مجلة Top Maths

1As

تتمحور حول دروس

- ✓ الهندسة المستوية
- ✓ الهندسة في الفضاء
- ✓ الاحصاء

- ❖ الهندسة المستوية
- ❖ الهندسة في الفضاء
- ❖ الاحصاء

تتضمن

- ✓ دروس مفصلة
- ✓ امثلة
- ✓ تمارين مع الحلول
- ✓ تمارين نموذجية
- ✓ نموذج امتحان مع حل مقترح

الاستاذ بوشناق يوسف

افريل 2020

Top Maths Tlemcen

بسم الله الرحمن الرحيم

السلام عليكم

اقدم لكم اخواني الاساتذة وابنائي الطلبة هذا العمل و المتمثل في تجميعية الفصل الثالث للسنة الاولى علمي الذي يتضمن دروس :

- ✓ الهندسة المستوية
- ✓ الهندسة في الفضاء
- ✓ الاحصاء
- ✓ نموذج امتحان مع حل مقترح

»رَبِّ قَدْ آتَيْتَنِى مِنَ الْمُلْكِ وَعَلَّمْتَنِى مِنْ تَأْوِيلِ الأَحَادِيثِ فَاطِرَ السَّمَاوَاتِ وَالأَرْضِ أَنْتَ وَلِيِّى فِى الدُّنْيَا وَالآخِرَةِ تَوَفَّنِى مُسْلِمًا وَأَلْحِقْنِى بِالصَّالِحِينَ«

لا تنسونا بالدعاء محبكم في الله الاستاذ بوشناق يوسف

الهندسة المستوية

متوازي الأضلاع:

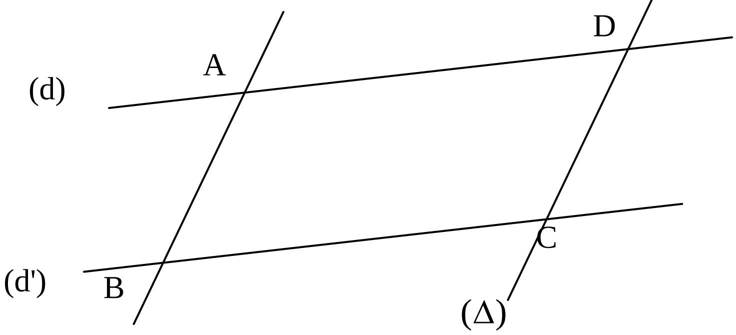
نشاط :

أرسم مستقيمين متوازيين تماما (d) و (d') ، علم النقطتين A و B على المستقيمين (d) و (d') على الترتيب.

أرسم مستقيم (Δ) يوازي تماما المستقيم (AB) .

المستقيم (Δ) يقطع (d) و (d') في النقطتين D و C على الترتيب.

ما هي طبيعة الرباعي ABCD



حل النشاط:

لدينا : (BC) // (AD) و (CD) // (AB)

إذن : الرباعي ABCD هو متوازي الأضلاع.

التعريف:

متوازي الأضلاع هو رباعي حاملا كل ضلعين متقابلين فيه ، متوازيين .

ABCD متوازي الأضلاع معناه [(CD) // (AB) و (BC) // (AD)]

نشاط 2 :

أ) علم على ورقة غير مسطرة ثلاث نقط A ، B ، O ليست في استقامية.

ب) أنشئ النقطتين C و D نظيرتي A و B بالنسبة إلى النقطة O على الترتيب.

ج) ما هي طبيعة الرباعي ABCD ؟

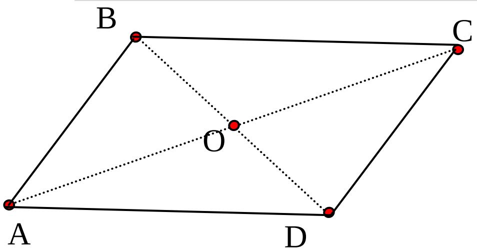
د) تحقق أن :

1. القطعتين [AC] و [BD] متناصفتين .
2. كل ضلعين متقابلين متقايسان .
3. كل زاويتين متقابلتين متقايستيان .

ه) علم النقط A' ، B' ، C' ، D' من [AB] و [BC] و [CD] و [DA] على الترتيب حيث النقط A' ، B' ، C' ، D' لا تنتمي إلى أضلاع الرباعي ABCD و BA' = CB' = DC' = AD'

و) ما نوع الرباعي A'B'C'D' ؟ (إرشاد : يمكن البدء بنوع كل من الرباعيين A'CC'A و D'BB'D).

حل النشاط 2 :



أ. تعليم النقط : A ، B ، O ليست في استقامية.

ب. إنشاء النقطتين C و D نظيرتي A و B بالنسبة إلى النقطة O على الترتيب.

ج. طبيعة الرباعي ABCD

لدينا المستقيمان (AB) و (DC) متناظران بالنسبة إلى O إذن هما متوازيان

وكذلك المستقيمان (AD) و (BC) متناظران بالنسبة إلى O إذن هما متوازيان

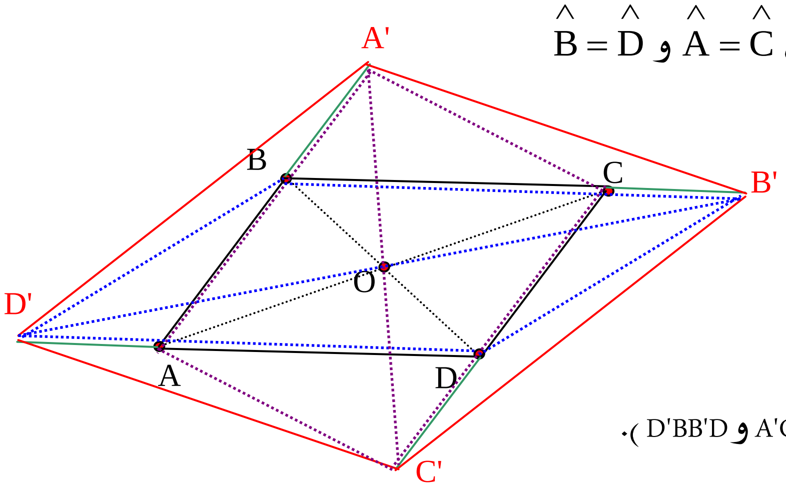
وبالتالي الرباعي ABCD متوازي أضلاع .

د. التحقيق

1) بما أن الرباعي ABCD متوازي أضلاع فإن قطراه [AC] و [BD] متناصفين

2) بما أن الرباعي ABCD متوازي أضلاع فإن AB = CD و BC = AD

3) بما أن الرباعي ABCD متوازي أضلاع فإن $\hat{A} = \hat{C}$ و $\hat{B} = \hat{D}$



ه. تعليم النقط 'A' ، B' ، C' ، D من (AB]

و (BC] و (CD] و(DA] على الترتيب

حيث النقط 'A' ، B' ، C' ، D لا تنتمي

إلى أضلاع الرباعي ABCD

و BA' = CB' = DC' = AD'

و) ما نوع الرباعي A'B'C'D' ؟

(إرشاد : يمكن البدء بنوع كل من الرباعيين A'CC'A و D'BB'D).

لدينا : (AB) // (CD) ومنه (AA') // (CC')

ولدينا : AB = CD و BA' = DC' إذن AA' = CC' وبالتالي الرباعي A'CC'A متوازي أضلاع

إذن قطراه [A'C] و [AC] لهما نفس المنتصف O .

لدينا : (AD) // (BC) ومنه (D'D) // (BB')

ولدينا : AD =BC و AD' = CB' إذن DD' = BB' وبالتالي الرباعي D'BB'D متوازي أضلاع

إذن قطراه [D'B] و [BD] لهما نفس المنتصف O .

ولدينا : القطران [AC] و [BD] للمتوازي الأضلاع ABCD لهما نفس المنتصف O

إذن : القطعتان [A'C'] و [D'B'] لهما نفس المنتصف O وبالتالي الرباعي A'B'C'D' هو متوازي أضلاع.

خواص :

من أجل كل رباعي ABCD :

1) [AC] و [BD] متناصفان معناه ABCD متوازي الأضلاع .

2) [AB =DC و AD = BC] معناه ABCD متوازي الأضلاع .

3) [AB =DC و (AB)//(DC)] معناه ABCD متوازي الأضلاع .

4) [$A\hat{B}C = A\hat{D}C$ و $B\hat{A}D = B\hat{C}D$] معناه ABCD متوازي الأضلاع .

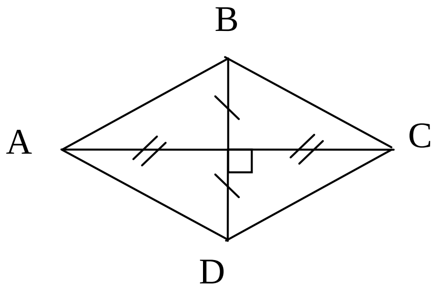
نشاط 3 :

1) أنشئ باستعمال المدور والمسطرة فقط متوازي أضلاع قطراه متعامدان، تحقق أن أضلاعه متقايسة، ماذا نسمي متوازي الأضلاع في هذه الحالة ؟

2) أنشئ متوازي أضلاع إحدى زواياه قائمة ، بين أن كل زواياه قائمة ، ماذا نسمي متوازي الأضلاع في هذه الحالة ؟ متى يكون مربعا ؟

حل النشاط :

1) إنشاء متوازي أضلاع قطراه متعامدان



ABCD متوازي أضلاع إذن [AC] و [BD] متناصفتان

ولدينا قطراه متعامدان إذن (BD) هو محور القطعة [AC]

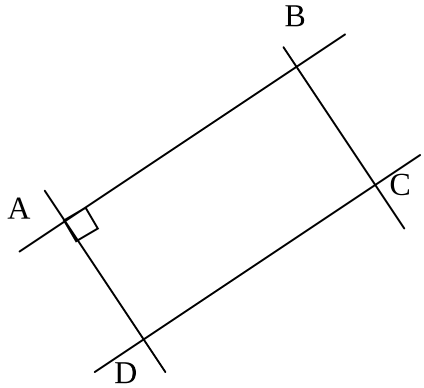
و(AC) هو محور القطعة [BD]

وبالتالي المثلث ABD متساوي الساقين AB = AD

بما أن ABCD متوازي أضلاع فإن : AB = BC = CD = DA

متوازي أضلاع ABCD يسمى معين .

2) إنشاء متوازي أضلاع إحدى زواياه قائمة



ABCD متوازي أضلاع إذن $(DC) // (AB)$ و$(AD) // (BC)$

متوازي أضلاع ABCD إحدى زواياه قائمة إذن $(AD) \perp (AB)$

ومن التوازي نستنتج أن $(BC) \perp (AB)$ و$(CD) \perp (BC)$

و$(AD) \perp (CD)$

في هذه الحالة متوازي أضلاع ABCD يسمى مستطيل.

وإذا كان ضلعان متتاليان منه متقايسان فإن ABCD يكون مربعا .

متوازيات الأضلاع الخاصة :

المعين :

هو متوازي أضلاع له ضلعان متتاليان متقايسان .

- ✓ ABCD معين معناه [$(BD) \perp (AC)$ و [AC] ، [BD] متناصفان]
- ✓ ABCD معين معناه [AB = BC = CD = DA]
- ✓ إذا كان ABCD معينا فإن [(AC) ينصف كلا من الزاويتين $B\hat{A}D$ و $B\hat{C}D$ و (BD) ينصف كلا من الزاويتين $A\hat{B}C$ و $A\hat{D}C$]

المستطيل :

هو متوازي أضلاع له زاوية قائمة .

- ✓ ABCD مستطيل معناه [$\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D} = 90^\circ$]
- ✓ ABCD مستطيل معناه [AC = BD و [AC] ، [BD] متناصفان]

المربع :

هو متوازي أضلاع له ضلعان متتاليان متقايسان وزاوية قائمة.

- ✓ ABCD مربع معناه [$\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D} = 90^\circ$ و AB = BC = CD = DA]
- ✓ ABCD مربع معناه [AC = BD و $(BD) \perp (AC)$ و [AC] ، [BD] متناصفان]

التمرين الاول :

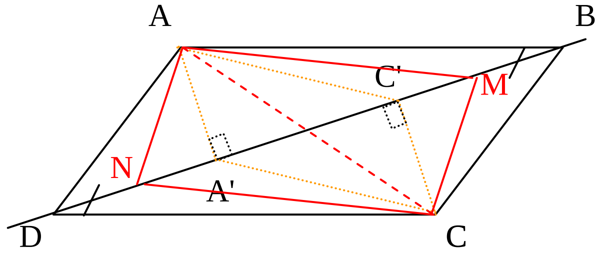
ABCD متوازي أضلاع حيث $AB \neq AD$.

أ) النقطتان 'A و 'C هما المسقطان العموديان للنقطتين A و C على (BD) على الترتيب.
بين أن 'AA'CC متوازي أضلاع.

ب) M نقطة من [BC'] و N نقطة من القطعة [A'D] حيث: BM = DN
ما هي طبيعة الرباعي AMCN .

حل التمرين :

أ) نقارن بين المثلثين القائمين 'ADA و 'BCC نجد 'AA' = CC
ولدينا (CC') // (AA') لأنهما عموديين على نفس المستقيم (BD)
وبالتالي : 'AA'CC متوازي أضلاع.



ب) نسمي O منتصف كل من [AC] و [BD]
ولدينا : BM = DN إذن O منتصف كل من [AC] و [MN]
إذن الرباعي AMCN متوازي أضلاع .

المثلثات والمستقيمات الخاصة:

نشاط :

أرسم دائرة مركزها A ، علم على هذه الدائرة النقط B ، C ، D حيث

AB = BC و D نظيرة B بالنسبة إلى النقطة A .

ما هي طبيعة كل من المثلثات : ACD ، ABC ، BCD

عين القياسين التاليين : $\widehat{BAC}$ و $\widehat{BCD}$.

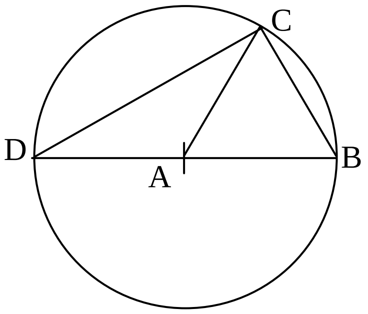
حل النشاط :

المثلث ACD متساوي الساقين ، AD = AC نصفي قطر الدائرة

المثلث ABC متقايس الأضلاع ، AC = AB = BC .

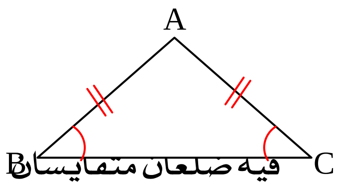
المثلث BCD قائم في C .

$\widehat{BAC} = 60^{\circ}$ و $\widehat{BCD} = 90^{\circ}$



المثلثات الخاصة :

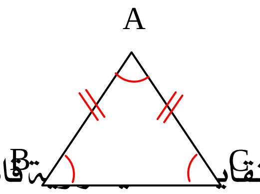
المثلث متساوي الساقين



فيه ضلعان متقايسان

$A\hat{B}C = A\hat{C}B$

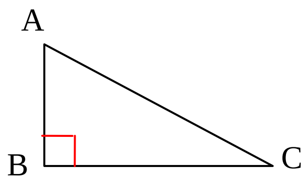
المثلث متقايس الأضلاع



أضلاعه متقايسة

$A\hat{B}C = A\hat{C}B = B\hat{A}C = 60^{\circ}$

المثلث القائم



ة قائمة

$A\hat{B}C = 90^{\circ}$

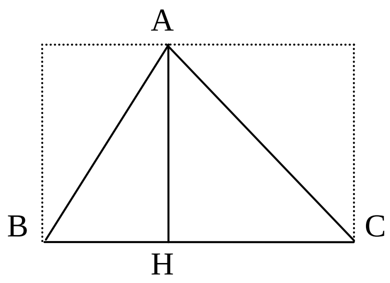
المستقيمات الخاصة في مثلث :

نشاط :

ABC مثلث كيفي وH المسقط العمودي للنقطة A على (BC) .

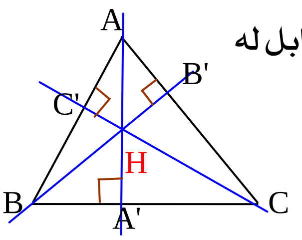
أحسب مساحة لكل من المثلثين ABH و ACH . ما هي مساحة المثلث ABC ؟

حل النشاط :



$s(ABH)=\frac{1}{2}AH.HB$ ، $s(ACH)=\frac{1}{2}AH.HC$

لدينا : BH + CH = BC ومنه : $s(ABC)=\frac{1}{2}AH.BC$



- ✓ الارتفاع في مثلث هو المستقيم الذي يشمل أحد رؤوس المثلث ويعامد حامل الضلع المقابل له
- ✓ ارتفاعات مثلث متقاطعة في نقطة واحدة

مساحة مثلث : $s(ABC)=\frac{1}{2}AA'.BC$ ، $s(ABC)=\frac{1}{2}BB'.AC$ ، $s(ABC)=\frac{1}{2}CC'.AB$

نشاط:

أرسم مثلثا كيفيا ABC ، و (Δ_1) ، (Δ_2) محورا الضلعين [BC] و [AB] على الترتيب يتقاطعان في النقطة M .

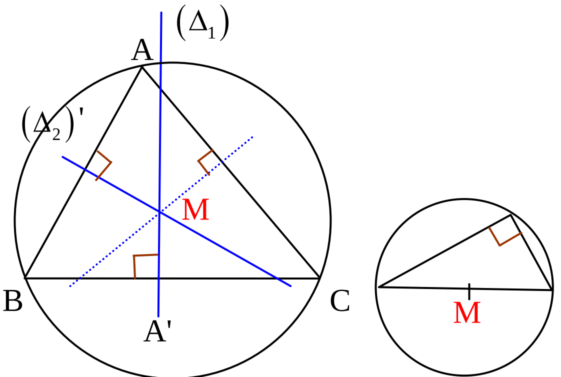
أ) بين أن محور الضلع [AC] يشمل النقطة M .

ب) عين مركز الدائرة التي تشمل النقط A ، B ، C وارسمها.

ج) عين موقع النقطة M في الحالة التي يكون فيها المثلث ABC قائما في A .

د) أين تقع النقطة M في الحالة التي يكون فيها المثلث ABC منفرج الزاوية .

حل النشاط :



لدينا (Δ_1) محور [BC] إذن : MB = MC

لدينا (Δ_2) محور [AB] إذن : MA = MB

ومنه : MA = MC معناه أن M هي نقطة من محور القطعة [AC] .

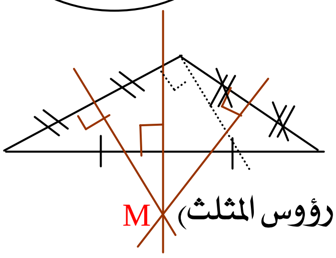
لدينا MA = MB = MC وبالتالي مركز الدائرة التي تشمل

النقط A ، B ، C هو النقطة M .

موقع النقطة M في الحالة التي يكون فيها المثلث ABC **قائما** في A

هو منتصف القطعة [BC]

تقع النقطة M في الحالة التي يكون فيها المثلث ABC منفرج الزاوية ، خارج المثلث .



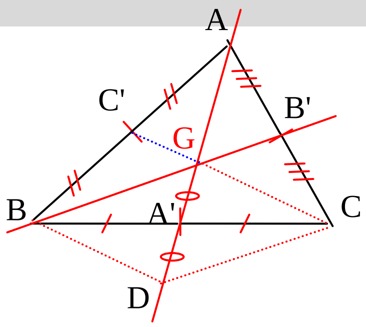
- ✓ المحور هو محور أحد أضلاعه.
- ✓ محاور مثلث متقاطعة في نقطة واحدة .
- ✓ نقطة تقاطع محاور مثلث هي مركز الدائرة المحيطة به (التي تشمل رؤوس المثلث)

نشاط :

ABC مثلث كيفي ، 'A' ، B' ، C منتصفات القطع [BC] ، [AC] ، [AB] على الترتيب.

1. ماذا نسمي المستقيمين (AA') و (BB') في المثلث ABC ؟
2. المستقيمان (AA') و (BB') يتقاطعان في النقطة G ، أرسم النقطة D نظيرة النقطة G بالنسبة إلى 'A .
3. ما هي طبيعة الرباعي BDCG ؟
4. استنتج DC = 2 GB' وأن النقطة G هي منتصف القطعة [AD] و (BD) // (GC') .
5. بين أن النقط C ، G ، 'C في استقامية .
6. بين أن AG = 2 GA' و BG = 2 GB' و CG = 2 GC' .

حل النشاط:



نسمي المستقيمين (AA') و (BB') المتوسطان في المثلث ABC .

القطعتان [BC] و [GD] متناصفتان إذن الرباعي BDCG متوازي أضلاع .

لدينا في المثلث ACD ، (DC) // (GB') ومنه حسب مبرهنة طاليس

$\frac{AB'}{AC} = \frac{AG}{AD} = \frac{GB'}{DC}$ ولدينا 'B منتصف القطعة [AC] إذن : $\frac{AB'}{AC} = \frac{1}{2}$

إذن DC = 2 GB' و AD = 2 AG ومنه النقطة G هي منتصف القطعة [AD] .

في المثلث ABD ، النقطة G منتصف القطعة [AD] و 'C منتصف القطعة [AB] إذن : (BD) // (GC') .

الرباعي BDCG متوازي أضلاع إذن (BD) // (GC) ولدينا (BD) // (GC') إذن (GC) // (GC')

وهذان المستقيمان لهما نقطة مشتركة G إذن النقط C ، G ، 'C في استقامية .

لدينا : AG = GD و GD = 2 GA' إذن AG = 2 GA'

لدينا : BG = DC و DC = 2 GB' إذن BG = 2 GB'

في المثلث ABD ، (BD) // (GC') ومنه $\frac{AC'}{AB} = \frac{AG}{AD} = \frac{GC'}{BD} = \frac{1}{2}$ ، ومنه : BD = 2 GC'

بما أن BD = GC فإن : GC = 2 GC'

- ✓ المتوسط في مثلث هو المستقيم الذي يشمل أحد رؤوس المثلث ومنتصف الضلع المقابل له.
- ✓ متوسطات مثلث متقاطعة في نقطة واحدة هي مركز ثقله .
- ✓ (AA') و (BB') و (CC') متوسطات المثلث ABC و G مركز ثقله لدينا :
- ✓ AG = 2 GA' و BG = 2 GB' و CG = 2 GC' .

نشاط

ABC مثلث كيفي ، المنصفان الداخليان لزاويتي الرأسين A و B يتقاطعان في النقطة S .

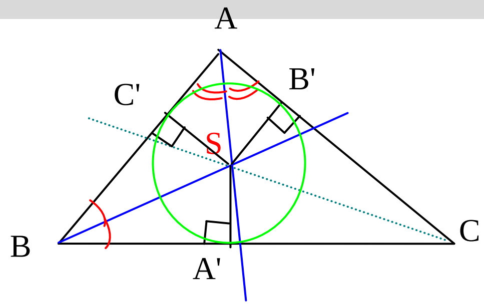
أ) النقط 'A ، 'B ، 'C المساقط العمودية للنقطة S على المستقيمات (BC) ، (AC) ، (AB) على الترتيب .

بين SA' = SB' = SC'

ب) بين أن المنصف الداخلي لزاوية الرأس C يشمل النقطة S .

ج) عين مركز الدائرة التي تمس أضلاع المثلث ABC من الداخل وارسمها .

حل النشاط :



أ) نقارن بين المثلثين القائمين 'ASB و 'ASC لدينا

SA وتر مشترك ، $\widehat{SAB'} = \widehat{SAC'}$ إذن : SB' = SC' .

نقارن بين المثلثين القائمين 'BSA و 'BSC لدينا

SB وتر مشترك ، $\widehat{SBA'} = \widehat{SBC'}$ إذن : SA' = SC' .

وبالتالي : SA' = SB' = SC'

ب) نقارن بين المثلثين القائمين 'CSB و A'SC لدينا SC وتر مشترك ، SA' = SB' إذن $\widehat{SCB'} = \widehat{SCA'}$

وبالتالي (SC) هو المنصف الداخلي للزاوية ذات الرأس C .

ج) لدينا : SA' = SB' = SC' إذن S هي مركز الدائرة التي تشمل النقط 'A ، 'B ، 'C .

بما أن $(BC) \perp (SA')$ و $(AC) \perp (SB')$ و $(BA) \perp (SC')$

إذن (BC) و(AC) و(BA) هي مماسات لهذه الدائرة .

✓ المنصف في مثلث هو منصف إحدى زواياه .

✓ المنصفات الداخلية في مثلث متقاطعة في نقطة واحدة .

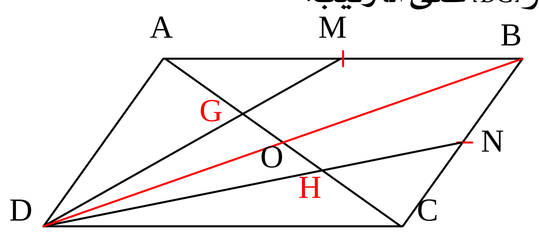
✓ نقطة تقاطع المنصفات هي مركز الدائرة المرسومة داخل هذا المثلث (أي التي تمس أضلاع المثلث من الداخل) .

التمرين الثاني :

ABCD متوازي الأضلاع ، النقطتان M و N منتصفا القطعتين [AB] و [BC] على الترتيب.

[DM] و [DN] يقطعان [AC] في النقطتين G و H على الترتيب.

بين أن : AG = GH = HC .



حل التمرين :

القطران [AC] و [BD] متناصفان في النقطة O .

في المثلث ABD لدينا (AO) و (DM) متوسطان يتقاطعان في النقطة G ومنه AG = 2 GO .

في المثلث CBD لدينا (CO) و (DN) متوسطان يتقاطعان في النقطة H ومنه HC = 2HO .

ومنه : OA = 3 OG و OC = 3 HO إذن $OG = OH = \frac{1}{2}GH$ ومنه : AG =GH = HC

التمرين الثالث :

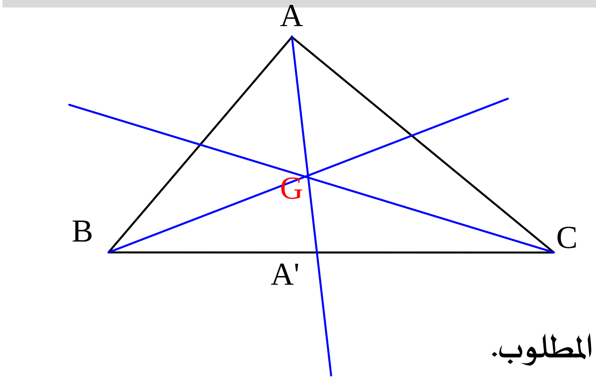
(Δ_1) ، (Δ_2) ، (Δ_3) ثلاث مستقيمات متقاطعة في نقطة G .

أ) أنشئ مثلثا ABC بحيث تكون النقطة G مركز ثقله .

ب) هل يوجد مثلثا واحدا يحقق المطلوب ؟

حل التمرين :

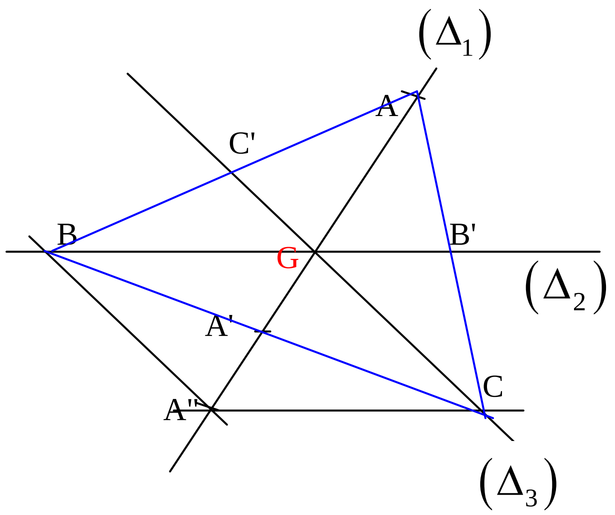
مرحلة التحليل :



نفرض أن للمسألة حل أي يوجد على الأقل مثلثا ABC بحيث
تكون النقطة G مركز ثقله . ونرسم شكلا مناسبا له.
لدينا القواعد التالية : A'C = A'B و AG = 2 A'G

مرحلة التركيب والإنشاء :

انطلاقا من القواعد السابقة ننشئ الشكل ونتأكد أنه يحقق المطلوب.
نرسم ثلاث مستقيمات (Δ_1) ، (Δ_2) ، (Δ_3) متقاطعة في نقطة G .

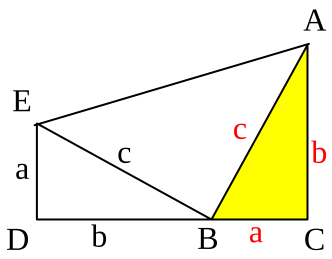


A نقطة من المستقيم (Δ_1) و "A نظيرتها بالنسبة للنقطة G
'A منتصف القطعة [A"G]
الموازي من "A للمستقيم (Δ_3) يقطع المستقيم (Δ_2) في B
والموازي من "A للمستقيم (Δ_2) يقطع المستقيم (Δ_3) في C
إذن الرابعي "BGCA متوازي أضلاع
ومنه 'A هي منتصف [BC] إذن (AA') هو متوسط في المثلث ABC .
(AB) يقطع (Δ_3) في النقطة 'C . في المثلث "ABA
لدينا (BA") // (GC") و G منتصف [AA"]
إذن "C منتصف [AB] وبالتالي (CC') هو متوسط في المثلث ABC .
بما أن المتوسطات تتلاقى في نقطة واحدة إذن كذلك (BB') هو متوسط في المثلث ABC .
ومنه النقطة G مركز ثقل المثلث ABC .
توجد ما لا نهاية من الحلول للمسألة وهذا حسب اختيار النقطة A على المستقيم (Δ_1) .

مبرهنة فيثاغورس

نشاط

الشكل المقابل يمثل مثلثا ABC قائما في C أطوال أضلاعه a ، b ، c ، و BDE مثلث يقايس المثلث ABC حيث C ، B ، D في استقامية و BD = AC.



أ) بين أن الزاوية ABE قائمة .

ب) ما نوع الرابعي ACDE ؟

ج) أحسب مساحة الرابعي ACDE بطريقتين مختلفتين .

د) استنتج علاقة بين c^2 و a^2 ، b^2 .

حل النشاط:

أ) لدينا في المثلث ABC ، $\widehat{ABD}=\widehat{BAC}+\widehat{ACB}$ (زاوية خارجية) ولدينا $\widehat{ABD}=\widehat{EBD}+\widehat{ABE}$

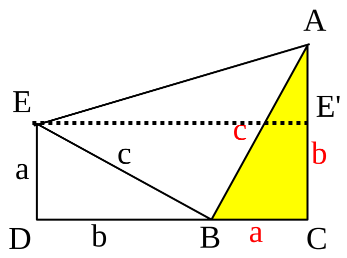
ومنه : $\widehat{BAC}+\widehat{ACB}=\widehat{EBD}+\widehat{ABE}$

بما أن المثلث BDE يقايس المثلث ABC إذن : $\widehat{EBD}=\widehat{BAC}$ وبالتالي : $\widehat{ACB}=\widehat{ABE}=90^\circ$

ب) نوع الرابعي ACDE :

الربلعي ACDE شبه منحرف قائم .

ج) حساب مساحة الرابعي ACDE بطريقتين مختلفتين :



الطريقة الأولى : s(ACDE) = 2 s(ABC) + s(ABE)

ومنه : s(ACDE) = ab + (c^2 / 2)

الطريقة الثانية : s(ACDE) = s(CDEE') + s(AEE')

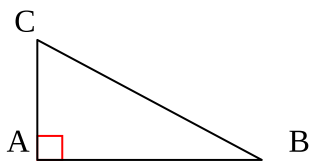
ومنه : $s(ACDE)=a(b+a)+\frac{1}{2}(b+a)(b-a)$

أي : $s(ACDE)=ab+a^2+\frac{1}{2}b^2-\frac{1}{2}a^2$ وبالتالي : $s(ACDE)=ab+\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}b^2$

د) استنتج علاقة بين c^2 و a^2 ، b^2 :

من السؤال السابق نستنتج أن : $\frac{1}{2}c^2=\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}b^2$ ومنه : $c^2 = a^2 + b^2$

مبرهنة فيثاغورس وعكسها :



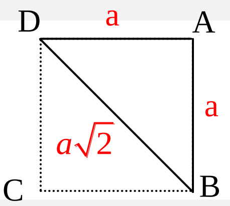
✓ **مبرهنة 1 : (مبرهنة فيثاغورس)**

إذا كان ABC مثلثا قائما في A فإن : $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

✓ **مبرهنة 2 : (عكس مبرهنة فيثاغورس)**

إذا كان في مثلث ABC ، $BC^2 = AB^2 + AC^2$ فإن : المثلث ABC قائم في A .

مثال 1:

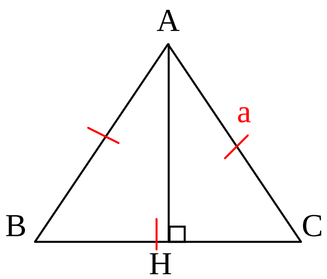


ABCD مربع طول ضلعه يساوي a أحسب طول قطره .

ومنه : $BD^2 = AB^2 + AD^2$ $\quad$ $BD^2 = a^2 + a^2$

ومنه : $BD^2 = 2a^2$ إذن : $BD = a\sqrt{2}$

مثال 2:



ABC مثلث متقايس الأضلاع ، طول ضلعه يساوي a ،

(AH) الارتفاع المتعلق بالضلع [BC] .

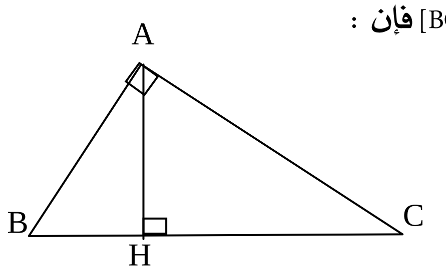
أحسب الطول AH .

حسب مبرهنة فيثاغورس لدينا : $AC^2 = AH^2 + HC^2$

ومنه : $AC^2 - HC^2 = AH^2$ إذن : $AH^2 = a^2 - \frac{1}{4}a^2$

أي : $AH^2 = \frac{3}{4}a^2$ وبالتالي : $AH = a\frac{\sqrt{3}}{2}$

نتائج :



إذا كان ABC مثلثا قائما في A و (AH) الارتفاع المتعلق بالضلع [BC] فإن :

أ) $AB . AC = AH . BC$ (من المساحة)

ب) $AH^2 = HC . HB$ (استعمال مبرهنة فيثاغورس)

$AB^2 = AH^2 + BH^2$ و $AC^2 = AH^2 + HC^2$

ومنه : $AB^2 + AC^2 = 2\,AH^2 + BH^2 + CH^2$

إذن : $BC^2 = 2AH^2 + BH^2 + CH^2$. ومنه : $(BH + HC)^2 = 2AH^2 + BH^2 + CH^2$.

إذن : $BH^2 + HC^2 + 2\,BH \times HC = 2AH^2 + BH^2 + CH^2$. وبالتالي : $AH^2 = BH \times HC$

ج) $AB^2 = BH . BC$ (مبرهنة فيثاغورس و النتيجة ب)

$AB^2 = AH^2 + BH^2$ ومنه $AB^2 = BH \times HC + BH^2$ إذن : $AB^2 = BH \times (HC + BH)$

وبالتالي : $AB^2 = BH . BC$

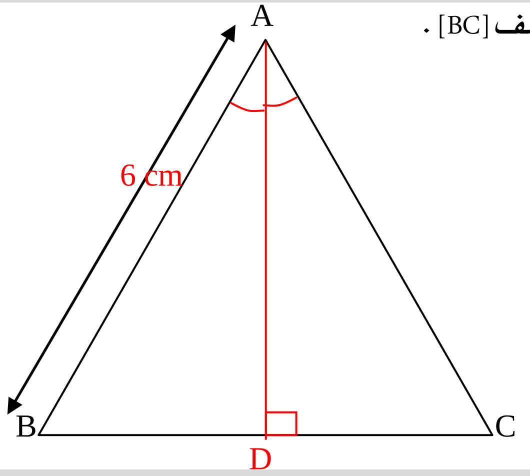
د) $AC^2 = CH . CB$ (بنفس الطريقة للنتيجة السابقة)

نشاط

ABC مثلث متقايس الأضلاع طول ضلعه 6 cm ، النقطة D منتصف [BC] .

بين أن (AD) منصف زاوية الرأس A .

أحسب الطول AD ، واستنتج كلا من sin 30° ، cos 30° ، tan 30° .



حل النشاط :

المستقيم (AD) هو متوسط في المثلث المتقايس الأضلاع ABC

إذن هو محور وبالتالي منصف زاوية الرأس A .

من مبرهنة فيثاغورس لدينا : $AD^2 = 36 - 9 = 27$

ومنه : $AD = 3\sqrt{3}$

$\sin 30° = \frac{BD}{AB} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ ، $\cos 30° = \frac{AD}{AB} = \frac{3\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ، $\tan 30° = \frac{BD}{AD} = \frac{3}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

النسب المثلثية في مثلث قائم :

تعريف :

ABC مثلث قائم في C حيث : $\widehat{BAC} = \alpha$

جيب الزاوية α : $\sin\alpha = \frac{BC}{AB}$

جيب تمام الزاوية α : $\cos\alpha = \frac{AC}{AB}$

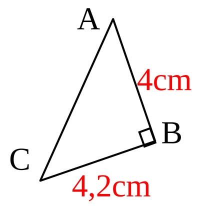
ظل الزاوية α : $\tan\alpha = \frac{BC}{AC}$

نتائج : $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ $\qquad (\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1$

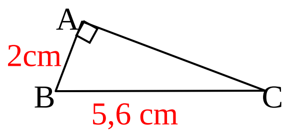
التمرين الرابع

أحسب كلا من AC و $\widehat{ABC}$ في كل من الحالتين الآتيتين : (تعطى النتائج مدورة إلى الوحدة)

الحالة 1



الحالة 2



حل التمرين :

الحالة 1 :

حسب مبرهنة فيثاغورس لدينا : $AC^2 = AB^2 + BC^2$ ومنه : $AC^2 = (4^2 + 4{,}2^2)\ cm^2$

أي : $AC^2 = 33{,}64\ cm^2$ ومنه : $AC = 5{,}8\ cm$. وبالتدوير إلى الوحدة نجد : $AC = 6\ cm$.

$$\widehat{ABC} = 90°$$

الحالة 2 :

حسب مبرهنة فيثاغورس لدينا : $BC^2 = AB^2 + AC^2$ ومنه : $AC^2 = BC^2 - AB^2$

ومنه : $AC^2 = (5{,}6^2 - 2^2)\ cm^2$ أي : $AC^2 = 35{,}36\ cm^2$ ومنه $AC = 5{,}946427499...$

وبالتدوير إلى الوحدة نجد : $AC = 6\ cm$.

$$\cos\widehat{ABC} = \frac{2}{5{,}6} = 0{,}347142857...$$ ومنه : $$\widehat{ABC} = 69{,}07516758...°$$

وبالتدوير إلى الوحدة نجد : $\widehat{ABC} = 69°$

التمرين الخامس

ABC مثلث قائم في A حيث $BC = 10\ cm$ و $\widehat{ABC} = 37°$

أحسب بالتدوير إلى الوحدة مساحة ومحيط هذا المثلث .

حل التمرين :

$AC = BC \sin 37°$ ومنه : $AC = 6{,}01815023...$.

$AB = BC \cos 37°$ ومنه : $AB = 7{,}9863551...$.

نضع p محيط المثلث ABC : $P = AB + AC + BC$ ومنه : $P = 24{,}00450533...cm$

وبالتدوير إلى الوحدة نجد : $p = 24\ cm$

نضع s مساحة المثلث ABC : $s = (AB\times AC)/2$ ومنه : $s = 24{,}0315424...cm^2$

وبالتدوير إلى الوحدة نجد: $s = 24\ cm^2$.

التمرين السادس

أنشئ مثلثا ABC أطوال أضلاعه 5 cm ، 12 cm ، 13 cm ، وحدد طبيعته .

عين مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABC ونصف قطرها .

حل التمرين :

نفترض $AB = 5cm$ و $AC = 12\ cm$ و $BC = 13\ cm$

لدينا : $AB^2 + AC^2 = 144 + 25 = 169 = 13^2$

ومنه : $AB^2 + AC^2 = BC^2$

وحسب عكس مبرهنة فيثاغورس أن المثلث ABC قائم في A

مركز الدائرة المحيطة به هو منتصف القطعة [BC] ونصف قطرها يساوي 6,5 cm .

مبرهنة طاليس

مبرهنة 1 : مبرهنة طاليس

إذا كان لدينا مستقيمان متقاطعان في نقطة A
يقطعهما مستقيمان متوازيان (Δ) و (Δ')
في النقط B ، C ، D ، E حسب أحد الشكلين
فإن أطوال أضلاع المثلث ABC تكون متناسبة
مع أطوال أضلاع المثلث ADE .

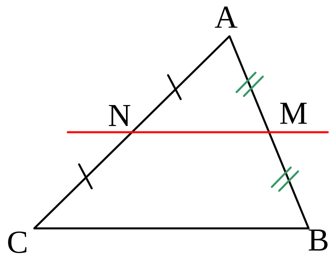
أي : $\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}=\frac{BC}{DE}$

مبرهنة 2 : عكس مبرهنة طاليس

إذا كانت كل من النقط A ، B ، D ، والنقط A ، C ، E
على استقامة واحدة وبنفس الترتيب حسب أحد الشكلين ،
وإذا كان $\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}$ فإن المستقيمين (BC) و (DE)
يكونا متوازيين

حالة خاصة : مستقيم المنتصفين في مثلث

ABC مثلث كيفي.
إذا كانت النقطتان M و N منتصفا القطعتين [AB] و [AC]
على الترتيب فإن (BC) // (MN) و BC = 2 MN
إذا كانت النقطة M منتصف القطعة [AB] وكان (BC) // (MN)
حيث N نقطة من [AC] فإن N هي منتصف القطعة [AC]



التمرين السابع

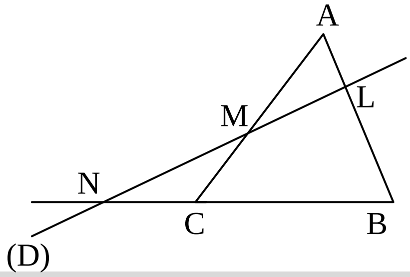
ABC مثلث كيفي ، (D) مستقيم يقطع (AB) ، (AC) ، (BC) في النقط L ، M ، N على الترتيب.

نريد البرهان أن : $\frac{LA}{LB}\times\frac{NB}{NC}\times\frac{MC}{MA}=1$

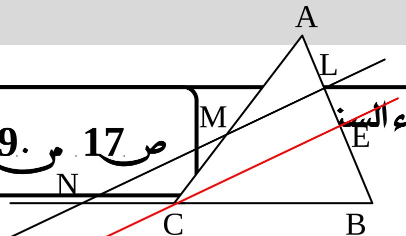
أ) أرسم الموازي للمستقيم (D) الذي يشمل النقطة C ، وسم E تقاطعه مع (AB).

ب) بين أن : $\frac{NB}{NC}=\frac{LB}{LE}$ و $\frac{MC}{MA}=\frac{LE}{LA}$

ج) استنتج العلاقة $\frac{LA}{LB}\times\frac{NB}{NC}\times\frac{MC}{MA}=1$



حل التمرين :



أ) رسم الموازي للمستقيم (D) الذي يشمل النقطة C ، يقطع (AB) في E.

ب) تبيان أن $\frac{NB}{NC}=\frac{LB}{LE}$

في المثلث BLN لدينا : (NL) // (CE) إذن حسب مبرهنة طاليس

لدينا : $\frac{BC}{BN}=\frac{BE}{BL}$ معناه $\frac{BC}{BE}=\frac{BN}{BL}$ ومنه : $\frac{NC}{LE}=\frac{NB-BC}{LB-BE}=\frac{BC}{BE}=\frac{NB}{LB}$

إذن : $\frac{NC}{LE}=\frac{NB}{LB}$ معناه $\frac{LB}{LE}=\frac{NB}{NC}$

تبيان أن $\frac{LE}{LA}=\frac{MC}{MA}$

في المثلث ACE لدينا : (ML) // (CE) إذن حسب مبرهنة طاليس

$\frac{AL}{AE}=\frac{AM}{AC}$ معناه $\frac{AC}{AE}=\frac{AM}{AL}$ ومنه : $\frac{MC}{LE}=\frac{AC-AM}{AE-AL}=\frac{AC}{AE}=\frac{AM}{AL}$

$\frac{MC}{LE}=\frac{MA}{LA}$ معناه $\frac{MC}{MA}=\frac{LE}{LA}$

ج) استنتاج العلاقة $\frac{LA}{LB}\times\frac{NB}{NC}\times\frac{MC}{MA}=1$

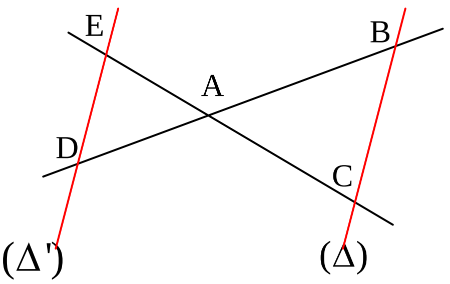
$\frac{LB}{LE}=\frac{NB}{NC}$ معناه $LE=\frac{LB\times NC}{NB}$ و $\frac{MC}{MA}=\frac{LE}{LA}$ معناه $LE=\frac{MC\times LA}{MA}$

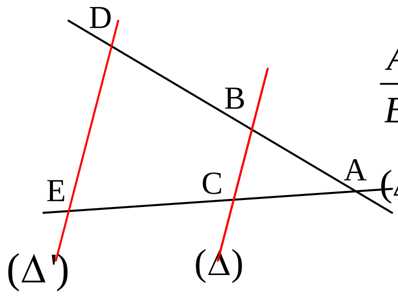
ومنه : $\frac{MC\times LA}{MA}=\frac{LB\times NC}{NB}$ معناه $LB\times NC\times MA = MC\times LA\times NB$ معناه $\boxed{\frac{MC}{MA}\times\frac{NB}{NC}\times\frac{LA}{LB}=1}$

نتائج :

إذا كان $(\Delta)//(\Delta')$ فإن $\frac{AC}{CE}=\frac{AB}{BD}$

إذا كان $\frac{AC}{CE}=\frac{AB}{BD}$ فإن $(\Delta)//(\Delta')$

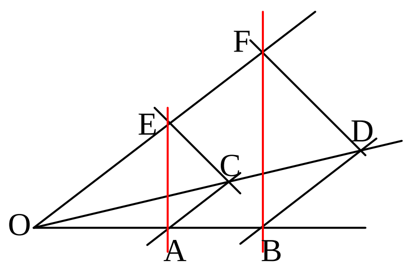




التمرين الثامن

إذا علمت أن في الشكل المرفق (BD) // (AC)

و(DF) // (CE) فبين أن (BF) // (AE) .



حل التمرين

في المثلث ODB لدينا : (BD) // (AC) ومنه حسب مبرهنة طاليس لدينا : $\frac{OA}{OB}=\frac{OC}{OD}$

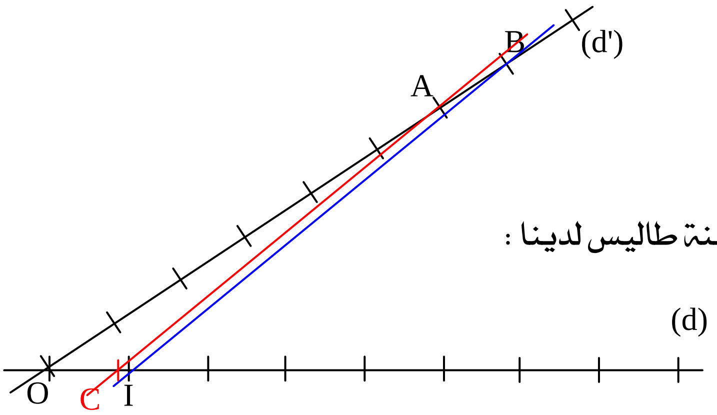
في المثلث ODF لدينا : (DF) // (CE) ومنه حسب مبرهنة طاليس لدينا : $\frac{OC}{OD}=\frac{OE}{OF}$

إذن : $\frac{OA}{OB}=\frac{OE}{OF}$ وحسب عكس مبرهنة طاليس المطبقة في المثلث OBF لدينا : (BF) // (AE) .

التمرين التاسع

أنشئ العدد $\frac{6}{7}$

حل التمرين



ليكن (O,I) معلما للمستقيم (d)،

المستقيم (d') يقطع (d) في النقطة O .

نعين النقطتين A و B على المستقيم (d') حيث

OA = 6 و OB = 7 ،

نرسم من A المستقيم الموازي للمستقيم (BI) حسب مبرهنة طاليس لدينا :

$\frac{6}{7}=\frac{OC}{OI}=\frac{OA}{OB}$ إذن : $OC=\frac{6}{7}$

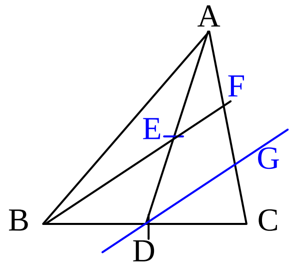
التمرين العاشر

ABC مثلث ، النقطة D منتصف [BC] والنقطة E منتصف [AD] و F نقطة من [AC] حيث $AF=\frac{1}{3}AC$

أ) بين أن النقط B ، E ، F في استقامية.

ب) بين أن BF = 4 EF .

حل التمرين



أ) تبيان أن النقط B ، E ، F في استقامية.

نرسم من D الموازي للمستقيم (EF) يقطع (AC) في G

في المثلث ADG لدينا (DG)// (EF) و E منتصف [AD]

إذن F هي منتصف [AG] و DG = 2EF ومنه : AF = FG = GC

وبالتالي G منتصف [FC] ، وفي المثلث BCF لدينا كذلك D منتصف [BC]

إذن : (BF) // (DG) و BF = 2DG

ومنه : (BF) // (EF) بما أن للمستقيمين نقطة مشتركة فإن النقط B ، E ، F في استقامية.

ب) تبيان أن BF = 4 EF .

لدينا : BF = 2DG و DG = 2EF إذن : BF = 4 EF .

الزوايا والدائرة

نشاط :

أرسم دائرة (C) مركزها O ونصف قطرها 5 cm ، و [AB] قطر فيها ،

وM نقطة من الدائرة حيث AM = 4 cm .

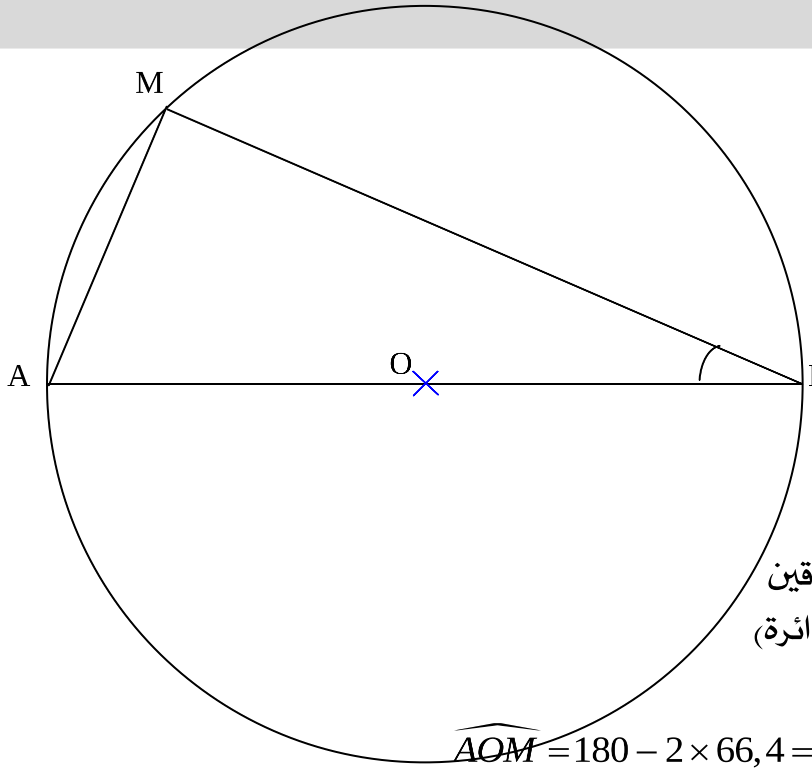
أ) باستعمال ال

ب) آلة الحاسبة والتدوير إلى 0,1 أحسب قيس الزاوية ABM ، استنتج قيس الزاوية MAB .

ج) ما نوع المثلث AOM ؟ واحسب أقياس زواياه.

د) استنتج العلاقة بين الزاويتين ABM و AOM .

حل النشاط :



أ) حساب قيس الزاوية ABM :

المثلث ABM قائم في M

لأن ضلعه [AB] هو قطر للدائرة (C) .

ومنه : $\sin \widehat{ABM} = \frac{AM}{AB} = \frac{4}{10} = 0,4$

إذن بالحاسبة وبالتدوير إلى 0,1 نجد :

$\widehat{ABM} = 23,6°$

استنتاج قيس الزاوية MAB

$\widehat{MAB} = 90 - 23,6 = 66,4°$

ب) نوع المثلث AOM : هو متساوي الساقين

رأسه O لأن : OM = OA (نصفي قطر الدائرة)

حساب أقياس زوايا المثلث AOM :

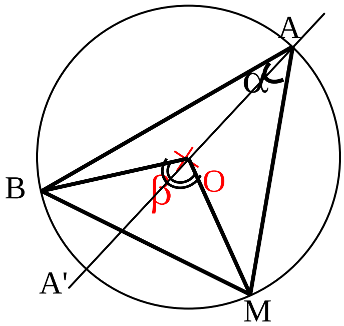
$\widehat{MAO} = \widehat{AMO} = 66,4°$ و $\widehat{AOM} = 180 - 2 \times 66,4 = 47,2°$

ج) استنتاج العلاقة بين الزاويتين ABM و AOM .

لدينا : 2×23,6 = 47,2 ومنه $\widehat{AOM} = 2\widehat{ABM}$

نشاط إضافي :

M ، B ، A ثلاث نقط متمايزة من دائرة (c) مركزها O ، المستقيم (AO) يقطع الدائرة (c) في النقطة 'A.



نضع $\widehat{MAB} = \alpha$ و $\widehat{MOB} = \beta$.

أ) بين أن كل من المثلثين AOM و BOM متساوي الساقين ،

ثم عبر عن قيس الزاوية $\widehat{MAA'}$ بدلالة قيس الزاوية $\widehat{MOA'}$ ،

وعن قيس الزاوية $\widehat{BAA'}$ بدلالة قيس الزاوية $\widehat{BOA'}$.

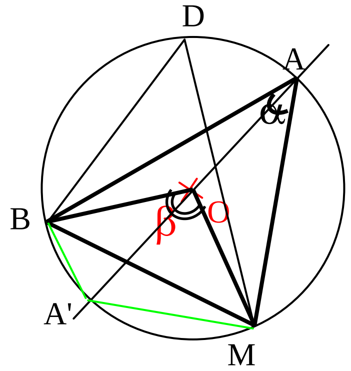
ب) استنتج العلاقة بين α و β.

ج) عبر عن الزاوية $\widehat{BA'M}$ بدلالة β ، ثم بدلالة α ،

واستنتج العلاقة بين الزاويتين $\widehat{BA'M}$ و $\widehat{BAM}$.

د) D نقطة من القوس الكبرى $\widehat{BM}$ استنتج مما سبق العلاقة بين الزاويتين $\widehat{BAM}$ و $\widehat{BDM}$.

حل النشاط :



أ) تبيان أن كل من المثلثين AOM و BOM متساوي الساقين ،

لدينا OA = OM = OB (أنصاف أقطار الدائرة)

إذن المثلثان AOM و BOM كل منهما متساوي الساقين .

- قيس الزاوية $\widehat{MAA'}$ بدلالة قيس الزاوية $\widehat{MOA'}$:

لدينا $\widehat{MOA'}$ زاوية خارجية في المثلث AOM

ومنه: $\widehat{MOA'} = \widehat{MAO} + \widehat{OMA}$ وبما أن $\widehat{MAO} = \widehat{OMA} = \widehat{MAA'}$

فإن : $\widehat{MOA'} = 2\widehat{MAA'}$

- قيس الزاوية $\widehat{BAA'}$ بدلالة قيس الزاوية $\widehat{BOA'}$:

لدينا $\widehat{BOA'}$ زاوية خارجية في المثلث BOA ومنه

$\widehat{BOA'} = \widehat{BAO} + \widehat{OBA}$ وبما أن $\widehat{BAO} = \widehat{OBA} = \widehat{BAA'}$ فإن : $\widehat{BOA'} = 2\widehat{BAA'}$.

ب) استنتاج العلاقة بين α و β.

$\widehat{BOM} = \widehat{BOA'} + \widehat{A'OM}$ ومنه : $\widehat{BOM} = 2\widehat{BAA'} + 2\widehat{A'AM}$ إذن : $\widehat{BOM} = 2\widehat{BAM}$

وبالتالي : $\beta = 2\alpha$

ج) عبر عن الزاوية $\widehat{BA'M}$ بدلالة β ، ثم بدلالة α ،

باستعمال نفس الطريقة السابقة نجد : $\widehat{BA'M} = 180° - \frac{1}{2}\beta$ و $\widehat{BA'M} = 180° - \alpha$

واستنتج العلاقة بين الزاويتين $\widehat{BA'M}$ و $\widehat{BAM}$.

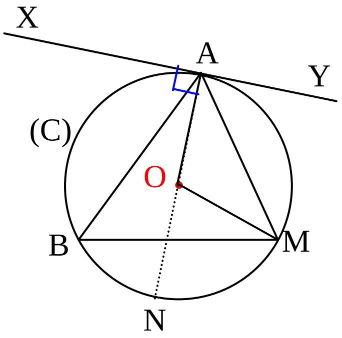
$\widehat{BA'M} + \alpha = 180°$ أي : $\widehat{BA'M} + \widehat{BAM} = 180°$ ومنه : $\widehat{BA'M}$ و $\widehat{BAM}$ زاويتان متكاملتان .

د) D نقطة من القوس الكبرى $\widehat{BM}$ استنتج مما سبق العلاقة بين الزاويتين $\widehat{BAM}$ و $\widehat{BDM}$.

مما سبق نستنتج أن : $\widehat{BDM} = \frac{\beta}{2} = \alpha$ ومنه : $\widehat{BDM} = \widehat{BAM}$

مفردات ومصطلحات :

(C) دائرة مركزها O ، A ، B ، M ، N نقط من الدائرة (C) حيث O تنتمي إلى [AN].

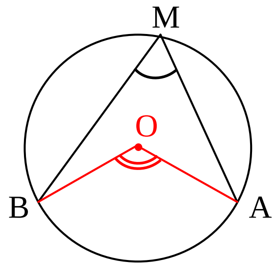


- القطعة [AN] تسمى قطرا ، وكل من القطع [AB]، [AM]، [BM] تسمى وترا في الدائرة (C).
- النقطتان المتمايزتان A و B تعينان على الدائرة (C) قوسين كل منها نرمز لها بالرمز $\overset{\frown}{AB}$.
- (XY) مستقيم يشترك مع الدائرة (C) في نقطة وحيدة A ، يسمى مماسا للدائرة (C) عند النقطة A ويكون عموديا على (AO).
- الزاوية $\widehat{AOM}$ رأسها مركز الدائرة تسمى زاوية مركزية ، نقول إنها تحصر القوس $\overset{\frown}{AM}$.
- الزاوية $\widehat{ABM}$ رأسها نقطة من الدائرة تسمى زاوية محيطية ، نقول إنها تحصر القوس $\overset{\frown}{AM}$.
- الزاوية $\widehat{XAB}$ تسمى زاوية محيطية ، نقول إنها تحصر القوس $\overset{\frown}{AB}$.

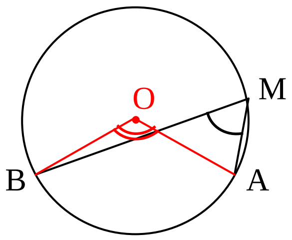
مبرهنة : في كل دائرة ، الزاوية المركزية تساوي ضعف الزاوية المحيطية التي تحصر معها نفس القوس.

مثال :

A ، B ، M ثلاث نقط متمايزة من دائرة مركزها O.



$\widehat{AOB} = 2\widehat{AMB}$



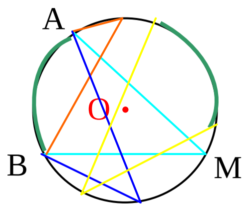
نتائج :

1) الزوايا المحيطية التي تحصر نفس القوس أو أقواسا متقايسة تكون متقايسة. (شكل1)

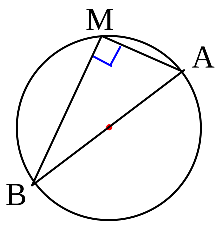
2) إذا كانت القطعة [AB] قطرا لدائرة فإنه من أجل كل نقطة M من هذه الدائرة وتختلف عن A وB ، يكون المثلث ABM قائما في M. (شكل 2)

3) تكون رؤوس الرباعي المحدب ABCD من نفس الدائرة إذا كانت : $\widehat{DAC} = \widehat{DBC}$. (شكل 3)

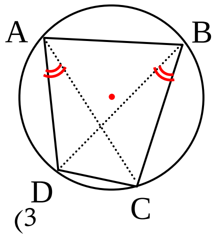
4) يكون الرباعي المحدب ABCD دائريا إذا كانت زاويتان متقابلتان متكاملتين. (شكل4)



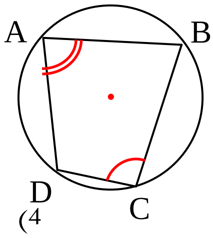
الشكل (1)



الشكل (2)



الشكل (3)



الشكل (4)

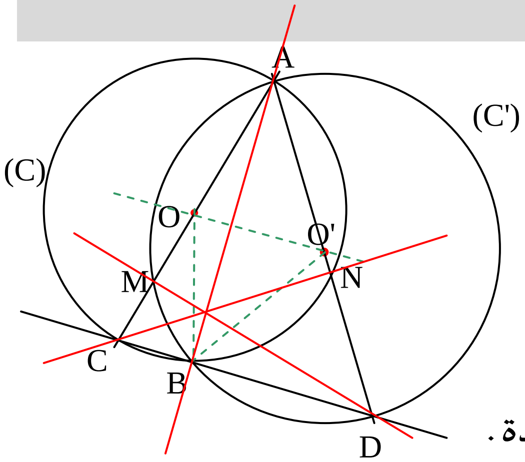
التمرين الحادي عشر :

(C) و (C') دائرتان مركزهما O و O' متقاطعتان في نقطتين A وB ،

[AC] قطر في (C) و يقطع (C') في النقطة M ، و [AD] قطر في (C') و يقطع (C) في النقطة N .

1. أرسم شكلا مناسبا .
2. بين أن النقط C ، B ، D في استقامية .
3. بين أن المستقيمات (AB) ، (CN) ، (MD) متقاطعة في نقطة واحدة .

حل التمرين :



2) تبيان أن النقط C ، B ، D في استقامية .

$\widehat{ABC} = 90°$ تحصر نصف الدائرة (C)

$\widehat{ABD} = 90°$ تحصر نصف الدائرة (C')

ومنه : $\widehat{CBD} = 180°$

وبالتالي : (CD) // (CB) ومنه : النقط C ، B ، D في استقامية.

3) تبيان أن المستقيمات (AB) ، (CN) ، (MD) متقاطعة في نقطة واحدة .

لدينا المثلث ANC قائم في N لأن الزاوية $\widehat{ANC}$ تحصر نصف الدائرة (C) ومنه : $(CN) \perp (AD)$

ولدينا المثلث ABD قائم في B لأن الزاوية $\widehat{ABD}$ تحصر نصف الدائرة (C') ومنه : $(AB) \perp (CD)$

ولدينا المثلث AMD قائم في M لأن الزاوية $\widehat{AMD}$ تحصر نصف الدائرة (C') ومنه : $(DM) \perp (AC)$

إذن المستقيمات (AB) ، (CN) ، (MD) هي ارتفاعات في المثلث ACD وبالتالي تتقاطع في نقطة واحدة .

المثلثات المتقايسة والمثلثات المتشابهة :

تعريف :

نقول عن مثلثين أنهما متقايسان إذا كانا قابلين للتطابق.

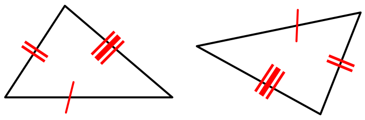
ملاحظة :

إذا كان تطابق مثلثين بالسحب أو التدوير فإن تقايسهما مباشر وإذا كان بقلب أحدها فإنه غير مباشر.

نتيجة :

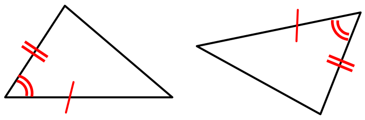
المثلثان المتقايسان أطوال أضلاعهما متساوية مثنى ، مثنى و زواياهما متساوية مثنى ، مثنى.

خواص : (حالات تقايس مثلثين)



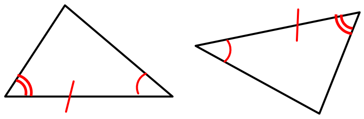
خاصية 1 :

يتقايس مثلثان إذا كانت أطوال أضلاعهما متساوية مثنى ، مثنى.



خاصية 2 :

يتقايس مثلثان إذا تقايست زاوية والضلعان اللذان يحصرانها من أحد المثلثين مع زاوية الضلعين اللذين يحصرانها من المثلث الآخر.

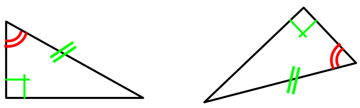


خاصية 3 :

يتقايس مثلثان إذا تقايس ضلع والزاويتان المجاورتان له من أحد المثلثين مع ضلع والزاويتين المجاورتين له من المثلث الآخر.

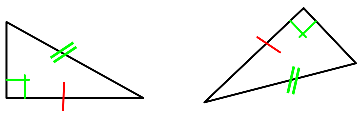
حالات خاصة : (تقايس مثلثين قائمين)

مثلثان قائمان وتراهما BC و B'C' متقايسان



خاصية 1 :

يتقايس المثلثان ABC وA'B'C' إذا تقايست زاوية غير القائمة من الأول مع زاوية غير القائمة من الثاني.



خاصية 2 :

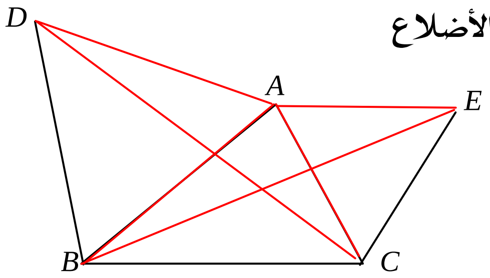
يتقايس المثلثان ABC وA'B'C' إذا تقايس ضلع للزاوية القائمة من الأول مع ضلع للزاوية القائمة من الثاني.

التمرين الثاني عشر

ABC مثلث ، أنشئ على ضلعيه [AB] و [AC] مثلثين ABD و ACE على الترتيب ، حيث كل منهما متقايس الأضلاع.

بين أن المثلثين ACD و ABE متقايسان واستنتج أن : BE = CD .

حل :



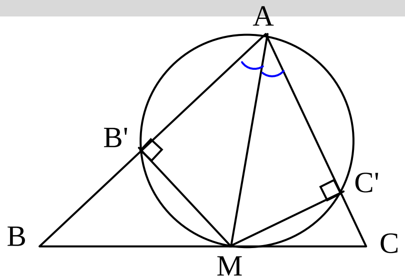
لدينا : $\widehat{CAE}=\widehat{BAD}=60°$ لأن كل من المثلثين ABD و ACE متقايس الأضلاع

ومنه : $\widehat{CAE}+\widehat{CAB}=\widehat{BAD}+\widehat{CAB}$ إذن : $\widehat{BAE}=\widehat{CAD}$

ولدينا كذلك : AB = AD و AE = AC

إذن المثلثان ACD و ABE متقايسان . ومنه نستنتج : BE = CD .

التمرين الثالث عشر



ABC مثلث، M نقطة تقاطع منصف زاوية الرأس A و [BC]، 'C، 'B المسقطان العموديان للنقطة M على [AB] و [AC] على الترتيب.

أ) بين أن المثلثين AB'M، AC'M متقايسان.

ب) بين أن النقط A، 'B، M، 'C تنتمي إلى دائرة واحدة يطلب تعيين عناصرها.

ج) ما نوع الرباعي AB'MC' عندما يكون المثلث ABC قائما في A .

حل :

أ) بين أن المثلثين AB'M، AC'M متقايسان.

لدينا : المثلثان AB'M، AC'M قائمان ولهما وتر مشترك [AM] و $\widehat{B'AM}=\widehat{C'AM}$ إذن هما متقايسان.

ب) بين أن النقط A، 'B، M، 'C تنتمي إلى دائرة واحدة يطلب تعيين عناصرها.

لدينا $\widehat{AB'M}$ و $\widehat{AC'M}$ متقابلتان ومتكاملتان في الرباعي AB'MC' إذن هو دائري في الدائرة ذات القطر [AM] ومركزها منتصف [AM].

ج) ما نوع الرباعي AB'MC' عندما يكون المثلث ABC قائما في A .

إذا كان المثلث ABC قائما في A فإن للرباعي AB'MC' ثلاث زوايا قائمة وبالتالي هو مستطيل وبما أن القطر [AM] هو منصف الزاوية ذات الرأس A فإن الرباعي AB'MC' هو مربع.

نشاط :

ADE وA'B'C' مثلثان حيث : AD = A'B' و AE = A'C' و $\widehat{A}=\widehat{A'}$

نعين نقطة B من (AD) و نقطة C من (AE) حيث (BC) // (DE) .

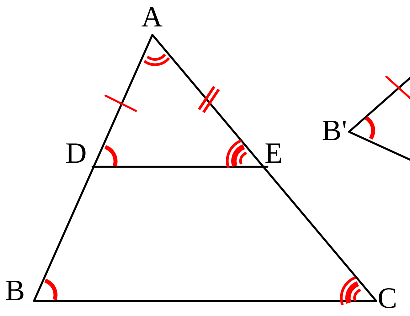
1) تحقق من تقايس المثلثين ADE وA'B'C'. واستنتج الزوايا المتقايسة والضلعين المتقايسين.

2) بين أن زوايا المثلثين A'B'C' وABC متقايسة مثنى ، مثنى.

3) هل المثلثين ADE وABC متقايسان ؟ ماذا تلاحظ عنهما ؟

4) برهن أن : $\frac{A'B'}{AB}=\frac{A'C'}{AC}=\frac{B'C'}{BC}$.

حل النشاط :



1) لدينا : AD = A'B' و AE = A'C' و $\widehat{A} = \widehat{A'}$

إذن المثلثان ADE وA'B'C' هما متقايسان

وبالتالي : $\widehat{D} = \widehat{B'}$ ، $\widehat{E} = \widehat{C'}$ و DE = B'C'

2) لدينا : (DE) // (BC) إذن : $\widehat{D} = \widehat{B}$ ، $\widehat{E} = \widehat{C}$ بالتماثل.

ومنه : $\widehat{B} = \widehat{B'}$ ، $\widehat{C} = \widehat{C'}$ ولدينا $\widehat{A} = \widehat{A'}$ من المعطيات

3) إذا كانت النقطتين B و D مختلفتين فإن المثلثين ADE وABC غير متقايسين.

نلاحظ أن المثلث A'B'C' هو تصغير (أو تكبير) للمثلث ABC . نقول عنهما أنهما متشابهان.

4) تبيان أن $\dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{A'C'}{AC} = \dfrac{B'C'}{BC}$

لدينا :(ED) // (BC) وبتطبيق مبرهنة طاليس نجد $\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{AE}{AC} = \dfrac{DE}{BC}$

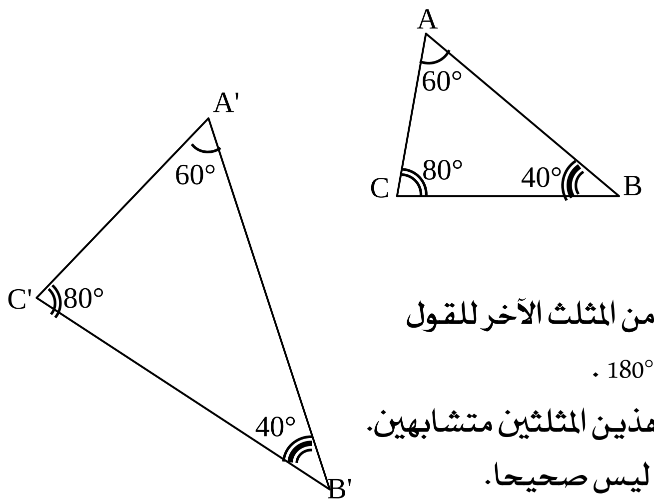
وبما أن : AD = A'B' و AE = A'C' و DE = B'C' فإن $\dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{A'C'}{AC} = \dfrac{B'C'}{BC}$.

تشابه مثلثين :

تعريف :

نقول عن مثلثين أنهما متشابهان إذا كانت زوايا أحدهما تساوي زوايا الآخر.

مثال :



المثلثان ABC و A'B'C' متشابهان.

الرؤوس المتماثلة : A B C

A' B' C' الأضلاع المتماثلة :

[AB] و [A'B'] ؛ [AC] و [A'C'] ؛ [BC] و [B'C'].

ملاحظات :

1 ـ يكفي تساوي زاويتين من أحد المثلثين مع زاويتين من المثلث الآخر للقول إن المثلثين متشابهان ، ذلك لأن مجموع زوايا المثلث يساوي 180° .

2 ـ إذا كان أحد مثلثين تصغير (أو تكبير) للآخر فإن هذين المثلثين متشابهين.

3 ـ المثلثان المتقايسان هما مثلثان متشابهان والعكس ليس صحيحا.

مبرهنة :

المثلثان المتشابهان أضلاعهما المتماثلة متناسبة.

نسبة تشابه مثلثين :

تعريف :

ليكن ABC و A'B'C' مثلثين متشابهين ، نسمي نسبة التشابه هذين المثلثين العدد الحقيقي الموجب غير المعدوم k حيث : $k = \frac{B'C'}{BC} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{A'B'}{AB}$

ملاحظات :

لتكن k نسبة تشابه المثلثين ABC و A'B'C' حيث $k = \frac{B'C'}{BC} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{A'B'}{AB}$

1 ـ $\frac{1}{k}$ هي أيضا نسبة تشابه المثلثين ABC و A'B'C' .

2 ـ إذا كان $0 < k < 1$ فإن المثلث A'B'C' هو تصغير للمثلث ABC ونسمي k نسبة (أو معامل) التصغير .

3 ـ إذا كان $k > 1$ فإن المثلث A'B'C' هو تكبير للمثلث ABC ونسمي k نسبة (أو معامل) التكبير .

4 ـ إذا كان $k = 1$ فإن المثلث A'B'C' يقايس المثلث ABC .

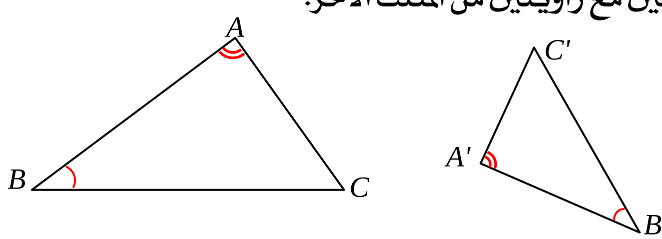
خواص : (حالات تشابه مثلثين)

خاصية1:

يتشابه مثلثان إذا تقايست زاويتان من أحد المثلثين مع زاويتين من المثلث الآخر.

مثال : بما أن : $\widehat{A} = \widehat{A'}$ و $\widehat{B} = \widehat{B'}$

فإن المثلثان ABC و A'B'C' متشابهين .



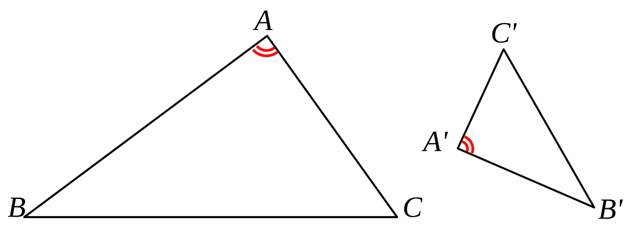
ملاحظة :

المثلث A'B'C' هو تصغير للمثلث ABC

خاصية 2 :

يتشابه مثلثان إذا تقايست زاوية من أحد المثلثين مع زاوية من المثلث الآخر وكان طولا الضلعين الذين يحصران إحدى الزاويتين متناسبين مع طولي الضلعين الذين يحصران الزاوية الأخرى.

مثال :



$\widehat{A} = \widehat{A'}$ و A'C' = 1,5 cm و A'B' = 2 cm

و AB = 4 cm و AC = 3 cm

لدينا : $\frac{AB}{A'B'} = \frac{4}{2} = 2$ و $\frac{AC}{A'C'} = \frac{3}{1,5} = 2$

إذن : $\frac{AC}{A'C'} = \frac{AB}{A'B'} = 2$ ومنه المثلثان ABC و A'B'C' متشابهان .

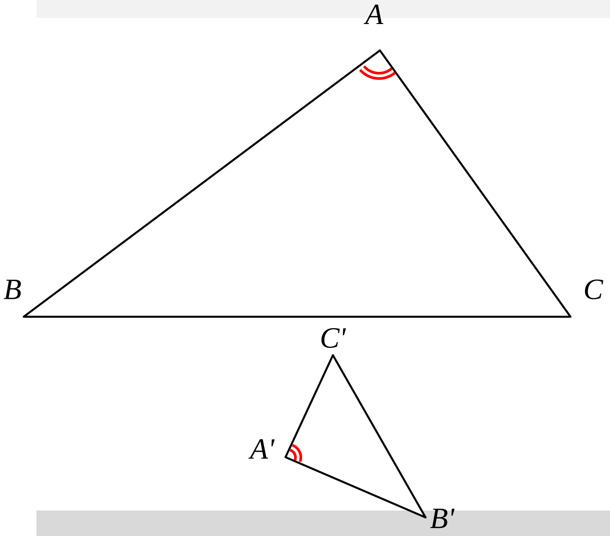
ملاحظة :

المثلث ABC هو تكبير للمثلث A'B'C' ونسبة التكبير هي 2 .

خاصية3:

يتشابه مثلثان إذا كان أطوال الأضلاع المتماثلة فيهما متناسبة.

مثال :



A'C' = 1,5 cm و A'B' = 2 cm و B'C' = 2,4 cm

و AC = 4,5 cm و AB = 6 cm و BC = 7,2 cm

لدينا : $\frac{AB}{A'B'}=\frac{6}{2}=3$ و $\frac{AC}{A'C'}=\frac{4,5}{1,5}=3$

و$\frac{BC}{B'C'}=\frac{7,2}{2,4}=3$ ومنه : $\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{BC}{B'C'}=3$

إذن : المثلثان ABC و A'B'C' متشابهان .

ملاحظة :

المثلث ABC هو تكبير للمثلث A'B'C' ونسبة التكبير هي 3 .

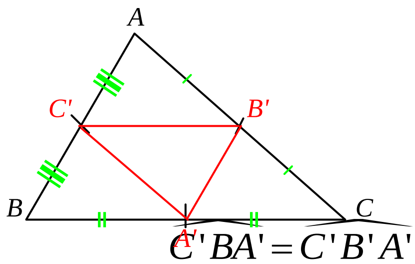
التمرين الرابع عشر:

ABC مثلث ، A' ، B' ، C' منتصفات أضلاعه [BC] ، [AC] ، [AB] على الترتيب.

أ) بين أن المثلثين ABC و A'B'C' متشابهان ، وعين نسبة التشابه.

ب) أحسب النسبة $\frac{S(ABC)}{S(A'B'C')}$.

حل :



أ) تبيان أن المثلثين ABC و A'B'C' متشابهان ، وتعيين نسبة التشابه.

لدينا : A' ، B' ، C' منتصفات أضلاعه [BC] ، [AC] ، [AB] على الترتيب.

إذن حسب نتيجة مبرهنة طاليس فإن : (A'B') // (AB) و A'B' = AC' = BC'

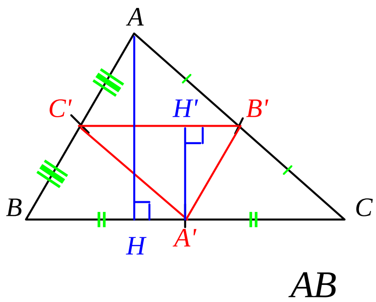
ومنه : الرباعيان AB'A'C' و BA'B'C' متوازيا أضلاع

إذن كل زاويتان متقابلتان هما متقايستان أي : $\widehat{C'AB'}=\widehat{C'A'B'}$ و $\widehat{C'BA'}=\widehat{C'B'A'}$

ومنه : $\widehat{CAB}=\widehat{C'A'B'}$ و $\widehat{CBA}=\widehat{C'B'A'}$ إذن المثلثان ABC و A'B'C' متشابهان.

النقط المتماثلة : A ، B ، C

A' ، B' ، C' $\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{BC}{B'C'}=2$ ومنه نسبة التشابه (التكبير) هي 2 .



ب) حساب النسبة $\frac{S(ABC)}{S(A'B'C')}$.

H و H' هما المسقطان العموديان لـ A و A' على (BC) و(B'C') على الترتيب

المثلثان القائمان AHB و A'H'B' متشابهان لأن لهما زاويتان قائمتان

و$\widehat{CBA}=\widehat{C'B'A'}$ أي : $\widehat{HBA}=\widehat{H'B'A'}$ ومنه $\frac{AB}{A'B'}=\frac{AH}{A'H'}=\frac{BH}{B'H'}=2$ ومنه: AH = 2 A'H'

مساحة(ABC) = 2 AH × BC = 2 (2A'H')(2B'C') = 4(2A'H'×B'C') = 4×مساحة(A'B'C').

إذن : $\frac{S(ABC)}{S(A'B'C')} = 4$.

التحويلات النقطية:

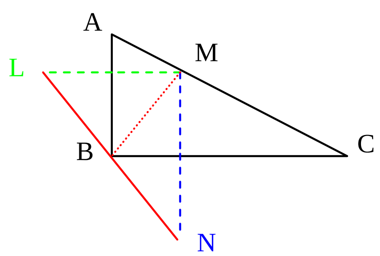
نشاط

ABC مثلث قائم في B ، M نقطة من وتره [AC] . النقطتان L و N نظيرتا النقطة M بالنسبة إلى (AB) و (BC) على الترتيب.

ماذا تمثل النقطة B بالنسبة إلى [LN]. ما القول عن النقطتين L و N بالنسبة إلى B.

نرسم النقطة D بحيث يكون الرباعي ABDC متوازي الأضلاع. قارن بين الشعاعين $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{BD}$ ، ماذا تمثل النقطة D بالنسبة إلى النقطة B.

حل النشاط :



L نظيرة M بالنسبة إلى (AB) إذن المستقيم (AB) هو محور القطعة [LM]

ومنه : المثلث BLM متساوي الساقين رأسه B إذن BL = BM

و (AB) يكون منصف الزاوية $L\hat{B}M$ أي : $L\hat{B}M = 2\times A\hat{B}M$

N نظيرة M بالنسبة إلى (BC) إذن المستقيم (BC) هو محور القطعة [MN]

ومنه : المثلث BNM متساوي الساقين رأسه B إذن BN = BM

و (BC) يكون منصف الزاوية $M\hat{B}N$ أي : $M\hat{B}N = 2\times M\hat{B}C$

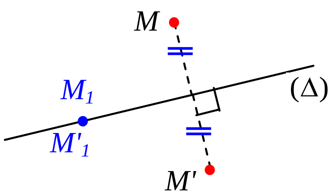
وبالتالي : BN = BL

ولدينا : $L\hat{B}N = L\hat{B}M + M\hat{B}N = 2\times A\hat{B}M + 2\times M\hat{B}C = 2(A\hat{B}M + M\hat{B}C) = 2\,A\hat{B}C = 180°$

ومنه L ، B ، N على استقامة واحدة. وبالتالي : النقطة B هي منتصف القطعة [LN].

تعاريف :

تعريف التناظر المحوري:

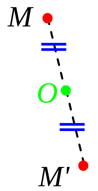


(Δ) مستقيم ثابت ، التناظر المحوري بالنسبة إلى المستقيم (Δ) هو التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M من المستوي ، النقطة 'M من المستوي حيث :

إذا كان M تنتمي إلى (Δ) فإن 'M تكون منطبقة على M ،

وإذا كانت M لا تنتمي إلى (Δ) فإن : (Δ) يكون محور القطعة ['MM].

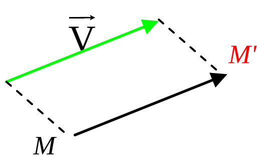
تعريف التناظر المركزي :



O نقطة ثابتة من المستوي ، التناظر المركزي بالنسبة إلى النقطة O هو التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M من المستوي ، النقطة 'M من المستوي حيث :

تكون النقطة O منتصف القطعة ['MM].

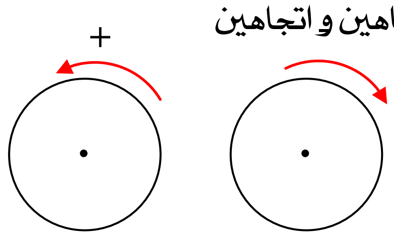
تعريف الانسحاب :



$\vec{V}$ شعاع ثابت من المستوي ، الانسحاب الذي شعاعه $\vec{V}$ هو التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M من المستوي ، النقطة 'M من المستوي حيث : $\overrightarrow{MM'} = \vec{V}$

ملاحظة : إذا كان $\vec{V} = \overrightarrow{AB}$ فإن الرباعي ABMM' هو متوازي أضلاع.

توجيه المستوي :



لتكن (C) دائرة من المستوي ، يمكن أن نحدد على هذه الدائرة اتجاهين و اتجاهين فقط ، أحدهما عكس اتجاه حركة عقارب الساعة ويسمى الاتجاه المباشر (أو الاتجاه الموجب) ، والآخر مثل اتجاه حركة عقارب الساعة ويسمى الاتجاه غير المباشر (أو الاتجاه السالب).

تعريف :

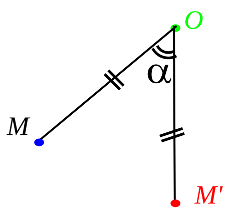
توجيه المستوي هو اختيار اتجاه واحد على كل دوائر هذا المستوي.

ملاحظة :

لتوجيه مستو عادة ما نختار الاتجاه المباشر (عكس اتجاه حركة عقارب الساعة).

تعريف الدوران :

O نقطة ثابتة من مستو موجه ، و α زاوية معلومة ، الدوران الذي مركزه النقطة O وزاويته α في الاتجاه المباشر هو التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M من المستوي ، النقطة M' من المستوي حيث :



إذا كانت M منطبقة على O فإن النقطة M' تكون منطبقة على O.

وإذا كانت M تختلف عن النقطة O فإن : OM' = OM و $\widehat{MOM'} = \alpha$

والثلاثية (O , M , M') مباشرة.

ملاحظة :

في كل حالة النقطة M' تسمى صورة النقطة M بالتحويل النقطي .

خواص :

النقط الصامدة :

تعريف :

نقول عن نقطة أنها صامدة بتحويل نقطي إذا كانت منطبقة على صورتها بواسطة هذا التحويل.

أمثلة :

- ✓ التناظر المحوري الذي محوره المستقيم (Δ) : كل نقط المستقيم (Δ) هي نقط صامدة بهذا التحويل.
- ✓ التناظر المركزي الذي مركزه النقطة A : يقبل نقطة صامدة وحيدة وهي المركز A.
- ✓ الانسحاب الذي شعاعه غير معدوم لا يقبل نقط صامدة.
- ✓ الدوران الذي مركزه O وزاويته α حيث : $\alpha \neq k \times 180°$ و k عدد طبيعي ، يقبل نقطة صامدة وحيدة وهي المركز O.

ملاحظة :

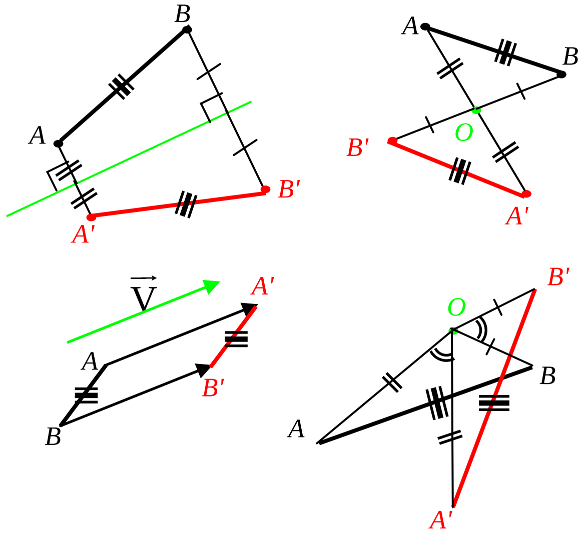
إذا كانت $\alpha = 2k \times 180°$ و k عدد طبيعي ، في هذه الحالة التحويل النقطي يسمى التحويل المطابق في المستوي وكل نقط المستوي هي صامدة بهذا التحويل.

حفظ المسافات (التقايس)

تعريف :

التقايس هو كل تحويل نقطي الذي يرفق بكل ثنائية نقطية (A , B) الثنائية النقطية (A' , B') حيث :

A'B' = AB. نقول عنه أنه يحافظ على المسافات.



أمثلة :

✓ A' و B' صورتا A و B على الترتيب بالتناظر المحوري الذي محوره المستقيم (Δ) : لدينا : A'B' = AB

✓ A' و B' صورتا A و B على الترتيب بالتناظر المركزي الذي مركزه النقطة O : لدينا A'B' = AB

✓ A' و B' صورتا A و B على الترتيب بالانسحاب الذي شعاعه غير معدوم $\vec{V}$: لدينا A'B' = AB

✓ A' و B' صورتا A و B على الترتيب الدوران الذي مركزه O وزاويته α : لدينا A'B' = AB

مبرهنة :

كل من التناظر المحوري، التناظر المركزي، الانسحاب، الدوران، هو تقايس (يحافظ على المسافات).

نتيجة :

يتقايس مثلثان إذا كان أحدهما صورة للمثلث الآخر بانسحاب ، أو تناظر محوري ، أو تناظر مركزي ، أو دوران.

ملاحظة :

إذا كان مثلثان يتطابق بالسحب أو التدوير فنقول عن تقايسهما أنه مباشر ، وإن كان لا يتطابق إلا بعد قلب أحدهما فنقول عن تقايسهما أنه غير مباشر.

- حفظ أقياس الزوايا :

مبرهنة :

صورة زاوية بتقايس هي زاوية تقايسها.

- حفظ الاستقامية :

مبرهنة :

إذا كانت A ، B ، C في استقامية فإن صورها A' ، B' ، C' ، بتقايس ، تكون في استقامية.

نتائج :

- صورة مستقيم بتقايس (تناظر محوري ، تناظر مركزي ، انسحاب ، دوران) هو مستقيم.
- صورة مستقيم بتناظر مركزي أو انسحاب هي مستقيم موازيا له
- صورة مستقيم (D) بتناظر محوري بالنسبة إلى (Δ) هي المستقيم (D') حيث :
إذا كان (D) و (Δ) متوازيين فإن (D) يوازي (D') وإذا كان (D) و (Δ) متقاطعان فإن (D) يقطع (D') في نفس النقطة.
- صورة مستقيم (D) بدوران هي مستقيم (D') حيث إحدى الزوايا المحصورة بين (D) و (D') تقايس زاوية الدوران.

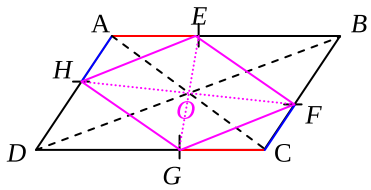
التمرين الخامس عشر:

ABCD متوازي أضلاع. E ، F ، G ، H نقط من [AB] ، [BC] ، [CD] ، [AD] على الترتيب حيث :
AE = CG و AH = CF.

أ) ما هو التحويل النقطي الذي يحول A إلى C و يحول B إلى D ؟

ب) ما هي طبيعة الرباعي EFGH ؟

حل :



أ) تعيين التحويل النقطي الذي يحول A إلى C و يحول B إلى D :

ABCD متوازي أضلاع إذن قطراه [AC] ، [BD] متناصفان في النقطة O.

إذن C هي صورة A و D هي صورة B بالتناظر المركزي الذي مركزه O.

ب) طبيعة الرباعي EFGH :

الطريقة 1 :

(GC) // (AE) و GC = AE إذن الرباعي AECG متوازي أضلاع ومنه قطراه [AC] ، [EG] متناصفان في النقطة O.

وبالتالي : G هي صورة E بالتناظر المركزي الذي مركزه O.

(FC) // (AH) و FC = AH إذن الرباعي AFCH متوازي أضلاع ومنه قطراه [AC] ، [HF] متناصفان في النقطة O.

وبالتالي : H هي صورة F بالتناظر المركزي الذي مركزه O.

لدينا G هي صورة E بالتناظر المركزي الذي مركزه O وH هي صورة F بالتناظر المركزي الذي مركزه O

إذن [HG] هي صورة [EF] بالتناظر المركزي الذي مركزه O ومنه : (EF) // (HG)

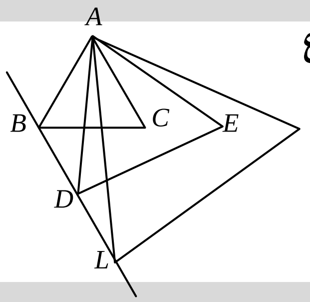
والتناظر المركزي يحافظ على المسافات أي : EF = HG وبالتالي الرباعي EFGH هو متوازي أضلاع.

الطريقة 2 :

نقارن بين المثلثين AEH و CFG ثم بين BEF و DGH.

و نحصل على النتيجتين : EH = FG و HG = EF.

التمرين السادس عشر



يمثل الشكل المقابل ثلاثة مثلثات ABC ، ADE ، ALM كل منها متقايسة الأضلاع

حيث النقط B ، D ، L في استقامية. بين أن النقط C ، E ، M في استقامية.

حل :

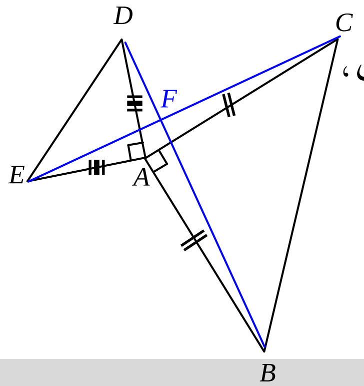
بما أن المثلثات متقايسة الأضلاع فإن : AB = AC ، AD = AE ، AL = AM

$$\widehat{BAC} = \widehat{DAE} = \widehat{LAM} = 60°$$ و

ومنه : C ، E ، M هي صور B ، D ، L بالدوران الذي مركزه A وزاويته 60°.

وبما أن الدوران يحافظ على الاستقامية و النقط B ، D ، L في استقامية فإن النقط C ، E ، M في استقامية كذلك.

التمرين السابع عشر :



ABC و ADE مثلثان كل منهما قائم ومتساوي الساقين كما هو مبين في الشكل ،
[CE] و [BD] متقاطعان في النقطة F.
بين باستعمال الدوران أن المستقيمين (BD) و (CE) متعامدان.

حل :

نوجه المستوي في الاتجاه المباشر ، ونعتبر الدوران الذي مركزه A وزاويته 90°.
إذن صورة B هي C و صورة D هي E بهذا الدوران
ومنه صورة المستقيم (BD) هي المستقيم (CE) بنفس الدوران إذن إحدى زوايا المحصورة بين المستقيمين (BD) و(CE) تقايس زاوية الدوران التي هي 90° ومنه : المستقيمان (BD) و (CE) متعامدان.

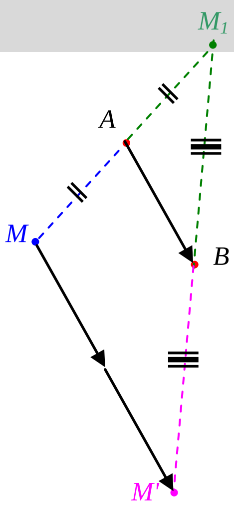
التمرين الثامن عشر (تركيب تناظرين بالنسبة إلى نقطتين متمايزتين)

A ، B نقطتان ثابتتان ومتمايزتين ، علم نقطة M ، ثم أنشئ M_1 نظيرتها بالنسبة إلى A ، و M' نظيرة M_1 بالنسبة إلى B.
نقول أن النقطة M' هي صورة M بمركب التناظر بالنسبة إلى A و التناظر بالنسبة إلى B.

أ) عبر عن $\overrightarrow{MM'}$ بدلالة $\overrightarrow{AB}$.

ب) استنتج نوع التحويل الناتج عن مركب تناظرين مركزيين.

حل :



أ) عبر عن $\overrightarrow{MM'}$ بدلالة $\overrightarrow{AB}$.

لدينا A منتصف $[MM_1]$ و B منتصف $[M_1M']$ إذن حسب نتائج مبرهنة طاليس
نجد : (AB) // (MM') و MM' = 2 AB

بما أن $\overrightarrow{MM'}$ و $\overrightarrow{AB}$ لهما نفس الاتجاه فإن : $\overrightarrow{MM'}=2\overrightarrow{AB}$

ب) استنتج نوع التحويل الناتج عن مركب تناظرين مركزيين.

لدينا : $\overrightarrow{MM'}=2\overrightarrow{AB}$ ومنه M' هي صورة M بالانسحاب الذي شعاعه $2\overrightarrow{AB}$
وبالتالي : مركب التناظر المركزي بالنسبة إلى A و التناظر المركزي بالنسبة إلى B بهذا الترتيب هو انسحاب شعاعه $2\overrightarrow{AB}$.

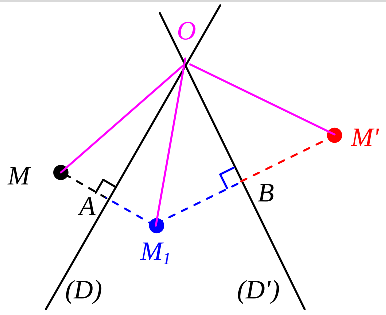
التمرين التاسع عشر (تركيب تناظرين بالنسبة إلى مستقيمين متقاطعين)

(D) و (D') مستقيمان متقاطعان في نقطة O ، علم النقطة M ، ثم أنشئ M_1 نظيرتها بالنسبة إلى (D) ، و M' نظيرة M_1 بالنسبة إلى (D').

أ) بين أن : OM = OM' و ، أن الزاوية $\widehat{MOM'}$ ثابتة.

ب) استنتج نوع التحويل الناتج عن مركب تناظرين بالنسبة إلى مستقيمين متقاطعين.

حل :



أ) بين أن : OM = OM' و ، أن الزاوية $\widehat{MOM'}$ ثابتة.

لدينا : (D) محور القطعة $[MM_1]$ ويتقاطعان في A .

إذن : $OM = OM_1$ و $\widehat{MOA} = \widehat{AOM_1}$

ولدينا : (D') محور القطعة $[M_1M']$ ويتقاطعان في B .

إذن : $OM_1 = OM'$ و $\widehat{M_1OB} = \widehat{BOM'}$ ومنه : OM = OM'

نوجه المستوي في الاتجاه المباشر ونضع α قياس الزاوية المحصورة بين المستقيمين (D) و (D')

أي $\widehat{AOB} = \alpha$. $\widehat{MOM'} = \widehat{MOM_1} + \widehat{M_1OM'} = 2\widehat{AOM_1} + 2\widehat{M_1OB} = 2\widehat{AOB} = 2\alpha$

ب) استنتج نوع التحويل الناتج عن مركب تناظرين بالنسبة إلى مستقيمين متقاطعين.

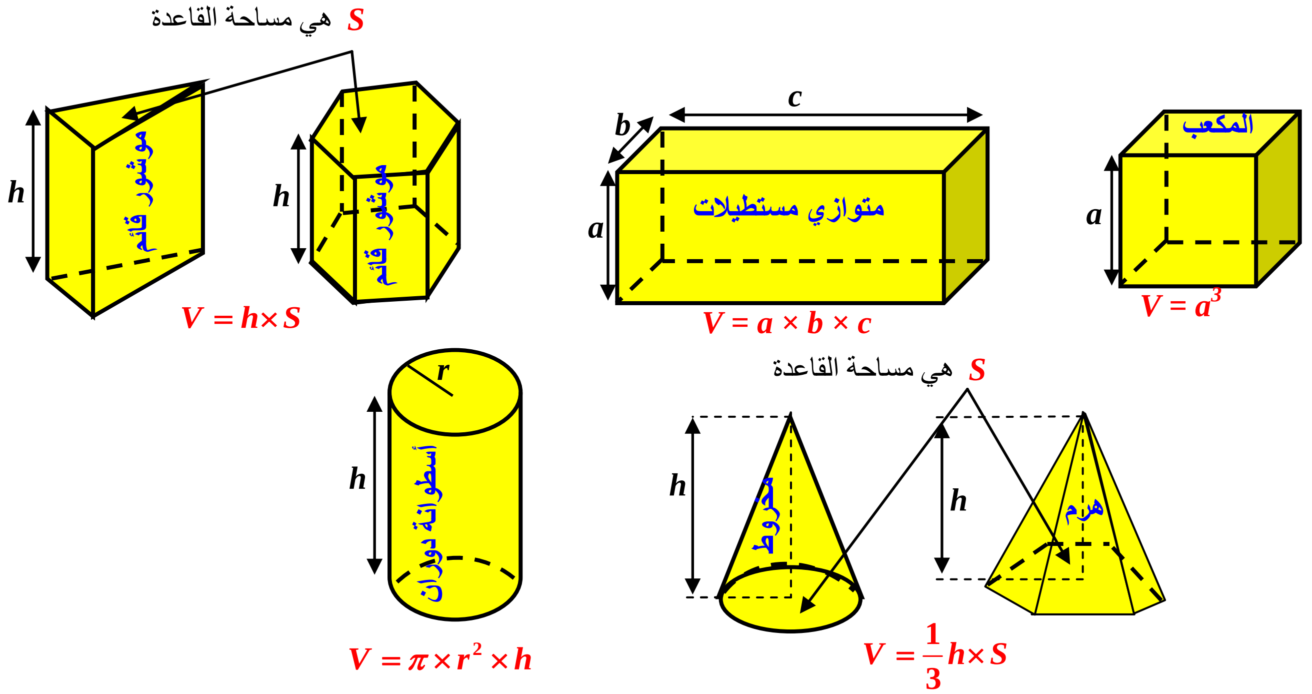
لدينا : OM = OM' و $\widehat{MOM'} = 2\alpha$ إذن M' هي صورة M بالدوران الذي مركزه O وزاويته 2α

وبالتالي مركب تناظرين بالنسبة إلى مستقيمين متقاطعين هو الدوران الذي مركزه نقطة تقاطع هذين المستقيمين وزاويته ضعف الزاوية المحصورة بينهما.

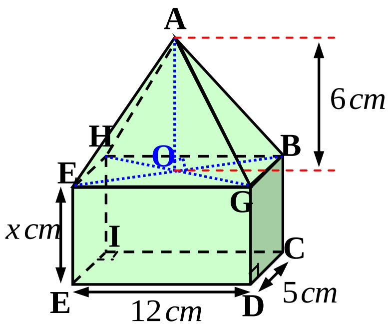
الهندسة
في
الفضاء

I) الهندسة في الفضاء :

1) الحجوم لمجسمات مألوفة :



نشاط :



الشكل المقابل يمثل مخطط مكون من متوازي مستطيلات أبعاده $5cm$ ، $12cm$ و $x\,cm$ ؛ وهرم ارتفاعه $AO = 6cm$ حيث O تقاطع $[FB]$ و $[HG]$.

من أجل أي قيمة للمجهول x يكون حجم هذا المجسم يساوي $660\,cm^3$ ؟

بين أن أحرف الهرم AF ، AG ، AB ، AH متساوية واحسب قياسها بتقريب $0,1$.

حل النشاط :

نضع v_1 حجم متوازي المستطيلات $BHFGCIED$ و v_2 حجم الهرم $ABGFH$.

$v_1 = 12 \times 5 \times x\,cm^3$ أي : $v_1 = 60x\,cm^3$ و $v_2 = \frac{1}{3} 12 \times 5 \times 6\,cm^3$ أي : $v_2 = 120\,cm^3$

حجم المجسم هو $v = v_1 + v_2$ أي : $v = (60x + 120)\,cm^3$ هذا من جهة .

ومن جهة أخرى لدينا : $v = 660\,cm^3$ إذن : $60x + 120 = 660$ معناه : $60x = 540$ ومعناه أن $x = 9$.

لدينا O منتصف $[HG]$ و $(HG) \perp (AO)$ إذن (AO) هو محور القطعة $[HG]$ وبالتالي : $AG = AH$

بنفس الطريقة لدينا O منتصف $[FB]$ و $(FB) \perp (AO)$ إذن (AO) هو محور القطعة $[FB]$ وبالتالي : $AB = AF$

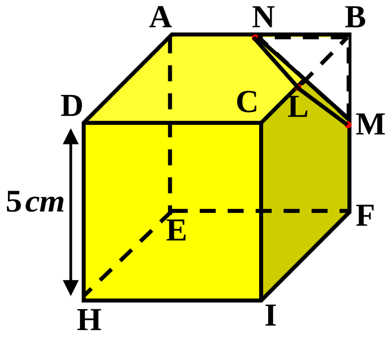
وبتطبيق مبرهنة فيثاغورس في كل من المثلثين القائمين AOB و AOG نجد : $AB=\sqrt{AO^2+OB^2}$ و
$AG=\sqrt{AO^2+OG^2}$ لدينا $BGFH$ مستطيل وبالتالي قطريه متقايسين ومتناصفين إذن $OB=OG$ ، وبالتالي :
$AG=AB=\sqrt{AO^2+OB^2}$.

خلاصة : $AG=AH=AB=AF$.

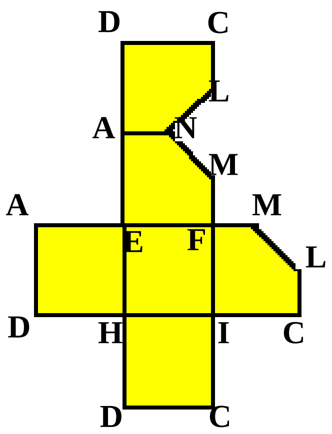
وبتطبيق مبرهنة فيثاغورس في المثلث القائم FBG نجد $FB=\sqrt{FG^2+GB^2}$ أي : $2\times OB=\sqrt{144+25}=\sqrt{169}=13$
وبالتالي : $OB=6,5cm$ ، ومنه : $AB=\sqrt{36+42.25}=\sqrt{78.25}$ إذن $AB\simeq 8,8cm$.

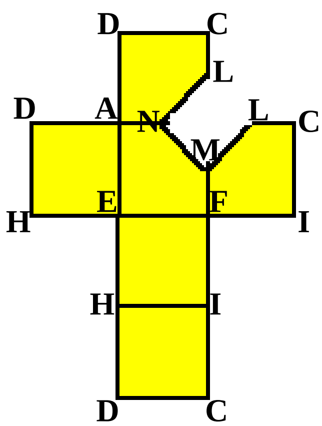
نشاط :

مجسم على شكل مكعب طول حرفه $5cm$ ينقصه هرم $BMLN$ حيث L ، M و N منتصفات $[BC]$ ، $[BF]$ و $[AB]$ على الترتيب كما هو في الشكل .
أنجز تصميما لهذا المجسم .



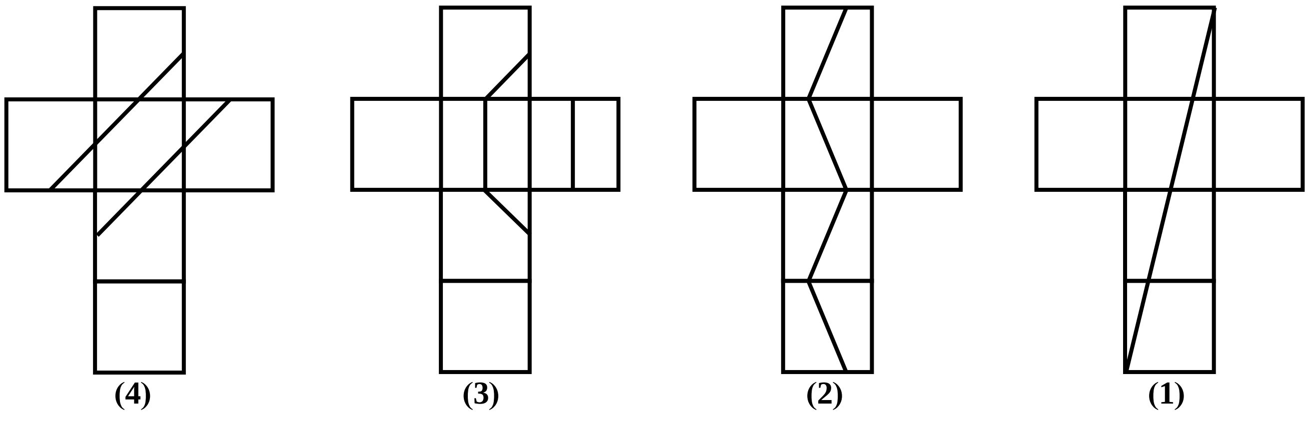
حل النشاط :



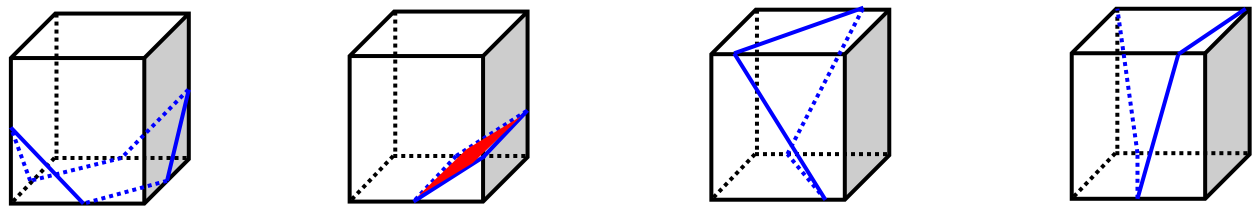


نشاط :

أي التصاميم الآتية هو تصميم لمكعب مرسوم عليه أثر تقاطع مستوٍ مع هذا المكعب .

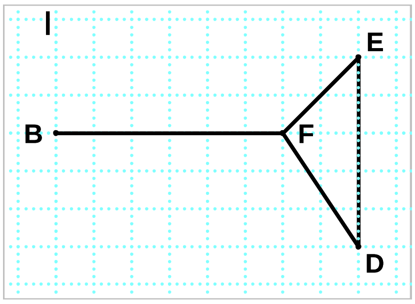


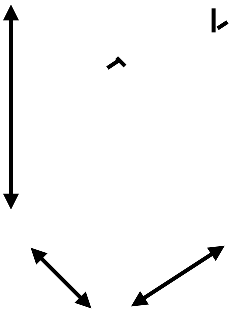
الحل :



الأثرات مرسومة باللون الأزرق والشكل الثالث هو الذي علية أثر تقاطع مستو.

نشاط :



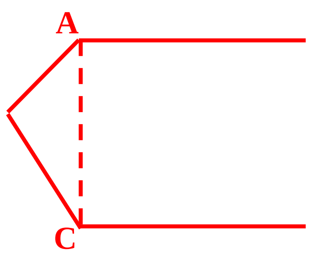


الشكل الثاني هو بداية لتمثيل بالمنظور متساوي القياس للموشور القائم الممثل بالشكل الأول .

أ) أكمل الشكل الثاني للحصول على تمثيل بالمنظور متساوي القياس لنفس الموشور .

ب) أحسب مساحته الكلية وحجمه .

الحل :



نسمي S_1 مساحة الوجه (ABC) لدينا : $S_1 = \frac{1}{2} AB \times AC$.

ومنه : $S_1 = \frac{1}{2} \times 6 \times 8 = 24 cm^2$. مع الملاحظة أن الوجهين (ABC) و (DEF) لهما نفس المساحة .

نسمي S_2 ، S_3 و S_4 مساحات الأوجه $(ABFE)$ ، $(BCDF)$ و $(ACDE)$ على الترتيب مع الملاحظة أن الأوجه الثلاث هي على شكل مستطيلات .

$S_2 = 6 \times 12 = 72 cm^2$ $\qquad$ $S_3 = 8 \times 12 = 96 cm^2$

لحساب S_4 نحسب أولا AC وهذا باستعمال مبرهنة فيثاغورس في المثلث القائم ABC ، $AC = \sqrt{36+64} = 10 cm$.

إذن : $S_4 = 10 \times 12 = 120 cm^2$.

وبالتالي : المساحة الكلية للمجسم هي S حيث : $S = 2S_1 + S_2 + S_3 + S_4$ أي : $S = 336 cm^2$

حجم المجسم هو V حيث $V = AE \times S_1$ أي : $V = 12 \times 24 = 288 cm^3$

2) التمثيل بالمنظور متساوي القياس :

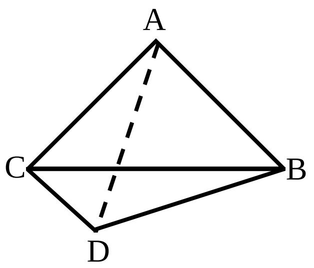
لتمثيل الأشكال في الفضاء يمكن استعمال عدة تقنيات من بينها التمثيل بالمنظور متساوي القياس والقواعد الخاص بهذه التقنية تتضمن ما يلي :

- المحافظة على توازي المستقيمات ، على استقامية النقط ، وعلى منتصفات القطع .
- تمثل الخطوط المرئية (التي نرها في الحقيقة) بخطوط مستمرة ؛ والخطوط المخفية (التي لا نراها عند تصور رؤية المجسم) بخطوط متقطعة .
- على مستوي الواجهة عناصر الرسم تمثل بمقادير حقيقية (مقادير الزوايا والمسافات) .

ملاحظات :

- المستوي يمثل بمتوازي أضلاع .
- نمثل مستقيمين متقاطعين كما هما وفي بعض الأحيان بمستقيمين متطابقين .
- نمثل النقط في استقامية كما هي وفي بعض الأحيان بنقطة واحدة .

تمرين:

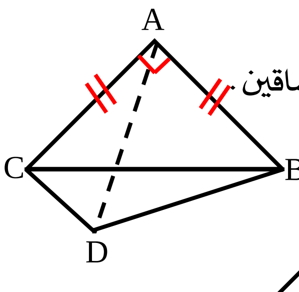


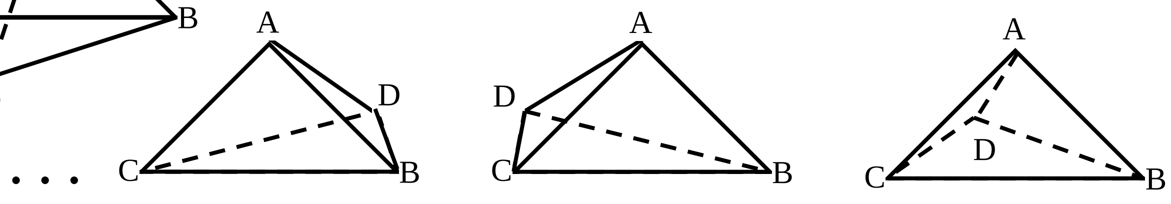
$ABCD$ رباعي وجوه حيث الوجه (ABC) يقع في مستوي الواجهة (أنظر الشكل)

1. بين أن الناظر يقع تحت $[BC]$ والنقطة A تقع فوق $[BC]$.
2. باستعمال أدوات هندسية تحقق في الشكل أن المثلث ABC هو في الحقيقة قائم ومتساوي الساقين .
3. أرسم تمثيلا لنفس المجسم باعتبار أن النقطة A والناظر يقعان فوق $[BC]$.

الحل :

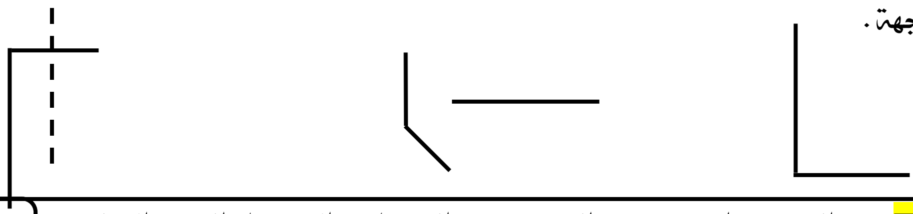
1. الحرف $[AD]$ مرسوم بنقط متقطعة إذن هو مخفي بالوجهين (ABC) و (BCD) ومنه الناظر يقع أسفل $[BC]$.
2. باستعمال كوسا ومدورا فعلا نجد أن المثلث ABC هو في الحقيقة قائم ومتساوي الساقين
3. يمكن أخذ تمثيلا من التمثيلات التالية :



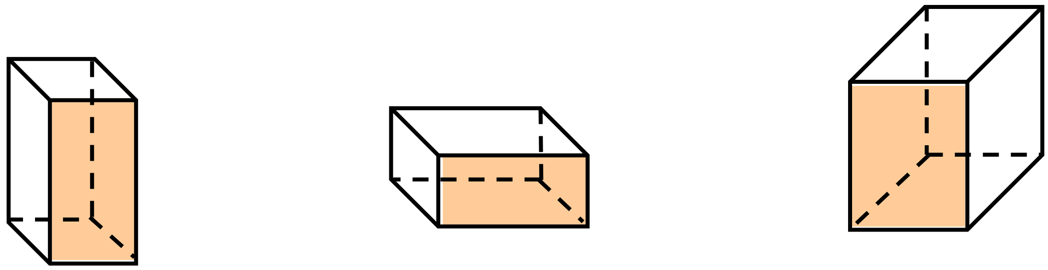


تمرين

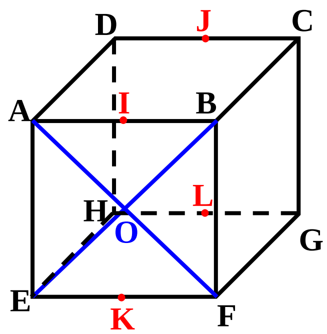
الأشكال الثلاثة الآتية هي بداية لتمثيل بالمنظور متساوي القياس لمتوازي المستطيلات أكمل كل منها ولون الوجه الموجود في مستوي الواجهة .



الحل :



أعمال موجهة



$ABCDEFGH$ مكعب ، I منتصف الحرف $[AB]$ ، J منتصف الحرف $[DC]$ ،
K منتصف الحرف $[EF]$ ، L منتصف الحرف $[GH]$.
O نقطة تقاطع المستقيمين (AF) و (BE) .

1) النقط والمستويات :
أ. النقطتان I و H تنتميان إلى المستوي الذي يشمل النقط A ، B و E ؟
ب. النقطتان O و D تنتميان إلى المستوي الذي يشمل النقط F ، G و A ؟

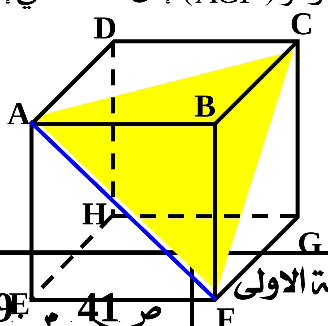
2) تقاطع مستويين :
أ) (P) هو المستوي الذي يشمل النقط A ، B ، F ، E ؛ و (Π) المستوي الذي يشمل النقط F ، G و A .
هل المستويين (P) و (Π) يتقاطعان ؟
ب) هل المستوي (P) يقطع المستوي الذي يشمل النقط C ، D ، G ، H ؟
ج) أرسم على المكعب السابق تقاطع المستوي (P') الذي يشمل النقط A ، C ، F مع المستوي (P) ؛ ثم مع المستوي الذي يشمل النقط A ، B ، C ، D ؛ ثم مع المستوي الذي يشمل B ، F ، G ، C .
د) هل المستوي (P') يقطع المستوي الذي يشمل النقط A ، E ، H ، D ؟

3) تقاطع مستقيم ومستو
أ) هل المستقيمين (IJ) و (CG) يقطعان المستوي (P) ؟
ب) المستقيم (JO) يقطع المستوي الذي يشمل النقط E ، F ، G ، H ؟

4) تقاطع مستقيمين :
أ) هل المستقيمين (AF) و (JO) متقاطعان ؟
ب) هل المستقيمين (KL) و (JO) متقاطعان ؟
ج) هل المستقيمين (AF) و (BG) متقاطعان ؟

حل

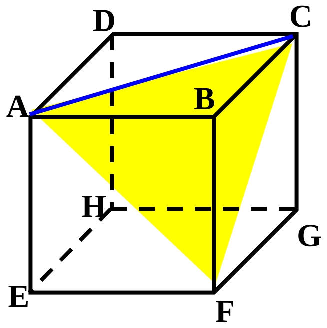
1) أ) I هي نقطة من المستقيم (AB) إذن هي نقطة من كل مستو يشمل المستقيم (AB) وبالتالي I تنتمي إلى المستوي الذي يشمل النقط A ، B و E . النقطة H لا تنتمي إلى المستوي الواجهة (ABE) .
ب) المستوي (AGF) يشمل المستقيم (AF) و O نقطة من (AF) إذن O تنتمي إلى المستوي (AGF) .
لدينا المستقيمان (AD) و (FG) متوازيان تماما وبالتالي يوجد مستو واحد يشملهما وهو (AGF) إذن D تنتمي إليه .



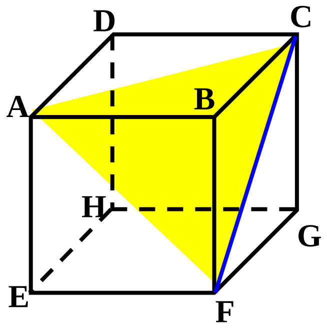
2) أ) المستويان (P) و (Π) يتقاطعان في المستقيم (AF) .
ب) المستوي (P) والمستوي الذي يشمل النقط C ، D ، G ، H منفصلان لا توجد أي نقطة مشتركة بينهما .
ج) رسم تقاطع المستوي (P') الذي يشمل النقط A ، C ، F مع المستوي (P) ،

وهو المستقيم (AF) .

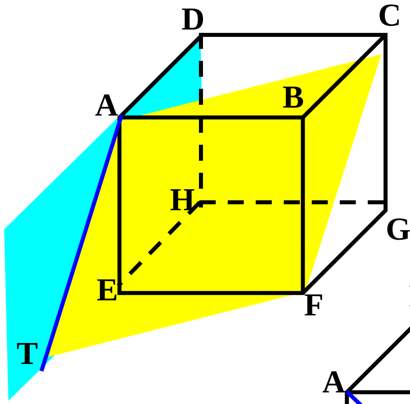
رسم تقاطع (P') مع المستوي الذي يشمل النقط A ، B ، C ، D وهو المستقيم (AC) .



رسم تقاطع (P') مع المستوي الذي يشمل النقط B ، F ، G ، C وهو المستقيم (CF)



د) المستوي (P') يقطع المستوي الذي يشمل النقط A ، E ، H ، D لأنهما متمايزان ولهما نقطة مشتركة A إذن تقاطعهما يكون مستقيم يشمل A وهو المستقيم (AT)



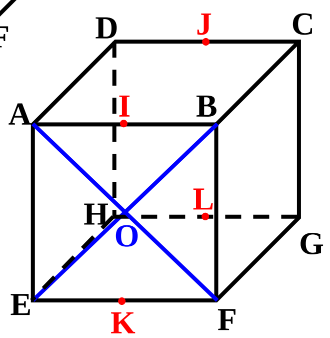
3) أ) المستقيم (IJ) يقطع المستوي (P) في نقطة واحدة وهي I بينما (CG) لا يقطع المستوي (P) هما متوازيان

ب) (JO) لا يقطع المستوي الذي يشمل النقط E ، F ، G ، H بل هما متوازيان .

4) أ) المستقيمان (AF) و (JO) يتقاطعان في النقطة O .

ب) المستقيمان (KL) و (JO) متقاطعان في نقطة .

ج) المستقيمان (AF) و (BG) غير متقاطعين .



قواعد أساسية في الهندسة الفضائية :

- بديهية : إذا كانت A ، B ، C ثلاث نقط ليست في استقامية فإنه يوجد مستو واحد يشملها .
- بديهية : إذا كانت A و B نقطتين متمايزتين من مستو (P) فإن كل نقط المستقيم (AB) تنتمي إلى المستوي (P) .
- بديهية : إذا كان مستويان متمايزان ولهما نقطة مشتركة فإن تقاطعهما هو مستقيم .

نتائج :

يتعين المستوي بـ :

- ثلاث نقط ليست في استقامية ؛
- مستقيم ونقطة لا تنتمي إليه ؛
- مستقيمين متوازيان تماما ؛
- مستقيمين متقاطعان في نقطة واحدة .

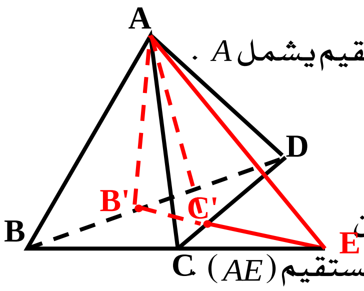
ملاحظة :

كل خواص ونتائج الهندسة المستوية تبقى صحيحة في أي مستو من الفضاء .

تمرين

$ABCD$ رباعي وجوه . B' و C' نقطتان من المستقيمين (DB) و (DC) على الترتيب .
نفترض أن المستقيمين (BC) و $(B'C')$ يتقاطعان في النقطة E .
برهن أن المستقيم (AE) هو تقاطع المستويين (ABC) و $(AB'C')$.

الحل :

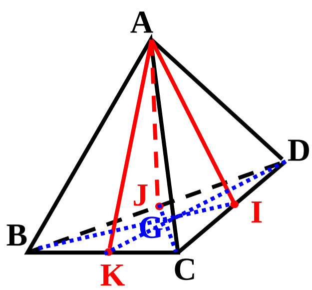


الطريقة : يكفي إثبات أن المستويين يشملان نقطتين متمايزتين .
المستويان (ABC) و $(AB'C')$ متمايزان ولهما نقطة مشتركة A ، إذن تقاطعهما هو مستقيم يشمل A .
E هي نقط من (BC) إذن هي نقطة من المستوي (ABC) ، وكذلك هي نقطة من $(B'C')$ إذن هي نقطة من المستوي $(AB'C')$ وبالتالي E هي نقطة مشتركة للمستويين (ABC) و $(AB'C')$.
E هي نقط من المستوي (BCD) ولكن A خارج هذا المستوي إذن A و E نقطتان متمايزتان
A و E نقطتان متمايزتان تنتميان إلى المستويين (ABC) و $(AB'C')$ إذن تقاطعهما هو المستقيم (AE)

تمرين 2 :

$ABCD$ رباعي وجوه . النقط I ، J ، K منتصفات الأحرف $[CD]$ ، $[DB]$ و $[BC]$ على الترتيب.
برهن أن المستويات (ABI) ، (ACJ) و (ADK) لها مستقيم مشترك .

الحل :



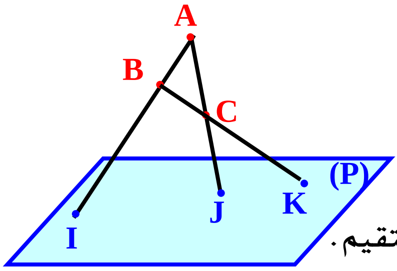
الطريقة :
يكفي إثبات أن نقطتين مختلفتين تنتميان إلى المستويات الثلاث .
النقطة A تنتمي إلى المستويات الثلاث (ABI) ، (ACJ) و (ADK) .
في المستوي (BCD) متوسطات المثلث BCD تتقاطع في نقطة وحيدة G (مركز ثقله) وبالتالي النقطة G تنتمي إلى المستقيمات (BI) ، (CJ) ، (DK) ومنه النقطة G تنتمي إلى المستويات (ABI) ، (ACJ) و (ADK) .
النقطة A هي خارج المستوي (BCD) وبالتالي : النقطتان A و G متمايزتان وتنتميان إلى المستويات الثلاث (ABI) ، (ACJ) و (ADK) . إذن تقاطع هذه المستويات هو المستقيم (AG) .

تمرين 3 :

(P) مستو ؛ A ، B ، C ثلاث نقط ليست في استقامية ولا تنتمي إلى المستوي (P) .
نفترض أن المستقيمات (AB) ، (AC) و (BC) تقطع المستوي (P) في النقط I ، J ، K على الترتيب .
بين أن النقط I ، J ، K في استقامية .

الحل :

الطريقة : إذا كانت هذه النقط تنتمي إلى مستوين متمايزين فهي تنتمي إلى تقاطعهما الذي هو مستقيم وبالتالي يكفي تبيان أن النقط I ، J ، K تنتمي إلى مستوين متمايزين .



النقط A ، B ، C ليست في استقامية إذن تعين مستوٍ نسميه (ABC) .
النقط I ، J ، K تنتمي إلى المستوي (P) . وكذلك هذه النقط تنتمي إلى المستقيمات (AB) ، (AC) و (BC) التي هي في المستوي (ABC) ومنه النقط I ، J ، K تنتمي إلى المستوي (ABC)
وبالتالي النقط I ، J ، K تنتمي إلى المستويين المتمايزين (P) و (ABC) .
إذن النقط I ، J ، K تنتمي إلى تقاطع المستويين (P) و (ABC) الذي هو مستقيم.
وبالتالي النقط I ، J ، K في استقامية.

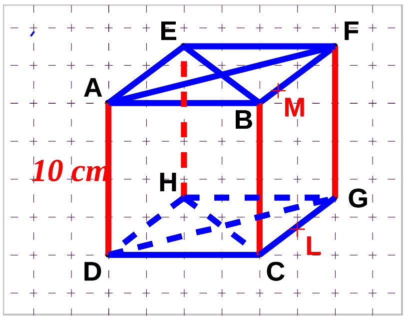
الأوضاع النسبية للمستويات والمستقيمات في الفضاء :

نشاط:

الشكل المقابل هو لمكعب طول حرفه $10\,cm$ مرسوم بمنظور متساوي القياس ،
النقطتان M و L هما تقاطع $[BF]$ و $[CG]$ مع مستقيمات رصف الورقة.
باستعمال بيانات الشكل أجب عن الأسئلة الآتية :

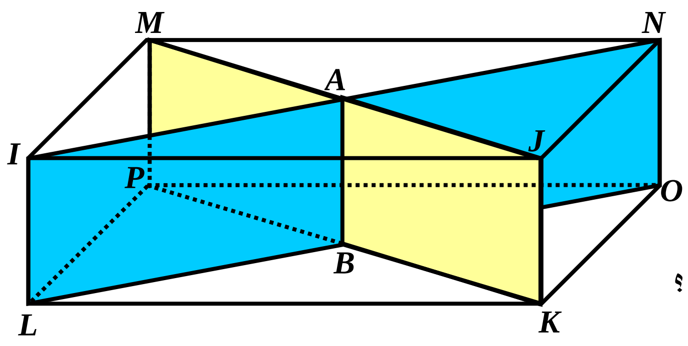
1. أذكر المستقيمات التي كل منها عمودي على (FG) .
2. أذكر المستقيمات التي كل منها يوازي (FG) .
3. أذكر مستقيمين غير متقاطعين وغير متوازيين.
4. هل المستقيمين (EB) و (HB) متعامدان ؟
5. ما نوع الرباعي $EBCH$ ؟
6. عين القيسين BM و CL وأحسب ML .

حل النشاط :



1. المستقيمات العمودية على (FG) هي : (AB) ، (AE) ، (FA) ، (FB) ، (FE) ، (EB) ، (GH) ، (GD) ، (GC) ، (HC) ، (DH) ، (DC) .
2. المستقيمات الموازية للمستقيم (FG) هي : (BC) ، (AD) ، (EH) .

نشاط :



الشكل $LKOPIJNM$ هو تمثيل لمتوازي مستطيلات بالمنظور متساوي القياس.
لاحظ وأجب عن الأسئلة الآتية :
1. أذكر مستويين متوازيين ؟
2. أذكر مستويين متعامدين ؟
3. ما هو الوضع النسبي للمستويين $(NOLI)$ و $(MJKP)$ ؟

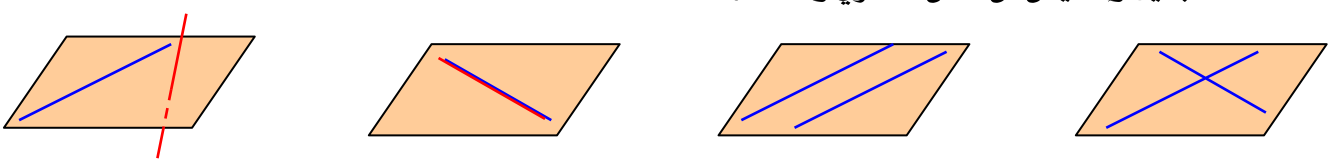
الحل :

1. $(IMNJ)$ و $(LKOP)$ مستويان متوازيان . $(IJKL)$ و $(MNOP)$ مستويان متوازيان .
$(JKON)$ و $(IMPL)$ مستويان متوازيان .
2. $(IMNJ)$ و $(JKON)$ مستويان متعامدان . $(IMNJ)$ و $(IMPL)$ مستويان متعامدان .
$(IMNJ)$ و $(IJKL)$ مستويان متعامدان . $(IMNJ)$ و $(MNOP)$ مستويان متعامدان .
$(IMNJ)$ و $(MJKP)$ مستويان متعامدان . $(IMNJ)$ و $(NOLI)$ مستويان متعامدان .
$(LKOP)$ و $(JKON)$ مستويان متعامدان . $(LKOP)$ و $(IMPL)$ مستويان متعامدان .
$(LKOP)$ و $(IJKL)$ مستويان متعامدان . $(LKOP)$ و $(MNOP)$ مستويان متعامدان .
$(LKOP)$ و $(MJKP)$ مستويان متعامدان . $(LKOP)$ و $(NOLI)$ مستويان متعامدان .
3. المستويان $(NOLI)$ و $(MJKP)$ متقاطعان وتقاطعهما هو المستقيم (AB) .

الاوضاع النسبية

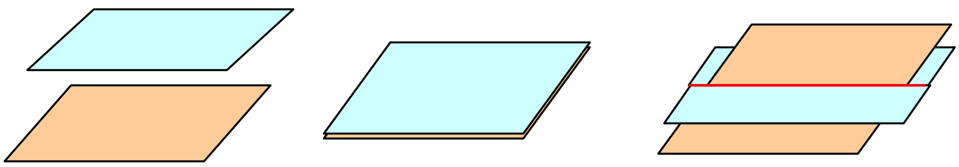
❖ الوضع النسبي لمستقيمين:

D و D' مستقيمان في الفضاء
يكون D و D' إما
- ✓ متقاطعان في نقطة واحدة
- ✓ متوازيان تماما وتقاطعهما خال
- ✓ منطبقين وإما ليس من نفس المستوي وتقاطعهما خال.



❖ الوضع النسبي لمستويين:

P و P' مستويان: إما يكون P و P' متقاطعان وتقاطعهما مستقيم ؛ إما يكونا منطبقين تقاطعهما هو المستوي P ؛ وإما متوازيان تماما تقاطعهما خال.



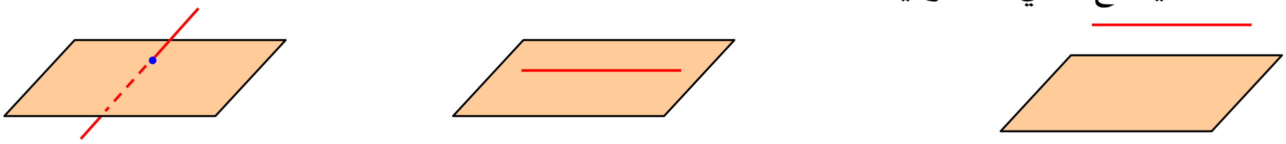
يعرف المستقيم في الفضاء بجملة معالتين لمستويين متقاطعين.

❖ الوضع النسبي لثلاث مستويات:

تقاطع ثلاث مستويات في الفضاء هو
- ✓ إما نقطة
- ✓ إما مستقيم
- ✓ إما خال

❖ الوضع النسبي لمستو ومستقيم:

P مستو و D مستقيم في الفضاء.
- ✓ يكون D موازيا تماما لـ P والتقاطع يكون خال.
- ✓ يكون D محتوفي P والتقاطع هو D .
- ✓ D يقطع P في نقطة وحيدة.

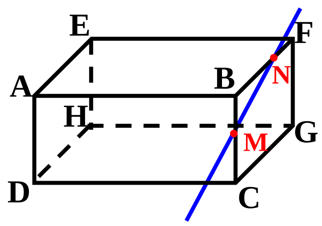


خواص :

(P) مستو و (D) مستقيم من الفضاء .
من أجل كل نقطة A من الفضاء يوجد مستقيم واحد يشمل A ويوازي (D) ؛ ويوجد مستو واحد يشمل A ويوازي (P) .
يكون مستقيم موازيا لمستو إذا وفقط كان موازيا لمستقيم من هذا المستوي .
إذا قطع مستقيم أحد المستويين المتوازيين فإنه يقطع الثاني .
إذا كان مستقيم يوازي أحد المستويين المتوازيين فإنه يكون موازيا للثاني .
إذا قطع مستو أحد المستويين المتوازيين فإنه يقطع الثاني .
المستويان الموازيان لثالث هما متوازيان .
إذا كان مستقيم يوازي مستويين متمايزين ومتقاطعان فإنه يوازي مستقيم تقاطعهما .
إذا كان مستويان متوازيان فإن كل مستو غير موازي لهما يقطعهما في مستقيمين متوازيين .

تمرين :

الشكل المقابل هو تمثيل بالمنظور متساوي القياس لمتوازي المستطيلات $ABCDEFGH$.
M نقطة من $[BC]$ و N نقطة من $[BF]$.
أذكر الوضع النسبي مع تبرير الجواب لكل من :



أ. المستقيم (MN) والمستوي (BCF) .
ب. المستقيم (MN) والمستوي $(ABFE)$.
ج. المستقيم (MN) والمستوي $(ADHE)$.
د. المستقيم (MN) والمستقيم (CG) .
ه. المستقيم (EB) والمستقيم (HC) .
و. المستوي (NBM) والمستوي (BEH) .
ز. المستوي (NBM) والمستوي (AEH) .

الحل :

أ. لدينا M نقطة من $[BC]$ و N نقطة من $[BF]$ إذن M و N نقطتان من (BCF) وبالتالي كل نقط المستقيم (MN) تنتمي إلى المستوي (BCF) أي المستوي (BCF) يشمل المستقيم (MN) .
ب. بما أن N نقطة من $[BF]$ فإنها تنتمي إلى المستوي $(ABFE)$ ، و M نقطة من $[BC]$ إذن M هي خارج المستوي $(ABFE)$ وبالتالي المستقيم (MN) يقطع المستوي $(ABFE)$ في نقطة وحيدة وهي N .
ج. المستويان $(ADHE)$ و (BCF) متوازيان تماما ، و المستوي (BCF) يشمل المستقيم (MN) إذن المستقيم (MN) والمستوي $(ADHE)$ متوازيان تماما .
د. المستقيمات (MN) و (CG) و (BF) من نفس المستوي (BCF) ولدينا المستقيمين (CG) و (BF) متوازيين ، بما أن (MN) يقطع (BF) فإن (MN) يقطع (CG) .
ه. المستويان $(ABFE)$ و $(DCGH)$ متوازيان تماما ويشملان المستقيمين (EB) و (HC) على الترتيب إذن المستقيمين (EB) و (HC) متوازيين تماما .
و. المستويان (NBM) و (BEH) متمايزان ولهما نقطة مشتركة إذن هما متقاطعان في مستقيم .
ز. المستويان (NBM) و (AEH) متوازيان تماما لأن (NBM) هو $(BCGF)$ و (AEH) هو $(ADHE)$ ومن تعريف متوازي المستطيلات لدينا $(BCGF)$ و $(ADHE)$ مستويين متوازيين .

✍ ✏ تمارين الرسم

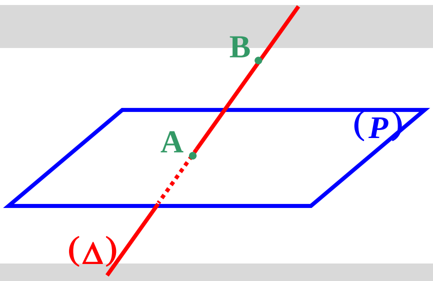
تمارين محلولة

تمرين 1

(P) مستوو B نقطة لا تنتمي إلى (P) . (Δ) مستقيم يشمل B ويقطع (P) في النقطة A . أرسم هذا الشكل .

الحل :

رسمنا المستقيم بشكلين ، خط مستمر وخط متقطع .
الخط المستمر هو الظاهر في الحقيقة والخط المتقطع هو غير ظاهر.

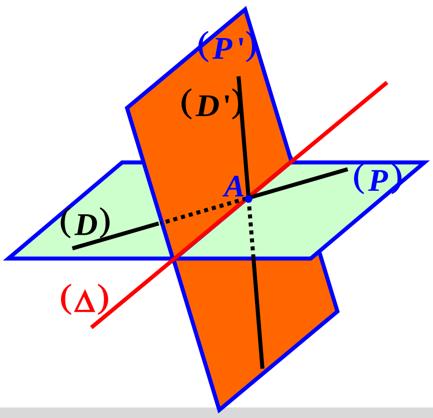


تمرين 2

(P) و (P') مستويان متقاطعان في مستقيم (Δ) . (D) مستقيم من (P) و (D') مستقيم من (P') حيث (D) و (D') يتقاطعان في النقطة A . أرسم هذا الشكل .

الحل :

النقطة A هي نقطة تقاطع المستقيمين (D) و (D') إذن هي نقطة مشتركة للمستويين (P) و (P') وبالتالي النقطة A تنتمي إلى مستقيم (Δ) .

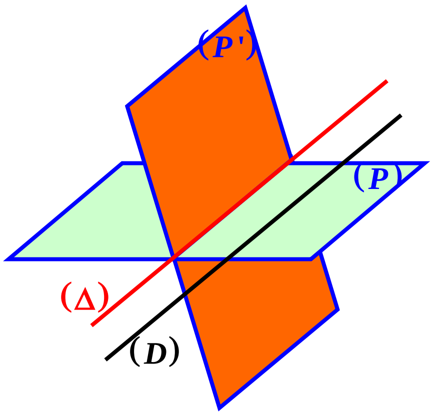


تمرين 3

(P) و (P') مستويان متقاطعان في مستقيم (Δ) . (D) مستقيم من (P) ويوازي (P') . أرسم هذا الشكل .

الحل :

المستقيم (D) محتوى (P) في يوازي (P') إذن هو موازي لتقاطعهما (Δ)



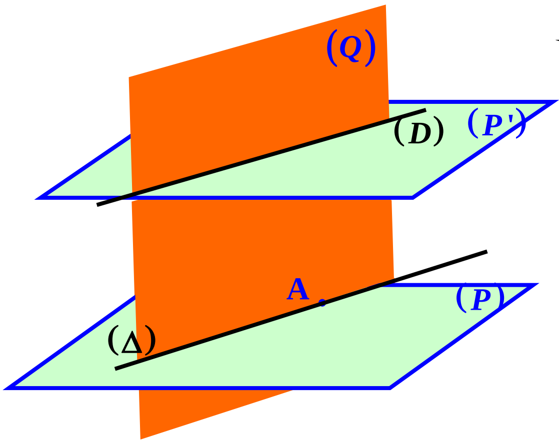
تمرين 4

(P) و (P') مستويان متوازيان ، A نقطة من (P) و (D) مستقيم من (P') ؛ (Q) المستوي المعين بالمستقيم (D) والنقطة A . (Δ) المستقيم المشترك بين المستويين (P) و (Q) . أرسم هذا الشكل .

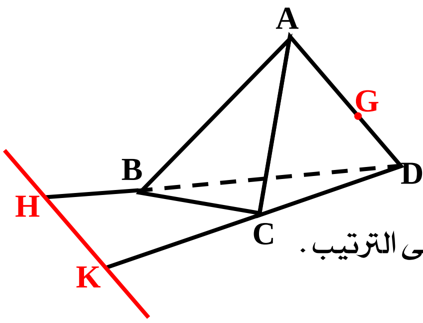
الحل :

المستوي (Q) يقطع كل من المستويين (P) و (P') في المستقيمين (Δ) و (D) على الترتيب ، بما أن (P) و (P') مستويان متوازيان فإن (Δ) و (D) مستقيمان متوازيان .

التمثيل بالمنظور والتصميم :



تمرين 5

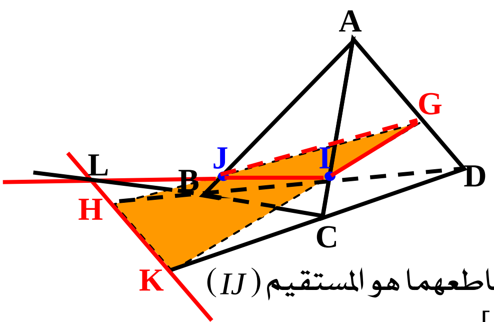


في الشكل المقابل لدينا رباعي الوجوه $ABCD$ ، مستقيم (HK) من المستوي (BCD) حيث (HK) لا يوازي (BC) ، ونقطة G من الحرف $[AD]$.

أ. أرسم تقاطعات المستوي (GHK) مع الأوجه (ABC) ، (ACD) و (ABD) للرباعي الوجوه .

ب. نسمي I و J النقطتين المشتركتين للمستوي (GHK) مع (AC) و (AB) على الترتيب . برهن أن للمستقيمات (HK) ، (BC) و (IJ) نقطة مشتركة وحيدة .

الحل :



أ. تقاطع المستوي (GHK) مع الوجه (ABC) :

النقط A ، G ، D ، C ، K تنتمي إلى نفس المستوي (ACD)

إذن المستقيمين (AC) و (GK) متقاطعان في نقطة نسمها I .

النقط A ، G ، D ، B ، H تنتمي إلى نفس المستوي (ABD)

إذن المستقيمين (AB) و (GH) متقاطعان في نقطة نسمها J .

المستويان (GHK) و (ABC) متمايزان ويشتركان في نقطتين I و J إذن تقاطعهما هو المستقيم (IJ) وبالتالي تقاطع المستوي (GHK) مع الوجه (ABC) هي القطعة المستقيمة $[IJ]$.

ونستنتج مباشرة أن تقاطع المستوي (GHK) مع الوجه (ACD) هي القطعة $[IG]$.

وكذلك تقاطع المستوي (GHK) مع الوجه (ABD) هي القطعة $[JG]$.

ب. في المستوي (BCD) لدينا المستقيمين (HK) و (BC) غير متوازيين نسمي L تقاطعهما .

بما أن L هي نقطة من (BC) فإنها تنتمي إلى المستوي (ABC) وبما أنها نقطة من (HK) فهي تنتمي إلى المستوي (GHK)

إذن L تنتمي إلى تقاطع المستويين (ABC) و (GHK) الذي يتمثل في المستقيم (IJ)

وبالتالي L هي نقطة مشتركة للمستقيمات (HK) ، (BC) و (IJ) .

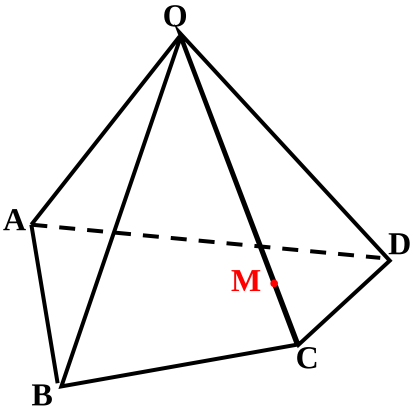
تمرين 6

الشكل المقابل هو لهرم قاعدته الرباعي $ABCD$.

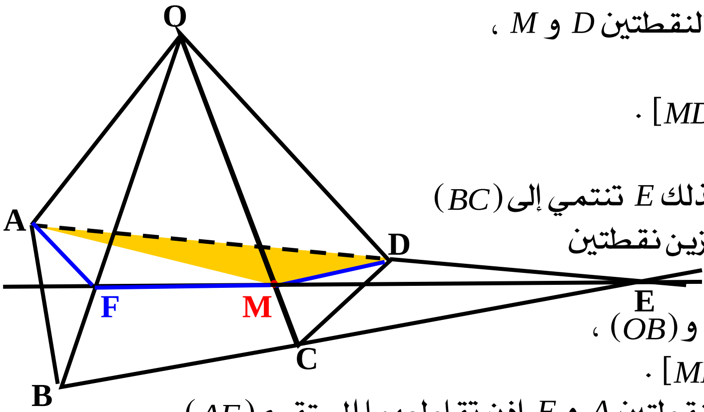
M نقطة من الحرف $[OC]$.

أرسم تقاطعات الأوجه (OCD) ، (OBC) و (OAB) مع المستوي (MAD) .

إرشاد : أنشئ نقطة تقاطع المستقيمين (AD) و (BC) .



الحل:



- المستويان (OCD) و (MAD) متمايزان ويشتركان في النقطتين D و M ،

إذن تقاطعهما هو المستقيم (MD) .

وبالتالي تقاطع الوجه (OCD) والمستوي (MAD) هو القطعة $[MD]$.

- نسمي E نقطة تقاطع المستقيمين (AD) و (BC) .

E تنتمي إلى (AD) إذن E تنتمي إلى المستوي (MAD) ، وكذلك E تنتمي إلى (BC) إذن E تنتمي إلى المستوي (OBC) ومنه لهذين المستويين المتمايزين نقطتين مشتركتين E و M ومنه تقاطعهما هو المستقيم (EM) .

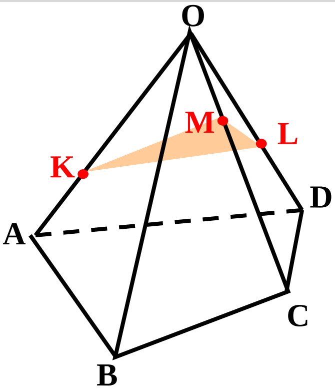
في المستوي (OBC) ، نضع F نقطة تقاطع المستقيمين (EM) و (OB) ،

وبالتالي تقاطع الوجه (OBC) والمستوي (MAD) هو القطعة $[MF]$.

لدينا المستويين المتمايزين (OAB) و (MAD) يشتركان في النقطتين A و F إذن تقاطعهما المستقيم (AF) ،

وبالتالي تقاطع الوجه (OAB) والمستوي (MAD) هو القطعة $[AF]$.

تمرين 7



الشكل التالي هو لهرم قاعدته الرباعي $ABCD$. K نقطة من الحرف $[OA]$ ، L نقطة من الحرف $[OD]$ و M نقطة من الحرف $[OC]$.

أرسم تقاطع لكل من الأوجه (OAD) ، (ODC) ، (OBC) و (OAB) مع المستوي (KLM) ، على الرسم .

إرشاد : أنشئ تقطع المستويين (OAD) و (OBC)

الحل :

- المستويان (OAD) و (KLM) متمايزان ويشتركان في النقطتين K و L ،

إذن تقاطعهما هو المستقيم (KL) ،

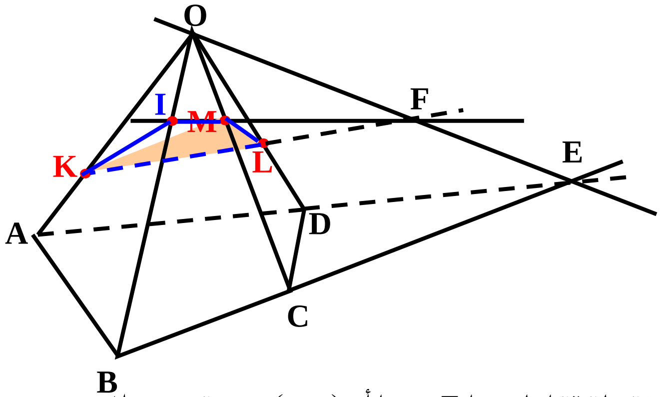
ومنه تقاطع الوجه (OAD) والمستوي (KLM) هو القطعة $[KL]$.

- وبنفس الطريقة تقاطع الوجه (ODC) والمستوي (KLM)

هو القطعة $[LM]$.

- نسمي E نقطة تقاطع المستقيمين (AD) و (BC) .

المستويان المتمايزان (OAD) و (OBC) يشتركان في النقطتين O و E ،
إذن تقاطعهما هو المستقيم (OE) .



المستقيمان (KL) و (OE) هما من نفس المستوي (OAD) نسمي نقطة تقاطعهما F ، بما أن (OE) مستقيم من المستوي (OBC) فإن النقطة F تنتمي إلى المستوي (OBC) وبما أن (KL) مستقيم من المستوي (KLM) فإن النقطة F تنتمي إلى المستوي (KLM) ، وبالتالي المستويان (OBC) و (KLM) يشتركان في النقطتين F و M إذن تقاطعهما هو المستقيم (MF) .

في المستوي (OBC) نسمي I نقطة تقاطع المستقيمين (MF) و (OB) .

إذن تقاطع الوجه (OBC) والمستوي (KLM) هو القطعة $[MI]$.

- نستنتج مباشرة أن تقاطع الوجه (OAB) والمستوي (KLM) هو القطعة $[KI]$ لأن المستويان (OAB) و (KLM) متمايزان ويشتركان في النقطتين K و I .

تمرين 8

$ABCD$ رباعي وجوه منتظم (أحرفه متقايسة) ، النقطة I منتصف $[AD]$ (أنظر الشكل)

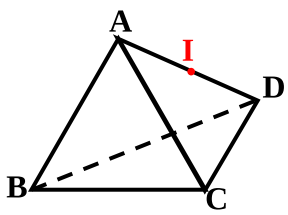
أ. تحقق من أن الوجه (ABC) يقع في مستوي الواجهة .

ب. أنقل الشكل وأرسم المستقيم (Δ) الذي يشمل I ويوازي المستقيم (BD) .

ج. علم النقطتين M و N منتصفي الحرفين $[BC]$ و $[CD]$ على الترتيب .

ماذا يمثل كل من :

- المستقيم (AM) بالنسبة للمثلث ABC .
- المستقيم (AN) بالنسبة للمثلث ACD .

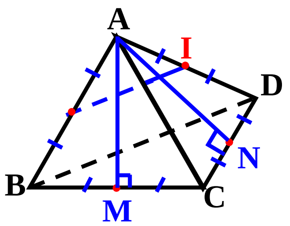


الحل :

أ. الأشكال الواقعة في المستوي الواجهة تحافظ على قياسات الزوايا والأطوال وهذا ما نلاحظه على المثلث متقايس الأضلاع ABC إذن الوجه (ABC) يقع في مستوي الواجهة .

ب. النقطة I والمستقيم (BD) يعينان المستوي (ABD) ،
إذن المستقيم (Δ) يقع في المستوي (ABD) .
بما أن I منتصف $[AD]$ و (Δ) يوازي (BD) إذن حسب نتيجة مبرهنة طاليس :
(Δ) يمر بمنتصف الحرف $[AB]$.

ج. تعلم النقطتين M و N



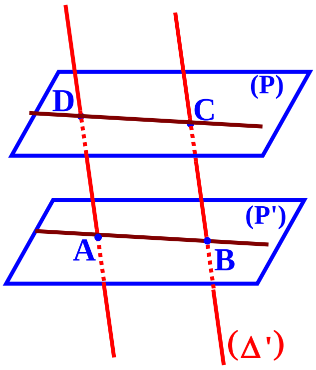
- في المثلث ABC المستقيم (AM) هو محور القطعة $[BC]$.
- في المثلث ACD المستقيم (AN) هو محور القطعة $[CD]$.

✍ ✏ تمارين محلولة

التمرين الاول

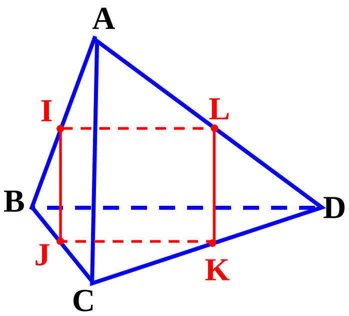
نعتبر مستقيمين متوازيين تماما (Δ) و (Δ') يقطعان مستويين متوازيين تماما (P) و (P') في أربع نقط A ، B ، C و D
برهن أن الرباعي $ABCD$ متوازي الأضلاع .

حل :



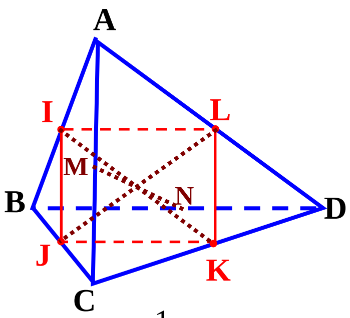
لدينا (Δ) و (Δ') مستقيمين متوازيين إذن (AD) و (BC) مستقيمين متوازيين ويعينان مستو $(ABCD)$
المستوي $(ABCD)$ يقطع كل من المستويان المتوازيان (P) و (P') في مستقيمين متوازيين وهما (AB) و (DC) .
إذن في المستوي $(ABCD)$ لدينا $(AD)//(BC)$ و $(AB)//(DC)$ ومنه الرباعي $ABCD$ متوازي الأضلاع .

التمرين الثاني



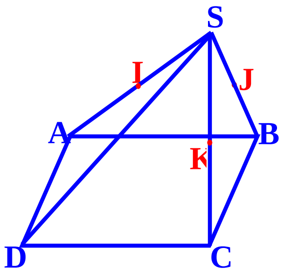
$ABCD$ رباعي وجوه ؛
I ، J ، K و L منتصفات $[AB]$ ، $[BC]$ ، $[CD]$ و $[DA]$ على الترتيب .
1. برهن أن الرباعي $IJKL$ متوازي الأضلاع .
2. النقطتان M و N منتصفا $[AC]$ و $[BD]$ على الترتيب .
برهن أن للمستقيمات (IK) ، (JL) و (MN) نقطة مشتركة وحيدة .

حل :



1. في المثلث ABC نطبق نتيجة مبرهنة طاليس الخاصة بالمنتصفات و نحصل على $(IJ)//(AC)$ و $AC = 2IJ$.
ونطبق نفس النتيجة في المثلث ACD و نحصل على $(LK)//(AC)$ و $AC = 2LK$.
ومنه : $(IJ)//(LK)$ و $IJ = LK$
بالتالي : المستقيمان (IJ) و (LK) يعينان مستو وهو $(IJKL)$ والرباعي $IJKL$ هو متوازي الأضلاع .
2. من السؤال السابق نستنتج أن القطرين $[IK]$ و $[JL]$ متناصفان .
لنبرهن أن $[IK]$ و $[MN]$ متناصفان . (أو $[JL]$ و $[MN]$ متناصفان)
بتطبيق نتيجة مبرهنة طاليس في كل من المثلثين ABC و BCD نجد : $(IM)//(BC)$ ، $IM = \frac{1}{2}BC$ و $(NK)//(BC)$ ، $NK = \frac{1}{2}BC$. ومنه : $(IM)//(NK)$ إذن هذين المستقيمين يعينان مستو $(IMKN)$ ولدينا $IM = NK$ وبالتالي الرباعي $IMKN$ متوازي أضلاع ومنه قطريه $[IK]$ و $[MN]$ متناصفان .
خلاصة القطع $[IK]$ ، $[JL]$ و $[MN]$ لها نفس المنتصف ومنه للمستقيمات (IK) ، (JL) و (MN) نقطة مشتركة وحيدة .

التمرين الثالث



$ABCD$ متوازي أضلاع في مستو (P) و S نقطة خارج المستوي (P) .
نعين النقط I ، J ، K منتصفات $[SA]$ ، $[SB]$ و $[SC]$ على الترتيب .
1. ما هو تقاطع المستوي (CIJ) مع المستويين (P) و (SDA) ؟
2. برهن أن المستوي (IJK) يقطع القطعة $[SD]$ في منتصفها .

حل :

1. المستويان (CIJ) و (P) متمايزان ولهما نقطة مشتركة C إذن تقاطعهما هو مستقيم يشمل النقطة C .
في المثلث SAB لدينا I و J منتصفي القطعتين $[SA]$ و $[SB]$ على الترتيب إذن حسب نتيجة طاليس (IJ) يوازي (AB) .
في المستوي (P) لدينا $ABCD$ متوازي أضلاع إذن (AB) يوازي (DC) ومنه : (IJ) يوازي (DC) .
إذن المستقيمين (IJ) و (DC) يعينان مستو الذي هو (CIJ) .
خلاصة : تقاطع المستويين (CIJ) و (P) هو المستقيم (DC) .
نستنتج أن المستوي (CIJ) يشمل النقطتين I و D
بما أن النقطة I تنتمي إلى المستقيم (SA) فإن I تنتمي إلى المستوي (SDA)
وبالتالي المستويين (CIJ) و (SDA) متمايزان ويشتركان في نقطتين متمايزتين I و D إذن تقاطعهما هو المستقيم (ID) .
2. في ما سبق لدينا (IJ) يوازي (DC) ؛ وفي المثلث SDC نعين L منتصف (SD) وبما أن K منتصف (SC) فإن المستقيم (KL) يوازي (DC) ومنه : (IJ) يوازي (KL) إذن النقطة L تنتمي إلى المستوي (IJK) .
بما أن المستقيم (SD) لا يوازي المستوي (IJK) فإنهما يتقاطعان في نقطة وحيدة وهي L منتصف القطعة $[SD]$.

الاحصاء

❶ مفردات الإحصاء

نشاط :

في كل من الحالات المقترحة أدناه ، عين المجموعة والظاهرة أو الخاصية المدروسة عليها .

أ) عدد إخوة وأخوات تلاميذ قسم نهائي محصور بين 1 و 6 .

ب) تبين في قسم للسنة الأولى جدع مشترك أن الوزن المتوسط للتلاميذ هو $51kg$.

ج) توزع الانتماء في النادي الثقافي لتلاميذ مؤسسة تربوية إلى كرة القدم ، كرة السلة ، الموسيقى والمسرح .

د) سجل $100km/h$ معدل سرعة 50 سيارة ، مرت بطريق وطني .

ه) كان الطلب على السيارات بيجو أكثر من رونو وفيات في مؤسسة بيع السيارات .

حل النشاط :

أ) عدد إخوة وأخوات المجموعة هي تلاميذ قسم نهائي والظاهرة المدروسة عليها عدد إخوة وأخوات.

ب) المجموعة هي قسم للسنة الأولى جدع مشترك والظاهرة المدروسة عليها هي الوزن .

ج) المجموعة هي مجموعة تلاميذ مؤسسة تربوية والظاهرة المدروسة هي أنواع النشاطات الموجودة في النادي الثقافي .

د) المجموعة المدروسة هي مجموعة الخمسين سيارة التي مرت بطريق وطني والظاهرة التي تقام عليه الدراسة هي السرعة.

ه) المجموعة هي مجوعة السيارات الموجودة في مؤسسة البيع والخاصية المدروسة هي أنواع السيارات .

المجتمع الإحصائي :

المجموعة التي تقوم عليها الدراسة الإحصائية تسمى مجتمع إحصائي وكل عنصر منها يدعى فرد .

الميزة الإحصائية :

الظاهرة أو الخاصية التي تدرس على مجتمع إحصائي تسمى ميزة إحصائية أو طبع إحصائي .
تنقسم الميزة إلى قسمان : الميزة الكمية والميزة النوعية .

أ) الميزة الكمية :

هي الميزة التي يمكن قياسها وتسمى كذلك متغير إحصائي .

مثلا :

العمر يقاس بالسنوات ، الوزن بالكيلوغرام ، الطول بالمتر ، السرعة بالكيلومتر في الساعة . . .

ب) الميزة النوعية :

هي الميزة التي لا يمكن قياسها .

مثلا :

النادي الثقافي ، أنواع السيارات . . .

نشاط 2 :

إليك علامات قسم 1 ج م ع ت في مادة الرياضيات : 3 ، 3 ، 7 ، 7 ، 19 ، 19 ، 10 ، 10 ، 10 ، 10 ، 16 ، 16 ، 16 ، 16 ، 3 ، 3 ، 5 ، 5 ، 5 ، 13 ، 5 ، 5 ، 5 ، 7 ، 13 ، 13 ، 13 ، 13 ، 16 ، 16 ، 16 ، 10 ، 10 ، 10 ، 10 .

أ) أحسب عدد العلامات المسجلة .

ب) أحسب عدد كل علامة .

ج) أحسب عدد العلامات الموجودة في كل من المجالات التالية : $[0 ; 8[$ ؛ $[8 ; 10[$ ؛ $[10 ; 14[$ ؛ $[14 ; 20[$.

حل النشاط :

أ) عدد العلامات هو : 35 .

ب)

- ✓ عدد العلامة 3 هو : 4
- ✓ عدد العلامة 5 هو : 6
- ✓ عدد العلامة 7 هو : 3
- ✓ عدد العلامة 10 هو : 8
- ✓ عدد العلامة 13 هو : 5
- ✓ عدد العلامة 16 هو : 7
- ✓ عدد العلامة 19 هو : 2 .

يمكن تلخيص النتائج في الجدول رقم 1

العلامات	3	5	7	10	13	16	19	المجموع
عدد العلامات	4	6	3	8	5	7	2	35

ج) عدد العلامات الموجودة في المجال $[0 ; 8[$ هو : 13

عدد العلامات الموجودة في المجال $[8 ; 10[$ هو : 0

عدد العلامات الموجودة في المجال $[10 ; 14[$ هو : 13

عدد العلامات الموجودة في المجال $[14 ; 20[$ هو : 9

يمكن تلخيص هذه النتائج في الجدول رقم 2 .

المجالات	$[0 ; 8[$	$[8 ; 10[$	$[10 ; 14[$	$[14 ; 20[$
عدد العلامات	13	0	13	9

في هذا النشاط الميز المدروسة على مجتمع التلاميذ هي العلامات وهي ميزة كمية ، نلاحظ في الجدول رقم 1 أن كل علامة تقاس بقيمة معزولة ، بينما في الجدول رقم 2 قيم الميزة غير محددة وإنما هي محصورة في مجالات .

الميزة الكمية بدورها تنقسم إلى قسمان : الميزة المتقطعة والتي تأخذ قيمها معزولة والميزة المستمرة التي تأخذ قيمها في

مجالات من الشكل $[a ; b[$ كل منها تسمى فئة.

العدد a يسمى الحد الأدنى للفئة، العدد b حدها الأعلى ، العدد $\frac{a+b}{2}$ يسمى مركز الفئة والعدد $b-a$ يسمى طول الفئة .

التوزيعات التكرارية :

عدد أفراد (عناصر) المجتمع يسمى تكرار المجتمع . وعدد أفراد الموافق لقيمة ميزة يسمى تكرار هذه القيمة في النشاط الثاني تكرار المجتمع هو 35 ، وتكرار العلامة 7 هو العدد 3 .

التواتر لقيمة ميزة

هو حاصل قسمة التكرار المناسب لها على تكرار المجتمع (التكرار الكلي) . يسمى التواتر كذلك بالتكرار النسبي.

التواتر للعلامة 7 هو $0,086 \simeq \frac{3}{35}$.

نفرض أن القيم مرتبة تصاعديا

التكرار المجمع الصاعد لقيمة (أو لفئة)

هو مجموع التكرارات هذه القيمة (أو الفئة) وتكرارات القيم (أو الفئات) السابقة لها .

التكرار المجمع النازل لقيمة (أو لفئة)

هو مجموع التكرارات هذه القيمة (أو الفئة) وتكرارات القيم (أو الفئات) الموالية لها .

مثال:

نعتبر الجدول رقم 1 السابق :

قيم الميزة	3	5	7	10	13	16	19	المجموع
التكرار	4	6	3	8	5	7	2	35
التكرار المجمع الصاعد	4	10	13	21	26	33	35	
التكرار المجمع النازل	35	31	25	22	14	9	2	

مثال :

نعتبر الجدول رقم 2 السابق :

المجالات	[0 ; 8[	[8 ; 10[	[10 ; 14[	[14 ; 20[
التكرار	13	0	13	9
التكرار المجمع الصاعد	13	13	26	35
التكرار المجمع النازل	35	22	22	9

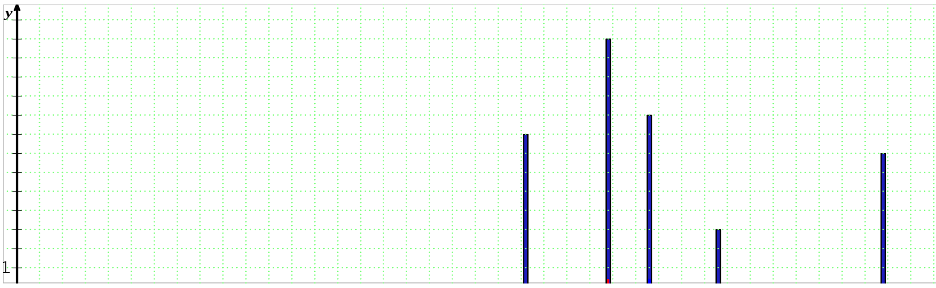
2 التمثيلات البيانية

الأعمدة البيانية :

في دراسة أوزان بالكلوغرام لتلاميذ قسم سجلت النتائج على الجدول الآتي :

الوزن (kg)	37	43	46	51	63	
التكرار	8	13	9	3	7	40
التوتر	0,20	0,33	0,23	0,08	0,18	

أرسم المخطط بالأعمدة لهذه السلسلة :



ملاحظات :

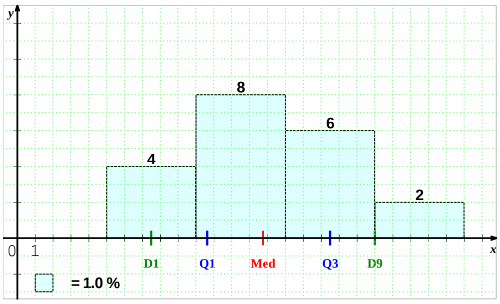
نواصل بين رؤوس الأعمدة نحصل على مضلع تكراري

وبنفس الطريقة نرسم الأعمدة البيانية للتواتر حيث نأخذ التواترات على محور التراتيب .

المدرج التكراري:

أجريت دراسة في مزرعة على كمية الحليب المقدرة باللتر ،
المنتجة من طرف 20 بقرة وسجلت النتائج في الجدول التالي :

الفئة (باللتر)	[5 ;10[	[10 ;15[	[15 ; 20[	[20 ; 25[
التكرار (عدد الأبقار)	4	8	6	2



ملاحظات :

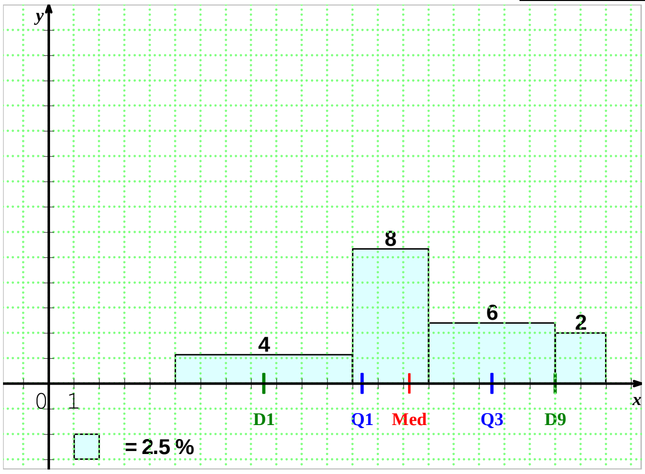
المدرج التكراري هو خاص بميزة مستمرة
ويكون على شكل مستطيلات بعداه طول الفئة وتكرارها في حالة الفئات متساوية الأطوال.
مساحة المستطيلات تكون متناسبة مع التكرارات .
في حالة الفئات مختلفة الأطوال ، نحدد الفئة التي لها أصغر a طول وليكن n تكرارها نرسم المستطيل ذي

البعدين a و n وبالنسبة لأي فئة أخرى ذات الطول a' و التكرار n' نعين العدد $k=\frac{a'}{a}$ و ونرسم المستطيل الذي بعداه a' و $\frac{n'}{k}$.

مثال

نحتفظ بنفس الدراسة في المثال السابق ونفترض أن الفئات تكون مختلفة الأطوال :

الفئة (باللتر)	$[5\,;12[$	$[12\,;15[$	$[15\,;20[$	$[20\,;22[$
التكرار (عدد الأبقار)	4	8	6	2
$\frac{n}{k}$	1,14	5,33	2,5	2



الفئة التي لها أصغر طول هي $[20\,;22[$ وطولها $a=2$

طول الفئة الأولى هو $a_1=7$ ومنه : $k_1=\frac{7}{2}=3,5$

إذن نمثلها بالمستطيل ذي البعدين 7 و 1,14 .

طول الفئة الثانية هو $a_2=3$ ومنه : $k_2=\frac{3}{2}=1,5$

إذن نمثلها بالمستطيل ذي البعدين 3 و 5,33

طول الفئة الثالثة هو $a_3=5$ ومنه : $k_3=\frac{5}{2}=2,5$

إذن نمثلها بالمستطيل ذي البعدين 5 و 2,5 .

1) المخطط الدائري :

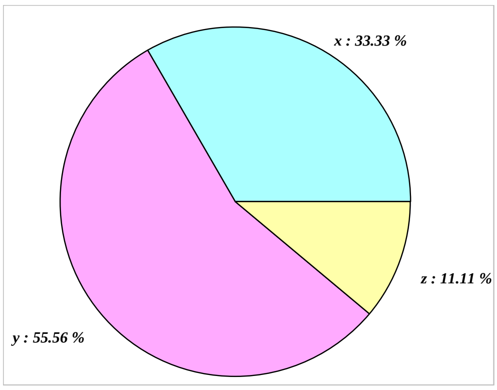
عدد السيارات التي بيعت في مؤسسة خلال أسبوع .

أنواع السيارات	رونو	بيجو	فيات
التكرار	3	5	1

$360° \to 9$

$x° \to 3$ ، $y° \to 5$ ، $z° \to 1$

ومنه : $x=360\times\frac{3}{9}=120°$ $y=360\times\frac{5}{9}=200°$ $z=360\times\frac{1}{9}=40°$



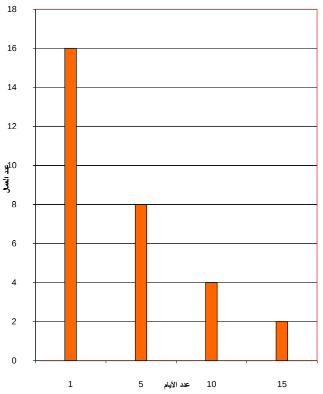
التمرين الاول

المخطط بالأعمدة الآتي يمثل عدد أيام العطل المرضية لعمال مؤسسة .

أ) عين الجدول الإحصائي للسلسلة ثم أتممه بالتواتر والتكرار مجمع الصاعد والنازل.

ب) ما هو عدد عمال المؤسسة .

ج) ما هو منوال السلسلة .



حل التمرين :

أ) الجدول الإحصائي للسلسلة .

قيم الميزة (عدد الأيام)	1	5	10	15
التكرار (عدد العمال)	16	8	4	2
التواتر	0,53	0,27	0,13	0,07
المجمع الصاعد	16	24	28	30
المجمع النازل	30	14	6	2

ب) عدد عمال المؤسسة . 30

ج) منوال : يعرف المنوال بقيمة الميزة التي لها أكبر تكرار أو التي لها أطول عمود وهي القيمة 1 .

التمرين الثاني

نعتبر سلسلة تتعلق بأوزان طرود بريدية .

الأوزان بـ kg	1	2	3	5	7
عدد الطرود	8	5	4	2	1

1) هل ميزة هذه السلسلة كمية أم نوعية ؟

2) هل ميزة هذه السلسلة مستمرة أم منفصلة ؟

3) ما هو عدد الطرود ؟

4) ما هو عدد الطرود التي وزن كل منها $3kg$ على الأقل ؟

5) ما هو عدد الطرود التي وزن كل منها $3kg$ على الأكثر ؟

6) ما هو الوزن المتوسط لهذه الطرود ؟

7) أحسب مدى هذه السلسلة .

8) أرسم المخطط بالأعمدة لهذه السلسلة .

حل التمرين :

الميزة تقاس بالكيلوغرام إذن هي كمية .

الميزة تأخذ قيم معزولة (ISOLEES) إذن هي متقطعة (منفصلة) .

عدد ا لطرود أي تكرار السلسلة هو 20 .

جدول خاص بالتكرار المجمع

الأوزان بـ kg	1	2	3	5	7	
عدد الطرود	8	5	4	2	1	20
المجمع النازل	20	12	7	3	1	
المجمع الصاعد	8	13	17	19	20	

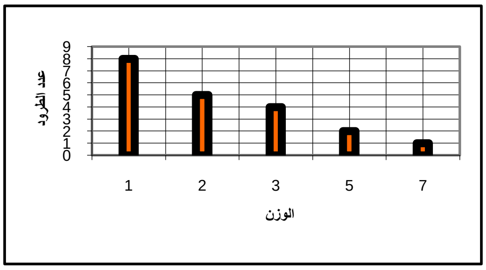
عدد الطرود التي وزن كل منها $3kg$ على الأقل هو 7

عدد الطرود التي وزن كل منها $3kg$ على الأكثر 17

الوزن المتوسط يعرف بمعدل الوزن للسلسلة و يحسب بالطريقة التالية :

$$\bar{x} = \frac{1\times 8+5\times 2+4\times 3+2\times 5+1\times 7}{20} = 3.8$$

يعرف المدى بفرق أكبر قيمة و أصغر قيمة للميزة وهو 6 .



3 مؤشرات سلسلة إحصائية :

المدى :

التعريف :

المدى لسلسة إحصائية ذات متغير إحصائي متقطع هو الفرق بين أكبر قيمة وأصغر قيمة للميزة .

مثال :

3	2	2	5	6	2	6
Max-Min	4			المدى		

ملاحظة :

المدى يسمى مؤشر التشتت . وفي حالة ميزة مستمرة المدى هو الفرق بين أكبر مركز وأصغر مركز للفئات .

المنوال والفئة المنوالية

تعريف :

- ✓ نسمي منوالا لسلسلة إحصائية ذات متغير إحصائي متقطع كل قيمة للميزة التي لها أكبر تكرار .
- ✓ نسمى فئة منوالية لسلسلة ذات متغير إحصائي مستمر كل فئة التي لها أكبر تكرار .

ملاحظة :

يمكن لسلسلة إحصائية أن يكون لها عدة مناول أو فئات منوالية .

مثال :

3	2	2	5	6	2	6
Mod =	2			المنوال		

الوسيط :

التعريف :

الوسيط لسلسلة إحصائية ذات متغير إحصائي متقطع هو القيمة التي تتوسط مجموعة القيم بعد ترتيبها تصاعديا أو تنازليا.ونرمز له بالرمز Med

مثال :

نعتبر القيم : 2 ، 2 ، 3 ، 3 ، 3 ، 5 ، 6 ، 6 ، 6 ، 6 ، 7 ، 7 .

$$Med = \frac{5+6}{2} = 5.5$$

مبرهنة:

N تكرار الكلي لسلسلة إحصائية ذات متغير إحصائي متقطع قيمه مرتبة تصاعديا أو تنازليا .

✓ إذا كان N فرديا فإن الوسيط هو قيمة الميزة التي رتبتها $\frac{N+1}{2}$ (أي Med يقع في الرتبة $\frac{N+1}{2}$)

✓ إذا كان N زوجيا فإن الوسيط هو نصف مجموع القيمتين للميزة التين رتبتيهما $\frac{N}{2}$ و $\frac{N}{2}+1$.

مثال:

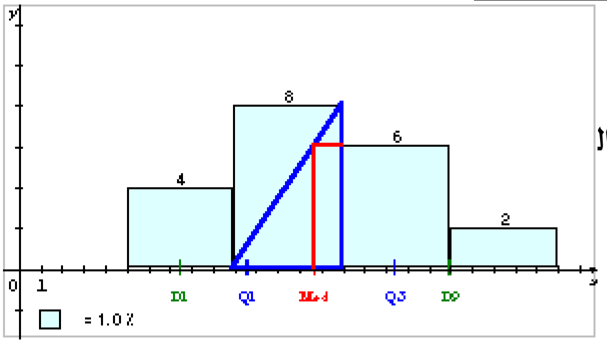
نفرض 31 هو تكرار مجتمع فإن رتبة الوسيط هي $\frac{31+1}{2}=16$.

نفرض أن 30 هو تكرار مجتمع فإن $Med=\frac{x_{15}+x_{16}}{2}$ حيث x_{15} هي قيمة الميزة ذات الرتبة 15 و x_{16} هي قيمة الميزة ذات الرتبة 16 .

طريقة إيجاد الوسيط في حالة طبع إحصائي مستمر.

دراسة كمية الحليب المنتجة في حالة الفئات متساوية الطول :

الفئة (باللتر)	[5 ;10[	[10 ;15[	[15 ;20[	[20 ;25[
التكرار (عدد الأبقار)	4	8	6	2
التكرار المجمع الصاعد	4	12	18	20



توجد 20 بقرة مرتبة حسب إنتاجها من $5l$ إلى $22l$.

البقرة التي تتوسط المجتمع تكون في المرتبة 10

وبالتالي يكون إنتاجها في الفئة [10 ;15[والتي تسمى الفئة ال

عدد الأبقار حيث يكون إنتاجها من الفئة الوسيطية وأقل من

Med هو : $10-4=6$. إذن حسب مبرهنة طاليس لدينا :

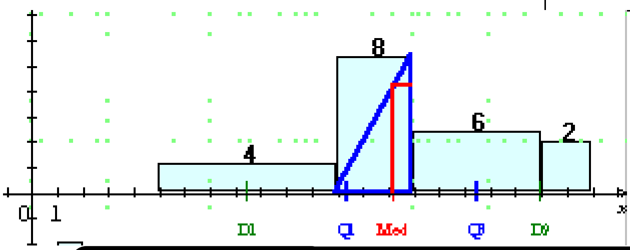
$$\frac{Med-10}{5}=\frac{6}{8}$$

ومنه: $Med=10+3,75=13,75$.

دراسة كمية الحليب المنتجة في حالة الفئات مختلفة الطول:

الفئة (باللتر)	[5 ;12[	[12 ;15[	[15 ;20[	[20 ;22[
التكرار (عدد الأبقار)	4	8	6	2
التكرار المجمع الصاعد	4	12	18	20

في هذه الحالة الفئة الوسيطية هي [12 ;15[



عدد الأبقار حيث يكون إنتاجها من الفئة الوسيطية وأقل من Med هو : $10-4=6$. إذن حسب مبرهنة طاليس لدينا :

$$\frac{Med-12}{3}=\frac{6}{8}$$

ومنه: $Med=12+2.25=14.25l$

خلاصة:

لإيجاد الوسيط في حالة طبع إحصائي مستمر ، نحدد أولا الفئة الوسيطية $[a\ ;\ b[$ وتكرارها n_m ثم نحسب الوسيط بالعلاقة

$$Med=a+\frac{(b-a)\left(\frac{n}{2}-N_c\right)}{n_m}$$

حيث N_c هو التكرار المجمع الصاعد للفئة التي تسبق الفئة الوسيطية .

التمرين الثالث:

في مؤسسة أشغال الغابات ، الدراسة الإحصائية لأقطار 50 شجرة أعطت النتائج التالية .

ÇáÃÞØÇÑ x_i ãÑÇßÒ	[7 ¡ 7,5[	[7,5 ¡ 8[	[8 ¡ 8,5[	[8,5 ¡ 9[	[9 ¡ 9,5[	[9,5 ¡ 10[	[10 ¡ 10,5[	ÇáãÌãæÚ
ÇáÊßÑÇÑ n_i	5	7	12	10	6	4	6	50

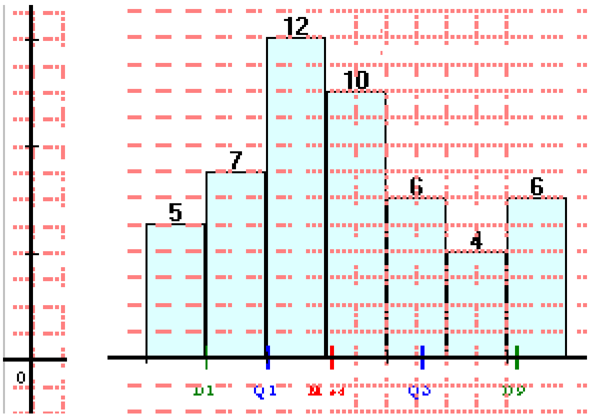
1. أكمل الجدول بالتكرار المجمع الصاعد ثم أحسب وسيط هذه السلسلة
2. أنشئ المدرج التكراري لهذه السلسلة .

الحل :

ÇáÃÞØÇÑ x_i ãÑÇßÒ	[7 ¡ 7,5[	[7,5 ¡ 8[	[8 ¡ 8,5[	[8,5 ¡ 9[	[9 ¡ 9,5[	[9,5 ¡ 10[	[10 ¡ 10,5[	ÇáãÌãæÚ
ÇáÊßÑÇÑ n_i	5	7	12	10	6	4	6	50
ÇáÊßÑÇÑ ÇáãÌãÚ ÇáÕÇÚÏ	5	12	24	34	40	44	50	

رتبة الوسيط هي 25 ويكون في الفئة الوسيطية $[8,5\ ;\ 9[$ ومنه : $Med=8,5+0,5\times\frac{25-24}{10}=8,55cm$

حساب الوسيط باستعمال البرمجيات :



الوسط الحسابي:

الوسط الحسابي للقيم x_1 ، x_2 ، x_3 ، . . . . ، x_k ، المرفقة بالتكرارات n_1 ، n_2 ، n_3 ، . . . . ، n_k على الترتيب هو العدد $\bar{x}$ المعرف بـ : $\bar{x} = \dfrac{n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + ... + n_kx_k}{n_1 + n_2 + n_3 + ... + n_k}$

التمرين الرابع:

أحسب الوسط الحسابي لكل من السلسلات التالية :

العلامات x_i	8	10	12
التكرارات n_i	1	1	1

العلامات x_i	7	10	13
التكرارات n_i	3	1	2

العلامات x_i	1	2	18	19
التكرارات n_i	1	1	10	10

العلامات x_i	4	7	8	10	13	17	18
التكرارات n_i	1	2	1	3	1	2	1

ملاحظة 1 :

كل من الوسيط والمنوال والوسط الحسابي ، يسمى مؤشر الموقع .

ملاحظة 2 :

الوسط الحسابي لسلسلة ذات طبع إحصائي مستمر يعرف بنفس العلاقة السابقة حيث نعوض القيم

x_1 ، x_2 ، x_3 ، . . . . ، x_k بمراكز الفئات c_1 ، c_2 ، c_3 ، . . . . ، c_k

التمرين الخامس:

أحسب الوسط الحسابي لكل من السلسلات الآتية :

الفئات x_i	[8 ، 12[	[12 ، 16[	[16 ، 20[	[20 ، 24[	المجموع
التكرارات n_i	5	7	6	2	20
مراكز الفئات c_i					
$n_i \times c_i$					

الفئات	[7 ، 7,5[	[7,5 ، 8[	[8 ، 8,5[	[8,5 ، 9[	[9 ، 9,5[	[9,5 ، 10[	[10 ، 10,5[	المجموع
التكرارات n_i	5	7	12	10	6	4	6	50
مراكز الفئات c_i								
$n_i \times c_i$								

ملاحظة 3 :

مجموع : $n_1 + n_2 + n_3 + ... + n_k$ يكتب على الشكل $\sum_{i=1}^{i=k} n_i$ ويقرأ مجموع الأعداد n_1 من $i=1$ إلى $i=k$

التمرين السادس

1. أكتب المجاميع التالية باستعمال الرمز $\Sum$:

$2^3+3^3+4^3+5^3$ $\quad 3^2+3^3+3^4+3^5+3^6+3^7$ $\quad 5+9+13+17$

2. أحسب المجموعين : $\sum_{k=0}^{k=4}(3k-2)$ ؛ $\sum_{k=1}^{k=3}\frac{2}{3k(k+1)}$

الحل :

1. $2^3+3^3+4^3+5^3=\sum_{i=2}^{i=5}i^3$

$3^2+3^3+3^4+3^5+3^6+3^7=\sum_{i=2}^{i=7}3^i$

$5+9+13+17=\sum_{i=1}^{i=4}(4i+1)$.

2. $\sum_{k=0}^{k=4}(3k-2)=(3\times0-2)+(3\times1-2)+(3\times2-2)+(3\times3-2)+(3\times4-2)=-2+1+4+7+10=20$

$$\sum_{k=1}^{k=3}\frac{2}{3k(k+1)}=\frac{2}{3(1+1)}+\frac{2}{3\times2(2+1)}+\frac{2}{3\times3(3+1)}=\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{18}=\frac{6+2+1}{18}=\frac{1}{9}$$

خواص الوسط الحسابي :

الخاصية1:

x_1 ، x_2 ، x_3 ، . . . . ، x_k قيم سلسلة إحصائية ، مرفقة بالتواترات f_1 ، f_2 ، f_3 ، . . . . ، f_k على الترتيب

الوسط الحسابي لهذه السلسلة هو العدد $\overline{x}$ حيث : $\overline{x}=f_1x_1+f_2x_2+f_3x_3+\dots+f_kx_k=\sum_{i=1}^{i=k}f_ix_i$

البرهان :

بما أن $f_i=\frac{n_i}{\sum_{i=1}^{i=k}n_i}$ فإن : $\overline{x}=\frac{n_1x_1+n_2x_2+n_3x_3+\dots+n_kx_k}{\sum_{i=1}^{i=k}n_i}=f_1x_1+f_2x_2+f_3x_3+\dots+f_kx_k$.

الخاصية2 :

x_1 ، x_2 ، x_3 ، . . . . ، x_k قيم سلسلة إحصائية ، مرفقة بالتكرارات n_1 ، n_2 ، n_3 ، . . . . ، n_k على الترتيب

و $\overline{x}$ الوسط الحسابي لهذه السلسلة.

$\overline{x+a}$ هو الوسط الحسابي للسلسلة x_1+a ، x_2+a ، x_3+a ، . . . . ، x_k+a مرفقة بالتكرارات n_1 ، n_2 ، n_3 ، . . . ، n_k على الترتيب . و $\overline{x\times a}$ هو الوسط الحسابي للسلسلة $x_1\times a$ ، $x_2\times a$ ، $x_3\times a$ ، . . . . ، $x_k\times a$ مرفقة بالتكرارات n_1 ، n_2 ، n_3 ، . . . . ، n_k على الترتيب . ولدينا : $\overline{x+a}=\overline{x}+a$ و $\overline{x\times a}=\overline{x}\times a$.

الخاصية 3 :

x_1 ، x_2 ، x_3 ، . . . . ، x_k ، y_1 ، y_2 ، y_3 ، . . . . ، y_k قيم سلسلة إحصائية ، مرفقة بالتكرارات n_1 ، n_2 ، n_3 ، . . . . ، n_k ، n'_1 ، n'_2 ، n'_3 ، . . . . ، n'_k على الترتيب و نحسب $\overline{X}$ الوسط الحسابي لهذه السلسلة بالعلاقة :

$$\overline{X} = \frac{\left(\sum_{i=1}^{k} n_i\right)\overline{x} + \left(\sum_{i=1}^{k} n'_i\right)\overline{y}}{n}$$ حيث:

$\overline{x}$ الوسط الحسابي للسلسلة x_1 ، x_2 ، x_3 ، . . . . ، x_k المرفقة بالتكرارات n_1 ، n_2 ، n_3 ، . . . . ، n_k على الترتيب.

$\overline{y}$ الوسط الحسابي للسلسلة y_1 ، y_2 ، y_3 ، . . . . ، y_k المرفقة بالتكرارات n'_1 ، n'_2 ، n'_3 ، . . . . ، n'_k على الترتيب.

$n = \sum_{i=1}^{k} n_i + \sum_{i=1}^{k} n'_i$ التكرار الكلي للسلسلة.

الربعيات:

نعتبر سلسلة إحصائية ذات طبع إحصائي كمي قيمه مرتبة تصاعديا وتكرارها n .

- **الربعي الأول Q_1**

هو أصغر قيمة للطبع حيث 25% على الأقل من الحدود السلسلة لها قيم أصغر من أو تساوي Q_1 .

- **الربعي الثالث Q_3**

هو أصغر قيمة للطبع حيث 75% على الأقل من الحدود السلسلة لها قيم أصغر من أو تساوي Q_3 .

في حالة طبع إحصائي متقطع

☜ إذا كان $\frac{n}{4}$ عددا طبيعيا فإن رتبة Q_1 هي $\frac{n}{4}$ ورتبة Q_3 هي $\frac{3n}{4}$ ؛

☜ إذا كان $\frac{n}{4}$ ليس عددا طبيعيا فإن العدد الطبيعي الأصغر n' الذي يحقق $n' > \frac{n}{4}$ هو رتبة Q_1 والعدد الطبيعي الأصغر n'' الذي يحقق $n'' > \frac{3n}{4}$ هو رتبة Q_3 .

مثال

نعتبر السلسلة الإحصائية التالية

4 , 4 ,4 , 4 , 4 , 4 , 7 , 7 , 7 , 7 , 7 , 10 , 10 , 10 , 10 , 10 , 10 , 10 , 13 , 13 , 13 , 13 , 16

حيث أن قيم الطبع الإحصائي مرتبة ترتيبا تصاعديا و كل قيمة مكتوبة عددا من المرات مساو لتكرارها

نلاحظ أن التكرار الكلي N يساوي 23

➢ أول قيمة في القائمة و التي رتبتها أكبر من أو يساوي $\frac{N}{4}$ هي القيمة السادسة لأن $\frac{N}{4} = 5,75$

تسمى هذه القيمة الرُبعي الأول و نرمز له بالرمز Q_1 (هنا $Q_1 = 4$)

➢ أول قيمة في القائمة و التي رتبتها أكبر أو يساوي $\frac{3N}{4}$ هي القيمة الثامنة عشر لأن $\frac{3N}{4} = 17,25$

تسمى هذه القيمة الرُبعي الثالث و نرمز له بالرمز Q_3 (هنا $Q_3=10$)

ملاحظة : Q_1 و Q_3 قيمتان من السلسلة بخلاف الوسيط Med الذي يمكن أن لا يكون قيمة من السلسلة

في حالة طبع إحصائي مستمر

☜ ننشئ مضلع التواتر المجمع الصاعد ويكون Q_1 ، Me و Q_3 فواصل نقط المضلع التي تراتيبها $0,25$ ، $0,50$ و $0,75$ على الترتيب.

- نعين الفئة $[a;b[$ التي تشمل الربعي وتكرارها n_Q ، ولدينا $Q_1=a+\dfrac{(b-a)\left(\dfrac{n}{4}-N\right)}{n_Q}$ و

$Q_3=a+\dfrac{(b-a)\left(\dfrac{3n}{4}-N\right)}{n_Q}$ (N هو التكرار المجمع الصاعد للفئة التي تسبق $[a;b[$).

- Q_1 و Q_3 هما قيمتان من السلسلة بخلاف Me يمكن أن لا يكون قيمة من السلسلة.

كيف نحدِّد Q_1 و Q_3 :

➢ بعد ترتيب القائمة ترتيبا تصاعديا (مع كتابة كل قيمة بعدد مساو لتكرارها) ➢ Q_1 القيمة التي رتبتها n حيث n هو أصغر عدد طبيعي يحقق $n \geq \frac{N}{4}$ ➢ Q_3 القيمة التي رتبتها n حيث n هو أصغر عدد طبيعي يحقق $n \geq \frac{3N}{4}$	**في حالة طبع كمي متقطع** نطبق التعريف باستخدام التكرار المجمع الصاعد أو التواتر المجمع الصاعد.	**في حالة طبع كمي مستمر** Q_1 هي فاصلة النقطة من منحنى التواتر المجمع الصاعد التي ترتيبها $\frac{1}{4}$ Q_3 هي فاصلة النقطة من منحنى التواتر المجمع الصاعد التي ترتيبها $\frac{3}{4}$

التمرين السابع

نعتبر السلسلة الإحصائية التالية

x_i	3	4	5	7	8	10	11
n_i	5	7	3	8	8	6	3

1ـ شكل جدول التكرار المجمع الصاعد و التواتر المجمع الصاعد
2ـ عين الوسيط Med و الربعيين Q_1 و Q_3 لهذه السلسلة

حل التمرين

x_i	3	4	5	7	8	10	11
n_i	5	7	3	8	8	6	3
ت م ص	5	12	15	23	31	37	40
تو م ص	0,125	0,3	0,375	0,575	0,775	0,925	1

2ـ

التكرار الكلي : $N = 2\times 20$

و منه الوسيط Med هو نصف مجموع

الحدين اللذين رتبتاهما 20 و 21

أي $Med = 7$

بقراءة جدول التواتر المجمع الصاعد نلاحظ أن أصغر قيمة Q_1 حيث ٪ 25 على الأقل من الحدود لها قيمة أصغر أو تساوي Q_1 هي 4 و بتطبيق التعريف كذلك نلاحظ أن $Q_3 = 8$

الانحراف الربعي

تعريف :

الإنحراف الربعي هو الفرق بين الربعيين الثالث و الأول . أي هو العدد I حيث $I = Q_3 - Q_1$

ملاحظة

الإنحراف الربعي هو مؤشر من مؤشرات التشتت

التمرين الثامن دراسة سلسلة ذات طبع كمي مستمر

يهتم منظمو دورة في كرة المضرب بدراسة متوسط الزمن المستغرق للمباريات .

جُمعت النتائج في الجدول التالي :

مجال الزمن (min)	[30 ، 50 [	[50 ، 80 [	[80 ، 120 [	[120،300 [
عدد المباريات	14	18	20	8

1 – أنشئ منحنى التواتر المجمّع الصاعد و استنتج قيمة الوسيط

2ـ عيّن الربعيين الأول و الثالث للسلسلة . ما هو الانحراف الربعي ؟

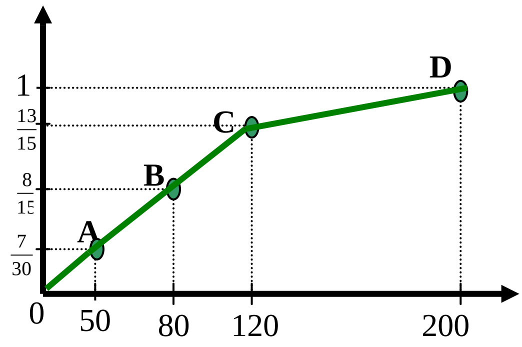
حـــل التمرين

مجال الزمن (min)	[30 ، 50 [	[50 ، 80 [	[80 ، 120 [	[120،300 [
عدد المباريات	14	18	20	8
التواتر	$\frac{7}{30}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{15}$
التواتر المجمع الصاعد	$\frac{7}{30}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{13}{15}$	1

1) الوسيط Med هو فاصلة النقطة من المنحنى و التي ترتيبها $\frac{1}{2}$ ، هذه النقطة تقع على القطعة المستقيمة [AB] ، حيث $A(50\,,\frac{7}{30})$ و $B(80\,,\frac{8}{15})$

معادلة (AB) هي $y=\dfrac{\frac{8}{15}-\frac{7}{30}}{80-50}(x-50)+\frac{7}{30}$

و منه $x=\frac{230}{3}$ $(50\le x\le 80)$ $Med\approx 76,67$



2) بنفس الطريقة نبحث عن فاصلتي النقطتين اللتين ترتيباهما $\frac{1}{4}$ ، $\frac{3}{4}$ وهما Q_1 و Q_3 على الترتيب

نجد $Q_1\approx 51,66$ و $Q_3=106$ و منه الإنحراف الربعي $I\approx 54,33$

العشريان D_1 و D_9 :

تعريف:

- **العشري الأول D_1**

هو أصغر قيمة طبع حيث يكون 10% على الأقل من الحدود لها قيمة طبع أصغر أو تساوي D_1.

- **العشري التاسع D_9**

هو أصغر قيمة طبع حيث يكون 90% على الأقل من الحدود لها قيمة طبع أصغر أو تساوي D_9.

المخطط بالعلبة:

نكوّن مخططا بالعلب بالطريقة التالية :

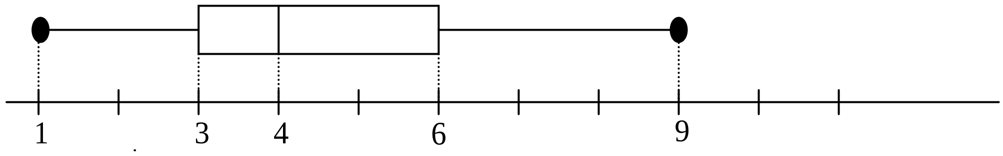
✓ نضع قيم الطبع على محور (أفقي أو شاقولي)

✓ نعيّن على هذا المحور القيم min ، max ، Q_1 ، Med و Q_3 .

(القيمة الصغرى ، القيمة الكبرى ، الربعيين الأول و الثالث و الوسيط)

✓ نكون عندئذ مستطيلا (العلبة) بالتوازي مع المحور . (طول المستطيل هو الانحراف الربعي و عرضه كيفي)

مثال : min =1 ، max = 9 ، Q_1 = 3 ، Med = 4 و Q_3 = 6 .



ملاحظة:

هذا المخطط يمكننا من مشاهدة تشتت توزيع إحصائي و المقارنة بين عدة سلاسل إحصائية .

التباين والانحراف المعياري:

التباين(V) :

هو الوسط الحسابي لمربعات انحرافات القيم x_i عن وسطها الحسابي $\bar{x}$ أي الوسط الحسابي للقيم $\left(x_i-\bar{x}\right)^2$.

$$V=\frac{1}{n}\left[n_1\left(x_1-\bar{x}\right)^2+n_2\left(x_2-\bar{x}\right)^2+\ldots+n_p\left(x_p-\bar{x}\right)^2\right]$$

الانحراف المعياري(s) :

هو الجذر التربيعي للتباين أي $s=\sqrt{V}$

خاصية:

$$V=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p}n_i\left(x_i-\bar{x}\right)^2=\sum_{i=1}^{p}f_i\left(x_i-\bar{x}\right)^2=\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p}n_ix_i^2\right)-\bar{x}^2=\left(\sum_{i=1}^{p}f_ix_i^2\right)-\bar{x}^2$$

البرهان:

لدينا: $\left(x_i-\bar{x}\right)^2=x_i^2-2x_i\bar{x}+\bar{x}^2$ و منه $n_i\left(x_i-\bar{x}\right)^2=n_ix_i^2-2n_ix_i\bar{x}+n_i\bar{x}^2$

ومنه: $V=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=p}n_i\left(x_i-\bar{x}\right)^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=p}n_ix_i^2-\frac{2}{n}\bar{x}\sum_{i=1}^{i=p}n_ix_i+\frac{1}{n}\bar{x}^2\sum_{i=1}^{i=p}n_i$

لدينا: $\sum_{i=1}^{i=p}n_i=n$ و $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=p}n_ix_i=\bar{x}$

إذن: $V=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=p}n_ix_i^2-2\bar{x}^2+\bar{x}^2$ أي $V=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=p}n_ix_i^2-\bar{x}^2$

ملاحظة :

إذا كانت السلسلة مجمعة بالفئات (توزيع منتظم) نأخذ x_i كمركز للفئة

التمرين التاسع

نعتبر السلسلة الإحصائية التالية

1- أحسب التباين و الانحراف المعياري للسلسلة

x_i	3	5	7	9	11	13
f_i	0,08	0,15	0,28	0,35	0,1	0,04

حـــل:

نستعمل التعريف (2)

طريقة

نضيف سطرا للجدول لحساب القيم $f_i.x_i$ ثم نحسب مجموع $f_i.x_i$

نضيف سطرا آخرا للجدول لحساب $f_i.x_i^2$ ثم نحسب مجموع $f_i.x_i^2$

x_i	3	5	7	9	11	13	المجموع
f_i	0,08	0,15	0,28	0,35	0,1	0,04	
$f_i.x_i$	0,24	0,75	1,96	3,15	1,1	0,52	7,72
$f_i.x_i^2$	0,72	3,75	13,72	28,35	12,1	6,76	65,4

$V=65,4-(7.72)^2=5,8016$ $\qquad$ $s=\sqrt{5.8016}\simeq 2,4086$

تمارين محلولة

التمرين الأول

إليك الجدول التالي الذي يمثل علامات أحد الاقسم :

العلامة	3	5	7	10	13	16	19
التكرار	5	4	6	5	5	3	2
التكرار م ص							
التواتر م ص							

1-أكمل الجدول ثم احسب كل من: المدى، المنوال، الوسط الحسابي، الوسيط

2- احسب كل من: ربعي الاول ، الربعي الثالث ، العشري الاول ، العشري التاسع

حل التمرين

إكمال الجدول:

العلامة	3	5	7	10	13	16	19
التكرار	5	4	6	5	5	3	2
التكرار م ص	5	9	15	20	25	28	30
التواتر م ص	$\frac{5}{30}$	$\frac{9}{30}$	$\frac{15}{30}$	$\frac{20}{30}$	$\frac{25}{30}$	$\frac{28}{30}$	1

المدى: 19-3=16

المنوال: Mod=7

الوسط الحسابي : $\bar{x} = \frac{3\times5+5\times4+7\times6+10\times5+13\times5+16\times3+19\times2}{30} = 9.26$ ،

الوسيط: التكرار الكلي: $N=30$ وبالتالي $Med = \frac{x_{15}+x_{16}}{2} = \frac{7+10}{2} = 8.5$

الربعيات

أول قيمة في القائمة و التي رتبتها أكبر من أو يساوي $\frac{N}{4}$ هي القيمة الثامنة لأن $\frac{30}{4} = 7,5$

x_8 تسمى هذه القيمة الرُبعي الأول و نرمز له بالرمز Q_1 (هنا $Q_1 = 5$)

أول قيمة في القائمة و التي رتبتها أكبر أو يساوي $\frac{3N}{4}$ هي القيمة الثالثة و العشرون لأن $\frac{3\times30}{4} = 22,5$

x_{23} تسمى هذه القيمة الرُبعي الثالث و نرمز له بالرمز Q_3 (هنا $Q_3 = 13$)

العشريات

لدينا $\frac{N}{10}$ $\frac{30}{10} = 3$

x_3 تسمى هذه القيمة العشري الأول و نرمز له بالرمز D_1 (هنا $D_1 = 3$)

لدينا $\frac{9N}{10}$ $\frac{9\times30}{10} = 27$

x_{27} تسمى هذه القيمة العشري التاسع و نرمز له بالرمز D_9 (هنا $D_9 = 16$)

التمرين الثاني

إليك الجدول التالي الذي يمثل علامات أحد الاقسام :

العلامة	2	4	6	9	12	15	18
التكرار	5	4	6	11	5	3	2
التكرار م ن							
التواتر م ن							

1ـأكمل الجدول ثم احسب كل من: المدى، المنوال، الوسط الحسابي، الوسيط

2- احسب كل من: ربعي الاول ، الربعي الثالث ، العشري الاول ، العشري التاسع

حل التمرين

إكمال الجدول:

العلامة	2	4	6	9	12	15	18
التكرار	5	4	6	11	5	3	2
التكرار م ن	36	31	27	21	10	5	2
التواتر م ن	1	$\frac{31}{36}$	$\frac{27}{36}$	$\frac{21}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{2}{36}$

المدى: 18-2=16

المنوال: Mod=9

الوسط الحسابي : $\bar{x} = \frac{2\times5+4\times4+6\times6+9\times11+12\times5+15\times3+18\times2}{36} = 8.38$ ،

الوسيط: التكرار الكلي: $N = 36$ وبالتالي $Med = \frac{x_{18}+x_{19}}{2} = \frac{9+9}{2} = 9$

الربعيات

لدينا $\frac{N}{4}$ $\frac{36}{4} = 9$

x_9 تسمى هذه القيمة الرُبعي الأول و نرمز له بالرمز Q_1 (هنا $Q_1 = 4$)

لدينا $\frac{3N}{4}$ $\frac{3\times36}{4} = 27$

x_{27} تسمى هذه القيمة الرُبعي الثالث و نرمز له بالرمز Q_3 (هنا $Q_3 = 12$)

العشريات

لدينا $\frac{N}{10}$ $\frac{36}{10} = 3,6$

x_4 تسمى هذه القيمة العشري الأول و نرمز له بالرمز D_1 (هنا $D_1 = 2$)

لدينا $\frac{9N}{10}$ $\frac{9\times36}{10} = 32,4$

x_{33} تسمى هذه القيمة العشري التاسع و نرمز له بالرمز D_9 (هنا $D_9 = 15$)

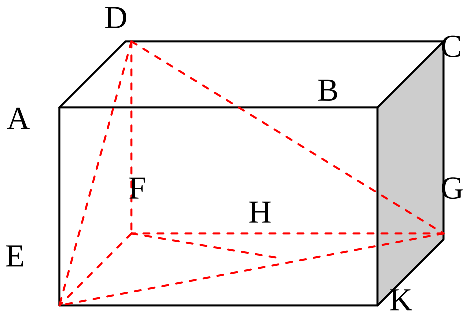
نموذج امتحان
الفصل
الثالث

نموذج امتحان الفصل الثالث

التمرين الأول: (... ن)

نعتبر متوازي المستطيلات القائم الممثل في الشكل المقابل :

بحيث: $AE = 6cm;\quad AB=AD=4cm$



1ـ احسب الأطوال: $AG;\ DE;\ DG;\ EG$

2ـ استنتج طبيعة المثلث EDG

3ـ ليكن H منتصف [EG]،

أ ـ بين أن (DF) عمودي على (HF)

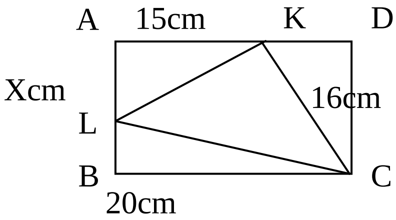
ب ـ احسب DH

ج ـ احسب حجم الهرم DFEG

التمرين الثاني (... ن)

ABCD مستطيل حيث : CD=16cm و BC=20cm، ولتكن K نقطة من $[AD]$ بحيث: AK=15cm

ولتكن L نقطة من $[AB]$ حيث AL=X cm حيث X عدد حقيقي موجب (الرسم غير مطلوب)



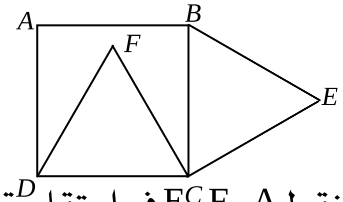
1ـ أحسب كل من KC^2 ثم LC^2 و KL^2 بدلالة X

2ـ أحسب العدد X بحيث يكون المثلث KCL متساوي الساقين $[KC]$ و $[KL]$

3ـ أحسب العدد X بحيث يكون المثلث KCL قائم في K

التمرين الثالث: (... ن)

يمثل الشكل مربعا ABCD ، ومثلثين BCE ، CDF كل منهما متقايس الأضلاع.



أ) علم النقطة G بحيث يكون المثلث ACG متقايس الأضلاع

وتكون G و B من جهتين مختلفتين بالنسبة إلى (AC).

ب) بين أن النقط B ، D ، G في استقامية.

بين أنه يوجد دوران يحول النقط B ، D ، G إلى النقط A ، F ، E ، ثم استنتج أن النقط A ، F ، E في استقامية.

التمرين الرابع: (... ن)

إليك علامات قسم 1 ج م ع ت في مادة الرياضيات:

3، 3، 7، 19، 19، 10، 7، 7، 16، 16، 3، 3، 5، 7، 13، 13، 13، 13، 16، 16، 16، 7، 10، 10، 10 ،

1 ـ ارسم جدولا تبين فيه : التكرار،التواتر،التكرار المجمع الصاعد،التكرار المجمع النازل.

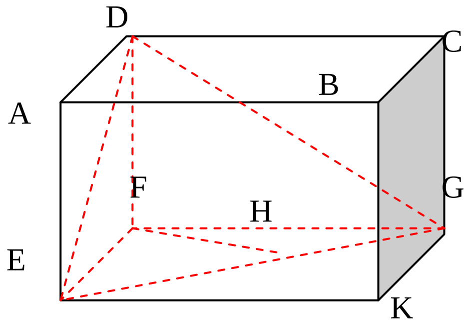
احسب كل من:المدى،المنوال،الوسط الحسابي،الوسيط

2- احسب كل من: ربعي الاول ، الربعي الثالث ، العشري الاول ، العشري التاسع

3-شكل المخطط بالعلبة

حل مقترح:

التمرين الأول: (... ن)



نعتبر متوازي المستطيلات القائم الممثل في الشكل المقابل :

بحيث: $AB=AD=4cm$; $AE=6cm$;

1ـ حساب الأطوال: EG ; DG ; DE ; AG

أـ حساب EG

بتطبيق مبرهنة فيثاغورس في المثلث EKG القائم في K نجد :

$EG^2 = EK^2 + KG^2 = 16+16 = 32$ ومنه $EG = \sqrt{32}$

بـ حساب DG

بتطبيق مبرهنة فيثاغورس في المثلث DFG القائم في F نجد :

$DG^2 = DF^2 + FG^2 = 36+16 = 52$ ومنه $DG = \sqrt{52}$

جـ حساب DE

بتطبيق مبرهنة فيثاغورس في المثلث EFD القائم في F نجد :

$DE^2 = DF^2 + FE^2 = 36+16 = 52$ ومنه $DE = \sqrt{52}$

دـ حساب AG

بتطبيق مبرهنة فيثاغورس في المثلث EAG القائم في E نجد :

$AG^2 = AE^2 + EG^2 = 36+32 = 68$ ومنه $AG = \sqrt{68}$

4 ـ استنتاج طبيعة المثلث EDG

المثلث EDG متساوي الساقين لأن $DE = DG$

5 ـ ليكن H منتصف [EG]

أ ـ تبيين أن (DF) عمودي على (HF)

المستقيم (DF) على المستوي $(EFGK)$ وبما أن المستقيم (HF) محتوى في المستوي $(EFGK)$

فإن(DF) عمودي على (HF)

بـ حساب DH

بتطبيق مبرهنة فيثاغورس في المثلث DFH القائم في F نجد :

$$DH^2 = DF^2 + FH^2 = 36 + \left(\frac{\sqrt{32}}{2}\right)^2 = 36 + \frac{32}{4} = 44$$ ومنه $DH = \sqrt{44}$

جـ حساب حجم الهرم DFEG

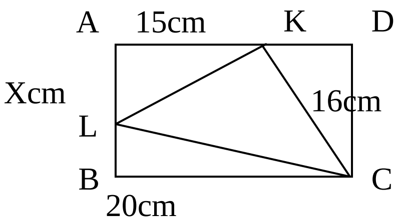
$$V(DFEG) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\times 4\times 6\right)\times 4 = 16cm^3$$

التمرين الثاني (... ن)

ABCD مستطيل حيث : CD=16cm و BC=20cm، ولتكن Kنقطة من $[AD]$ بحيث: AK=15cm

ولتكن L نقطة من $[AB]$ حيث AL=X cm حيث X عدد حقيقي موجب (الرسم غير مطلوب)

1ـحساب كل من KC^2 ثم LC^2 و KL^2 بدلالة X



أـحساب KC^2

بتطبيق مبرهنة فيثاغورس في المثلث KDC القائم في D نجد :

$$KC^2 = KD^2 + DC^2 = 25 + 256 = 281$$

بـ حساب LC^2

بتطبيق مبرهنة فيثاغورس في المثلث LBC القائم في B نجد :

$$LC^2 = LB^2 + BC^2 = (16 - X)^2 + 400 = X^2 - 32X + 656$$

جـ حساب KL^2

بتطبيق مبرهنة فيثاغورس في المثلث AKL القائم في A نجد :

$$KL^2 = AL^2 + AK^2 = X^2 + 225$$

2ـحساب العدد X بحيث يكون المثلث KCL متساوي الساقين $[KC]$ و $[KL]$

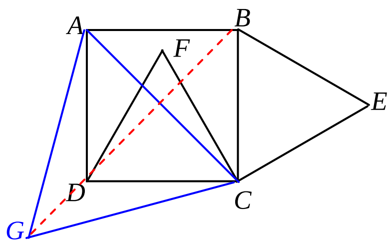
$KL = KC$ معناه $KL^2 = KC^2$ معناه $X^2 + 225 = 281$ ومنه $X^2 = 56$ أي $X = \sqrt{56} = 7.483cm$

3ـحساب العدد X بحيث يكون المثلث KCL قائم في K

KCL قائم في K تكافئ $LC^2 = KL^2 + KC^2$ تكافئ $X^2 - 32X + 656 = X^2 + 225 + 281$

تكافئ $X = \dfrac{150}{32} = \dfrac{75}{16} = 4.6875cm$

التمرين الثالث:(...ن)



أ) تعلم النقطة G بحيث يكون المثلث ACG متقايس الأضلاع.

و G ، B من جهتين مختلفتين بالنسبة إلى (AC).

ب) تبيين أن النقط B ، D ، G في استقامية.

لدينا ABCD مربع إذن (DB) محور القطعة $[AC]$

بما أن المثلث ACG متقايس الأضلاع و (DB) هو محور [AC] فإن (DB) يشمل الرأس G وبالتالي النقط $G.D.B$ في استقامية 2ن

ج) تبين أنه يوجد دوران يحول النقط B ، D ، G إلى النقط A ، F ، E واستنتاج استقامية النقط E ، F ، A

لدينا : CE = CB ، CF = CD ، CG = CA .

ولدينا : $\widehat{BCE} = \widehat{DCF} = \widehat{GCA} = 60°$

بتوجيه المستوي في الاتجاه غير المباشر (اتجاه دوران عقارب الساعة)

لدينا : صورة B هي E ، صورة D هي F و صورة G هي A بالدوران الذي مركزه C و زاويته 60°....3ن

وبما أن النقط B ، D ، G في استقامية فإن النقط E ، F ، A في استقامية.

التمرين الرابع ...ن

3، 3، 7، 19، 19، 10، 7، 7، 16، 16، 3، 3، 3، 5، 7، 13، 13، 13، 13، 16، 16، 16، 7، 10، 10، 10 ،

1-رسم جدولا تبين فيه :التكرار،التواتر،التكرار المجمع الصاعد،التكرار المجمع النازل.

العلامة	3	5	7	10	13	16	19
التكرار	5	1	5	4	4	5	2
التواتر	$\frac{5}{26}$	$\frac{1}{26}$	$\frac{5}{26}$	$\frac{4}{26}$	$\frac{4}{26}$	$\frac{5}{26}$	$\frac{2}{26}$
ت م صاعد	5	6	11	15	19	24	26
ت م نازل	26	21	20	15	11	7	2

احسب كل من:المدى،المنوال،الوسط الحسابي،الوسيط

المدى: $19-3=16$

المنوال: $Mod_1=:3\ ;Mod_2=7\ ;Mod_3=16$

الوسط الحسابي: $\bar{x}=\frac{3\times5+5\times1+7\times5+10\times4+13\times4+16\times5+19\times2}{26}=9.80$ ..

الوسيط:التكرار الكلي: $N=26$

$$Med=\frac{x_{13}+x_{14}}{2}=\frac{10+10}{2}=10$$

الربعيات

أول قيمة في القائمة و التي رتبتها أكبر من أو يساوي $\frac{N}{4}$ هي القيمة الثامنة لأن $\frac{26}{4}=6,5$

x_7 تسمى هذه القيمة الربعي الأول و نرمز له بالرمز Q_1 (هنا $Q_1=7$)

أول قيمة في القائمة و التي رتبتها أكبر أو يساوي $\frac{3N}{4}$ هي القيمة الثالثة و العشرون لأن $\frac{3\times26}{4}=19,5$

x_{20} تسمى هذه القيمة الرُبعي الثالث و نرمز له بالرمز Q_3 (هنا $Q_3=16$)

العشريات

لدينا $\frac{N}{10}$ $\frac{26}{10}=2,6$

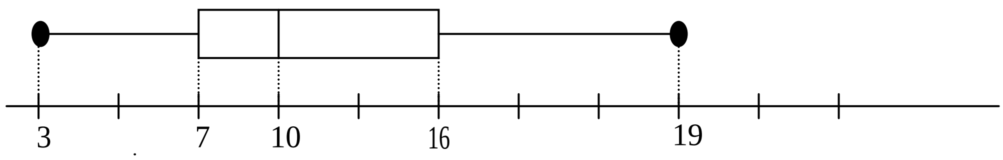
x_3 تسمى هذه القيمة العشري الأول و نرمز له بالرمز D_1 (هنا $D_1=3$)

لدينا $\frac{9N}{10}$ $\frac{9\times26}{10}=23,4$

x_{24} تسمى هذه القيمة العشري التاسع و نرمز له بالرمز D_9 (هنا $D_9=16$)

المخطط بالعلبة :

$min=3$ ، $max=19$ ، $Q_1=7$ ، $Med=10$ و $Q_3=16$.



تم بفضل اللّه

الحمد للّه الذي بنعمته تتم الصالحات

الأستاذ يوسف بوشناق

يتمنى لكم التوفيق

تجدون هذا الملف في صفحة

Top Maths

TOP MATHS

PROFESSOR BOUCHENAK YOUSSOUF