الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية

مديرية التربية لولاية سعيدة
ثانوية الدكتور يوسف الدمرجي

بكالـــوريا تجـــريبي في مــــادة الرياضيــــات
***** دورة ماي 2018*****

المستوى: نهائي رياضيات . المدة: 04 ساعات ونصف .

*** على الطالب أن يختار أحد الموضوعين ****

الموضــــوع الأول

التمرين الأول :(04 نقط)

المستوي المركب مزود بمعلم متعامد و متجانس ، نعتبر النقطتين A ، B ذات اللاحقتين 1 و2 على الترتيب وليكن θ عدد حقيقي حيث : $\theta \in]0;\pi[$

نسمي D النقطة ذات اللاحقة $Z_D = 1 + e^{2i\theta}$.

1) بين أن النقطة D تنتمي إلى الدائرة (C) التي مركزها النقطة A ونصف قطرها 1 .

2) أ- عبر عن $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}\right)$ بدلالة θ .

ب- استنتج مجموعة (E) للنقطة D عندما يمسح θ المجال $]0;\pi[$.

3) لتكن النقطة D' صورة النقطة D بالدوران R الذي مركزه O وزاويته -2θ ولتكن $Z_{D'}$ لاحقة النقطة D'

أ- بين أن : $Z_{D'} = \overline{Z_D}$.

ب- تحقق أن : D' تنتمي إلى الدائرة (C) .

4) فيما يأتي نفرض أن : $\theta = \frac{\pi}{3}$.

أ) لتكن النقطة A' صورة النقطة A بالدوران R الذي مركزه O وزاويته $\frac{-2\pi}{3}$.

- عين المجموعة (C') صورة الدائرة (C) بالدوران R.

ب) عين لاحقة النقطة D' صورة النقطة D بالدوران R .

ت) بين أن المثلث ADO متقايس الأضلاع .

التمرين الثاني: (03 نقط)

من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n نضع : $S_n = 1^3 + 2^3 + \ldots.. + n^3$.

1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم نضع : $S_n = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

2) تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي K غير معدوم فإن : $PGCD(K, K+1) = 1$.

3) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي K غير معدوم فإن : $PGCD(S_{2K}, S_{2K+1}) = (2K+1)^2$.

4) عين من أجل كل عدد طبيعي K غير معدوم : $PGCD(2K+1, 2K+3)$.

5) أحسب : $PGCD(S_{2K+1}, S_{2K+2})$.

6) أ- استنتج حسب قيم العدد الطبيعي n : $PGCD(S_n ; S_{n+1})$.

ت- استنتج : $PGCD(S_{2017} ; S_{2018})$.

(ملاحظة : يمكن استعمال النتيجة $PGCD(a,b) = 1$ يكافــئ $PGCD(a^2, b^2) = 1$) .

التمرين الثالث : (03 نقط)

في الفضاء المزود بمعلم متعامد متجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$، نعتبر النقطة : $\Omega\left(2,2\ ,-2\right)$،

والمستقيم $(D):\begin{cases} x=1+2t \\ y=1+2t\ (t\in\mathbb{R}) \\ z=-1+t \end{cases}$

1) بين أن المسافة بين Ω و (D) هي : $\sqrt{2}$.

2) حدد معادلة ديكارتية لسطح الكرة (S) التي مركزها Ω ومماسه للمستقيم (D) .

3) أعط تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) القطري لسطح الكرة (S) والذي يوازي (D) .

4) جد معادلتي المستويين (P) و (P') المتماسين مع سطح الكرة (S) والعموديين على المستقيم (D) .

التمرين الرابع :(04 نقط)

(U_n) متتالية عددية معرفة على N بحدها الأول u_0 ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=\dfrac{u_n+1}{\sqrt{u_n^2+1}}-1$

-1 بين أن هذه المتتالية تكون ثابتة إذا كان لـ u_0 قيمتان يطلب تحديدهما .

-2 نفرض أن : $-1\prec u_0\prec 0$

أ- برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $-1\prec u_n\prec 0$.

ب) بين أن المتتالية (U_n) متناقصة تماما.

ج) استنتج أن المتتالية (U_n) متقاربة .

-3 بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $0\prec u_{n+1}+1\prec \dfrac{1}{\sqrt{u_0^2+1}}(u_n+1)$.

-4 نضع : $\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{u_0^2+1}}$.

أ- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $0\prec u_n+1\le \alpha^n(u_0+1)$.

ب- أحسب نهاية (u_n) .

التمرين الخامس : (06 نقط)

I) لتكن g دالة عددية معرفة على $]0,+\infty[$ بـ : $g(x)=x-\dfrac{1}{x}-2\ln x$

1) أحسب نهايتي الدالة g عند 0 و عند $+\infty$.

2) أدرس تغيرات الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها .

3) أحسب $g(1)$ ثم استنتج إشارة g على المجال $]0,+\infty[$.

II) نعتبر الدالة f المعرفة على $]0,+\infty[$ كما يلي:

$f(x)=x+\frac{1}{x}-(lnx)^2-2$.

و ليكن (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ (الوحدة الطول $1cm$) .

1) أ- بين أن : $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{(\ln x)^2}{x}=0$ ثم أحسب نهاية الدالة f عند $+\infty$.

ب- أثبت أنه من أجل كل x من $]0,+\infty[$ فإن: $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=f(x)$

ثم استنتج نهاية الدالة f عند 0وفسرها بيانيا .

2) أ- أثبت أنه من أجل كل x من $]0,+\infty[$ لدينا: $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x}$.

ب- استنتج تغيرات الدالة f ثم أنشئ جدول تغيراتها .

3) أنشئ المنحنى (C) .

III)

1) بين أن الدالة $H(x)=x(\ln x)^2-2x\ln x+2x$ هي: دالة أصلية للدالة : $h(x)=(\ln x)^2$
على المجال $]0,+\infty[$.

2) استنتج F مجموعة الدوال الأصلية للدالة f على المجال $]0,+\infty[$.

3) أحسب بالسنتمتر المربع مساحة الحيز للمستوي المحدد بالمنحنى (C) ومحور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتيهما :
$x=1$ و $x=e$.

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقط)

لتكن المعادلة ذات المجهول x في مجموعة الأعداد الناطقة التالية : $78x^{3}+ux^{2}+vx-14=0$.

حيث : u و v عددان صحيحان .

1) نفرض أن : $x=\frac{14}{39}$ حل للمعادلة .

أ- بين أن العددين u و v يحققان العلاقة : $14u+39v=1129.....(1)$.

ب- تحقق أن الثنائية $(-25,9)$ هي حل للمعادلة : $14u+39v=1$.

ت- استنتج ثنائية (x_0,y_0) حلا خاصا للمعادلة : $14u+39v=1129$.

2) حل المعادلة (1) في Z^{2} .

3) من بين حلول المعادلة (1) عين الحل الذي يكون فيه u أصغر عدد طبيعي ممكن .

التمرين الثاني: (05 نقط)

1) ليكن كثير الحدود $P(z)$ للمتغيّر المركّب z والمعرّف كما يلي : $p(z)=z^{2}-\left(\frac{5+i}{2}\right)z+1+i$

أ- أحسب $p(2)$.

ب- عين عدد حقيقيين a و b حتى يكون : $p(z)=(z-2)(az+b)$.

ت- حل في C المعادلة $P(Z)=0$. (نضع z_0 الحل الحقيقي و z' الحل الآخر) .

2) نعتبر في المستوي المركب و المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ (وحدة الطول $5cm$)

نضع : $Z_0=2$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $Z_{n+1}=Z'Z_n$ حيث (Z' حل المعادلة في السؤال 01)

ونسمي A_n صورة العدد المركب z_n .

أ- أحسب الأعداد المركبة : z_1 ، z_2 ، z_3 ، z_4 .

ب- علم النقط : A_0 ، A_1 ، A_2 ، A_3 ، A_4 .

3) من أجل كل عدد طبيعي n نعرف المتتالية العددية (u_n) بـ: $u_n=|z_n|$

أ- بين أن المتتالية (u_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .

ب- أكتب عبارة u_n بدلالة n .

ت- عين نهاية المتتالية (u_n) ماذا تستنتج حول تقارب المتتالية (u_n) ؟ .

4) أ- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $\frac{Z_{n+1}-Z_n}{Z_n}=i$.

ت- استنتج طبيعة المثلث OA_nA_{n+1}.

5) من أجل كل عدد طبيعي n نسمي L_n طول الحط المنكسر المحدد بالنقط : A_0، A_1، A_2، .... ، A_n .

أ- أحسب الأطوال : A_0A_1 ، A_1A_2 ، A_2A_3 .

ب- تحقق أن : $\frac{A_2A_3}{A_1A_2}=\frac{A_1A_2}{A_0A_1}=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

ت- عبر عن L_n بدلالة n ثم حدد نهاية L_n .

التمرين الثالث: (04 نقط)

في الفضاء المزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، نعتبر النقط : $A(2;-3;-1)$ ، $B(1;0;2)$ ، $C(0;1;3)$

1) بين أن النقط : A ، B ، C ليست في استقامة .

2) عين عددين حقيقيين a و b حتى يكون $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\1\end{pmatrix}$ شعاع ناظمي للمستوي (ABC) .

3) استنتج معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) .

4) من أجل كل عدد حقيقي t حيث $t \in]0,+\infty[$ نعتبر (S_t) مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء التي تحقق المعادلة : $x^2+y^2+z^2-(2\sin t)x-2ty-2z+t^2+\sin^2 t-1=0$

أ- بين أن سطح كرة محددا مركزها Ω_t ونصف قطرها R .

ب- ناقش حسب قيم الوسيط t تقاطع (S_t) والمستوي (ABC).

التمرين الرابع: (07 نقط)

1: نعتبر g دالة عددية معرفة على $]0,+\infty[$ بـ : $g(x)=e^x-x-1$

1) أدرس تغيرات الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها .

2) استنتج إشارة g على المجال $]0,+\infty[$.

2: نعتبر الدالة h المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ كما يلي: $h(x)=-xe^x+2e^x-1$.

1) أدرس تغيرات الدالة h ثم أنشئ جدول تغيراتها .

2) أثبت أن المعادلة $h(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $1.8 \prec \alpha \prec 1.9$.

3) استنتج إشارة $h(x)$ على المجال $]0,+\infty[$.

3: نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ كما يلي: $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x-x}$.

و ليكن (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ (الوحدة $10cm$) .

1) أحسب نهاية الدالة f عند $+\infty$ وفسرها هندسيا .

2) أدرس تغيرات الدالة f ثم أنشئ جدول تغيراتها .

3) بين أن : $f(\alpha)=\dfrac{1}{\alpha-1}$. ثم أعط حصرا لـ $f(\alpha)$.

4) استنتج أنه من أجل كل x من $[0,1]$ فإن : $f(x)\in[0,1]$.

5) أ- بين أنه من أجل كل x من $]0,+\infty[$ فإن : $f(x)-x=\dfrac{(1-x)g(x)}{e^x-x}$.

ت- استنتج وضعية (C) بالنسبة للمستقيم (Δ) ذو المعادلة : $y=x$ على المجال $]0,+\infty[$.

6) بين أن (C) يقبل مستقيما مقاربا (Δ) عند $+\infty$ يطلب تحديد معادلته .

7) أنشئ : (Δ) و (C) في نفس المعلم على المجال $[0,1]$.

4: نعتبر المتتالية العددية (U_n) المعرفة على N كما يلي : $u_0=\dfrac{1}{2}$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=f(u_n)$

أ- باستعمال الرسم السابق مثل الحدود : u_0 ، u_1 ، u_2 ، u_3 ، u_4 .(دون حسابها وموضحا خطوط الإنشاء) .

ب- ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (U_n) وتقاربها .

ت- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $\dfrac{1}{2}\le u_n \le u_{n+1} \le 1$.

ث- بين أن المتتالية (U_n) متقاربة ثم حدد نهايتها .

(ملاحظة : في هذا الجزء يمكنك توظيف نتائج السؤال 4 و 5 من الجزء 03)

بالتوفيق والنجاح في امتحان شهادة البكالوريا 2018

أستاذ المادة : أبركان عبد الكريم