إختبار الفصل الثالث في مادة الرياضيات

المدة: ساعتان

التمرين الأول: (10 نقاط)

I/ المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ حيث: $\left\|\vec{i}\right\| = \left\|\vec{j}\right\| = 1cm$.
لتكن النقط $A\left(-1;2\right)$ ، $B\left(3;0\right)$ ، $C\left(-3;-2\right)$ و $D\left(1;-4\right)$ ،
ولتكن النقطة I منتصف القطعة: $[BC]$.

1/ أُحسب إحداثيي النقطة I ثم علّم النقط A ، B ، C ، D و I .

2/ ا/بين أن المثلث ABC قائم في A .

ب/أُكتب معادلة ديكارتية للدائرة (γ) المحيطة بالمثلث ABC .

ج/أُكتب معادلة ديكارتية للمستقيم (Δ) المماس للدائرة (γ) في النقطة A .

3/ لتكن (Γ) مجموعة النقط $M\left(x;y\right)$ من المستوي حيث: $x^2+y^2-2x+8y-23=0$.

ا/أثبت أن (Γ) هي دائرة مركزها النقطة D ونصف قطرها R يُطلب تعيينه.

ب/تحقق حسابيا أن $A\in(\Gamma)$ ، ثم حدد بدقة $d\left(D;(\Delta)\right)$ المسافة بين النقطة D والمستقيم (Δ) .

ج/استنتج الوضعية النسبية لكل من المستقيم (Δ) و الدائرة (Γ) ، ثم أنشئ كلا منهما.

4/ ا/أُحسب $\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{BC}$ ، ثم استنتج قيمة بالدرجات لقيس الزاوية $\widehat{DBC}$.

ب/أُحسب مساحة المثلث DBC .

5/ حدد طبيعة وعناصر (E) مجموعة النقط N من المستوي التي تحقق: $NB^2+NC^2=22$.

II/ 1/ تأكد أن: $\frac{7\pi}{12}=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}$.

2/ أُحسب القيمة المضبوطة لـ $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$.

3/ علما أن: $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ ، أُحسب $\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)$.

التمرين الثاني: (10 نقاط)

لتكن (U_n) المتتالية المعرفة بـ: $U_0=-1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1}=\dfrac{3U_n+4}{U_n+3}$.

1/ على الشكل المرفق المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ ، حيث :

(C_f) هو التمثيل البياني للدالة f المعرفة بـ: $f(x)=\dfrac{3x+4}{x+3}$ ، و (Δ) هو المستقيم ذو المعادلة $y=x$.

ا/مثّل -دون حساب- الحدود الأربع الأولى للمتتالية (U_n) على محور الفواصل (مبينا خطوط الإنشاء).

ب/ضع تخمينا حول إتجاه تغير وسلوك المتتالية (U_n) .

2/ لتكن (V_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $V_n=\dfrac{U_n+2}{U_n-2}$.

ا/بين أن (V_n) متتالية هندسية أساسها $q=5$ ، ثم أُحسب حدها الأول.

ب/ماهو إتجاه تغير المتتالية (V_n) ؟ مع التعليل.

ج/أُكتب V_n بدلالة n .

3/ ا/بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $U_n=2+\dfrac{4}{V_n-1}$ ، ثم استنتج عبارة U_n بدلالة n .

ب/أُحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n$ ، ماذا تستنتج؟

4/ ا/بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $\dfrac{1}{U_n-2}=\dfrac{1}{4}V_n-\dfrac{1}{4}$ ،

ثم أُحسب عندئذ بدلالة n المجموع: $S_n=\dfrac{1}{U_0-2}+\dfrac{1}{U_1-2}+\cdots+\dfrac{1}{U_n-2}$.

ب/أُحسب بدلالة n المجموع: $T_n=1+2+\cdots+n$ ،

ثم أُحسب بدلالة n الجداء: $P_n=V_0\times V_1\times V_2\times\cdots\times V_n$.

سؤال إضافي: (02 نقطة)

حل المعادلة ذات المجهول الحقيقي x التالية: $1+\dfrac{x+1}{x-1}+\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^2+\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^3=0$.

إرشاد: يمكنك وضع: $y=\dfrac{x+1}{x-1}$.

☺☺عطلة سعيدة☺☺

☺☺بالتوفيق للجميع☺☺

ثانوية راشدي محمد إبن ابراهيم
جيجل
-01-

وزارة التربية الوطنية

المؤسسة: ثانوية راشدي محمد - سيدي معروف اختبار الثلاثي: الثالث
التلميذ(ة): / القسم: 2 رياضيات
المادة: الرياضيات التاريخ: 24/05/2023م
أستاذ(ة) المادة: عمورة أحمد الرقم: /

ورقة الإجابة

الرقم: /

العلامة النهائية: 20/20

العلامات الجزئية
السؤال1:
السؤال2:
السؤال3:
السؤال4:
السؤال5:

التمرين الأول: (10 نقاط)

I) $A(-1;2)$ ، $B(3;0)$ ، $C(-3;-2)$ و $D(1;-4)$ ، I منتصف $[BC]$

1) حساب إحداثيي النقطة I:

$x_I = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{3-3}{2} = 0$

$y_I = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{0-2}{2} = -1$

0,25 $\boxed{I(0;-1)}$ ومنه

• الإستنتاج 0,5

2) أ- تبيان أن المثلث ABC قائم في A

0,75

ط1/ البرهان:

$AB = \sqrt{(3-(-1))^2 + (0-2)^2} = \sqrt{4^2 + 2^2}$

$AB = \sqrt{20}$

$BC = \sqrt{(-6)^2 + (-2)^2} = \sqrt{40} = BC$

$AC = \sqrt{(-2)^2 + (-4)^2} = \sqrt{20} = AC$

نلاحظ أن:

$AB^2 + AC^2 = 20 + 20 = 40 = BC^2$

وحسب مبرهنة فيثاغورس المثلث

$\boxed{ABC \text{ قائم في } A}$

ط2/ البرهان:

$\vec{AB}\begin{pmatrix}3-(-1)\\0-(+2)\end{pmatrix} = \vec{AB}\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}$

$\vec{AC}\begin{pmatrix}-3-(-1)\\-2-2\end{pmatrix} = \vec{AC}\begin{pmatrix}-2\\-4\end{pmatrix}$

ومنه:

$\vec{AB}\cdot\vec{AC} = 4(-2) + (-2)(-4) = -8 + 8 = 0$

ومنه: $(AC) \perp (AB)$.

$\boxed{\text{إذن المثلث } ABC \text{ قائم في } A}$

ب- كتابة معادلة الدائرة (γ) المحيطة بالمثلث ABC؛ أي الدائرة (γ) قطرها هو القطعة $[BC]$. 0,25 + 0,75

ط1/ الدائرة (γ) هي مجموعة النقط $M(x;y)$ من المستوي بحيث $\vec{BM}\cdot\vec{CM} = 0$

$\vec{BM}\begin{pmatrix}x-3\\y\end{pmatrix}$ و $\vec{CM}\begin{pmatrix}x+3\\y+2\end{pmatrix}$ أي:

$(\gamma): (x-3)(x+3) + y(y+2) = 0$ ومنه

$\boxed{(\gamma): x^2 + y^2 + 2y - 9 = 0}$ ومنه

ط2/ الدائرة (γ) مركزها $I(0;-1)$

ونصف قطرها $r = \frac{BC}{2} = \frac{\sqrt{40}}{2} = \sqrt{10}$

$(\gamma): (x-0)^2 + (y+1)^2 = \left(\frac{\sqrt{40}}{2}\right)^2$ ومنه

$\boxed{(\gamma): x^2 + (y+1)^2 = 10}$ أي:

جـ1- كتابة معادلة (Δ) المماس لـ (γ)

عند A. معامل الشعاع $\vec{IA}$ ناظمي لـ (Δ) و $A \in (\Delta)$.

حساب: $\vec{IA}\begin{pmatrix}0-(-1)\\-1-(2)\end{pmatrix} = \vec{IA}\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$

ومنه: $(\Delta): x-3y+c=0$

ولدينا: $A(-1,2)\in(\Delta)$ إذن:

$-1-3(2)+c=0$

أي $c=+7$

ومنه: $\boxed{(\Delta): x-3y+7=0}$

0,75

3- $(\Gamma): x^2+y^2+8y-2x-23=0$

أ- إثبات أن (Γ) دائرة:

لدينا: $(\Gamma): x^2+y^2-2x+8y-23=0$

تكافئ: $(x-1)^2-1+(y+4)^2-16-23=0$

تكافئ: $(\Gamma): (x-1)^2+(y+4)^2=40$

$\boxed{\text{ومنه } (\Gamma) \text{ دائرة مركزها } D(1;-4) \text{ ونصف قطرها } R=\sqrt{40}}$

0,75

ب- التحقق أن: $A(-1,2)\in(\Gamma)$

لدينا: $(-1)^2+(2)^2-2(-1)+8(2)-23$

$=1+4+2+16-23$

$=23-23=0$

0,25

إذن: $\boxed{A\in(\Gamma)}$

• حساب المسافة $d(D;(\Delta))$:

$d(D,(\Delta)) = \frac{|1-3(-4)+7|}{\sqrt{(1)^2+(-3)^2}} = \frac{|20|}{\sqrt{10}}$

$= \frac{20\sqrt{10}}{10} = \boxed{2\sqrt{10} = d(D;(\Delta))}$

0,5

جـ- استنتاج الوضعية النسبية:

لدينا: $A\in(\Delta)$ و $A\in(\Gamma)$

$R = DA = \sqrt{40} = 2\sqrt{10} = d(D;(\Delta))$

إذن: $\boxed{\text{(Δ) مماس لـ (Γ) في } A}$

0,5

• الإنشاء: 1

4) أ- حساب الجداء السلمي: $\vec{BD}\cdot\vec{BC}$

لدينا: $\vec{BD}\begin{pmatrix}1-3\\-4-0\end{pmatrix} = \vec{BD}\begin{pmatrix}-2\\-4\end{pmatrix}$

$\vec{BC}\begin{pmatrix}-3-3\\-2-0\end{pmatrix}=\vec{BC}\begin{pmatrix}-6\\-2\end{pmatrix}$

ومنه: 0,5

$\vec{BD}\cdot\vec{BC} = (-2)(-6)+(-4)(-2) = 12+8$

$\boxed{\vec{BD}\cdot\vec{BC}=20}$

• إيجاد قيس الزاوية $\widehat{DBC}$:

لدينا: $\vec{BD}\cdot\vec{BC} = BD\cdot BC\cdot\cos(\widehat{DBC})$

$=20$

ولدينا: $BD=\sqrt{(-2)^2+(-4)^2}=\sqrt{20}$

$BC=\sqrt{(-6)^2+(-2)^2}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$

$\sqrt{40}\times\sqrt{20}\times\cos(D\hat{B}C)=20$ ومنه،

$\cos(D\hat{B}C)=\dfrac{20}{\sqrt{20}\times\sqrt{40}}=\dfrac{\sqrt{20}}{\sqrt{40}}$ أي،

$=\sqrt{\dfrac{20}{40}}=\sqrt{\dfrac{2}{4}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

$D\hat{B}C=\dfrac{\pi}{4}\,rad=45°$ ومنه،

0,75

ج) حساب مساحة المثلث DBC:

$S_{DBC}=\dfrac{1}{2}\times DB\times BC\times\sin(D\hat{B}C)$

$=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{20}\times\sqrt{40}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$=\dfrac{\sqrt{1600}}{4}=\dfrac{40}{4}=\boxed{10\,cm^2=S_{DBC}}$

0,5

5) تعيين مجموعة النقط (E):

$NB^2+NC^2=22$

لدينا: I منتصف $[BC]$ حسب مبرهنة المتوسط لدينا من أجل كل نقطة N من المستوي:

$NB^2+NC^2=2NI^2+\dfrac{1}{2}BC^2=22$

$2NI^2+\dfrac{40}{2}=22$ ومنه التالي،

$2NI^2=22-20$ أي،

$NI^2=1$ إذن،

$NI=1$ أي أن:

ومنه (E) دائرة مركزها I ونصف قطرها $r=1$.

0,75

(II) 1) تبيين أن: $\dfrac{7\pi}{12}=\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{4}$

لدينا: $\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{4\pi+3\pi}{4\times3}=\dfrac{7\pi}{12}$

0,25

2) حساب القيمة المضبوطة للعدد: $\cos\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)$

لدينا: $\cos\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)=\cos\left(\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{4}\right)$

$=\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\times\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right)-\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$

$=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\boxed{\cos\dfrac{7\pi}{12}=\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}}$

0,5

3) حساب: $\sin\left(\dfrac{7\pi}{6}\right)$

علما أن: $\sin\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$.

1ط

$\sin\left(\dfrac{7\pi}{6}\right)=\sin\left(2\times\dfrac{7\pi}{12}\right)$

$=2\sin\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)\cos\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)$

$=2\left(\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\right)\left(\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}\right)$

0,5

$=\dfrac{2}{16}(2-6)$

$=\dfrac{-8}{16}=\boxed{-\dfrac{1}{2}=\sin\left(\dfrac{7\pi}{6}\right)}$

2ط

$\sin\left(\dfrac{7\pi}{6}\right)=\sin\left(\dfrac{6\pi+\pi}{6}\right)$

$=\sin\left(\pi+\dfrac{\pi}{6}\right)$

$=-\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$

$\boxed{\sin\dfrac{7\pi}{6}=-\dfrac{1}{2}}$

انتهى التصحيح النموذجي

التمرين الثاني : (10 نقاط)

(u_n) : $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n+4}{u_n+3} \end{cases}$

1) أ- تمثيل الحدود الأربع الأولى لـ (u_n) على الشكل المرفق. 1

ب- التخمين:

نلاحظ أن: $u_0 < u_1 < u_2 < u_3$

وأنها تتقارب من بعضها البعض

فنخمن أن (u_n) متزايدة ومتقاربة على $\mathbb{N}$.

2) $v_n = \dfrac{u_n+2}{u_n-2}$.

أ- تبيان أن (v_n) هندسية:

لنبين أنه من أجل كل عدد طبيعي n:

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}+2}{u_{n+1}-2} = \frac{\dfrac{3u_n+4}{u_n+3}+2}{\dfrac{3u_n+4}{u_n+3}-2}$$ 1

$$= \frac{\dfrac{3u_n+4+2u_n+6}{u_n+3}}{\dfrac{3u_n+4-2u_n-6}{u_n+3}}$$

$$= \frac{5u_n+10}{u_n+3} \times \frac{u_n+3}{u_n-2}$$

$$= \frac{5(u_n+2)}{u_n-2} = \boxed{5v_n = v_{n+1}}$$

ومنه: (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=5$ وحدها الأول:

$v_0 = \dfrac{u_0+2}{u_0-2} = \dfrac{-1+2}{-1-2} = \boxed{-\dfrac{1}{3} = v_0}$ 0.5

ب) اتجاه تغير المتتالية (v_n):

بما أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=5>1$ وحدها الأول $v_0 = -\dfrac{1}{3} < 0$ فإن المتتالية (v_n) $\boxed{\text{متتالية متناقصة تماما على } \mathbb{N}}$ 1

جـ- عبارة الحد العام:

بما أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=5$ وحدها الأول $v_0 = -\dfrac{1}{3}$

فإن: 1

$v_n = \left(-\dfrac{1}{3}\right) \times 5^n = \boxed{\dfrac{-5^n}{3} = v_n}$

ملاحظات الأستاذ(ة) :

إمضاء الولي:

3) أ- تبيان أنه من أجل $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = 2 + \frac{4}{v_n - 1}$$

0.5

الطريقة 1:

$$\boxed{2+\frac{4}{v_n-1}} = \frac{2v_n - 2 + 4}{v_n - 1} = 2\left(\frac{v_n+1}{v_n-1}\right)$$

$$= 2\left(\frac{\frac{u_n+2}{u_n-2}+1}{\frac{u_n+2}{u_n-2}-1}\right)$$

$$= 2\times\left(\frac{u_n+\cancel{2}+u_n-\cancel{2}}{\cancel{u_n-2}}\right)\times\left(\frac{\cancel{u_n-2}}{u_n+2-u_n+2}\right)$$

$$= 2\times\frac{2u_n}{4} = u_n$$

و.هـ.م

الطريقة 2:

$$v_n = \frac{u_n+2}{u_n-2}$$

$$= \frac{u_n-2+4}{u_n-2} = 1+\frac{4}{u_n-2}$$

ومنه $\frac{4}{u_n-2} = v_n - 1$

ومنه $\frac{u_n-2}{4} = \frac{1}{v_n-1}$

أي $u_n - 2 = \frac{4}{v_n-1}$

ومنه $\boxed{u_n = 2+\frac{4}{v_n-1}}$

الطريقة 3:

$$v_n = \frac{u_n+2}{u_n-2}$$

ومنه $v_n(u_n-2) = u_n+2$

أي $v_n u_n - 2v_n = u_n+2$

ومنه $v_n u_n - u_n = 2v_n + 2$

ومنه $u_n(v_n-1) = 2(v_n+1)$

ومنه

$$u_n = 2\times\left(\frac{v_n+1}{v_n-1}\right) = 2\times\left(\frac{v_n-1+2}{v_n-1}\right)$$

$$= 2\left(1+\frac{2}{v_n-1}\right)$$

$$\boxed{u_n = 2+\frac{4}{v_n-1}}$$

- عبارة u_n:

ومنه: $u_n = 2+\frac{4}{(-\frac{1}{3})5^n - 1}$

$$\boxed{u_n = 2 - \frac{4}{\frac{5^n}{3}-1}}$$

1

$$u_n = 2 - \frac{12}{5^n-3}$$

ب) حساب النهاية:

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty}\left(2-\frac{4}{(\frac{1}{3})5^n+1}\right) = 2$$

0.5

- الاستنتاج:

المتتالية (u_n) متقاربة نحو 2.

0.5

4) أ- تبيان أن:

$$\frac{1}{u_n-2} = \frac{1}{4}v_n - \frac{1}{4}$$

لدينا $u_n = 2+\frac{4}{v_n-1}$

0.5

ومنه

$$u_n - 2 = \frac{4}{v_n-1}$$

ومنه: $\frac{1}{y_n-2} = \frac{v_n-1}{4}$

أي: (*) --- $\boxed{\frac{1}{y_n-2} = \frac{1}{4}v_n - \frac{1}{4}}$

• حساب S_n بدلالة n:

$$S_n = \frac{1}{y_0-2} + \frac{1}{y_1-2} + \dots + \frac{1}{y_n-2}$$

$$= \left(\frac{1}{4}v_0 - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4}v_1 - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{4}v_n - \frac{1}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{4}(v_0+v_1+\dots+v_n) - \underbrace{\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{4}\right)}_{n+1 \text{ مرة}}$$

$$= \frac{1}{4}\times \underset{-\frac{1}{3}}{v_0} \times \left(\frac{5^{n+1}-1}{5-1}\right) - \frac{1}{4}(n+1)$$

0.75

$$\boxed{S_n = -\frac{1}{48}(5^{n+1}-1) - \frac{1}{4}(n+1)}$$

ب- حساب T_n:

$$T_n = 1+2+3+\dots+n = \frac{(n+1)(n-1+1)}{2}$$

$$\boxed{T_n = \frac{(n+1)n}{2}}$$

0.5

لأنه مجموع حدود متتابعة من متتالية حسابية أساسها $r=1$.

• حساب الجداء P_n:

$$P_n = v_0 \times v_1 \times v_2 \times \dots \times v_n$$

$$= v_0 \times (v_0\times q) \times (v_0 \times q^2) \times \dots \times (v_0 \times q^n)$$

0.75

$$= \underbrace{(v_0\times v_0\times v_0\times \dots \times v_0)}_{n+1 \text{ مرة}} \times (q\times q^2 \times \dots \times q^n)$$

$$P_n = v_0^{n+1} \times q^{1+2+\dots+n}$$

$$P_n = \left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1} \times 5^{T_n}$$

$$\boxed{P_n = \left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1} \times 5^{\frac{n(n+1)}{2}}}$$

التمرين الثاني

السؤال الإضافي: (2 نقطة)

بوضع: $y = \frac{x+1}{x-1}$ تصبح المعادلة

$$\underbrace{1+y+y^2+y^3}_{\text{مجموع حدود متتابعة من متتالية هندسية أساسها } q=y}=0$$

ومنه تكافئ:

$$1\times\left(\frac{1-y^4}{1-y}\right)=0$$

0.5

أي: $1-y^4=0$ و $1-y\neq 0$ ⇐ $\boxed{y\neq 1}$

أي: $1-(y^2)^2=0$ أي

$$(1-y^2)(1+y^2)=0$$

0.5

$1-y^2=0$ أو $1+y^2=0$

ومنه $y^2=1$ أي $|y|=1$

إذن $y=-1$ (لأن $y\neq 1$). 0.5

ومنه $\frac{x+1}{x-1}=-1$ أي

$x+1=-x+1$ ومنه $2x=0$

0.5

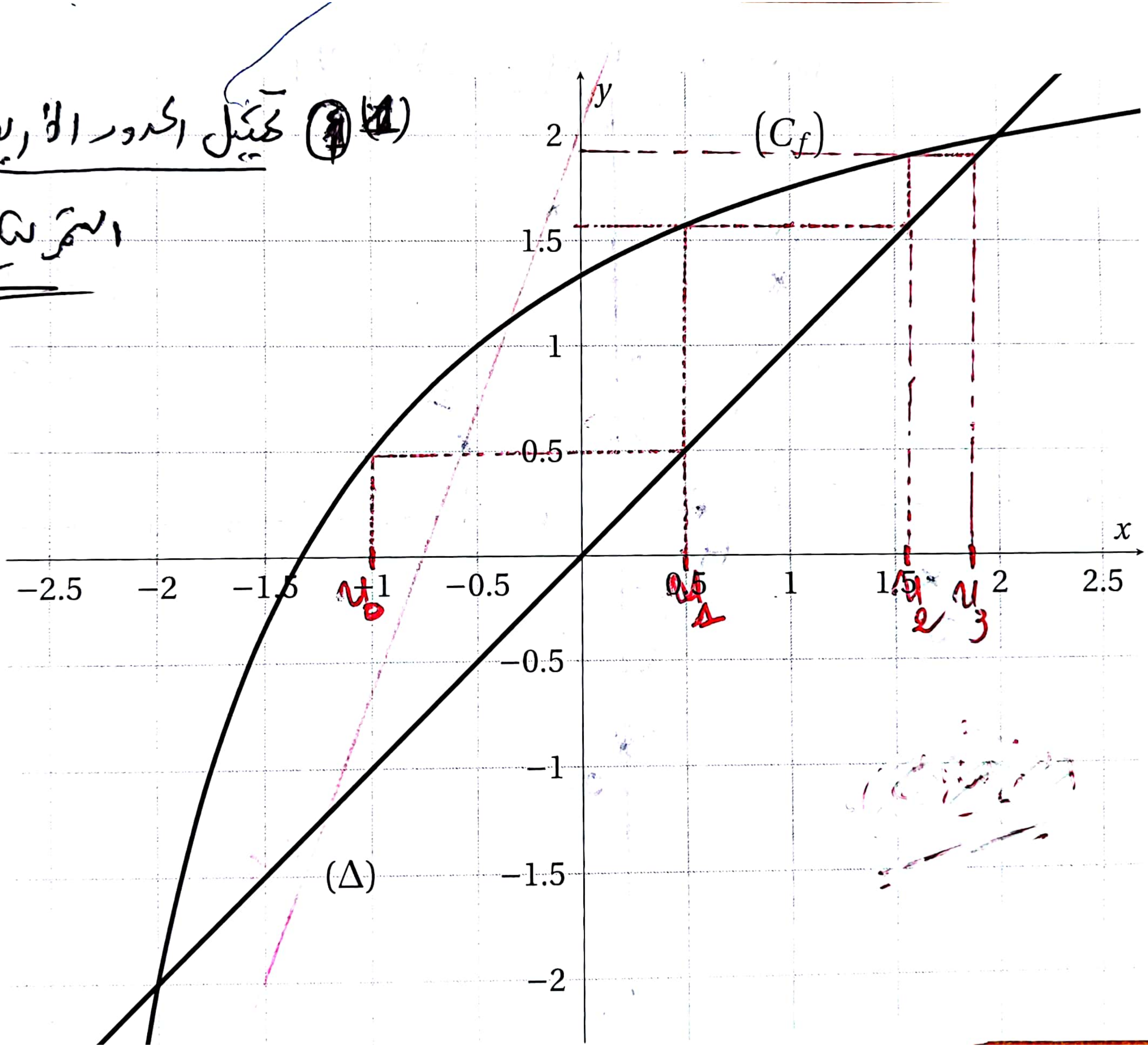
إذن $\boxed{x=0}$

إمضاء الولي:

ملاحظات الأستاذ(ة): عطلة سعيدة للجميع

(1) تمثيل الحدود الأربع الأولى من (u_n)

التمرين الثاني



$(\Delta): x - 3y + 7 = 0$

جدول مساعد

$(\Delta):$

x	-4	-1
y	1	2

الإنشاءات الخاصة بالتمرين الأول