نفرض في كل ما يلي المستوي مركب و مزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O\,,\vec{u}\,,\vec{v})$ .

عين مجموعة النقط M ذات اللاحقة $z$ في كل حالة من الحالات الآتية : (كل سؤال مستقل عن الآخر) .

1) $|z| = 3$.
2) $|z - 1 + 2i| = 5$.
3) $|\overline{z}| = 4$.
4) $|\overline{z} + 2 - 3i| = 2$ .
5) $|z - 2 + i| = |z + 1 - 2i|$.
6) $|\overline{z} - 2 + i| = |\overline{z} + 1 - 2i|$.
7) $z \times \overline{z} = 3$ .
8) $(z-2)(\overline{z}-2) = 4$.
9) $z + \overline{z} = 0$ .
10) $z - \overline{z} = 0$ .
11) $Re(z) = 4$
12) $Re(z) + Im(z) = 0$
13) $Re(z^2) = 0$.
14) $Im(z^2) = 0$ .
15) $|z| \leq 2$.
16) $|z| \geq 2$.
17) $3 \leq |z| \leq 4$ .
18) $\left|\frac{z-2+i}{z}\right| = 1$.
19) $|z-1| < |z+1-2i|$.
20) $|z-2| = |\overline{z}+i|$.
21) $|iz+3| = |z+4+i|$.
22) $|2\overline{z}+1| = 1$.
23) $|z|^2 = z + \overline{z}$.
24) $\left|\frac{iz+1+i}{z+2}\right| = 1$.
25) $|z-i| = |1-z|$.

26) $z = 1 + 2i + 3e^{i\theta}\ ,\ (\theta \in \mathbb{R})$.
27) $z = 2 - i + ke^{i\frac{\pi}{3}}\ ,\ (k \in \mathbb{R}^+)$.
28) $z = 2 - i + ke^{i\frac{\pi}{3}}\ ,\ (k \leq 0)$
29) $z = 2 - i + ke^{i\frac{\pi}{3}}\ ,\ (k \in \mathbb{R})$.
30) $z = 2 - i + ke^{i\frac{\pi}{3}}\ ,\ (k \in \mathbb{R}^*)$.
31) $\arg(z) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ , ($k$ عددصحيح).
32) $\arg(z) = \frac{\pi}{3} + k\pi$ , ($k$ عددصحيح) .
33) $\arg(\overline{z}) = \frac{\pi}{3} + k\pi$ , ($k$ عددصحيح).
34) $\arg(z - 1 + 2i) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ , .
35) $\arg(z - 1 + 2i) = \frac{\pi}{4} + k\pi$ , .
36) $\arg(\overline{z} + 2 - 3i) = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$.
37) العدد $\left(\frac{z-1+2i}{z+i}\right)$ حقيقي غير معدوم .
38) العدد $\left(\frac{z-1+2i}{z+i}\right)$ حقيقي سالب تماما .
39) العدد $\left(\frac{z-1+2i}{z+i}\right)$ حقيقي موجب تماما .
40) العدد $\left(\frac{z-1+2i}{z+i}\right)$ تخيلي صرف .
41) باك 2015 :
$z = k(1+i)e^{i\frac{7\pi}{12}}$ مع $k$ يمسح $\mathbb{R}^+$ .
42) $\arg\left(\frac{z}{\overline{z}}\right) = 2k\pi$ .
43) $\arg(-z) = \arg(\overline{z}) + 2k\pi$ .
44) $arg(z) - arg(-\overline{z}) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$
45) $\overline{z} = 1 - 2i + k(1-i)e^{i\frac{\pi}{4}}$ مع $(k > 0)$ .
46) $z = 2 - ke^{i\frac{\pi}{6}}$ مع $(k > 0)$ .

**تذكير :** في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس :

**1. كل مستقيم له معادلة من الشكل :** $ax + by + c = 0$ . حيث $a\,,b$ عددان غير معدومين معا .

**2. كل دائرة لها معادلة من الشكل :** $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$ . النقطة $\omega(a\,;b)$ هي المركز و $R$ هو نصف القطر .

# حلول أسئلة مجموعة النقط في الأعداد المركبة

كل جواب فيما يلي مستقل عن الآخر :

| الخاصية | التفسير الهندسي | مجموعة النقط $M$ |
|---|---|---|
| 1) $\lvert z\rvert = 3$ | $OM = 3$ . | هي الدائرة التي مركزها $O$ و نصف قطرها 3 . |
| 2) $\lvert z-1+2i\rvert = 5$ . | $AM = 5$ ، مع $A(1;-2)$ . | هي الدائرة التي مركزها $A$ و نصف قطرها 5 . |
| 3) $\lvert \overline{z}\rvert = 4$ أي : $\lvert z\rvert = 4$ . | $OM = 4$ . | هي الدائرة التي مركزها $O$ و نصف قطرها 4 . |
| 4) $\lvert \overline{z}+2-3i\rvert = 2$ أي : <br> $\lvert z-(-2-3i)\rvert = 2$ . | $BM = 2$ ، مع $B(-2;-3)$ | هي الدائرة التي مركزها $B$ و نصف قطرها 2 . |
| 5) $\lvert z-2+i\rvert = \lvert z+1-2i\rvert$ | $AM = BM$ مع $\begin{cases} A(2;-1) \\ B(-1;2) \end{cases}$ | هي المستقيم المحوري لقطعة المستقيم $[AB]$ . |
| 6) $\lvert \overline{z}-2+i\rvert = \lvert \overline{z}+1-2i\rvert$ <br> أي : $\lvert z-2-i\rvert = \lvert z+1+2i\rvert$ | $AM = BM$ مع $\begin{cases} A(2;1) \\ B(-1;-2) \end{cases}$ | هي المستقيم المحوري لقطعة المستقيم $[AB]$ . |
| 7) $z \times \overline{z} = 3$ أي : $\lvert z\rvert^2 = 3$ <br> أي : $\lvert z\rvert = \sqrt{3}$ . | $OM = \sqrt{3}$ . | هي الدائرة التي مركزها $O$ و نصف قطرها <br> $\sqrt{3}$ . |
| 8) $(z-2)(\overline{z}-2) = 4$ أي : <br> $(z-2)(\overline{z-2}) = 4$ أي : <br> $\lvert z-2\rvert^2 = 4$ أي : $\lvert z-2\rvert = 2$ | $AM = 2$ ، مع $A(2;0)$ . | هي الدائرة التي مركزها $A$ و نصف قطرها 2 . |
| 9) $z+\overline{z} = 0$ أي : <br> $2\operatorname{Re}(z) = 0$ أي : <br> $\operatorname{Re}(z) = 0$ | $M(x;y)$ هي صورة $z$ <br> حيث : $x = 0$ . | هي حامل محور التراتيب $(yy')$ . |
| 10) $z-\overline{z} = 0$ أي : <br> $2\operatorname{Im}(z) = 0$ أي : <br> $\operatorname{Im}(z) = 0$ . | $M(x;y)$ هي صورة $z$ <br> حيث : $y = 0$ . | هي حامل محور الفواصل $(xx')$ . |
| 11) $\operatorname{Re}(z) = 4$ | $M(x;y)$ هي صورة $z$ <br> حيث : $x = 4$ . | هي المستقيم الموازي لحامل محور التراتيب ذو المعادلة : $x = 4$ . |

| | | |
|---|---|---|
| 12) $\mathrm{Re}(z)+\mathrm{Im}(z)=0$ | من أجل كل نقطة $M$ من المستوي تكون إحداثييها متعاكستان . | هي المستقيم ذو المعادلة $y=-x$ ( المنصف الثاني ) . |
| 13) $\mathrm{Re}(z^2)=0$ أي : $x^2-y^2=0$ ، أي : $y=x$ أو $y=-x$ . | | هي إتحاد المنصف الأول و المنصف الثاني . |
| 14) $\mathrm{Im}(z^2)=0$ أي : $x.y=0$ أي : $x=0$ أو $y=0$ . | | هي إتحاد حاملي محوري الإحداثيات ( الفواصل و التراتيب ) . |
| 15) $\|z\|\leq 2$ | $OM\leq 2$ . | هي القرص الذي مركزه $O$ و نصف قطره 2 . |
| 16) $\|z\|\geq 2$ | $OM\geq 2$ . | هي المستوي ما عدا القرص المفتوح الذي مركزه $O$ و نصف قطره 2 . |
| 17) $3\leq\|z\|\leq 4$ | $3\leq OM\leq 4$ . | هي الحلقة المحددة بين القرص الذي مركزه $O$ و نصف قطره 3 و القرص الذي مركزه $O$ و نصف قطره 4 . |
| 18) $\left\|\frac{z-2+i}{z}\right\|=1$ أي : $\|z-2+i\|=\|z\|$ . | $AM=OM$ مع $A(2;1)$ . | هي المستقيم المحوري لقطعة المستقيم $[OA]$ . |
| 19) $\|z-1\|<\|z+1-2i\|$ أي : $\|z-1\|<\|z-(-1+2i)\|$ | $AM<BM$ مع $\begin{cases}A(1;0)\\B(-1;2)\end{cases}$ حيث تكون $M$ أقرب إلى $A$ | هي نصف المستوي المحدّد بالمستقيم المحوري لقطعة المستقيم $[AB]$ و الذي يشمل $A$ . |
| 20) $\|z-2\|=\|\bar{z}+i\|$ أي : $\|z-2\|=\|z-i\|$ . | $AM=BM$ مع $\begin{cases}A(2;0)\\B(0;1)\end{cases}$ | هي المستقيم المحوري لقطعة المستقيم $[AB]$ . |
| 21) $\|iz+3\|=\|z+4+i\|$ أي : $\|i\|.\left\|z+\frac{3}{i}\right\|=\|z+4+i\|$ أي : $\|z-3i\|=\|z+4+i\|$ أي : $\|z-3i\|=\|z-(-4-i)\|$ | $AM=BM$ مع : $\begin{cases}A(0;-3)\\B(-4;-1)\end{cases}$ | هي المستقيم المحوري لقطعة المستقيم $[AB]$ . |

| | | |
|---|---|---|
| 22) $\left\|2\bar{z}+1\right\|=1$ أي :<br>$2.\left\|\bar{z}+\frac{1}{2}\right\|=1$ أي :<br>$\left\|z+\frac{1}{2}\right\|=\frac{1}{2}$ . | $AM=\frac{1}{2}$ مع : $A(-\frac{1}{2};0)$ | هي الدائرة التي مركزها $A$ و نصف قطرها $\frac{1}{2}$ |
| 23) $\|z\|^2=z+\bar{z}$ أي :<br>$x^2+y^2=2x$ أي :<br>$x^2+y^2-2x=0$ أي :<br>$(x-1)^2-1+y^2=0$<br>و منه : $(x-1)^2+y^2=1$ . | هذه الأخيرة هي معادلة دائرة . | هي الدائرة التي مركزها $\Omega(1;0)$ و نصف قطرها 1 . |
| 24) $\left\|\frac{iz+1+i}{z+2}\right\|=1$ أي :<br>$\|iz+1+i\|=\|z+2\|$ أي :<br>$\|i\|.\left\|z+\frac{1}{i}+1\right\|=\|z+2\|$ أي :<br>$\|z+1-i\|=\|z+2\|$ . | $AM=BM$ مع $\begin{cases}A(1;-1)\\B(2;0)\end{cases}$ | هي المستقيم المحوري لقطعة المستقيم $[AB]$ . |
| 25) $\|z-i\|=\|1-z\|$ أي :<br>$\|z-i\|=\|z-1\|$ . | $AM=BM$ مع : $\begin{cases}A(0;1)\\B(1;0)\end{cases}$ | هي المستقيم المحوري لقطعة المستقيم $[AB]$ . |
| 26) $z=1+2i+3e^{i\theta}$ أي :<br>$z-z_A=3e^{i\theta}$ ، و منه :<br>$\|z-z_A\|=3$ . | $AM=3$ مع $A(1;2)$ | هي الدائرة التي مركزها $A$ و نصف قطرها 3 . |
| 27) $z=2-i+ke^{i\frac{\pi}{3}}$ .<br>لدينا : $k\in\mathbb{R}^+$ أي نميز حالتين :<br>*) لما $k=0$ يكون : $z=2-i$<br>أي : $z=z_A$ .<br>*) لما $k>0$ يكون :<br>$z-z_A=ke^{i\frac{\pi}{3}}$ أي تصبح :<br>$\arg(z-z_A)=\frac{\pi}{3}$ . | *) $M=A$ مع $A(2;-1)$ .<br><br>*) $(\vec{u};\overrightarrow{AM})=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ . | *) هي النقطة $A$ .<br><br>هي نصف المستقيم الذي مبدؤه $A$ و يشكل زاوية قيسها $\frac{\pi}{3}$ مع حامل محور الفواصل . |

| | | |
|---|---|---|
| 28) $z=2-i+ke^{i\frac{\pi}{3}}$ .<br>لدينا : $k\leq 0$ أي نميز حالتين :<br>*) لما $k=0$ يكون : $z=2-i$<br>أي : $z=z_A$ .<br>*) لما $k>0$ يكون :<br>$z=2-i-ke^{i(\pi+\frac{\pi}{3})}$ ، و منه :<br>$z-z_A=-ke^{i\frac{4\pi}{3}}$ ، أي :<br>$\arg(z-z_A)=\frac{4\pi}{3}$ . | *) $M=A$ مع $A(2;-1)$ .<br>*) $(\vec{u};\overrightarrow{AM})=\frac{4\pi}{3}+2k\pi$ . | *) هي النقطة $A$ .<br>*)هي نصف المستقيم الذي مبدؤه $A$ و يشكل زاوية قيسها $\frac{4\pi}{3}$ مع حامل محور الفواصل . |
| 29) $z=2-i+ke^{i\frac{\pi}{3}}$ .<br>لدينا : $k\in\mathbb{R}$ ، نميز 3 حالات :<br>*) لما $k=0$ أي : $z=z_A$ .<br>*) $k>0$ ، $\arg(z-z_A)=\frac{\pi}{3}$ .<br>*) $k<0$ ، $\arg(z-z_A)=\frac{4\pi}{3}$ | *) $M=A$ مع $A(2;-1)$ .<br>$\left\{(\vec{u};\overrightarrow{AM})=\frac{\pi}{3}+2k\pi\right.$ | *) هي النقطة $A$ .<br>*) هي المستقيم المار بالنقطة $A$ و يشكل زاوية قيسها $\frac{\pi}{3}$ مع حامل محور الفواصل . |
| 30) $z=2-i+ke^{i\frac{\pi}{3}}$ .<br>لدينا : $k\in\mathbb{R}^*$ ، واضح أنّه تكون حالتين فقط نستثني النقطة $A$ .<br>أي : $\arg(z-z_A)=\frac{\pi}{3}+k\pi$ .<br>مع : $z\neq z_A$ . | *) $M\neq A$ .<br>*) $(\vec{u};\overrightarrow{AM})=\frac{\pi}{3}+k\pi$ . | هي المستقيم المار بالنقطة $A$ و يشكل زاوية قيسها $\frac{\pi}{3}$ مع حامل محور الفواصل باستثناء النقطة $A$ . |
| 31) $\arg(z)=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ .<br>مع : $z\neq 0$ . | *) $M\neq O$ .<br>*) $(\vec{u};\overrightarrow{OM})=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ . | هي نصف المستقيم الذي مبدؤه $O$ و يشكل زاوية قيسها $\frac{\pi}{3}$ مع حامل محور الفواصل ، باستثناء المبدأ $O$ . |
| 32) $\arg(z)=\frac{\pi}{3}+k\pi$ .<br>مع : $z\neq 0$ . | *) $M\neq O$ .<br>*) $(\vec{u};\overrightarrow{OM})=\frac{\pi}{3}+k\pi$ . | هي المستقيم المار بـــ $O$ و يشكل زاوية قيسها $\frac{\pi}{3}$ مع حامل محور الفواصل باستثناء المبدأ $O$ |

| | | |
|---|---|---|
| 33) $\arg(\bar{z})=\frac{\pi}{3}+k\pi$ أي :<br>$\arg(z)=-\frac{\pi}{3}+k\pi$ مع $z\neq 0$ | *) $M\neq O$ .<br>*) $(\vec{u};\overrightarrow{OM})=-\frac{\pi}{3}+k\pi$ . | هي المستقيم المار بـ $O$ و يشكل زاوية قيسها $-\frac{\pi}{3}$ مع حامل محور الفواصل باستثناء المبدأ $O$ . |
| 34) $\arg(z-1+2i)=\frac{\pi}{4}+2k\pi$<br>مع $z\neq 1-2i$ أي : $z\neq z_A$ . | *) $M\neq A$ .<br>*) $(\vec{u};\overrightarrow{AM})=\frac{\pi}{4}+2k\pi$ . | هي نصف المستقيم الذي مبدؤه $A$ و يشكل زاوية قيسها $\frac{\pi}{4}$ مع حامل محور الفواصل ، باستثناء النقطة $A$ . |
| 35) $\arg(z-1+2i)=\frac{\pi}{4}+k\pi$<br>مع $z\neq 1-2i$ أي : $z\neq z_A$ . | *) $M\neq A$ .<br>*) $(\vec{u};\overrightarrow{AM})=\frac{\pi}{4}+k\pi$ . | هي المستقيم المار بـ $A$ و يشكل زاوية قيسها $-\frac{\pi}{3}$ مع حامل محور الفواصل باستثناء $A$ . |
| 36) لدينا :<br>$\arg(\bar{z}+2-3i)=-\frac{\pi}{6}+2k\pi$<br>أي: $\arg(z+2+3i)=\frac{\pi}{6}+2k\pi$<br>مع $z\neq -2-3i$ أي : $z\neq z_A$ . | *) $M\neq A$ .<br>*) $(\vec{u};\overrightarrow{AM})=\frac{\pi}{6}+2k\pi$ . | هي نصف المستقيم الذي مبدؤه $A$ و يشكل زاوية قيسها $\frac{\pi}{6}$ مع حامل محور الفواصل ، ما عدا النقطة $A$ . |
| 37) $\frac{z-1+2i}{z+i}$ حقيقي غيرمعدوم<br>أي : $\frac{z-1+2i}{z+i}\neq 0$<br>و $\arg(\frac{z-z_A}{z-z_B})=k\pi$ . | *) $M\neq A$ و $M\neq B$<br>حيث : $A(1;-2)$ و $B(0;-1)$<br>*) $(\overrightarrow{BM};\overrightarrow{AM})=k\pi$ أي أنّ :<br>النقط $M;B;A$ في إستقامية . | هي المستقيم $(AB)$ باستثناء النقطتين $A$ و $B$ |
| 38) $\frac{z-1+2i}{z+i}$ حقيقي سالب<br>تماما ، أي : $\frac{z-1+2i}{z+i}\neq 0$<br>و $\arg(\frac{z-z_A}{z-z_B})=\pi+2k\pi$ . | *) $M\neq A$ و $M\neq B$<br>حيث : $A(1;-2)$ و $B(0;-1)$<br>*) $(\overrightarrow{BM};\overrightarrow{AM})=\pi+2k\pi$ . | هي قطعة المستقيم $[AB]$ ما عدا النقطتين $A$ و $B$ . |
| 39) $\frac{z-1+2i}{z+i}$ حقيقي موجب<br>تماما ، أي : $\frac{z-1+2i}{z+i}\neq 0$<br>و $\arg(\frac{z-z_A}{z-z_B})=2k\pi$ . | *) $M\neq A$ و $M\neq B$<br>حيث : $A(1;-2)$ و $B(0;-1)$<br>*) $(\overrightarrow{BM};\overrightarrow{AM})=0+2k\pi$ .<br>أي أنّ : $M$ تكون خارج<br>القطعة $[AB]$ . | هي المستقيم $(AB)$ ما عدا القطعة $[AB]$ . |

| | | |
|---|---|---|
| 40) $\frac{z-1+2i}{z+i}$ تخيلي صرف<br>أي : $\frac{z-1+2i}{z+i}=0$ و<br>$\arg(\frac{z-z_A}{z-z_B})=\frac{\pi}{2}+k\pi$ . | *) $M=A$ و $M\neq B$<br>حيث : $A(1;-2)$ و $B(0;-1)$<br>*) $(\overrightarrow{BM};\overrightarrow{AM})=\frac{\pi}{2}+k\pi$ .<br>أي : المثلث $ABM$ قائم في $M$ | هي الدائرة التي قطرها $[AB]$ باستثناء النقطة $B$ |
| 41) $z=k(1+i)e^{i\frac{7\pi}{12}}$ أي :<br>$z=k.\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}.e^{i\frac{7\pi}{12}}$ أي :<br>$z=k.\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{6}}$ مع $k\in\mathbb{R}^+$ .<br>*)إما $k=0$ أي : $z=0$ ، أو<br>*) $\arg(z)=\frac{5\pi}{6}+2k\pi$ . | *) $M=O$ .<br>*) $(\vec{u};\overrightarrow{OM})=\frac{5\pi}{6}+2k\pi$ . | هي نصف المستقيم الذي مبدؤه $O$ و زاويته $\frac{5\pi}{6}$ ما عدا المبدأ $O$ . |
| 42) $\arg(\frac{z}{\bar{z}})=2k\pi$ أي :<br>$\arg(z)-\arg(\bar{z})=2k\pi$ أي :<br>$\arg(z)+\arg(z)=2k\pi$ ،<br>و منه : $\arg(z)=k\pi$ . | *) $M\neq O$ .<br>معناه أنّ $z$ حقيقي غير معدوم . | هي حامل محور الفواصل ما عدا المبدأ $O$ . |
| 43) $\arg(-z)=\arg(\bar{z})+2k\pi$<br>تصبح :<br>$\pi+\arg(z)=-\arg(z)+2k\pi$<br>أي : $2\arg(z)=-\pi+2k\pi$<br>و منه : $\arg(z)=-\frac{\pi}{2}+k\pi$ . | *) $M\neq O$ .<br>معناه أنّ $z$ تخيلي صرف . | هي حامل محور التراتيب ما عدا المبدأ $O$ . |
| 44) لدينا :<br>$\arg(-z)-\arg(-\bar{z})=\frac{\pi}{3}+2k\pi$<br>أي : $2\arg(z)=\frac{\pi}{3}+2k\pi$<br>و منه : $\arg(z)=\frac{\pi}{6}+k\pi$ . | *) $M\neq O$ .<br>*) $(\vec{u};\overrightarrow{OM})=\frac{\pi}{6}+k\pi$ . | هي المستقيم المار بـ $O$ و يشكل زاوية قيسها $\frac{\pi}{6}$ مع حامل محور الفواصل باستثناء المبدأ $O$ |

| | | |
|---|---|---|
| 45) لدينا : $(k>0)$<br>أي : $\bar{z}=1-2i+k(1-i)e^{i\frac{\pi}{4}}$<br>أي : $\bar{z}=1-2i+k(\sqrt{2}.e^{-i\frac{\pi}{4}})e^{i\frac{\pi}{4}}$<br>أي : $\bar{z}=1-2i+k.\sqrt{2}$<br>$z=1+k.\sqrt{2}+2i$ ، $(k>0)$ | إذن :<br>$\begin{cases}\mathrm{Re}(z)=1+k.\sqrt{2}>1\\\mathrm{Im}(z)=2\end{cases}$ | هي نصف المستقيم المعرف بـــ :<br>$\begin{cases}\mathrm{Re}(z)>1\\\mathrm{Im}(z)=2\end{cases}$ . |
| 46) $z=2-k.e^{i\frac{\pi}{6}}$ ، $(k>0)$<br>أي : $z=2+k.e^{i(\frac{\pi}{6}+\pi)}$ أي :<br>$z=2+k.e^{i\frac{7\pi}{6}}$ مع $(k>0)$ .<br>و منه : $\arg(z)=\frac{7\pi}{6}+2k\pi$ . | *) $M\neq O$ .<br>*) $(\vec{u};\overrightarrow{OM})=\frac{7\pi}{6}+2k\pi$ . | هي نصف المستقيم الذي مبدؤه $O$ و زاويته $\frac{7\pi}{6}$ باستثناء المبدأ $O$ . |

**بالتوفيق للجميع في بكالوريا 2019**

الأستاذ : بلقاسم عبدالرزاق