frac{1}{2}\right)$		0		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$	
e^{-x}		$+$		$+$		$+$	
$e^{-x} - 2$		$+$	0	$-$		$-$	
$f(x) - y$		$-$	0	$+$	0	$-$	
الوضع	(C_f) تحت (Δ)		(C_f) يقطع (Δ) في $\left(\ln\frac{1}{2}, \ln\frac{1}{2}\right)$	(C_f) فوق (Δ)	(C_f) يقطع (Δ) في $O(0,0)$	(C_f) تحت (Δ)	

4) معادلة المماس عند $x_0 = 0$

$$y = f'(0)(x - 0) + f(0)$$
$$y = 0(x - 0) + 0$$
$$(T): y = 0$$

ب/ الوضع النسبي بين (C_f) و (T): لدينا $f(x) - y = f(x)$

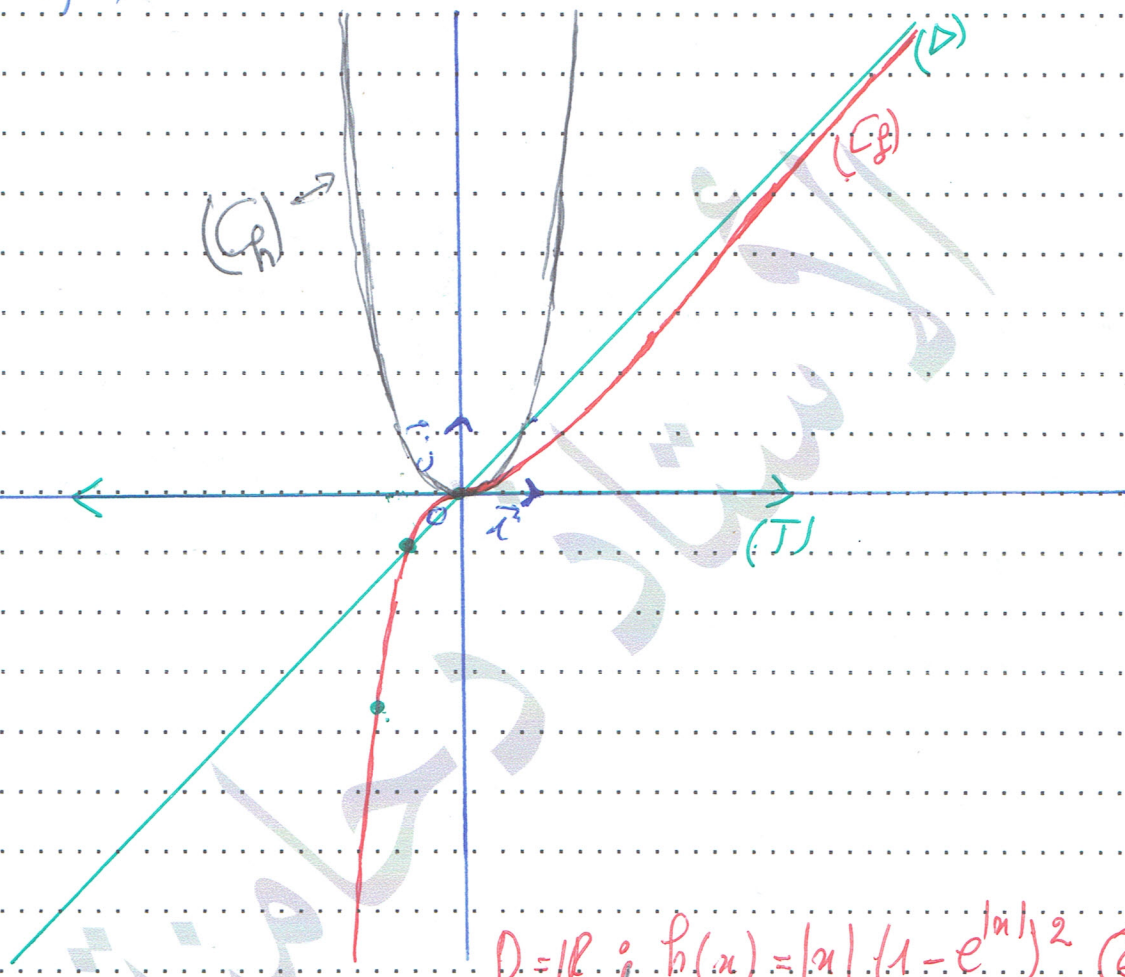
x	$-\infty$		0		$+\infty$
x		$-$	0	$+$	
$(1 - e^{x})^2$		$+$	0	$+$	
$f(x) - y$		$-$	0	$+$	
الوضع	(C_f) فوق (T)		(T) يخترق (C_f) في $(0,0)$	(C_f) تحت (T)	

8/ معادلة المماس (T) عند $x_0 = 0$ يخترق (C_f) عند $x_0 = 0$ فإن (C_f) يقبل نقطة انعطاف هي $O(0,0)$

5) حساب $f(-1)$: $f(-1) \simeq -2,75$

x	0	1
y	0	1

$(\Delta): y = x$ — $(T) = (xx')$



6) $D_h = \mathbb{R}$; $h(x) = |x|(1-e^{|x|})^2$

من أجل $x \in \mathbb{R}$ فإن $-x \in \mathbb{R}$

ولدينا:

$$h(-x) = |-x|(1-e^{|-x|})^2 = |x|(1-e^{|x|})^2 = h(x)$$

$\Leftarrow$ ومنه h دالة زوجية

رسم (C_h)

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h(x) =$	$h(x) = -x(1-e^{x})^2$				$h(x) = x(1-e^{x})^2$
	$h(x) = -f(x)$				
	(C_h) نظير (C_f) بالنسبة إلى حامل محور الفواصل				×

النتيجة

إتمام الرسم على $]0,+\infty[$

بما أن h دالة زوجية

فإن (C_h) متناظر بالنسبة إلى حامل محور التراتيب