السلسلة الفضّية

عكاشة BOOKSTORE
الناشر الحصري والوحيد لكتب الأستاذ نور الدين

الأستاذ نور الدين عيساوي

بالتعاون مع فريق عكاشة

الاعداد المركبة
من الألف إلى الياء

أكثر من 130 تمرينا

موافقة لفيديوهات اليوتيوب YouTube

- ملخص شامل
- تمرين المراجعة النهائية الشاملة
- جميع مواضيع شعبة العلوم التجريبية 2008-2020
- جميع مواضيع شعبة الرياضي 2008-2020
- جميع مواضيع شعبة الرياضيات 2008-2020
- مواضيع مقترحة
- مواضيع مقتبسة من مواضيع أجنبية

التحضير الجيد لبكالوريا الجزائر

عكاشة BOOKSTORE
We can help you
يمكننا أن نساعدك

مكتبة عكاشة للنشر والتوزيع

السلسلة الفضية

أولاد فايت ـ الجزائر العاصمة

الأستاذ نور الدين عيساوي

بالتعاون مع فريق عكاشة

الأعداد المركبة

من الألف إلى الياء

موافقة لفيديوهات اليوتيوب

ملخص شاملة حول الأعداد المركبة

تمرين المراجعة النهائية الشاملة

جميع مواضيع شعبة العلوم التجريبية 2008-2020

جميع مواضيع شعبة التقني رياضي 2008-2020

جميع مواضيع شعبة الرياضيات 2008-2020

مواضيع مقترحة

مواضيع مقتبسة من مواضيع أجنبية

التحضير الجيد لبكالوريا الجزائر

عكاشة
BOOKSTORE
We can help you
يمكننا أن نساعدك

1. ملخص شامل للأعداد المركبة

الشكل الجبري:

يكتب الشكل الجبري على الشكل التالي: $z = \underbrace{x}_{\text{الجزء الحقيقي}} + i \underbrace{y}_{\text{الجزء التخيلي}}$ حيث $i^2 = -1$ و x و y عددين حقيقيين

خواص:

$\bar{z} = x - iy$	$z + \bar{z} = 2x$	$z.\bar{z} = x^2 + y^2$

إذا كان $z = 0$ معناه $x = 0$ و $y = 0$

إذا كان z عددا حقيقيا لابد أن يكون جزؤه التخيلي معدوم أي $z - \bar{z} = 0$

ولكي يكون z عدد تخيلي صرف لابد أن يكون جزؤه الحقيقي معدوم أي $z + \bar{z} = 0$ وجزءه التخيلي غير معدوم لأن انعدامهما معا يعني أن $z = 0$ و هو عدد حقيقي في هذه الحالة.

طويلة عدد مركب: $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

الشكل المثلثي:

يكتب الشكل المثلثي على الشكل التالي: $z = \underbrace{r}_{\text{الطويلة } |z|=r} (\cos\theta + i\sin\theta)$

طويلته z: $|z| = r$

عمدته $\arg(z) = \theta + 2k\pi$ $z \neq 0$ و k عدد صحيح

للانتقال من الشكل الجبري إلى الشكل المثلثي لدينا $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ **و** θ **هي الزاوية التي تحقق:**

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{x}{r} \\ \sin\theta = \dfrac{y}{r} \end{cases}$$

خواص:

$\arg(\bar{z}) = -\arg(z)$	$\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$	$\lvert z^n\rvert = \lvert z\rvert^n$
	$\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')$	$\arg(z^n) = n\arg(z)$ $n\epsilon\mathbb{Z}$

ستور موافر:

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

ست كل عبارة من الشكل $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ كتابة مثلثية للعدد المركب z حتى نتحقق أن $r > 0$.

ا كان $r < 0$ فإنها كتابة للعدد المركب الذي طويلته $-r$ وعمدته $\pi + \theta$ فإنها كتابة للعدد المركب الذي طويلته) ولا عمدة له.

مثلا: $z = \cos\theta(\cos\theta + i\sin\theta)$

فلدينا: $\begin{cases} \arg(z) = \theta \\ |z| = \cos\theta \end{cases}$ من أجل $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

ملاحظة: قد تعطى العبارة من الشكل $z = r(\sin\theta + i\cos\theta)$ مع $r > 0$ تحول بالشكل التالي :

$$z = \left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right)$$

و $\begin{cases} \arg(z) = \pi + \theta \\ |z| = |\cos\theta| \end{cases}$ من أجل: $\theta\epsilon\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$

الشكل الأسي:

يكتب الشكل الأسي على الشكل التالي: $z = re^{i\theta}$ و يكتب مرافقه على الشكل التالي: $z = re^{-i\theta}$

خواص:

$$z_1 z_2 = (r_1 . r_2) e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right) e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$$
$$\left(re^{i\theta}\right)^n = r^n e^{in\theta} \qquad n \epsilon \mathbb{Z}$$

طبيعة المثلث:

النقطة A لاحقتها z_A ، B لاحقتها z_B و C لاحقتها z_C و لاحقة الشعاع $\overrightarrow{AB}$ هي $z_B - z_A$ ، نضع $Z = \frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$

لدينا:

$$\begin{cases} \arg(Z) = (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) \\ |Z| = \frac{BA}{BC} \end{cases}$$ لذا نستنتج أن:

أ- $\arg(Z) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ يعني أن المثلث ABC قائم في B.

ب- $|Z| = 1$ يعني أن المثلث ABC متساوي الساقين والضلعان المتقايسان هما $[AB]$ و $[CB]$

جـ- $\begin{cases} \arg(Z) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ |Z| = 1 \end{cases}$ يعني أن المثلث ABC قائم ومتساوي الساقين.

د- $\begin{cases} \arg(Z) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ |Z| = 1 \end{cases}$ يعني أن المثلث ABC متقايس الأضلاع.

هـ- $\begin{cases} \arg(Z) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ |Z| = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ يعني أن المثلث ABC قائم في C ومتساوي الساقين والضلعان المتقايسان هما $[AC]$ و $[CB]$

و- $\begin{cases} \arg(Z) = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ |Z| = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ يعني أن المثلث ABC قائم في A ومتساوي الساقين والضلعان المتقايسان هما $[AC]$ و $[CB]$

مجموعة النقط:

مجموعة النقط: $Z = f(z)$ حيث $z = x + iy$

لتحديد مجموعة النقط من المستوي بحيث: Z عدد حقيقي أو تخيلي صرف، أو حقيقي سالب أو حقيقي موجب تتبع ما يلي:

نكتب Z على الشكل الجبري يكون ذلك بكتابة $z = x + iy$ (إذا كانت $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$ نضرب في مرافق $h(z)$)

مثال: $L = \frac{z - z_A}{z - z_B}$ تعيين مجموعة النقط حيث z لاحقة $M(x, y)$

1-أولا L حقيقي. معناه يجب أن تكون $\arg(L) = k\pi$

$(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}) = k\pi$ معناه مجموعة النقط L حقيقي هي المستقيم (AB) باستثناء النقطة B.

$L \epsilon \mathbb{R}_+^*$ حقيقي موجب.

$(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}) = 2k\pi$ معناه مجموعة النقط هي المستقيم (AB) باستثناء القطعة $[AB]$.

$L \epsilon \mathbb{R}_-^*$ حقيقي سالب.

$(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}) = k\pi = (2k+1)\pi$ معناه مجموعة النقط هي القطعة المستقيمة $]AB[$.

$\frac{AB}{2}$ **ونصف قطرها** $[AB]$ **باستثناء** B **2- ثانيا** L **تخيلي صرف، معناه مجموعة النقط في الدائرة قطرها**

L **تخيلي صرف موجب:** $(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{AM}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ معناه مجموعة النقط الجزء العلوي من الدائرة (بالاتجاه المباشر) باستثناء B.

L **تخيلي صرف سالب** $(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{AM}) = \frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi$ معناه مجموعة النقط الجزء السفلي من الدائرة (بالاتجاه غير مباشر) باستثناء B.

مناقشة عبارة من الشكل: $\|a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC}\| = \|d\overrightarrow{MA} + e\overrightarrow{MB}\|$

إذا كان $a+b+c \neq 0$ و $d+e \neq 0$ ندخل G على كلا الطرفين باستعمال علاقة شال حيث G مرجح الجملة المرفقة بالمعاملات a و b و c و G' مرجح A و B المرفقة بالمعاملات d ، e على الترتيب في العبارة $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC}$ والعبارة $d\overrightarrow{MA} + e\overrightarrow{MB}$:

$\|(a+b+c)\overrightarrow{MG}\| = \|(d+e)\overrightarrow{MG'}\|$ نجد: $\begin{cases}\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MG'} + \overrightarrow{G'A}\\ \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MG'} + \overrightarrow{G'B}\end{cases}$ و $\begin{cases}\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}\\ \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}\\ \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC}\end{cases}$ أي

عادة ما يكون: $(a+b+c) = (d+e)$ أي نجد $\|\overrightarrow{MG}\| = \|\overrightarrow{MG'}\|$

ومنه: مجموعة النقط هو محور القطعة $[GG']$.

إذا كان $a+b+c \neq 0$ و $d+e=0$ ندخل G في الطرف الأيمن و A أو B في الطرف الأيسر أي نكتب مثلا $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}$

نجد: $\|(a+b+c)\overrightarrow{MG}\| = \|(d+e)\overrightarrow{MA} + e\overrightarrow{AB}\|$ أي $\|(a+b+c)\overrightarrow{MG}\| = \|e\overrightarrow{AB}\|$ أي

$\overrightarrow{MG} = \left\|\frac{e}{a+b+c}\overrightarrow{AB}\right\|$

ومنه: مجموعة النقط هي الدائرة التي مركزها G ونصف قطرها $\left\|\frac{e}{a+b+c}\overrightarrow{AB}\right\|$.

مناقشة عبارة من الشكل $(a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC})(d\overrightarrow{MA} + e\overrightarrow{MB}) = 0$

نجد في حالة: $a+b+c \neq 0$ و $d+e \neq 0$

$\left((a+b+c)\overrightarrow{MG'}\right)\left((d+e)\overrightarrow{MG'}\right) = 0$ أي $(\overrightarrow{MG})(\overrightarrow{MG'}) = 0$ ومنه مجموعة النقط هي الدائرة التي قطرها $[G'G]$.

نجد في حالة: $a+b+c \neq 0$ و $d+e=0$

$\left((a+b+c)\overrightarrow{MG}\right)(e\overrightarrow{AB}) = 0$ أي $(\overrightarrow{MG})(\overrightarrow{AB}) = 0$ ومنه مجموعة النقط هي المستقيم الذي يشمل G وعمودي على (AB).

مناقشة عبارة من الشكل $a\overrightarrow{MA^2} + b\overrightarrow{MB^2} + c\overrightarrow{MC^2} = \lambda$

في حالة $a+b+c \neq 0$ بإدخال G والتبسيط نجد : $\overrightarrow{MG^2} = \frac{\lambda - GA^2 - GB^2 - GC^2}{a+b+c} = k$

$k < 0$ لاتوجد نقط ، الحلول هي مجموعة خالية

$k = 0$ مجموعة النقط هي G

$k > 0$ مجموعة النقط هي الدائرة التي مركزها G ونصف قطرها $\sqrt{k}$.

في حالة $a+b+c=0$ ويحقق $(\overrightarrow{MA})(b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC}) = \frac{\lambda - bAB^2 - cAC^2}{2} = k$ مجموعة النقط في هذه الحالة:

هي المستقيم الذي يشمل A ويحقق $(\overrightarrow{MA})(\overrightarrow{AH}) = \frac{\lambda - bAB^2 - cAC^2}{2}$ حيث H النقطة التي تحقق: $b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AH}$

التحويلات النقطية المبرمجة

التحويلات النقطية المبرمجة هي الانسحاب و الدوران و التحاكي والتشابه
نضع z لاحقة M و Z لاحقة M' و M' صورة M بالتحويل النقطي U من التحولات النقطية السابقة هي من الشكل $Z' = aZ + b$ ولدينا:

$Z' = az + b$			
$a = 1$	$a \in \mathbb{R}^* - \{1\}$	a من الشكل $x + iy$ $y \neq 0$ و $\lvert a \rvert = 1$	a من الشكل $x + iy$ $\lvert a \rvert \neq 1$ و $y \neq 0$
U هو **الانسحاب** الذي • شعاعه ذو اللاحقة b	U هو **التحاكي** الذي: • نسبته a • ومركزه النقطة الصامدة	U هو **الدوران** الذي • زاويته $\arg a$ • ومركزه النقطة الصامدة	U هو **التشابه** الذي • زاويته $\arg a$ • ونسبته $\lvert a \rvert$ • ومركزه النقطة الصامدة
مثال: $z' = z + 1 + i$ **انسحاب** • شعاعه ذو المركبات $(1\,,1)$	**مثال:** $z' = 2z + 1 + i$ **تحاكي** • نسبته 2 • مركزه النقطة التي لاحقتها z تحقق $z = 2z + 1 + i$ أي $z = -1 - i$ أي هي النقطة التي إحداثياها $(-1\,;-1)$.	**مثال:** $z' = iz + 1 + i$ **دوران** • زاويته $\frac{\pi}{2}$ • مركزه النقطة التي لاحقتها z تحقق $z = iz + 1 + i$ أي $z = \frac{1+i}{1-i}$ أي $z = i$ أي هي النقطة التي إحداثياتها $(0\,,1)$	**مثال:** $z' = (1 + i)z + 1 + i$ **تشابه** • زاويته $\frac{\pi}{4}$ • نسبته $\frac{\sqrt{2}}{2}$ • مركزه النقطة التي لاحقتها z تحقق $z = (1 + i)z + 1 + i$ أي $z = \frac{1+i}{-i}$ أي $z = i - 1$ أي هي النقطة التي إحداثياتها $(-1\,;1)$

تمرين شامل

2. المراجعة النهائية في الأعداد المركبة و التحويلات النقطية

تمرين شامل

1- بين أن المعادلة $z^3 - 8 = 0$ تقبل حلا حقيقيا ثم جد حلول المعادلة واكتبها على الشكل الأسي

2- حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2 - (4\cos\theta)z + 4$ مع θ وسيطا حقيقيا ثم اكتب الحلول على الشكل الأسي

3- ليكن العددان المركبان z_1 و z_2 حيث:

$z_1 = 1 + i\sqrt{3}$ و $z_2 = \overline{z_1}$

أ- بين أن: $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2020} + \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{1442} = -1$

4- ليكن العددان المركبان z_1 و z_2 حيث:

$z_1 = 1 + i\sqrt{3}$; $z_2 = 1 + i$

أ- عين قيم العدد الطبيعي n في كل حالة من الحالات التالية:

$\left(\frac{z_1}{2}\right)^n \in \mathbb{R}$ $\left(\frac{z_1}{2}\right)^n \in \mathbb{R}^+$ $\left(\frac{z_1}{2}\right)^n \in \mathbb{R}^-$;

$\left(\frac{z_2}{\sqrt{2}}\right)^n$ تخيلي صرف

$\left(\frac{\sqrt{2}z_1}{2z_2}\right)^n = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$; $\left(\frac{z_2}{z_1}\right)^{2n} = i$

5- أكتب $\frac{z_2}{z_1}$ على الشكل الجبري ثم الشكل الأسي واستنتج القيم المضبوطة لكل من:

$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

6- المستوي المركب منسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{u};\vec{v})$ و A B و C نقط لواحقها :

$z_C = 4 - 3i$ ، $z_B = 1 + i$ و $z_A = -3 - 2i$

7- أكتب على الشكل الأسي العدد $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$ ثم استنتج طبيعة المثلث ABC ثم عين لاحقة النقطة D حتى يكون الرباعي $ABCD$ مربعا

- عين لاحقة النقطة G مركز ثقل المثلث ABC

8- عين مجموعة النقط M من المستوي

$\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = G$

$\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\|$

$|z_A - z| = |z_B - z|$

$MA^2 - MB^2 = 0$

$|z - z_A| = 2$

$|z| = |z - z_A|$

$(z - z_B)(\overline{z - z_B}) = 9$

$z = z_A + 2e^{i\theta}$; $(\theta \in \mathbb{R}), z = e^{i\theta}$

$(k \in \mathbb{R}^+)\ z = z_A + ke^{\frac{i\pi}{2}}$

$z = z_B - e^{i\theta}$

$\arg(z - z_A) = \frac{\pi}{4}$

$\arg(\bar{z}) = \frac{-\pi}{4}$

$\arg(z^2) = \frac{\pi}{2}$

$\arg(z) = \arg(\bar{z})$

$\arg(z - z_B) = \arg(\overline{z - z_B})$

9- ليكن L عددا مركبا حيث:

$L = \frac{z_B - z}{z_A - z}$

مع M تختلف عن A و B (z لاحقة M)

عين مجموعة النقط في كل حالة:

$L \in \mathbb{R}^*$ $L \in \mathbb{R}_-^*$; $L \in \mathbb{R}_+^*$;

L تخيلي صرف ; $L \times \bar{L} = 1$; $\arg(L) = \pi$

$\arg(\bar{L}) = 2k\pi$; $\arg(L^2) = \pi$

$\arg(iL) = 2k\pi$; $\arg(i\bar{L}) = k\pi$

10- T تحويل نقطي حيث $T(M) = M$

عين طبيعة T في كل حالة :

$z' = z + 1 - i$; $z' = 2z + 1$

$z' = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$; $z' = 2e^{\frac{i\pi}{3}}z$

$z' - z_B = e^{\frac{i\pi}{3}}(z - z_B)$

$z' - z_A = 2(z - z_A)$

$z' - z_A = -2e^{\frac{i\pi}{6}}(z - z_A)$

$z' = (1 - i)z + 2$

ليكن S تشابه مباشر مركز O ونسبته $\frac{1}{2}$ وزاويته $\frac{2\pi}{3}$

-عين العبارة المركبة لـ S و عين $z_{A'}$ لاحقة A' حيث:

$S(A) = A'$

نص الإجابة

1- البرهان أن المعادلة $z^3 - 8 = 0$ تقبل حلا حقيقيا

ليكن α حلا حقيقيا للمعادلة معناه:

$$\alpha^3 - 8 = 0$$

$\alpha^3 = 8$ ومنه $\alpha = \sqrt[3]{8}$ أي $\alpha = 2$

ومنه المعادلة تقبل حلا حقيقيا قيمته 2

- إيجاد حلول المعادلة $z^3 - 8 = 0$

2 هو حل للمعادلة معناه:

$$z^3 - 8 = (z-2)(az^2 + bz + c)$$

$$z^3 - 8 = az^3 + bz^2 + cz - 2az^2 - bz - 2c$$

$$= az^3 + (b-2a)z^2 + (c-2b)z - 2c$$

ولدينا $z^3 - 8 = 0$

بالمطابقة نجد:

$$\begin{cases} a = 1 \\ -2c = -8 \Rightarrow c = 4 \\ b - 2a = 0 \Rightarrow b - 2 = 0 \Rightarrow b = 2 \end{cases}$$

ومنه:

$$z^3 - 8 = (z-2)(z^2 + 2z + 4)$$

ومنه:

$$(z-2)(z^2 + 2z + 4) = 0$$

أي: $z - 2 = 0$

ومنه:

$$z_0 = 2$$

و $z^2 + 2z + 4 = 0$ ومنه:

$$\Delta = 4 - 16 = -12 = i^2 12$$

$$\sqrt{\Delta} = 2i\sqrt{3}$$

ومنه:

$$\begin{cases} z_1 = \dfrac{-2 - 2i\sqrt{3}}{2} = -1 - i\sqrt{3} \\ z_2 = \dfrac{-2 + 2i\sqrt{3}}{2} = -1 + i\sqrt{3} \end{cases}$$

وبالتالي:

$$S = \{2\ ,-1 - i\sqrt{3}\ ,-1 + i\sqrt{3}\}$$

كتابة حلول المعادلة على الشكل الأسي

الشكل الأسي لعدد مركب هو $z = e^{i\theta}$

حيث i طويلة z و θ عمدته:

$$S = \{2, 1 - i\sqrt{3}, -1 + i\sqrt{3}\}$$

$$z_0 = 2 = 2e^{2i\pi}$$

$$|z_1| = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$$

$$\arg(z_1) = \theta_1$$

$$\begin{cases} \cos\theta_1 = -\dfrac{1}{2} \\ \sin\theta_1 = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

θ_1 تقع في الربع الثالث ومنه

$$\theta_1 = \frac{\pi}{3} + \pi = \frac{4\pi}{3}$$

$$z_1 = 2e^{\frac{i4\pi}{3}}$$

$$|z_2| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$$

$$\arg(z_2) = \theta_2$$

$$\begin{cases} \cos\theta_2 = \dfrac{-1}{2} \\ \sin\theta_2 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

θ_2 تقع في الربع الثاني ومنه

$$\theta_2 = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

$$z_2 = 2e^{\frac{i2\pi}{3}}$$

2- حل في C المعادلة $z^2 - (4\cos\theta)z + 4$

$$\Delta = (-4\cos\theta) - 4(4)$$

$$\Delta = 16\cos^2\theta - 16$$

$$\Delta = 16(\cos^2\theta - 1)$$

لدينا $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

$$\cos^2\theta - 1 = -\sin^2\theta$$

أي $\Delta = 16(-\sin^2\theta)$

$$\Delta = 16i^2\sin^2\theta$$

$$\sqrt{\Delta} = 4i\sin\theta$$

$$z_1 = \frac{4\cos\theta + 4i\sin\theta}{2}$$

$$z_1 = 2\cos\theta + 2i\sin\theta$$

$$z_2 = 2\cos\theta - 2i\sin\theta$$

$$S = \{2\cos\theta + 2i\sin\theta\ ;\ 2\cos\theta - 2i\sin\theta\}$$

الكتابة على الشكل الأسي الحلول

$$z_1 = 2\cos\theta + 2i\sin\theta$$

$$z_1 = 2(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$z_1 = 2e^{i\theta}$$

$$z_2 = \overline{z_1} = 2e^{-i\theta}$$

$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2020}+\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{1442}=-1$ 3- البرهان أن

$|z_1|=2 \quad ;\arg(z_1)=\frac{\pi}{3}+2k\pi \quad ;k\in\mathbb{Z}$

$z_1=2e^{i\frac{\pi}{3}} \quad ; \quad z_2=\overline{z_1}=2e^{-i\frac{\pi}{3}}$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{2e^{-i\frac{\pi}{3}}}=2e^{i\frac{\pi}{3}}\times 2e^{i\frac{\pi}{3}}=e^{2i\frac{\pi}{3}}$$

$$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2020}=\left(e^{2i\frac{\pi}{3}}\right)^{2020}=e^{i\frac{4040\pi}{3}}$$

$$=e^{i(1346\times 3+2)\frac{\pi}{3}}=e^{i\left(1346\pi+\frac{2\pi}{3}\right)}$$

$$=\cos\left(1346\pi+\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(1346\pi+\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2020}=\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2020}=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{1442}=\left(e^{2i\frac{\pi}{3}}\right)^{1442}=e^{i\frac{2884\pi}{3}}$$

$$=e^{i(961\times 3+1)\frac{\pi}{3}}=e^{i\left(961\pi+\frac{\pi}{3}\right)}$$

$$=\cos\left(960\pi+\pi+\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(960\pi+\pi+\frac{\pi}{3}\right)$$

$$=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{1442}=-\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}$$

ومنه:

$$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2020}+\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{1442}=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}$$

$$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2020}+\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{1442}=-1$$

4- تعيين قيم العدد الطبيعي n في كل حالة:

1) $\left(\frac{z_1}{2}\right)^n$ حقيقي

$$\left(\frac{z_1}{2}\right)^n=\left(\frac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{2}\right)^n=e^{i\frac{n\times\pi}{3}}$$

أي: $k\in\mathbb{N}$ ومنه $\frac{n\pi}{3}=k\pi$

$n=3k \quad k\in\mathbb{N}$

2) $\left(\frac{z_1}{2}\right)^n$ حقيقي موجب

$$\left(\frac{z_1}{2}\right)^n=e^{i\frac{n\times\pi}{3}}$$

أي: $k\in\mathbb{N}$ ومنه $\frac{n\pi}{3}=2k\pi$

$n=6k \quad k\in\mathbb{N}$

3) $\left(\frac{z_1}{2}\right)^n$ حقيقي سالب

$$\frac{n\pi}{3}=\pi+2k\pi$$

أي: $k\in\mathbb{N}$

$n=6k+3 \quad k\in\mathbb{N}$

4) $\left(\frac{z_2}{\sqrt{2}}\right)^n$ تخيلي صرف

معناه:

$$\left(\frac{z_2}{\sqrt{2}}\right)^n=\left(\frac{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}\right)^n=e^{i\frac{n\pi}{4}}$$

أي:

$$\frac{n\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+k\pi$$

$$n=4k+2 \quad k\in\mathbb{N}$$

5) $\left(\frac{\sqrt{2}z_1}{2z_2}\right)^n=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$

لدينا

$$z_1=2e^{i\frac{\pi}{3}} \quad ; \quad z_2=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$\frac{1}{2}i+\frac{\sqrt{3}}{2}=1e^{i\frac{\pi}{6}}$$

ومنه

$$\left(\frac{\sqrt{2}z_1}{2z_2}\right)^n=\left(\frac{2\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{3}}}{2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}\right)^n$$

$$=e^{i\frac{\pi}{6}}$$

$$\left(e^{i\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)}\right)^n=e^{i\frac{\pi}{6}}$$

$$e^{i\frac{n\pi}{12}}=e^{i\frac{\pi}{6}}$$

$$\frac{n\pi}{12}=\frac{\pi}{6}+2k\pi$$

$$n=24k+2$$

$k\in\mathbb{N}$ مع

6) $\left(\frac{z_2}{\sqrt{2}}\right)^{2n}=i$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^{2n}=e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$e^{2ni\frac{\pi}{4}}=e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$e^{ni\frac{\pi}{2}}=e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$\frac{n\pi}{2}=\frac{\pi}{2}+2k\pi$$

$$\frac{n}{2}=\frac{1}{2}+2k$$
$$n=1+4k$$

مع $k\in\mathbb{N}$

5-كتابة $\left(\frac{z_2}{z_1}\right)$ على الشكل الجبري

$$\frac{z_2}{z_1}=\frac{1+i}{1+i\sqrt{3}}=\frac{(1+i)(1-i\sqrt{3})}{(1+i\sqrt{3})(1-i\sqrt{3})}$$
$$\frac{z_2}{z_1}=\frac{1-i\sqrt{3}+i+\sqrt{3}}{4}$$
$$\frac{z_2}{z_1}=\frac{1+\sqrt{3}}{4}+\frac{1-\sqrt{3}}{4}i$$

-على الشكل الأسي

$$\frac{z_2}{z_1}=\frac{\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}}{2e^{\frac{i\pi}{3}}}=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right)}$$
$$\frac{z_2}{z_1}=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{12}\right)}$$

-استنتاج القيم المضبوطة لكل من $cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ و $sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$

$$\frac{z_2}{z_1}=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{12}\right)}$$
$$\frac{z_2}{z_1}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{\pi}{12}-\frac{i\sqrt{2}}{2}\sin\frac{\pi}{12}$$

نطابق بين الشكل المثلثي والجبري فنجد

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{\pi}{12}-\frac{i\sqrt{2}}{2}\sin\frac{\pi}{12}=\frac{1+\sqrt{3}}{4}+\frac{1-\sqrt{3}}{4}i$$

ومنه

$$\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\frac{1+\sqrt{3}}{4}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{1+\sqrt{3}}{4}\times\frac{2}{\sqrt{2}}$$
$$cos\frac{\pi}{12}=\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{\pi}{12}=\frac{1-\sqrt{3}}{4}$$
$$\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\frac{1-\sqrt{3}}{4}}{\frac{-\sqrt{2}}{2}}=\frac{-1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$

6- كتابة على الشكل الأسي العدد $\frac{z_A-z_B}{z_C-z_B}$

$$\frac{z_A-z_B}{z_C-z_B}=\frac{-3-2i-1-i}{4-3i-1-i}=\frac{-4-3i}{3-4i}$$

$$\frac{z_A-z_B}{z_C-z_B}=\frac{(-4-3i)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)}$$
$$\frac{z_A-z_B}{z_C-z_B}=\frac{-12-16i-9i+12}{25}$$
$$\frac{z_A-z_B}{z_C-z_B}=-i=e^{\frac{i\pi}{2}}$$

استنتاج طبيعة المثلث ABC

لدينا $\frac{z_A-z_B}{z_C-z_B}=e^{\frac{i\pi}{2}}$

ومنه:

$$\begin{cases}BA=BC\\(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA})=\frac{-\pi}{2}\end{cases}$$

ومنه المثلث ABC قائم في B ومتساوي الساقين

-تعيين z_D لاحقة D حتى يكون الرباعي $ABCD$ مربعا

المربع هو متوازي اضلاع فيه ضلعان متجاوران متقايسان ومتعامدان ومنه $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$

$$z_B-z_A=z_C-z_D$$
$$z_D=z_C-z_B+z_A$$
$$z_D=4-3i-1-i-3-2i$$
$$z_D=-6i$$

تعيين z_G لاحقة G مركز ثقل المثلث ABC

G مركز ثقل المثلث ABC أي هي مرجح الجملة المثقلة $\{(A,1),(B,1),(C,1)\}$ ومنه:

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=0$$
$$z_G=\frac{z_A+z_B+z_C}{3}$$
$$z_G=\frac{-3-2i+1+i+4-3i}{3}$$
$$z_G=\frac{2}{3}-\frac{4}{3}i$$

8-تعيين مجموعة النقط M

$$\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=6.....(*)$$

G مرجح الجملة $\{(A,1)(B,1)(c,1)\}$

ومنه :

$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$$
$$\left\|3\overrightarrow{MG}\right\|=6\ ,\ MG=2$$

مجموعة النقط هي دائرة مركزها G ونصف قطرها $r=2$.

$$\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right\|=\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|...(*)$$
$$\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{BA}$$
$$MG=\frac{BA}{3}\ \cdot\ \ 3MG=BA$$

مجموعة النقط هي دائرة مركزها G ونصف قطرها $r = \frac{BA}{2}$

$$MA^2 - MB^2 = 0$$
$$\sqrt{MA^2} = \sqrt{MB^2} \Rightarrow MA = MB$$

مجموعة النقط هي محور القطعة المستقيمة $[AB]$

$$|z_A - z| = |z_B - z|$$
$$MA = MB$$

مجموعة النقط هي محور القطعة المستقيمة $[AB]$

$$|z| = |z - z_A|$$
$$|z - z_0| = \left|\overline{z - z_A}\right|$$
$$|z - z_0| = |z - \overline{z_A}|$$
$$\overline{z_n} = \overline{-3 - 2i} = -3 + 2i = z_A$$

ومنه $OM = A'M$

مجموعة النقط هي محور القطعة المستقيمة $[OA']$

$$|z - z_A| = 2$$
$$AM = 2$$

مجموعة النقط هي دائرة مركزها A ونصف قطرها $r = 2$.

$$(z - z_B)(\overline{z - z_B}) = 9$$

نعلم أن $z \times \overline{z} = |z|^2$

ومنه

$$(z - z_B)(\overline{z - z_B}) = (z - z_B)^2 = 9$$

أي $BM^2 = 9$

ومنه $BM = 3$

مجموعة النقط هي دائرة مركزها B ونصف قطرها $r = 3$.

$$z = z_A + 2e^{i\theta}$$
$$z - z_A = 2e^{i\theta}$$

$$\begin{cases} AM = 2 \\ \left(\vec{u}; \overrightarrow{AM}\right) = \theta + 2K\pi \end{cases}$$

مجموعة النقط هي دائرة مركزها A ونصف قطرها $r = 2$.

$$z = e^{i\theta}$$

$$\begin{cases} OM = 1 \\ \left(\vec{u}; \overrightarrow{OM}\right) = \theta + 2K\pi \end{cases}$$

مجموعة النقط هي دائرة مركزها المبدأ O ونصف قطرها $r = 1$.

$$\overline{z} = 2e^{i\theta}$$

أي $z = 2e^{-i\theta}$

$$\begin{cases} OM = 2 \\ \left(\vec{u}; \overrightarrow{OM}\right) = -\theta + 2K\pi \end{cases}$$

مجموعة النقط هي دائرة مركزها المبدأ O ونصف قطرها $r = 2$.

$$z = z_B - e^{i\theta}$$
$$z - z_B = -e^{i\theta}$$

لدينا الشكل الأسي لـ -1 هو $e^{i\pi}$

ومنه $z - z_B = e^{i(\pi+\theta)}$

$$\begin{cases} BM = 1 \\ \left(\vec{u}; \overrightarrow{BM}\right) = \pi + \theta + 2K\pi \end{cases}$$

مجموعة النقط هي دائرة مركزها B ونصف قطرها $r = 1$.

$$z = z_A + ke^{\frac{i\pi}{2}}$$
$$z - z_A = ke^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$\begin{cases} AM = k \\ \left(\vec{u}; \overrightarrow{AM}\right) = \frac{\pi}{2} + 2K\pi \end{cases}$$

ومنه مجموعة النقط هي نصف المستقيم $[AM)$ ويميل بزاوية $\frac{\pi}{2}$.

$$\arg(z - z_A) = \frac{\pi}{4}$$

معناه:

$$\left(\vec{u}; \overrightarrow{AM}\right) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$$
$$k \in \mathbb{Z}$$

مجموعة النقط هي نصف المستقيم $[AM)$ الذي A وباستثناء A ويميل بزاوية $\frac{\pi}{4} + 2k\pi$.

$$\arg(\overline{z}) = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$$
$$\arg(\overline{z}) = -\arg(z)$$
$$-\arg(z) = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$$
$$\arg(z) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$$
$$(k \in \mathbb{Z})$$
$$\left(\vec{u}; \overrightarrow{AM}\right) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

مجموعة النقط هي نصف المستقيم $[OM)$ ويميل بزاوية $\frac{\pi}{4} + 2k\pi$.

$$\arg(z^2) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$
$$\frac{2\arg(z)}{2} = \frac{\pi}{2 \times 2} + \frac{2k\pi}{2}$$
$$\arg(z) = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

$$\left(\vec{u};\overrightarrow{OM}\right)=\frac{\pi}{4}+k\pi$$

مجموعة النقط هي المستقيم $(OM)-\{O\}$ ويميل بزاوية $\left(\frac{\pi}{4}+k\pi\right)$ حيث $k\in Z$

$$\arg(z)=\arg(\overline{z})+2k\pi$$
$$\arg(z)=-\arg(z)+2k\pi$$
$$2\arg(z)=2k\pi$$
$$\arg(z)=k\pi$$
$$\left(\vec{u};\overrightarrow{OM}\right)=k\pi$$

مجموعة النقط هي المستقيم $(OM)-\{O\}$ ويميل بزاوية $(K\pi)$ "أي محور الفواصل باستثناء النقطة O".

9-تعيين مجموعة النقط في كل حالة $L\in\mathbb{R}$

أي $\arg(L)=k\pi$

$$\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right)=k\pi \quad k\in\mathbb{Z}$$

أي النقط M ، A ، B في استقامية

مجموعة النقط هي المستقيم (AB) ماعد A B

$$(AB)-[A,B]$$
$$L\in\mathbb{R}_+^*$$

معناه $\arg(L)=2k\pi$

$$\left(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}\right)=2k\pi$$

مجموعة النقط هي المستقيم $(AB)-\{A,B\}$

$$L\in\mathbb{R}_-^*$$
$$\arg(L)=\pi+2k\pi$$
$$\left(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}\right)=\pi+2k\pi$$

مجموعة النقط هي القطعة المستقيمة $]AB[$ L تخيلي صرف

$$\arg(L)=\frac{\pi}{2}+k\pi$$
$$\left(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}\right)=\frac{\pi}{2}+k\pi$$

مجموعة النقط هي دائرة التي قطرها $[AB]$ باستثناء A ، B أي $]AB[$

$$aL\times\overline{L}=1$$

نعلم أن $L\times\overline{L}=|L|^2$

ومنه نجد :

$$|L|^2=1$$
$$|L|=1$$
$$\left|\frac{z_B-z}{z_A-z}\right|=1$$
$$|z_B-z|=|z_A-z|$$
$$MB=MA$$

مجموعة النقط هي محور القطعة المستقيمة $[AB]$

$$\arg(L)=\pi+2k\pi$$
$$k\in Z$$
$$\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right)=\pi+2K\pi$$

مجموعة النقط هي القطعة المستقيمة $]AB[$

$$\arg\left(\overline{L}\right)=2k\pi$$
$$-\arg(L)=2k\pi$$
$$\arg(L)=-2k\pi$$
$$\arg(L)=2k\pi$$

مجموعة النقط هي المستقيم $(AB)-[AB]$

$$\arg(L^2)=\pi+2k\pi$$
$$2\arg(L)=\pi+2k\pi$$
$$\arg(L)=\frac{\pi}{2}+k\pi$$
$$\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right)=\frac{\pi}{2}+k\pi$$

مجموعة النقط هي دائرة التي قطرها $[AB]$ ماعدا A ، B.

$$\arg(iL)=2k\pi$$
$$\arg(i)+\arg(L)=2k\pi$$
$$\frac{\pi}{2}+\arg(L)=2k\pi$$
$$\arg(L)=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$$
$$\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right)=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$$

مجموعة النقط هي القوسين AB في الاتجاه المباشر (الموجه) "نصف دائرة "

$$\arg\left(i\overline{L}\right)=k\pi$$
$$\arg(i)+\arg\left(\overline{L}\right)=K\pi$$
$$\frac{\pi}{2}-\arg(L)=K\pi$$
$$\arg(L)=\frac{\pi}{2}-k\pi$$
$$\left(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}\right)=\frac{\pi}{2}+k\pi$$

مجموعة النقط هي الدائرة التي قطرها $[AB]$ باستثناء A ، B.

10-أ-تعيين طبيعة T في كل حالة

يجب حساب a

$z' = az + b$

* $a = 1$ ، $b \neq 0$ (T) انسحاب (L) لاحقة شعاع $z_{\vec{u}} = b$
* $a \in \mathbb{R} - \{1\}$ (T) تحاكي نسبته $k = a$ مركزه w لاحقته $z_w = \frac{b}{1-a}$
* a عدد مركب غير حقيقي $|a| = 1$ (T) دوران زاويته $\theta = \arg(a)$ ولاحقة مركزه $z_w = \frac{b}{1-a}$
* a عدد مركب غير حقيقي $|a| \neq 1$ (T) تشابه نسبته $k = |a|$ زاوية $\theta = \arg(a)$، ولاحقة مركزه $z_w = \frac{b}{1-a}$.

$z' = z + 1 - i$

انسحاب لاحقة شعاعة

$z_{\vec{u}} = 1 - i$

$z' = 2z + 1$

$2 \in \mathbb{R}^* - \{1\}$

تحاكي نسبته $k = 2$

ولاحقة مركزه $z_w = \frac{1}{1-2} = -\frac{1}{2}$

$z' = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$

$\left|\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = 1$

دوران زاويته

$\theta = \arg\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$

ومركزه

$z_w = \frac{0}{1-q} = 0 = z_O$

$z' = (1-i)z + 2$

$q \in \mathbb{C}$ $|1-i| = \sqrt{2}$

التحويل (T) هو تشابه مباشر نسبته $k = \sqrt{2}$ زاويته $\theta = -\frac{\pi}{4}$.

مركزه w $z_w = \frac{2}{1-(1-i)}$

$z' = 2e^{i\frac{\pi}{3}}z$

التحويل (T) تشابه مباشر نسبته $k = 2$ ، ومركزه المبدأ O.

$z' - z_A = 2(z - z_A)$

تحاكي نسبته 2 ومركزه A.

$z' - z_B = e^{i\frac{\pi}{3}}(z - z_B)$

دوران زاويته $\frac{\pi}{3}$ ومركزه B.

قاعدة $z' - z_w = ke^{i\theta}(z - z_w)$

$k > 0$

$z' - z_1 = -2e^{i\frac{\pi}{6}}(z - z_A)$

$z' - z_A = 2e^{i\pi} \times e^{i\frac{\pi}{6}}(z - z_A)$

لأن $-2 = 2e^{i\pi}$

ومنه $z' - z_A = 2e^{i\frac{7\pi}{6}}(z - z_A)$

تشابه مباشر نسبته $k = 2$ وزاويته $\theta = \frac{7\pi}{6}$

ومركزه A

10-ب-العبارة المركبة للتحويل S

نستعمل العبارة المختصرة

$z' - z_0 = ke^{i\theta}(z - z_0)$

$z' = \frac{1}{2}e^{i\frac{2\pi}{3}}z$

$z' = \frac{1}{2}\left[\cos\left(2\frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(2\frac{\pi}{3}\right)\right]z$

$z' = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$

$z' = \left(-1 + i\sqrt{3}\right)z$

تعيين z'_A لدينا

$z_A = -3 - 2i$

و $z'_A = \left(-1 + i\sqrt{3}\right)z_A$

$z'_A = \left(-1 + i\sqrt{3}\right)(-3 - 2i)$

$z'_A = 3 + 2i - 3i\sqrt{3} + 2\sqrt{3}$

$z'_A = 3 + 2\sqrt{3} + i(2 - 3\sqrt{3})$

3. علوم تجريبية 2019 الموضوع 01

I- حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية: $(z-i)(z^2-4z+5)=0$

II- نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$ النقط A ، B و C لاحقاتها i ، $2-i$ و $2+i$ على الترتيب.

1- أكتب العدد المركب $\frac{z_C-z_A}{z_C-z_B}$ على الشكل الأسي، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC.

2- من أجل كل عدد مركب z يختلف عن $2+i$ نضع: $f(z)=\frac{iz-1-2i}{2z-4-2i}$

أ- عين المجموعة (E) للنقط M من المستوي ذات اللاحقة z التي تحقق: $|f(z)|=\frac{1}{2}$.

ب- بيّن أن العدد $[f(i)]^{1440}$ حقيقي موجب.

3- نعتبر الدوران r الذي مركزه C وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

أ- عين لاحقة D صورة B بالدوران r وبيّن أنّ النقط A ، D و C في استقامية.

ب- استنتج أنّ D هي صورة النقطة A بتحويل نقطي بسيط يطلب تحديد طبيعته وعناصره.

نص الإجابة

1- حل المعادلة:

$$(z-i)(z^2-4z+5)=0$$
$$z-i=0 \Rightarrow z_0=i$$
أو
$$z^2-4z+5=0$$
$$\Delta=-4=4i^2$$
$$\sqrt{\Delta}=2i$$
$$z_1=\frac{4-2i}{2}=2-i$$
$$z_2=\frac{4+2i}{2}=2+i$$
ومنه $S=\{z_0,z_1,z_2\}$

II)1- كتابة العدد المركب $\frac{z_C-z_A}{z_C-z_B}$ على الشكل الأسي

$$\frac{z_C-z_A}{z_C-z_B}=\frac{2+i-i}{2+i-2+i}=\frac{2}{2i}\frac{(-i)}{(-i)}=-i$$
$$\frac{z_C-z_A}{z_C-z_B}=e^{-i\frac{\pi}{2}}$$
$$\arg(-i)=-\frac{\pi}{2}+2k\pi \quad k\epsilon\mathbb{Z}$$

استنتاج طبيعة المثلث ABC

لدينا: $\left|\frac{z_C-z_A}{z_C-z_B}\right|=|-i|=1$

$$|z_C-z_A|=|zc-z_B|$$
معناه: $AC=BC$ ..... (1)
$$\arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_C-z_B}\right)=(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{AC})$$
$$=-\frac{\pi}{2}+2k\pi \quad (2)$$

من (1) و (2) نستنتج أن المثلث ABC مثلث متساوي الساقين وقائم في C.

2- أ- تعيين المجموعة (E) للنقط M من المستوي ذات اللاحقة z التي تحقق: $|f(z)|=\frac{1}{2}$ ،

لدينا: $|f(z)|=\left|\frac{iz-1-2i}{2z-4-2i}\right|=\frac{1}{2}$

$$\left|\frac{i\left(z-\frac{1}{i}z\right)}{2\left(z-\frac{4}{2}-i\right)}\right|=\frac{|i||z-(z-i)|}{|2||z-(2+i)|}=\frac{|z-z_B|}{2|z-z_C|}=\frac{1}{2}$$
$$2|z-z_B|=2|z-z_C|$$
معناه: $|z-z_B|=|z-z_C|$
$$BM=CM$$
مجموعة النقط (E) هي محور القطعة المستقيمة $[BC]$.

ب- تبيين أن العدد $[f(i)]^{1440}$ حقيقي موجب

$$f(z)=\left(\frac{iz-1-2i}{2z-4-2i}\right)^{1440}=\left[\frac{-1-1-2i}{2i-4-2i}\right]^{1440}$$
$$=\left[\frac{(-2-2i)}{-4}\right]^{1440}$$
$$\left[\frac{1}{2}(1+i)\right]^{1440}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^{1440}$$
$$=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{1440}e^{i1440\frac{\pi}{4}}$$
$$=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{1440}e^{i360\pi}$$
$$=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{1440}(cos\,360\pi+i\,sin\,360\pi)$$
$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{1440}(1+0)=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{1440}$$
ومنه: $[f(i)]^{1440}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{1440}\epsilon\,\mathbb{R}_+$

وهو المطلوب.

3-أ- تعيين لاحقة D صورة B بالدوران r

r دوران مركزه C وزاويته $\frac{\pi}{2}$ معناه:

$$z_D-z_C=e^{i\frac{\pi}{2}}(z_B-z_C)$$
$$z_D=i(z_B-z_C)+z_C$$
$$=i(2-i-2-i)+2+i$$
$$z_D=2+2+i$$

$z_D = A + i$

إثبات أن النقط D و A و C في استقامية.

$$\frac{z_A - z_C}{z_D - z_C} = -1$$

$$z_A - z_C = -(z_D - z_C)$$

$$\overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{CD}$$

ومنه النقط D ، A و C في استقامية.

3-ب- استنتاج أن D هي صورة النقطة A

لدينا: $\frac{z_A - z_C}{z_D - z_C} = -1$

أي: $z_A - z_C = -(z_D - z_C)$

$z_D - z_C = -(z_A - z_C)$

ومنه يوجد تحاكي نسبته $k = -1$ ومركزه النقطة C.

ويمكن أن نجد:

$z_D - z_C = -(z_A - z_C)$

$-1 = 1e^{i\pi}$

$z_D - z_C = e^{i\pi}(z_A - z_C)$

يوجد دوران r يحول A إلى D مركزه C وزاويته $\theta = \pi$.

ويمكن أن نجد: $-1 = 1e^{i\pi}$

$z_D - z_C = e^{i\pi}(z_A - z_C)$

يوجد تشابه مباشر S يحول A إلى D ومركزه C ونسبته $k = 1$ وزاويته $\theta = \pi$

4. علوم تجريبية 2019 الموضوع 02

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

نعتبر النقط A ، B و C التي لاحقاتها z_A ، z_B و z_C على الترتيب حيث:

$z_A = \sqrt{2} + i\sqrt{6}$ ، $z_B = \overline{z_A}$ و $z_C = -2z_A$

1-أ- اكتب العدد المركب z_A على الشكل الأسي.

1-ب- أحسب العدد $\left(\frac{z_A}{2\sqrt{2}}\right)^{2019} + \left(\frac{z_B}{2\sqrt{2}}\right)^{2019}$

2-أ- T الانسحاب الذي يحول A إلى C، عيّن z_D لاحقة النقطة D صورة B بالانسحاب T.

ب- استنتج طبيعة الرباعي $ABCD$.

3-اكتب العدد المركب $z_C - z_A$ على الشكل الأسي.

4-جد قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها العدد المركب $\left(\frac{-6\sqrt{2}}{z_C - z_A}\right)^n$ عددا حقيقيا.

5-لتكن M نقطة كيفية من المستوي لاحقتها z تختلف عن A وتختلف عن C.

عيّن (E) مجموعة النقط M التي من أجلها يكون $\frac{z_A - z}{z_C - z}$ عددا حقيقيا موجبا تماما.

نص الإجابة

1-أ- كتابة z_A على الشكل الأسي:

$z_A = \sqrt{2} + i\sqrt{6}$

$|z_A| = |\sqrt{2} + i\sqrt{6}| = 2\sqrt{2}$

$\arg(z_A) = \theta_A$

$$\begin{cases} \cos\theta_A = \frac{1}{2} \\ \sin\theta_A = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta_A = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

$z_A = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{3}}$

1-ب- حساب العدد $\left(\frac{z_A}{2\sqrt{2}}\right)^{2019} + \left(\frac{z_B}{2\sqrt{2}}\right)^{2019}$

لدينا:

$$\left(\frac{z_A}{2\sqrt{2}}\right)^{2019} + \left(\frac{z_B}{2\sqrt{2}}\right)^{2019} = \left(\frac{2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{3}}}{2\sqrt{2}}\right)^{2019} + \left(\frac{2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{3}}}{2\sqrt{2}}\right)^{2019}$$

$$e^{i2019\frac{\pi}{3}} + e^{-i2019\frac{\pi}{3}} = e^{i673\pi} + e^{-i673\pi}$$

$$= \cos(673\pi) + i\sin(673\pi) + \cos(-673\pi) + i\sin(-673\pi)$$

$$= \cos(672\pi + \pi) + i\sin(672\pi + \pi) + \cos(-672\pi - \pi) + i\sin(-672\pi - \pi)$$

$$= 2\cos(\pi) = -2$$

2-أ- تعيين z_D لاحقة النقطة D صورة B بالانسحاب T

لدينا:

$z_C = z_A + b$

$z_D = z_B + b$

$z_D - z_C = z_B - z_A$

$z_D = z_B - z_A + z_C$

$z_D = -2\sqrt{2} - 4i\sqrt{6}$

2-ب- استنتاج طبيعة الرباعي $ABDC$.

لدينا: $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$ يعني أن $z_D - z_C = z_B - z_A$

ومنه الرباعي $ABDC$ متوازي.

3-كتابة العدد المركب $z_C - z_A$ على الشكل الأسي:

$z_C - z_A = -2z_A - z_A = -3z_A$

$= -3\left[2\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{3}}\right]$

$-3 = 3\,e^{i\pi}$

$z_C - z_A = 3\,e^{i\pi}2\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{3}} = 6\sqrt{2}\,e^{i\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right)}$

$z_C - z_A = 6\sqrt{2}e^{i\frac{4\pi}{3}}$

4- إيجاد قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها العدد المركب $\left(-\frac{6\sqrt{2}}{z_C-z_A}\right)^n$ عدد حقيقيا

$$\left(-\frac{6\sqrt{2}}{z_C-z_A}\right)^n=\left(-\frac{6\sqrt{2}}{6\sqrt{2}\,e^{i\frac{4\pi}{3}}}\right)^n$$
$$\left(-\frac{1}{e^{i\frac{4\pi}{3}}}\right)^n=\left(-e^{-i\frac{4\pi}{3}}\right)^n$$
$$=\left(e^{i\pi}.e^{-i\,n\frac{4\pi}{3}}\right)^n$$
$$\left(e^{i\left(\frac{3\pi}{3}-\frac{4\pi}{3}\right)}\right)^n=\left(e^{-i\left(\frac{\pi}{3}\right)}\right)^n$$
$$e^{-in\frac{\pi}{3}}$$
$$=\cos\left(-n\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-n\frac{\pi}{3}\right)$$

القول أن : $\left(-\frac{6\sqrt{2}}{z_C-z_A}\right)^n\in\mathbb{R}$

معناه: $\sin\left(-n\frac{\pi}{3}\right)=0$

$$-\sin\left(n\frac{\pi}{3}\right)=0$$
$$\sin\left(n\frac{\pi}{3}\right)=0$$

أي: $\frac{n\pi}{3}=k\pi$ ومنه: $n=3k\quad k\in\mathbb{N}$

5- تعيين (E) مجموعة النقط M التي من أجلها يكون $\frac{z_A-z}{z_C-z}$ عددا حقيقيا موجبا تماما.

$\frac{z_A-z_M}{z_C-z_M}\in\mathbb{R}_+^*$ معناه: $(\overrightarrow{MC},\overrightarrow{MA})=2k\pi$

MC مرتبط خطيا مع MA وفي نفس الإتجاه.

مجموعة النقط M هي المستقيم (CA) باستثناء القطعة المستقيمة $[CA]$: $(E)=(CA)-[CA]$

5. علوم تجريبية 2018 الموضوع 01

1- حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة التالية ذات المجهول z: $z^2-\sqrt{3}z+1=0$

2-المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$

A، B و C ثلاث نقط من المستوي لواحقها على الترتيب: z_A، z_B، z_C حيث:

$z_A=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$، $z_B=\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}$، $z_C=\overline{z_B}$ (يرمز $\overline{z_B}$ لمرافق z_B)

اكتب z_A و z_B على الشكل الأسي ثم عين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون: $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$

3-أتحقق أن: $\frac{z_B}{z_C}=e^{i\frac{\pi}{3}}$ وحدد طبيعة المثلث OBC

3-ب-استنتج أن: B هي صورة C بدوران r يطلب تعيين عناصره المميزة

4-نسمي (γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z التي تحقق: $|Z|=\left|z-\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right|$

عين طبيعة المجموعة (γ) ثم عين صورتها بالدوران r

نص الإجابة

1-حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2-\sqrt{3}\,z+1=0$:

بما أنها معادلة من الدرجة الثانية نستخدم المميز لحلها

$\Delta=\left(-\sqrt{3}\right)^2-4(1)(1)=3-4=-1=i^2$

$\sqrt{\Delta}=i$

$$z_1=\frac{\sqrt{3}-i}{2(1)}=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$$
$$z_2=\frac{\sqrt{3}+i}{2(1)}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$$

ومنه $S=\left\{\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\,;\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right\}$

2-كتابة z_A و z_B على الشكل الأسي:

كتابة z_A على الشكل الأسي

حساب $|z_A|$

$$|z_A|=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=1$$

حساب θ_A

$$\arg(z_A)=\theta_A:\begin{cases}cos\theta_A=\frac{\frac{1}{2}}{1}=\frac{1}{2}\\ sin\theta_A=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1}=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$$

أي

$$\theta_A=\frac{\pi}{3}+2k\pi$$

ومنه الشكل الأسي للعدد المركب z_A هو

$$\boxed{z_A=e^{i\frac{\pi}{3}}}$$

كتابة z_B على الشكل الأسي

حساب $|z_B|$

$$|z_B|=\sqrt{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}}=1$$

حساب θ_B

$$\arg(z_B)=\theta_B:\begin{cases}\cos\theta_B=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1}=\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\theta_B=\frac{\frac{1}{2}}{1}=\frac{1}{2}\end{cases}$$

أي: $\theta_B=\frac{\pi}{6}+2k\pi$

ومنه الشكل الأسي للعدد المركب z_B هو $\boxed{z_B=e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)}}$

تعيين قيم العدد الطبيعي n حيث يكون:

$$\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$$

لدينا

$$\frac{z_A}{z_B}=\frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{e^{i\frac{\pi}{6}}}=e^{i\frac{\pi}{3}}\cdot e^{-i\frac{\pi}{6}}=e^{i\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)}=e^{i\frac{\pi}{6}}$$

ومنه

$$\frac{z_A}{z_B}=e^{i\frac{\pi}{6}}$$

يكافئ

$$\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n=\left(e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^n$$

بتطبيق دستور موافر نجد

$$\left(e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^n=e^{in\frac{\pi}{6}}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=e^{i\frac{\pi}{3}}$$

إذن

$$e^{in\frac{\pi}{6}}=e^{i\frac{\pi}{3}}$$

ومنه

$$n\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}+2k\pi \qquad :k\in N$$

$$n\frac{1}{6}=\frac{1}{3}+2k$$

نضرب الأطراف في 6 نجد

$$n=2+12k \qquad :k\in N$$

ومنه قيم n الطبيعية هي

$$\boxed{n=2+12k}$$

3-أ – التحقق أن $\frac{z_B}{z_C}=e^{i\left(\frac{\pi}{3}\right)}$:

لدينا

$$\frac{z_B}{z_C}=\frac{e^{i\frac{\pi}{6}}}{e^{-i\frac{\pi}{6}}}=e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)}\cdot e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)}=e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}\right)}=e^{i\left(\frac{\pi}{3}\right)}$$

ومنه $\frac{z_B}{z_C}=e^{i\left(\frac{\pi}{3}\right)}$

تحديد طبيعة المثلث OBC

لدينا $\frac{z_B}{z_C}=e^{i\left(\frac{\pi}{3}\right)}$

معناه $\frac{z_B-z_O}{z_C-z_O}=e^{i\left(\frac{\pi}{3}\right)}$

أي $\frac{OB}{OC}=1$

أي $OB=OC\cdots(1)$

وأيضا $(\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OB})=\frac{\pi}{3}+2k\pi\cdots(2)$

من (1) و (2) نجد أن المثلث OBC متقايس الأضلاع

3-ب – استنتاج أن B هي صورة C بدوران r :

لدينا مما سبق أن

$$\frac{z_B}{z_C}=e^{i\left(\frac{\pi}{3}\right)}$$

أي

$$\frac{z_B-z_O}{z_C-z_O}=e^{i\left(\frac{\pi}{3}\right)}$$

بضرب الوسطين في الطرفين نجد

$$z_B-z_O=e^{i\left(\frac{\pi}{3}\right)}(z_C-z_O)$$

وبما أن

$$e^{i\left(\frac{\pi}{3}\right)}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

و $\left|\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right|=1$

وأيضا $e^{i\left(\frac{\pi}{3}\right)}$ ينتمي إلى الأعداد المركبة مع طويلة تساوي 1

ومنه يوجد دوران r يحول C على B مركزه المبدأ O وزاويته $\theta=\frac{\pi}{3}$

4-تعيين طبيعة المجموعة (γ) :

لدينا $|z|=\left|\bar{z}-\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right|$

نضع المرافق للطرفين نجد

$$\overline{|z|}=\overline{\left|\bar{z}-\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right|}$$

$$\overline{|z|}=\left|\overline{\bar{z}}-\overline{\frac{\sqrt{3}+i}{2}}\right|$$

ونعلم أن $\overline{\bar{z}}=z$ و $\overline{|z|}=|z|$ ومنه

$$|z| = \left|z - \overline{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)}\right|$$

ولكن $\overline{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)}$ هي نفسها $\overline{z_B}$ ومنه

$$|z| = |z - \overline{z_B}|$$

ونعلم أيضا أن $\overline{z_B} = z_C$ أي

$$|z| = |z - z_C|$$

هذا يكافئ

$$|z - z_O| = |z - z_C|$$

أي $\boxed{OM = CM}$

ومجموعة النقط التي تحقق لنا هذا هي محور القطعة المستقيمة $[OC]$

تعيين صورة (γ) بالدوران r :

بما أن B صورة C بالدوران r

وأن O صورة O بالدوران r لأنها مركز التحويل (أي O نقطة صامدة)

فإن القطعة المستقيمة $[OB]$ هي صورة $[OC]$

ومنه (γ') هي صورة (γ) بالدوران r ، أي (γ') محور القطعة المستقيمة $[OB]$

6. علوم تجريبية 2018 الموضوع 02

I- حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة:

$$(\bar{z} - 4 + i)(z^2 - 4z + 5) = 0$$

(يرمز $\bar{z}$ لمرافق z)

II-في المستوي المركب منسوب الى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ نعتبر النقط A، B و C التي لاحقاتها على الترتيب

$z_C = \overline{z_A}$ ، $z_B = 4 + i$ ، $z_A = 2 + i$

II-1- تحقق أنّ $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = i$ ثم عيّن قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون العدد $\left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right)^n$ تخيليا صرفا.

II-2- D نقطة من المستوي لاحقتها z_D حيث:

$$\begin{cases} |z_D - z_A| = |z_B - z_A| \\ \text{Arg}\left(\frac{z_D - z_A}{z_B - z_A}\right) = \frac{\pi}{3} + 2K\pi (K \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

بين أن المثلث ABD متقايس الأضلاع واحسب z_D

II-3-احسب z_G لاحقة النقطة G مركز ثقل المثلث ABD ثم عين نسبة وزاوية التشابه المباشر الذي مركزه A ويحول G الى D

II-4- عيّن (T) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z (M تختلف عن C) بحيث:

$$\text{Arg}\left(\frac{z_G - z}{z_C - z}\right) = \pi + 2K\pi (K \in \mathbb{Z})$$

نص الإجابة

I-حل في C المعادلة

$$(\bar{z} - 4 + i)(z^2 - 4z + 5) = 0$$

لدينا

$$(\bar{z} - 4 + i)(z^2 - 4z + 5) = 0$$

معناه

$$\begin{cases} \bar{z} - 4 + i = 0 \\ \text{أو} \\ z^2 - 4z + 5 = 0 \end{cases}$$

إذن

$$\bar{z} - 4 + i = 0$$

$$\bar{z} = \overline{4 - i}$$

ومنه

$$z_0 = 4 + i$$

و

$$z^2 - 4z + 5 = 0$$

$$\Delta = (-4)^2 - 4(1)(5) = -4 = 4i^2$$

$$z_1 = \frac{4 + 2i}{2} = 2 + i$$

$$z_2 = \frac{4 - 2i}{2} = 2 - i$$

ومنه $\boxed{S = \{4 + i, 2 + i, 2 - i\}}$

II-1-التحقق أن $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = i$

$$\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \frac{4 + i - 2 - i}{+2 - i - 2 - i} = \frac{2}{-2i}$$

نضرب في المرافق نجد

$$\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \frac{2(i)}{(-2i)(i)} = i$$

ومنه

$$\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = i$$

تعيين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون العدد $\left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right)^n$ تخيليا صرفا :

$$\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = i = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

ومنه

$$\left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right)^n = \left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^n$$

بتطبيق دستور موافر نجد

$$\left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^n = e^{in\frac{\pi}{2}} = \cos n\frac{\pi}{2} + i \sin n\frac{\pi}{2}$$

الأعداد المركبة من الألف إلى الياء

يكون العدد $\left(\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\right)^n$ تخيليا صرفا إذا كان

$$\begin{cases}\cos n\frac{\pi}{2}=0\\ \sin n\frac{\pi}{2}\neq 0\end{cases}$$

معناه: $n\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}+k\pi$ مع $k\in N$

$$n\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+k$$

بضرب الأطراف في 2 نجد: $\boxed{n=1+2k}$

II-2- البرهان أن المثلث ABD متقايس الأضلاع:

لدينا

$$|z_D-z_A|=|z_B-z_A|$$

معناه

$$AD=AB\cdots(1)$$

ولدينا

$$\arg\left(\frac{z_D-z_A}{z_B-z_A}\right)=\frac{\pi}{3}+2k\pi$$

معناه

$$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})=\frac{\pi}{3}+2k\pi\cdots(2)$$

إذن من (1) و (2) نجد أن المثلث ABC متقايس الأضلاع

- حساب z_D:

لدينا

$$\begin{cases}|z_D-z_A|=|z_B-z_A|\\ \text{و}\\ \arg\left(\frac{z_D-z_A}{z_B-z_A}\right)=\frac{\pi}{3}+2k\pi\end{cases}$$

معناه $\frac{|z_D-z_A|}{|z_B-z_A|}=1$

أي $\left|\frac{z_D-z_A}{z_B-z_A}\right|=1$

مع

$$\arg\left(\frac{z_D-z_A}{z_B-z_A}\right)=\frac{\pi}{3}+2k\pi$$

ومنه

$$\frac{z_D-z_A}{z_B-z_A}=e^{i\frac{\pi}{3}}=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

بعد ضرب الوسطين في الطرفين نجد

$$z_D=\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(z_B-z_A)+z_A$$

بعد التعويض نجد

$$z_D=\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(4+i-2-i)+2+i$$

$$z_D=\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(2)+2+i$$

ومنه $\boxed{z_D=3+i(1+\sqrt{3})}$

II-3-حساب z_G مركز ثقل المثلث ABD :

النقطة G مركز ثقل المثلث ABD معناه G مرجح الجملة المثقلة $\{(A,1),(B,1),(D,1)\}$

$$z_G=\frac{z_A+z_B+z_D}{3}$$

بالتعويض نجد

$$z_G=\frac{2+i+4+i+3+i(1+\sqrt{3})}{3}$$

$$z_G=\frac{2+i+4+i+3+i(1+\sqrt{3})}{3}$$

$$=\frac{9}{3}+i\left(\frac{3+\sqrt{3}}{3}\right)$$

ومنه $\boxed{z_G=3+i\left(1+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)}$

تعيين نسبة وزاوية التشابه المباشر:

لدينا $z_D-z_A=a(z_G-z_A)$

أي $\frac{z_D-z_A}{z_G-z_A}=a$

بالتعويض نجد

$$\frac{z_D-z_A}{z_G-z_A}=\frac{3+i(1+\sqrt{3})-2-i}{3+i\left(1+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)-2-i}$$

$$\frac{z_D-z_A}{z_G-z_A}=\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i\frac{\sqrt{3}}{3}}=\frac{3+i3\sqrt{3}}{3+i\sqrt{3}}$$

نستعمل المرافق نجد

$$\frac{z_D-z_A}{z_G-z_A}=\frac{(3+i3\sqrt{3})(3-i\sqrt{3})}{(3+i\sqrt{3})(3-i\sqrt{3})}$$

$$=\frac{9-i3\sqrt{3}+9i\sqrt{3}+9}{12}$$

$$=\frac{18}{12}+\frac{6i\sqrt{3}}{12}$$

ومنه $\frac{z_D-z_A}{z_G-z_A}=\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$

حساب نسبة التشابه المباشر

$$\left|\frac{z_D-z_A}{z_G-z_A}\right|=\left|\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right|=\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{3}{4}}=\sqrt{3}$$

نسبة التشابه المباشر هي: $\boxed{k=\sqrt{3}}$

حساب زاوية التشابه المباشر

$\arg\left(\frac{z_D-z_A}{z_G-z_A}\right)=\arg\left(\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\theta$:

$$\begin{cases}\cos\theta=\frac{\frac{3}{2}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\theta=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3}}=\frac{1}{2}\end{cases}$$

ومنه زاوية التشابه المباشر هي

$$\boxed{\theta=\frac{\pi}{6}+2k\pi} \quad ;k\in Z$$

II-4-تعيين طبيعة مجموعة النقط (T) حيث $\arg\left(\frac{z_G-z_A}{z_C-z_A}\right)=\pi+2k\pi$:

معناه $(\overrightarrow{MC},\overrightarrow{MG})=\pi+2k\pi$

أي النقط C ، G و M في استقامة واحدة، إذن

مجموعة النقط M من المستوي هي القطعة المستقيمة المفتوحة $[CG]$ باستثناء النقطتين C و G

7. علوم تجريبية 2017 الإستثنائية الموضوع 01

I-حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة التالية ذات المجهول z:

$$(z-2)(z^2+2z+4)=0$$

II-المستوي المركب منسوب الى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ حيث: $\|\vec{u}\|=2cm$

لتكن النقط A، B و C والتي لاحقتها:

$z_A=2$ ، $z_B=-1+i\sqrt{3}$ و $z_C=\overline{z_B}$

($\overline{z_B}$ هو مرافق z_B)

II-1-أ- اكتب العدد z_B على الشكل الأسي ثم استنتج الشكل الأسي للعدد المركب z_C

II-1-ب- عين مركز ونصف قطر الدائرة المحيطة بالمثلث ABC ، ثم أنشئ النقط A، B و C

II-2- ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه النقطة O ونسبته $\frac{1}{2}$ وزاويته $\frac{2\pi}{3}$

II-2-أ-اكتب العبارة المركبة للتشابه S ثم عين لاحقة كل من A'، B' و C' صور النقط A، B و C على الترتيب بالتشابه S ثم أنشئ في المعلم السابق النقط A'، B' و C'

II-2-ب-احسب بالسنتمتر المربع مساحة المثلث $A'B'C'$

نص الإجابة

I-حل في C المعادلة $(z-2)(z^2+2z+4)=0$

لدينا $(z-2)(z^2+2z+4)=0$

معناه $\begin{cases}z-2=0\\ \text{أو}\\ z^2+2z+4=0\end{cases}$

إذن $z-2=0$

$z=2$

ومنه $z_0=2$

أو $z^2+2z+4=0$

$\Delta=(2)^2-4(1)(4)=-12=\left(i\,2\sqrt{3}\right)^2$

$z_1=\frac{-2-i\,2\sqrt{3}}{2}=-1-i\sqrt{3}$

$z_2=\frac{-2+i\,2\sqrt{3}}{2}=-1+i\sqrt{3}$

ومنه $\boxed{S=\left[2,-1-i\sqrt{3},-1+i\sqrt{3}\right]}$

II-1- أ - كتابة z_B على الشكل الأسي:

حساب $|z_B|$

$|z_B|=\sqrt{1+3}=2$

حساب θ_B

$\arg(z_B)=\theta_B$: $\begin{cases}cos\theta_B=\frac{-1}{2}\\ sin\theta_B=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$

أي $\theta_B=\frac{2\pi}{3}+2k\pi$

ومنه الشكل الأسي للعدد المركب z_B هو

$$\boxed{z_B=2e^{i\frac{2\pi}{3}}}$$

استنتاج الشكل الأسي للعدد z_C

$$\boxed{z_C=\overline{z_B}=2e^{-i\frac{2\pi}{3}}}$$

II-1-ب – تعيين مركز ونصف قطر الدائرة المحيطة بالمثلث ABC :

لدينا $|z_A|=2$ و $|z_B|=2$ و $|z_C|=2$

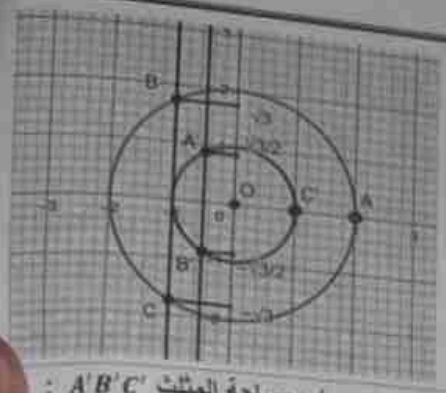
أي $OA=OB=OC=2$

فإن النقط A ، B و C تنتمي إلى نفس الدائرة التي مركزها المبدأ O ونصف قطرها $r=2$

شرح كيفية انشاء النقط A ، B و C :

لإنشاء هذه النقط نستعين بالدائرة التي مركزها O نصف قطرها $r=2$ ،

والمستقيم ذي المعادلة $x=-1$



II-2-ب – حساب مساحة المثلث $A'B'C'$:

أولا نحسب مساحة المثلث ABC

نقوم بحساب أطوال أضلاع المثلث ABC

$$AB = |z_B - z_A| = |-1 + i\sqrt{3} - 2|$$
$$= |-3 + i\sqrt{3}| = \boxed{2\sqrt{3}}$$
$$AC = |z_C - z_A| = |-1 - i\sqrt{3} - 2|$$
$$= |-3 - i\sqrt{3}| = \boxed{2\sqrt{3}}$$
$$BC = |z_C - z_B| = |-1 - i\sqrt{3} + 1 - i\sqrt{3}|$$
$$= |-2i\sqrt{3}| = \boxed{2\sqrt{3}}$$

ومنه المثلث ABC متقايس الأضلاع

لتكن h المسقط العمودي للنقطة B على (AC)

ان المثلث ABC متقايس الأضلاع فالنقطة h هي منتصف القطعة $[AC]$

نقوم بحساب z_h

$$z_h = \frac{z_A + z_C}{2} = \frac{2 - 1 - i\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

ومنه $\boxed{z_h = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}}$

نقوم بحساب Bh

$$Bh = |z_h - z_B| = \left|\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} + 1 - i\sqrt{3}\right|$$
$$= \left|\frac{3}{2} - 3i\frac{\sqrt{3}}{2}\right|$$
$$Bh = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{27}{4}} = \sqrt{9} = 3$$

ومنه $\boxed{Bh = 3}$

حساب مساحة ABC

$$S_{ABC} = \frac{AC \cdot BH}{2} = \frac{2\sqrt{3} \cdot 3}{2} \cdot (2)(2)$$

$: \|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 2cm$

الأعداد المركبة من الألف إلى الياء

II-2-أ – كتابة العبارة المركبة للتشابه المباشر S :

$$z' - z_\Omega = \frac{1}{2}e^{i\frac{2\pi}{3}}(z - z_\Omega) \quad ; z_\Omega = 0$$

ومنه

$$z' = \frac{1}{2}e^{i\frac{2\pi}{3}}z$$

هذا يكافئ

$$z' = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)z$$

ومنه $\boxed{z' = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z}$

تعيين $z_{A'}$ ، $z_{B'}$ و $z_{C'}$:

تعيين $z_{A'}$

$$z_{A'} = \frac{1}{2}e^{i\frac{2\pi}{3}}z_A$$

بالتعويض نجد

$$z_{A'} = \frac{1}{2}e^{i\frac{2\pi}{3}}(2)$$
$$z_{A'} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

هذا يكافئ

$$z_{A'} = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$$

ومنه $\boxed{z_{A'} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}}$

تعيين $z_{B'}$

$$z_{B'} = \frac{1}{2}e^{i\frac{2\pi}{3}}z_B$$

بالتعويض نجد $z_{B'} = \frac{1}{2}e^{i\frac{2\pi}{3}}\left(2e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)$

$$z_{B'} = e^{i\frac{2\pi}{3}} \cdot e^{i\frac{2\pi}{3}} = e^{i\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}\right)} = e^{i\left(\frac{4\pi}{3}\right)}$$

هذا يكافئ $z_{B'} = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}$

ومنه $\boxed{z_{B'} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}}$

تعيين $z_{C'}$

$$z_{C'} = \frac{1}{2}e^{i\frac{2\pi}{3}}z_C$$

بالتعويض نجد $z_{C'} = \frac{1}{2}e^{i\frac{2\pi}{3}}\left(2e^{i\left(-\frac{2\pi}{3}\right)}\right)$

$$z_{C'} = e^{i\frac{2\pi}{3}} \cdot e^{i\left(-\frac{2\pi}{3}\right)} = e^{i\left(\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{2\pi}{3}\right)\right)} = e^0 = 1$$

ومنه $\boxed{z_{C'} = 1}$

شرح كيفية انشاء النقط A' ، B' و C' :

لإنشاء هذه النقط نستعين بالدائرة التي مركزها O نصف قطرها $r' = 1$ ، والمستقيم ذو المعادلة $x = -\frac{1}{2}$

$\boxed{S_{ABC} = 12\sqrt{3}\ cm^2}$

حساب مساحة $A'B'C'$

بما أن المثلث $A'B'C'$ صورة المثلث ABC بالتشابه المباشر الذي نسبته $k = \frac{1}{2}$ فإن القاعدة تقول

$S_{A'B'C'} = S_{ABC} \cdot k^2$

أي $S_{A'B'C'} = 12\sqrt{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2$

ومنه $\boxed{S_{A'B'C'} = 3\sqrt{3}\ cm^2}$

8. علوم تجريبية 2017 الإستثنائية الموضوع 02

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$

نعتبر النقط A، B و C التي لاحقاتها على الترتيب $z_A = -3 - 2i$ ، $z_B = 1 + i$ و $z_C = 4 - 3i$

1-عيّن النسبة وزاوية التشابه المباشر S ذي المركز A والذي يحول النقطة B الى C

2- اكتب على الشكل الأسي العدد المركب $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$ ، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC

3-نرمز بـ G الى مركز ثقل المثلث ABC وبـ I الى منتصف القطعة $[AC]$

عين كلا من z_G و z_I لاحقتي النقطتين G و I ، ثم بيّن أن النقط B، G و I في استقامية

4- نعتبر النقطة D نظيرة B بالنسبة إلى I، حدد بدقة طبيعة الرباعي $ABCD$

5-نعتبر (T) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق: $\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}\| = 5\sqrt{2}$

5-أ-تحقق أن النقطة C تنتمي الى (T)

5-ب-عيّن طبيعة المجموعة (T) ثم أنشئها

نص الإجابة

1-تعيين نسبة وزاوية التشابه المباشر S :

العبارة المختصرة للتشابه S المباشر الذي مركزه A و يحول B إلى C هي:

$$z_C - z_A = a(z_B - z_A)$$

ومنه بالتعويض نجد

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{4 - 3i + 3 + 2i}{1 + i + 3 + 2i} = \frac{7 - i}{4 + 3i}$$

نضرب في المرافق

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{(7 - i)(4 - 3i)}{(4 + 3i)(4 - 3i)}$$

$$= \frac{28 - 21i - 4i - 3}{16 + 9}$$

ومنه $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = 1 - i$

تعيين k نسبة التشابه المباشر

$$k = |a| = |1 - i| = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$$

ومنه $\boxed{k = \sqrt{2}}$

تعيين θ زاوية التشابه المباشر

$\theta = arg(a) = arg(1 - i)$:

$$\begin{cases} cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ sin\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

ومنه $\boxed{\theta = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi}$

2-كتابة $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$ على الشكل الأسي:

بالتعويض نجد

$$\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} = \frac{-3 - 2i - 1 - i}{4 - 3i - 1 - i} = \frac{-4 - 3i}{3 - 4i}$$

نضرب في المرافق نجد

$$\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} = \frac{(-4 - 3i)(3 + 4i)}{(3 - 4i)(3 + 4i)}$$

$$= \frac{-12 - 16i - 9i + 12}{9 + 16}$$

ومنه $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} = -i$

حساب $|-i|$

$$|-i| = \sqrt{1} = 1$$

حساب θ_{-i}

$\arg(-i) = \theta_{-i}$:

$$\begin{cases} cos\theta_{-i} = \frac{0}{1} = 0 \\ sin\theta_{-i} = \frac{-1}{1} = -1 \end{cases}$$

أي $\theta_{-i} = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$

ومنه الشكل الأسي للعدد المركب z_{-i} هو:

$$\boxed{z_{-i} = e^{-i\frac{\pi}{2}}}$$

استنتاج طبيعة المثلث ABC:

لدينا $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} = e^{-i\frac{\pi}{2}}$

معناه $\left|\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}\right| = 1$

أي $|z_A - z_B| = |z_C - z_B|$

أي $BA = BC \cdots (1)$

ولدينا (2) $\arg\left(\frac{z_A-z_B}{z_C-z_B}\right) = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \cdots$

من (1) و (2) نستنتج أن المثلث ABC متساوي الساقين وقائم في النقطة B.

3-تعيين z_G :

بما أن z_G مركز المثلث ABC فإنها مرجح الجملة المثقلة $[(A,1),(B,1),(C,1)]$

أي $z_G = \frac{z_A+z_B+z_C}{3}$

بالتعويض نجد $z_G = \frac{-3-2i+1+i+4-3i}{3}$

ومنه $\boxed{z_G = \frac{2}{3} - \frac{4}{3}i}$

تعيين z_I :

$$z_I = \frac{z_A + z_C}{2} = \frac{-3-2i+4-3i}{2}$$

ومنه $\boxed{z_I = \frac{1}{2} - \frac{5}{2}i}$

البرهان أن B ، G و I في استقامية:

يكفي أن نبرهن أن

$$\frac{z_B - z_I}{z_G - z_I} = k \qquad : k \in R^* - \{1\}$$

بالتعويض نجد

$$\frac{z_B - z_I}{z_G - z_I} = \frac{1+i-\frac{1}{2}+\frac{5}{2}i}{\frac{2}{3}-\frac{4}{3}i-\frac{1}{2}+\frac{5}{2}i} = \frac{\frac{1+7i}{2}}{\frac{1+7i}{6}} = 3$$

إذن $\boxed{\frac{z_B-z_I}{z_G-z_I} = 3}$

ومنه النقط B ، G و I في استقامية

4-تحديد طبيعة الرباعي ABCD:

النقطة D نظيرة B بالنسبة إلى I معناه أن النقطة I هي منتصف القطعة $[BD]$، وأيضا I هي منتصف القطعة $[AC]$،

فإن قطري الرباعي $ABCD$ متناصفان أي أنه متوازي أضلاع، لكن المثلث ABC متساوي الساقين وقائم في B $ABCD$ هو مربع.

5-أ – التحقق أن $C \in (\Gamma)$:

لدينا $\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}\| = 5\sqrt{2}$

نقوم بتعويض النقطة C في مكان M نجد

$$\|\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CC}\| = \|\overrightarrow{CA} + \vec{0}\| = \|\overrightarrow{CA}\|$$

ومنه

$$= |z_A - z_C|$$

$$\|\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CC}\| = |-3-2i-4+3i|$$
$$= |-7+i|$$
$$= \sqrt{(-7)^2+(1)^2} = \sqrt{50}$$
$$= 5\sqrt{2}$$

ومنه $\|\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CC}\| = 5\sqrt{2}$ ومنه النقطة $C \in (\Gamma)$

5-ب – تعيين طبيعة المجموعة (Γ):

بما أن I هي منتصف $[AC]$ معناه I مرجح الجملة $\{(A,1),(C,1)\}$ ومعناه

$$\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IC} = \vec{0} \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

نقوم بإدخال I بقاعدة شال نجد

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC}$$

باستخدام العلاقة (1) أعلاه نجد

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{MI} + \vec{0} = 2\overrightarrow{MI}$$

نعوض العلاقة $2\overrightarrow{MI}$ في العلاقة $\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}\|$ نجد

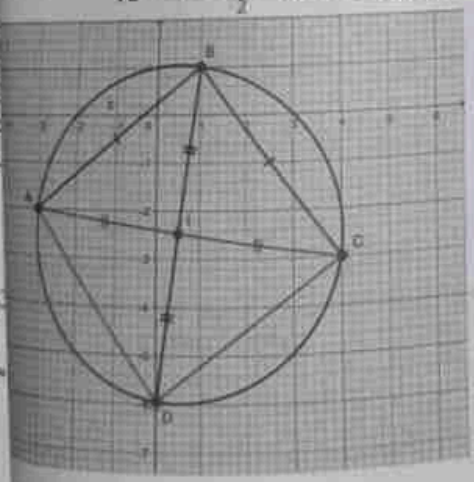
$$\|2\overrightarrow{MI}\| = 5\sqrt{2}$$
$$2MI = 5\sqrt{2}$$

ومنه $\boxed{MI = \frac{5\sqrt{2}}{2}}$

ومنه طبيعة المجموعة (Γ) هي دائرة (C) مركزها النقطة I ونصف قطرها $r = \frac{5\sqrt{2}}{2}$

انشاء المجموعة (Γ) :

بما أن $C \in (\Gamma)$ فإن $IC = r = \frac{5\sqrt{2}}{2}$



9. علوم تجريبية 2017 العادية
الموضوع 01

I-حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة:
$(z+2)(z^2-4z+8)=0$

II- المستوي المركب منسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، نعتبر النقط A، B و C التي لواحقها على الترتيب:
$z_A=2-2i$ ، $z_B=\overline{z_A}$ و $z_C=-2$

II-1-اكتب كلا من z_A و z_B على الشكل الأسي

II-2-عين z_D لاحقة النقطة D حتى تكون النقطة B مركز ثقل المثلث ACD

II-3-(T) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z
(M تختلف عن A و B) حيث $\text{Arg}\left(\frac{z_B-z}{z_A-z}\right)=\frac{\pi}{2}$

تحقق أن مبدأ المعلم O هو نقطة من (T) ثم عين طبيعة المجموعة (T) وأنشئها.

II-4-ليكن h التحاكي الذي مركزه النقطة C ونسبته 2 ، (T') هو صورة (T) بالتحاكي h
عين طبيعة المجموعة (T') مع تحديد عناصرها المميزة

نص الإجابة

I-حل في C المعادلة $(z+2)(z^2-4z+8)=0$:

لدينا $(z+2)(z^2-4z+8)=0$
معناه

$$\begin{cases} z+2=0 \\ \text{او} \\ z^2-4z+8=0 \end{cases}$$

إذن $z+2=0$
$z=-2$
ومنه $z_0=-2$

$z^2-4z+8=0$
$\Delta=(-4)^2-4(1)(8)=-16=(4i)^2$
$z_1=\frac{4+4i}{2}=2+2i$
$z_2=\frac{4-4i}{2}=2-2i$
ومنه $\boxed{S=\{-2\,,2+2i\,,2-2i\}}$

II-1-كتابة z_A و z_B على الشكل الأسي:

كتابة z_A على الشكل الأسي

حساب $|z_A|$

$|z_A|=\sqrt{4+4}=2\sqrt{2}$

حساب θ_A

$\arg(z_A)=\theta_A$: $\begin{cases} cos\theta_A=\frac{2}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2} \\ sin\theta_A=\frac{-2}{2\sqrt{2}}=\frac{-1}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

أي

$\theta_A=-\frac{\pi}{4}+2k\pi$

ومنه الشكل الأسي للعدد المركب z_A هو

$\boxed{z_A=2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}$

كتابة z_B على الشكل الأسي

$\boxed{z_B=\overline{z_A}=2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}$

II-2-تعيين z_D لاحقة النقطة D :

النقطة B مركز ثقل المثلث ACD يعني B مرجح الجملة المثقلة $\{(A,1),(C,1),(D,1)\}$

$z_B=\frac{z_A+z_C+z_D}{3}$

ومنه $z_D=3z_B-z_A-z_C$

بالتعويض نجد $z_D=6+6i-2+2i+2$

ومنه $\boxed{z_D=6+8i}$

II-3- التحقق أن $O\in(\Gamma)$:

للتحقق نقوم بتعويض z_O في مكان z في العلاقة كالتالي

$\arg\left(\frac{z_B-z_O}{z_A-z_O}\right)=\arg\left(\frac{2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}-0}{2\sqrt{2}e^{i-\frac{\pi}{4}}-0}\right)$

$=\arg\left(\frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{e^{i-\frac{\pi}{4}}}\right)$

$\arg\left(\frac{z_B-z_O}{z_A-z_O}\right)=\arg\left(e^{i\frac{\pi}{4}}\cdot e^{i\frac{\pi}{4}}\right)$

$=\arg\left(e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)}\right)$

ومنه $\arg\left(\frac{z_B-z_O}{z_A-z_O}\right)=\arg\left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)=\frac{\pi}{2}$

ومنه النقطة $O\in(\Gamma)$

تعيين طبيعة المجموعة (Γ) :

التفسير الهندسي $\arg\left(\frac{z_B-z}{z_A-z}\right)=\frac{\pi}{2}$

10. علوم تجريبية 2017 العادية
الموضوع 02

المستوي المركب منسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$

أجب بصحيح او خطأ مع التعليل في كل حالة مما يلي:

1-مجموعة حلول المعادلة $\left(\frac{z+1-i}{z-i}\right)^2=1$ في المجموعة $\mathbb{C}$ هي $S=\left\{-\frac{1}{2}+i\right\}$

2-من أجل كل عدد مركب z ، $(z+2)\times(\bar{z}+2)=|z+2|^2$

3-من أجل كل عدد طبيعي n ، $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{3n}=1$

4-S التشابه المباشر الذي مركزه النقطة Ω ذات اللاحقة 1 ونسبته3 وزاويته $\frac{\pi}{2}$

صور الدائرة (C) ذات المركز $\omega(0;1)$ ونصف القطر 3 بالتشابه S هي الدائرة (C') ذات المركز $\omega'(-2;-3)$ نصف القطر 9

5- من أجل كل عدد حقيقي α: إذا كان $Z=(\sin\alpha+i\cos\alpha)\times(\cos\alpha-i\sin\alpha)$

فإن: $\arg(Z)=\frac{\pi}{2}-2\alpha+2K\pi$ ، حيث K عدد صحيح

نص الإجابة

1-الجواب الأول

لدينا $\left(\frac{z+1-i}{z-i}\right)^2=1$

معناه

$$\begin{cases}\dfrac{z+1-i}{z-i}=1\\ \text{أو}\\ \dfrac{z+1-i}{z-i}=-1\end{cases}$$

لدينا $\frac{z+1-i}{z-i}=1$

نضرب الوسطين في الطرفين نجد

$z+1-i=z-i$

أي $0\neq 1$ وهذا مستحيل

ولدينا $\frac{z+1-i}{z-i}=-1$

نضرب الوسطين في الطرفين نجد

$z+1-i=-z+i$

$2z=-1+2i$

الأعداد المركبة من الألف إلى الياء

يكافئ $k\in Z$ ؛ $(\vec{MA},\vec{MB})=\frac{\pi}{2}+2k\pi$

مجموعة النقط هي نصف دائرة تشمل النقطة O وقطرها $[AB]$ باستثناء النقطتين A و B

II-4- تعيين طبيعة (Γ') :

لدينا h تحاكي مركزه C ونسبته $k=2$

$z'-z_C=2(z-z_C)$

ومنه $z'=2z-2z_C+z_C$

$z'=2z-z_C$

نعوض z_C نجد $z'=2z+4-2$

ومنه العبارة المركبة للتحاكي h هي

$z'=2z+2$

إذن (Γ') هي نصف دائرة قطرها $[A'B']$ باستثناء A' و B' حيث هما صورتا A و B بالتحاكي h

أي $z_{A'}=2z_A+2=2(2-2i)+2$

ومنه $z_{A'}=6-4i$

و $z_{B'}=2z_B+2=2(2+2i)+2$

ومنه $z_{B'}=6+4i$

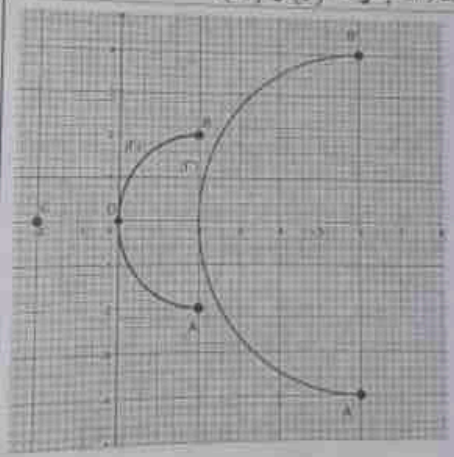
ومركز (Γ') هو صورة مركز (Γ) بالتحاكي

$z_{W'}=2(2)+2=6$

ونصف قطر (Γ') هو

$r'=kr=2(2)=4$

انشاء المجموعة (Γ) و (Γ'):



أي $z = -\frac{1}{2} + i$ ومنه حلول المعادلة هي

$$S = \left\{-\frac{1}{2} + i\right\}$$

ومنه الحالة (1) صحيحة

2-الجواب الثاني

لدينا

من خواص مرافق العدد المركب $\overline{z} + k = \overline{z + k}$

حيث k عدد حقيقي ومنه

$$(z+2)(\overline{z}+2) = (z+2)\overline{(z+2)}$$

ومن خواص مرافق العدد المركب $z \cdot \overline{z} = |z|^2$ ومنه

$$(z+2)\overline{(z+2)} = |z+2|^2$$

ومنه $(z+2)(\overline{z}+2) = |z+2|^2$

ومنه الحالة (2) صحيحة

3-الجواب الثالث

لدينا

$$\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = 1 \quad ,$$

$$\arg\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

$$\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{3n} = \left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^{3n} = \left(\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^{3}\right)^{n}$$

$$= \left(e^{i3\frac{\pi}{3}}\right)^{n} = \left(e^{i\pi}\right)^{n}$$

أي

$$\left(e^{i\pi}\right)^{n} = (\cos\pi + i\sin\pi)^{n} = (-1)^{n} \neq 1$$

لأنه في حالة n عدد فردي فإن

$(-1)^n = -1 \neq 1$

ومنه الحالة (3) خاطئة

4-الجواب الرابع

لدينا $z' - z_\Omega = 3e^{i\frac{\pi}{2}}(z - z_\Omega)$

بالتعويض نجد

$$z' - 1 = 3\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)(z-1)$$

$$z' - 1 = 3(0+i)(z-1)$$

بكافئ

$$z' = 3iz - 3i + 1$$

ومنه

$$z' = 3iz + 1 - 3i$$

وهذه هي العبارة المركبة للتشابه المباشر S

ولدينا

$$(C):\ z_\omega = i \ ,\ r = 3$$

$$(C'):\ z_{\omega'} = -2 - 3i \ ,\ r' = 9$$

صورة ω مركز (C) بالتشابه المباشر S هي ω' مركز (C') ولكتب

$$3iz_\omega + 1 - 3i = 3i(i) + 1 - 3i = -2 - 3i = z_{\omega'}$$

ونصف قطر (C') يحقق

$$r' = kr = 3(3) = 9$$

ومنه الحالة (4) صحيحة

5-الجواب الخامس

لدينا $Z = (\sin\alpha + i\cos\alpha)(\cos\alpha - i\sin\alpha)$

بما أن $(-i^2) = 1$ ومنه

$$\sin\alpha + i\cos\alpha = (1)\sin\alpha + i\cos\alpha$$

$$= (-i^2)\sin\alpha + i\cos\alpha$$

نستخرج i كعامل مشترك نجد

$$(-i^2)\sin\alpha + i\cos\alpha = i(-i\sin\alpha + \cos\alpha)$$

ومن خواص الدوال المثلثية أن

$$\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$$

و $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$

ومنه

$$i(\cos\alpha - i\sin\alpha) = i(i\sin(-\alpha) + \cos(-\alpha))$$

بما أن الشكل الأسي للعدد المركب i هو $e^{i\frac{\pi}{2}}$ ، وللعدد المركب $i\sin(-\alpha) + \cos(-\alpha)$ هو $e^{i(-\alpha)}$ يصبح

$$i(i\sin(-\alpha) + \cos(-\alpha)) = e^{i\frac{\pi}{2}} \cdot e^{i(-\alpha)} \dots (1)$$

وبنفس الطريقة لدينا

$$\cos\alpha - i\sin\alpha = \cos(-\alpha) + i\sin(-\alpha) = e^{i(-\alpha)} \dots (2)$$

من (1) و(2) نجد

$$Z = (\sin\alpha + i\cos\alpha)(\cos\alpha - i\sin\alpha) = e^{i\frac{\pi}{2}} \cdot e^{i(-\alpha)} \cdot e^{i(-\alpha)}$$

إذن $Z = e^{i\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right)}$

ومنه $\arg(Z) = \frac{\pi}{2} - 2\alpha + 2k\pi$

ومنه الحالة (5) صحيحة

وهناك طريقة أخرى لحل السؤال (5) وهي دساتير التحويل:

حسب دساتير التحويل فإن

$$\sin(\alpha) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

$$\cos(\alpha) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

ومنه $\sin\alpha + i\cos\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = e^{i\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)} \dots (1)$

الأعداد المركبة من الألف إلى الياء

$\cos\alpha - i\sin\alpha = \cos(-\alpha) + i\sin(-\alpha)$
$= e^{i(-\alpha)} \cdots (2)$

من (1) و (2) نجد

$Z = (\sin\alpha + i\cos\alpha)(\cos\alpha - i\sin\alpha)$
$= e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)} \cdot e^{i-\alpha}$

إذن $Z = e^{i\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)}$

ومنه $\arg(Z) = \frac{\pi}{2} - 2\alpha + 2k$

11. علوم تجريبية 2016 الإستثنائية
الموضوع 01

1-نضع من أجل كل عدد مركب z :

$P(z) = z^3 - 24\sqrt{3}$

1-أ- تحقق أن $P(2\sqrt{3}) = 0$

1-ب- جد العددين الحقيقيين a و b بحيث من أجل كل عدد مركب z:

$P(z) = (z - 2\sqrt{3})(z^2 + az + b)$

1-جـ- حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة التالية: $P(z) = 0$

2- المستوي المركب منسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.

A و B و C نقط من المستوي لواحقها على الترتيب:

$z_B = -\sqrt{3} - 3i$ ، $z_A = -\sqrt{3} + 3i$

و $z_C = 2\sqrt{3}$

2-أ- اكتب على الشكل الجبري العدد المركب $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$

2-ب- بين أنه يوجد دوران r مركز A ويحول النقطة B الى النقطة C ، يطلب تعيين زاويته

2-جـ- استنتج طبيعة المثلث ABC

2-د- عين z_D لاحقة النقطة D صورة النقطة C بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AB}$ ، ثم حدد طبيعة الرباعي $ABCD$

3- عين (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة غير المعدومة z بحيث:

$\arg\left(\frac{z}{z-3}\right) = 2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$ ($\bar{z}$ العدد هو مرافق العدد z)

نص الإجابة

1-أ – التحقق أن $P(2\sqrt{3}) = 0$:

لدينا

$P(z) = z^3 - 24\sqrt{3}$

$P(2\sqrt{3}) = (2\sqrt{3})^3 - 24\sqrt{3}$

ومنه

$P(2\sqrt{3}) = 8 \cdot 3\sqrt{3} - 24\sqrt{3} = 24\sqrt{3} - 24\sqrt{3}$
$= 0$

ومنه $P(2\sqrt{3}) = 0$ أي أن العدد $(2\sqrt{3})$ جذر للعبارة $P(z)$

1-ب – إيجاد العددين a و b

$P(z) = (z - 2\sqrt{3})(z^2 + az + b)$

لدينا $P(z) = z^3 - 24\sqrt{3} \cdots (1)$

ولدينا $P(z) = (z - 2\sqrt{3})(z^2 + az + b)$

نقوم بالنشر العبارة نجد

$P(z) = z^3 + az^2 + bz - 2\sqrt{3}z^2 - 2a\sqrt{3}z$
$- 2b\sqrt{3}$

$P(z) = z^3 + (a - 2\sqrt{3})z^2 + (b - 2a\sqrt{3})z$
$- 2b\sqrt{3} \cdots (2)$

بمطابقة العبارة (2) مع العبارة (1) على حسب رتب z نجد

لدينا $-2b\sqrt{3} = -24\sqrt{3}$

ومنه $b = \frac{-24\sqrt{3}}{-2\sqrt{3}}$ أي $b = 12$

إذن $\boxed{b = 12}$

ولدينا $a - 2\sqrt{3} = 0$ ومنه $a = 2\sqrt{3}$

إذن $\boxed{a = 2\sqrt{3}}$

ومنه $P(z) = (z - 2\sqrt{3})(z^2 + 2\sqrt{3}z + 12)$

1-جـ- حل المعادلة $P(z) = 0$:

لدينا

$P(z) = (z - 2\sqrt{3})(z^2 + 2\sqrt{3}z + 12)$

معناه

$$\begin{cases} z - 2\sqrt{3} = 0 \\ \text{أو} \\ z^2 + 2\sqrt{3}z + 12 = 0 \end{cases}$$

إذن

$z - 2\sqrt{3} = 0$
$z = 2\sqrt{3}$

ومنه

$z_0 = 2\sqrt{3}$

و

$z^2 + 2\sqrt{3}z + 12 = 0$

$\Delta = (2\sqrt{3})^2 - 4(1)(12) = -36 = (6i)^2$

$z_1 = \frac{-2\sqrt{3} - 6i}{2} = -\sqrt{3} - 3i$

$$z_2 = \frac{-2\sqrt{3}+6i}{2} = -\sqrt{3}+3i$$

ومنه $S = \{2\sqrt{3}, -\sqrt{3}-3i, -\sqrt{3}+3i\}$

2-أ- كتابة على الشكل الجبري العدد المركب $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$

لدينا

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{2\sqrt{3}+\sqrt{3}-3i}{-\sqrt{3}-3i+\sqrt{3}-3i} = \frac{3\sqrt{3}-3i}{-6i}$$
$$= \frac{\sqrt{3}-i}{-2i} = \frac{(\sqrt{3}-i)(i)}{-2i(i)}$$

ومنه $\boxed{\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}}$

2-ب- البرهان أنه يوجد دوران r يحول B إلى C :

لدينا

$$z_C - z_A = e^{i\theta}(z_B - z_A)$$

ومنه

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{i\theta} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

ومنه

$$\begin{cases} \left|\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = 1 \\ \arg\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \theta : \begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{2} \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} : \quad \theta = \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

ومنه

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{\pi}{3}}$$

بما أن $\left|\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = 1$ فإنه يوجد دوران r يحول B إلى C ومركزه A وزاويته $\theta = \frac{\pi}{3}$

2-جـ- استنتاج طبيعة المثلث ABC :

لدينا

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{i\frac{\pi}{3}}$$

ومنه

$$\left|\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = 1 \quad : \frac{AC}{AB} = 1$$
$$: AC = AB \ \ldots\ldots\ldots (1)$$

وأيضا

$$\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \frac{\pi}{3} \quad : (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$$
$$= \frac{\pi}{3} \ldots\ldots\ldots (2)$$

من (1) و (2) نستنتج أن المثلث ABC متقايس الأضلاع

2-د- تعيين z_D :

لدينا

$$z_D = z_C + b$$

بما أن b هي لاحقة الشعاع $\overrightarrow{AB}$ يصبح

$$z_D = z_C + (z_B - z_A)$$

بالتعويض نجد

$$z_D = 2\sqrt{3} - \sqrt{3} - 3i + \sqrt{3} - 3i$$

ومنه $\boxed{z_D = 2\sqrt{3} - 6i}$

تحديد طبيعة الرباعي $ABDC$

بما أن D صورة C بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AB}$ فإن الرباعي $ABDC$ متوازي أضلاع لأن $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ ،
لكن المثلث ABC متقايس الأضلاع.
وبما أن الرباعي $ABDC$ متوازي أضلاع فيه ضلعان متجاوران و متقايسان وليسا متعامدان فإن $ABDC$ هو معين.

3-تعيين مجموعة النقط (Γ) حيث:

$$\arg\left(\frac{z}{\bar{z}}\right) = 2k\pi$$

طريقة (1):

لدينا $\arg\left(\frac{z}{\bar{z}}\right) = \arg(z) - \arg(\bar{z})$

ومن خواص عمدة العدد المركب $\arg(\bar{z}) = -\arg(z)$ ومنه

$$\arg\left(\frac{z}{\bar{z}}\right) = \arg(z) + \arg(z) = 2\arg(z)$$
$$= 2k\pi$$

ومنه $\boxed{\arg(z) = k\pi}$

معناه مجموعة النقط (Γ) هي محور الفواصل باستثناء المبدأ فقط O

طريقة (2):

لدينا $\frac{z}{\bar{z}} = \frac{x+yi}{x-yi}$

نستعمل المرافق نجد

$$\frac{z}{\bar{z}} = \frac{(x+yi)(x+yi)}{(x-yi)(x+yi)} = \frac{(x+yi)^2}{x^2+y^2}$$
$$= \frac{x^2 - y^2 + 2xyi}{x^2+y^2}$$
$$\frac{z}{\bar{z}} = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + \frac{2xy}{x^2+y^2}i$$

وحتى يكون العدد $\frac{z}{\bar{z}}$ عدد حقيقيا وموجبا يجب أن يتحقق فيه شرطين:

$$\begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} > 0 \\ x^2 - y^2 > 0 \\ x^2 > y^2 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2} = 0 \\ 2xy = 0 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} x \neq 0 \\ \boxed{y = 0} \quad \text{محور الفواصل} \end{cases}$$

ومنه مجموعة النقط (Γ) هي محور الفواصل الذي معادلته $y = 0$ باستثناء المبدأ فقط O

12. علوم تجريبية 2016 الإستثنائية الموضوع 02

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة التالية ذات المجهول z:

$$2z^3 + 3\bar{z}^2 - 3\bar{z} + 5 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (E)$$

يشير الرمز $\bar{z}$ الى مرافق العدد المركب z

1-أ- أثبت أن المعادلة (E) تكافئ المعادلة

$$(2\bar{z} + 5)(\bar{z}^2 - \bar{z} + 1) = 0$$

1-ب- حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة (E)

2- في المستوي المركب منسوب الى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ نعتبر النقط A، B، C و D التي لواحقها على الترتيب: $z_A = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ،

$$z_B = \overline{z_A} \text{ ،} z_C = -1 \text{ ،} z_D = -\frac{5}{2}$$

2-أ-اكتب كلا من العددين z_A و z_B على الشكل الأسي

2-ب- أنشئ النقط A، B، C و D

2-ج- اثبت أن: $z_B - z_C = z_B(z_A - z_C)$

2-د-استنتج طبيعة المثلث ABC

3-ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه C وزاويته $\frac{\pi}{3}$ ونسبته 2 ولتكن F صورة A بالتحويل S

أنشئ النقطة F ثم حدد طبيعة المثلث AFC

4-عين طبيعة المجموعة (T) للنقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث $z + 1 = Kz_B$ لما يتغير K في المجموعة $\mathbb{R}_+^*$.

نص الإجابة

1-أ – إثبات ان المعادلة (E) تكافئ المعادلة $(2\bar{z} + 5)(\bar{z}^2 - \bar{z} + 1) = 0$:

لدينا $(2\bar{z} + 5)(\bar{z}^2 - \bar{z} + 1) = 0$

هذا يكافئ

$$2\bar{z}^3 - 2\bar{z}^2 + 2\bar{z} + 5\bar{z}^2 - 5\bar{z} + 5 = 0$$

ومنه $2\bar{z}^3 + 3\bar{z}^2 - 3\bar{z} + 5 = 0$

1-ب - حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $(2\bar{z} + 5)(\bar{z}^2 - \bar{z} + 1) = 0$:

لدينا $(2\bar{z} + 5)(\bar{z}^2 - \bar{z} + 1) = 0$

$$\begin{cases} 2\bar{z} + 5 = 0 \\ \text{او} \\ \bar{z}^2 - \bar{z} + 1 = 0 \end{cases}$$

معناه

إذن $2\bar{z} + 5 = 0$

$$\bar{z} = -\frac{5}{2}$$

ومنه $z_0 = -\frac{5}{2}$

و $\bar{z}^2 - \bar{z} + 1 = 0$

نضع المرافق لكل الأطراف يصبح

$$\bar{\bar{z}}^2 - \bar{\bar{z}} + \bar{1} = \bar{0}$$

ومنه $z^2 - z + 1 = 0$

$$\Delta = (-1)^2 - 4(1)(1) = -3 = (i\sqrt{3})^2$$

$$z_1 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$z_2 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

ومنه $\boxed{S = \left\{-\frac{5}{2}, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}}$

2-أ - كتابة z_A و z_B على الشكل الأسي:

كتابة z_A على الشكل الأسي

حساب $|z_A|$

$$|z_A| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$$

حساب θ_A

$$\arg(z_A) = \theta_A : \begin{cases} cos\theta_A = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2} \\ sin\theta_A = \frac{\frac{-\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{-\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

أي $\theta_A = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$

ومنه الشكل الأسي للعدد المركب z_A هو

$$\boxed{z_A = e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)}}$$

كتابة z_B على الشكل الأسي

حساب $|z_B|$

$$|z_B| = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = 1$$

حساب θ_B

$$\arg(z_B) = \theta_B : \begin{cases} cos\theta_B = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2} \\ sin\theta_B = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

أي $\theta_B = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$

ومنه الشكل الأسي للعدد المركب z_B هو

$$\boxed{z_B = e^{i\frac{\pi}{3}}}$$

2-ب – إنشاء النقط A ، B ، C و D :

لإنشاء A و B نقوم بحساب $|z_A| = 1$ نرسم دائرة مركزها المبدأ O ونصف قطرها $r = 1$

2-جـ – إثبات أن $z_B - z_C = z_B(z_A - z_C)$:

طريقة (1):

يكفي أن نبرهن أن $\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = z_B$

وبالتعويض نجد

$$\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = \frac{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i+1}{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i+1} = \frac{3+i\sqrt{3}}{3-i\sqrt{3}}$$

نضرب في المرافق

$$\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = \frac{(3+i\sqrt{3})(3+i\sqrt{3})}{(3-i\sqrt{3})(3+i\sqrt{3})} = \frac{9+6i\sqrt{3}-3}{12} = \frac{6}{12}+\frac{6\sqrt{3}}{12}i$$

ومنه $\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i = z_B$

ومنه $z_B - z_C = z_B(z_A - z_C)$

طريقة (2):

لدينا

$$z_B - z_C = \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i+1 = \frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i \cdots (1)$$

ولدينا

$$z_B(z_A - z_C) = \left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i+1\right)$$

$$z_B(z_A - z_C) = \frac{3}{4}-i\frac{\sqrt{3}}{4}+3i\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{3}{4}$$

$$= \frac{6}{4}+2i\frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$z_B(z_A - z_C) = \frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i \cdots (2)$$

بما أن (1) و (2) متساويان ومنه

$$z_B - z_C = z_B(z_A - z_C)$$

2- د – استنتاج طبيعة المثلث ABC :

لدينا

$$z_B - z_C = z_B(z_A - z_C)$$

ومنه

$$\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = z_B = e^{i\frac{\pi}{3}}$$

أي

$$\begin{cases} \left|\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right| = 1 \quad : \frac{CB}{CA} = 1 \quad : CB = CA \cdots (1) \\ \arg\left(\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right) = \frac{\pi}{3} \quad : (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \frac{\pi}{3} \cdots (2) \end{cases}$$

ومن (1) و (2) نستنتج أن المثلث ABC متقايس الأضلاع

3-إنشاء النقطة F :

العبارة المختصرة للتشابه S المباشر الذي مركزه A و يحول A إلى F هي:

$$z_F - z_C = 2e^{i\frac{\pi}{3}}(z_A - z_C)$$

نضع الطويلة للطرفين نجد

$$|z_F - z_C| = \left|2e^{i\frac{\pi}{3}}(z_A - z_C)\right|$$

ومنه $|z_F - z_C| = 2|z_A - z_C|$

معناه

$$CF = 2CA \cdots (1)$$

لدينا $\frac{z_F - z_C}{z_A - z_C} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$

نضع العمدة للطرفين نجد

$$\arg\left(\frac{z_F - z_C}{z_A - z_C}\right) = \frac{\pi}{3}$$

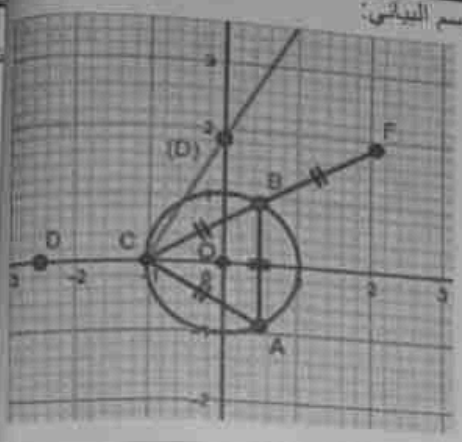
معناه $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CF}) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \cdots (2)$

ولدينا $CA = CB$ لأن المثلث ABC متقايس الأضلاع

$$CF = 2CA = 2CB$$

$$CA = CB = BF$$

الرسم البياني:



13. علوم تجريبية 2016 العادية
الموضوع 01

المستوي المركب منسوب الى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ من أجل كل نقطة من المستوي لاحقتها العدد المركب z حيث $(z \neq 1)$ نرفق النقطة M' لاحقتها العدد المركب z' حيث: $z' = \frac{z-2}{z-1}$

1- حل في $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z: $z' = z$

2-النقطتان A و B لاحقتها على الترتيب z_1 و z_2 حيث: $z_1 = 1-i$ و $z_2 = \overline{z_1}$

2-أ-اكتب $\frac{z_2}{z_1}$ على الشكل الأسي

2-ب-بين أن النقطة B هي صور للنقطة A بالدوران R الذي مركزه المبدأ O، يطلب تعيين زاوية له

3-نضع $z' \neq z$. نعتبر النقطتين C و D لاحقتيهما 2 و 1 على الترتيب.

عين (T) مجموعة النقط M حيث M' تنتمي الى محور التراتيب ثم أنشئ (T)

4-h التحاكي الذي مركزه المبدأ O ونسبته 2.

4-أ-عين طبيعة التحويل النقطي $S = h \circ R$ وعناصره المميزة.

4-ب-اكتب العبارة المركبة للتحويل S

4-جـ-عين ثم أنشئ المجموعة (T') صورة (T) بالتحويل النقطي S

نص الإجابة

1-حل في C المعادلة $z' = z$:

لدينا $z' = z$

ومنه $\frac{z-2}{z-1} = z$

$z - 2 = z(z-1)$

الأعداد المركبة من الألف إلى الياء

طبيعة المثلث AFC :

بما أن $CA = CB = BF$ والنقط B ، C و F في استقامية، أي المثلث AFC قائم في النقطة A ووتره [CF]

4-تعيين طبيعة المجموعة (Γ) :

لدينا

$z + 1 = kz_B \quad ; k \in [0, +\infty[$

ومنه

$z - (-1) = k e^{i\frac{\pi}{3}}$

ومنه $z - z_C = k e^{i\frac{\pi}{3}}$

نضع الطويلة للطرفين نجد

$|z - z_C| = k$

معناه

$CM = k \quad ; k \in [0, +\infty[\quad \cdots (1)$

وأيضا

$\arg(z - z_C) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$

معناه

$(\vec{U}, \overrightarrow{CM}) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \cdots (2)$

من (1) و (2) نستنتج أن طبيعة المجموعة (Γ) هي نصف مستقيم (D) مبدؤه النقطة C وشعاع توجيهه $\vec{\omega}$ حيث

$(\vec{U}, \vec{\omega}) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$

معادلة نصف المستقيم (D):

لدينا $y = ax + b$

حيث a يمثل معامل توجيه نصف المستقيم أي $\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)$ ومنه

$$\tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

ومنه $y = \sqrt{3}x + b$

ونعلم أن $z_C = -1$ أي $C(-1,0)$ تنتمي إلى نصف المستقيم (D) بتعويضها نجد

$(0) = \sqrt{3}(-1) + b$

ومنه $b = \sqrt{3}$

ومنه معادلة نصف المستقيم (D) هي

$y = \sqrt{3}x + \sqrt{3}$

$$z^2 - 2z + 2 = 0$$

نحسب المميز Δ للمعادلة

$$\Delta = (-2)^2 - 4(1)(2) = -4 = (2i)^2$$

$$z_1 = \frac{2 - 2i}{2} = 1 - i$$

$$z_2 = \frac{2 + 2i}{2} = 1 + i$$

ومنه $S = \{1 - i\,, 1 + i\}$

2-أ- كتابة $\frac{z_2}{z_1}$ على الشكل الأسي:

لدينا

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{1+i}{1-i}$$

نضرب في المرافق نجد

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{1+i+i-1}{1+1} = i$$

ومنه

$$\frac{z_2}{z_1} = i$$

حساب $|i|$

$$|z_i| = \sqrt{1} = 1$$

حساب θ_i

$$\arg(z_i) = \theta_i : \begin{cases} cos\theta_i = \frac{0}{1} = 0 \\ sin\theta_i = \frac{1}{1} = 1 \end{cases}$$

أي

$$\theta_i = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

ومنه الشكل الأسي للعدد المركب z_i هو

$$\boxed{z_i = e^{i\frac{\pi}{2}}}$$

2-ب- البرهان أن B هي صورة A بالدوران R:

العبارة المختصرة للدوران R هي

$$z_B - z_O = e^{i\theta}(z_A - z_O) \quad ; z_O = 0$$

$$z_B = e^{i\theta} z_A$$

$$\frac{z_B}{z_A} = e^{i\theta}$$

لكن لدينا من الجواب السابق

$$\frac{z_B}{z_A} = \frac{z_2}{z_1} = i = e^{i\frac{\pi}{2}} \quad ; \begin{cases} i \in C \\ |i| = 1 \end{cases}$$

ومنه R دوران يحول A إلى B بواسطة زاوية قدرها $\frac{\pi}{2}$ ومركزه هو المبدأ O

3-تعيين (Γ) :

لدينا z' تخيلي صرف لأن $M' \in (yy')$ ، أي $\frac{z-2}{z-1}$ تخيلي صرف وتكافئ

$$\frac{z-2}{z-1} = \frac{z - z_C}{z - z_D}$$

وأيضا

$$\arg\left(\frac{z - z_C}{z - z_D}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad ; k \in Z$$

يعني

$$(\overrightarrow{DM}, \overrightarrow{CM}) = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad ; k \in Z$$

أي المثلث CMD قائم في M

ومنه (Γ) هي دائرة (C) قطرها [CD] باستثناء النقطة D

انشاء (Γ)

4-أ – تعيين طبيعة التحويل النقطي S حيث $S = hoR$:

بما أن S هو تركيب لتحويلين بسيطين وهما دوران مع تحاكي فإن S هو تشابه مباشر مركزه O ونسبته $k = 2$ وزاويته هي $\theta = \frac{\pi}{2}$

4-ب – العبارة المركبة للتحويل S:

لدينا

$$h: z' = 2z \qquad R: z' = iz$$

ومنه

$$S = hoR$$

$$M \xrightarrow{R} M_1 \xrightarrow{h} M'$$

ومنه $\boxed{S: z' = 2iz}$

4-جـ – تعيين (Γ') صورة (Γ) بالتشابه المباشر S:

لدينا (Γ) هي دائرة قطرها [DC] باستثناء D، فإن (Γ') هي أيضا دائرة قطرها [D'C'] باستثناء D' حيث C' و D' صورتي النقطتين C و D على الترتيب بالتحويل S.

تعيين اللاحقتين $z_{C'}$ و $z_{D'}$

$$z' = 2iz$$

$$z_{C'} = 2iz_C$$

بالتعويض نجد

$$z_{C'} = 2i(2) = 4i$$

ومنه $\boxed{z_{C'} = 4i}$

$$z_{D'} = 2i(1) = 2i$$

ومنه $\boxed{z_{D'} = 2i}$

ومركز هذه الدائرة هي ω منتصف القطعة [D'C'] حيث

$$z_\omega = \frac{z_{C'} + z_{D'}}{2} = 3i$$

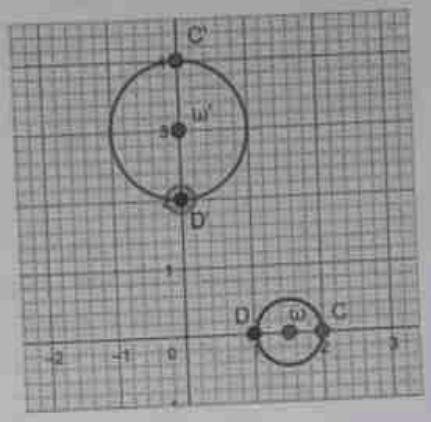
ومنه $\boxed{z_\omega = 3i}$

ونصف قطرها r'

$$r' = 2r = \frac{1}{2}(2) = 1$$

إذن $\boxed{r' = 1}$

التمثيل البياني:



14. علوم تجريبية 2016 العادية
الموضوع 02

1-حل في مجموعة الأعداد المركبة C، المعادلة:

$$\left(z - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)\left(z^2 + \sqrt{3}z + 1\right) = 0$$

2- المستوي المركب منسوب الى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ نعتبر A، B و C نقط المستوي التي لاحقاتها على الترتيب: $z_A = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ ،

$z_C = \overline{z_B}$ و $z_B = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

2-أ-اكتب z_A، z_B و z_C على الشكل الأسي.

2-ب-بين أنه يوجد تشابه مباشر S مركزه B ويحول النقطة C الى النقطة A يطلب تعيين عناصره المميزة.

3-أ-عين لاحقة النقطة D حتى يكون الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع، ثم حدد بدقة طبيعته

3-ب-عين (E) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z والتي تحقق: $|z - z_A| = |z - z_B|$ حيث $\bar{z}$ هو مرافق z

3-ج-عين (T) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z والتي تحقق: $z = z_B + \sqrt{3}e^{i\theta}$ عندما θ يتغير على R ثم تحقق أن النقطة A تنتمي الى (T)

نص الإجابة

1-حل في C المعادلة

$$\left(z - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)\left(z^2 + \sqrt{3}z + 1\right) = 0 :$$

لدينا

$$\left(z - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)\left(z^2 + \sqrt{3}z + 1\right) = 0$$

معناه

$$\begin{cases} z - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i = 0 \\ \text{أو} \\ z^2 + \sqrt{3}z + 1 = 0 \end{cases}$$

إذن $z - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i = 0$

$$z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

ومنه $z_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

و

$$z^2 + \sqrt{3}z + 1 = 0$$

$$\Delta = (\sqrt{3})^2 - 4(1)(1) = -1 = i^2$$

$$z_1 = \frac{-\sqrt{3} - i}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

$$z_2 = \frac{-\sqrt{3} + i}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

ومنه

$$\boxed{S = \left\{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i, -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right\}}$$

2-أ- كتابة z_A ، z_B و z_C على الشكل الأسي:

كتابة z_A على الشكل الأسي

حساب $|z_A|$

$$|z_A| = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = 1$$

حساب θ_A

$$\arg(z_A) = \theta_A : \begin{cases} cos\theta_A = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ sin\theta_A = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

أي $\theta_A = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$

ومنه الشكل الأسي للعدد المركب z_A هو $\boxed{z_A = e^{i\frac{\pi}{6}}}$

كتابة z_B على الشكل الأسي

حساب $|z_B|$

$$|z_B| = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = 1$$

حساب θ_B

$$\arg(z_B) = \theta_B : \begin{cases} cos\theta_B = \dfrac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ sin\theta_B = \dfrac{\frac{1}{2}}{1} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

أي $\theta_B = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$

ومنه الشكل الأسي للعدد المركب z_B هو

$$\boxed{z_B = e^{i\frac{5\pi}{6}}}$$

كتابة z_C على الشكل الأسي

حساب $|z_C|$

$$|z_C| = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = 1$$

حساب θ_C

$$\arg(z_C) = \theta_C : \begin{cases} cos\theta_C = \dfrac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ sin\theta_C = \dfrac{-\frac{1}{2}}{1} = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

أي

$$\theta_C = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$$

ومنه الشكل الأسي للعدد المركب z_C هو

$$\boxed{z_C = e^{i\frac{7\pi}{6}}}$$

2-ب – البرهان أنه يوجد تشابه مباشر S مركزه B ويحول C إلى A :

العبارة المختصرة للتشابه S المباشر الذي مركزه A و يحول C إلى B هي:

$$z_A - z_B = ke^{i\theta}(z_C - z_B)$$

ومنه

$$\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} = ke^{i\theta} \qquad : k > 0 , \theta \in R$$

بالتعويض نجد

$$\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i}{-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i} = \frac{2\sqrt{3}}{-2i}$$

$$= \frac{\sqrt{3}(i)}{-i(i)}$$

ومنه $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} = ke^{i\theta} = i\sqrt{3}$

حساب $|i\sqrt{3}|$

$$|i\sqrt{3}| = \sqrt{3}$$

بما أن $\sqrt{3} \neq 1$ فإنه يوجد تشابه مباشر S مركزه B ويحول C إلى A وعناصره المميزة هي:

نسبته

$$k = |i\sqrt{3}| = \sqrt{3}$$

وزاويته

$$\arg(i\sqrt{3}) = \theta_{i\sqrt{3}} : \begin{cases} cos\theta_{i\sqrt{3}} = \dfrac{0}{\sqrt{3}} = 0 \\ sin\theta_{i\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 1 \end{cases}$$

$$\theta_{i\sqrt{3}} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

وبما أن

$$\arg\left(\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}\right) = \frac{\pi}{2} = (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$$

$$BA = \sqrt{3}\, BC$$

$$\frac{BA}{BC} = \sqrt{3}$$

فنستنتج أن المثلث BCA قائم في النقطة B

3-أ – تعيين z_D حتى يكون الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع:

لتكن $z_D = x_D + y_D i$ ومنه

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$$

أي

$$z_B - z_A = z_C - z_D$$

بالتعويض نجد

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i - z_D$$

بكافئ

$$-z_D = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

نضرب الطرفين في (-1) ومنه $\boxed{z_D = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i}$

تحديد طبيعة الرباعي $ABCD$:

بما أن الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع ، لكن لدينا

$$\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} = i\sqrt{3}$$

أي

$$|i\sqrt{3}| = \sqrt{3} \neq 1$$

معناه

$$\frac{BA}{BC} = \sqrt{3} \qquad : BA \neq BC$$

ولدينا

$$\arg(i\sqrt{3}) = \frac{\pi}{2}$$

ومنه الرباعي $ABCD$ هو مستطيل

3-ب – تعيين مجموعة النقط (E) التي تحقق :

$$|z - z_A| = |\overline{z} - z_B|$$

طريقة (1):

من خواص طويلة العدد المركب أن $|\overline{z}| = |z|$ ومنه

$$|z - z_A| = |\overline{z - z_B}|$$

هذا يكافئ $|z - z_A| = |\overline{\overline{z} - z_B}|$

ومن خواص العدد المركب أن $\overline{\overline{z}} = z$

ونعلم أن $\overline{z_B} = z_C$ ومنه يصبح

$$|z - z_A| = |z - z_C|$$

هذا يكافئ $\boxed{AM = CM}$

ومنه (E) مجموعة النقط من المستوي هي المستقيم المحوري للقطعة المستقيمة $[AC]$

طريقة (2):

لدينا $z = x + yi$ و $\overline{z} = x - yi$ نقوم بالتعويض في العلاقة $|z - z_A| = |\overline{z} - z_B|$ نجد

$$\left|x + yi - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right| = \left|x - yi + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right|$$

بما أن $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ يصبح لدينا

$$\sqrt{\left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(x + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(-y - \frac{1}{2}\right)^2}$$

بتربيع الطرفين نجد

$$\left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(-y - \frac{1}{2}\right)^2$$

بالتبسيط نجد

$$+\frac{3}{4} - 2x\frac{\sqrt{3}}{2} + y^2 + \frac{1}{4} - 2y\frac{1}{2} = x^2 + \frac{3}{4} + 2x\frac{\sqrt{3}}{2} + y^2 + \frac{1}{4} + 2y\frac{1}{2}$$

هذا يكافئ

$$+\frac{3}{4} - x\sqrt{3} + y^2 + \frac{1}{4} - y = x^2 + \frac{3}{4} + x\sqrt{3} + y^2 + \frac{1}{4} + y$$

هذا يكافئ

$$-x\sqrt{3} - y = x\sqrt{3} + y$$

ومنه

$$2y = -2x\sqrt{3}$$

ومنه $\boxed{y = -x\sqrt{3}}$

وهذه هي معادلة المستقيم

ومنه (E) مجموعة النقط تحقق المستقيم المحوري للقطعة المستقيمة $[AC]$

3-جـ – تعيين (Γ) مجموعة النقط التي تحقق :

$$z = z_B + \sqrt{3}\, e^{i\theta}$$

ومنه $z - z_B = \sqrt{3}\, e^{i\theta}$

نضع رمز الطويلة للطرفين نجد

$$|z - z_B| = |\sqrt{3}\, e^{i\theta}|$$

ومنه $BM = \sqrt{3}$

وأيضا

$$(\vec{U}, \overrightarrow{BM}) = \theta$$

ومنه (Γ) مجموعة النقط هي دائرة مركزها B ، ونصف قطرها $r = \sqrt{3}$

التحقق أن $A \in (\Gamma)$:

لدينا

$$BA = |z_A - z_B| = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i = 2\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

ومنه $BA = \sqrt{3} = r$

ومنه $A \in (\Gamma)$

15. علوم تجريبية 2015 الموضوع 01

I-عين العددين المركبين α و β
حيث: $\begin{cases} 2\alpha - \beta = -3 \\ 2\overline{\alpha} + \overline{\beta} = -3 - 2i\sqrt{3} \end{cases}$
مع $\overline{\alpha}$ مرافق α و $\overline{\beta}$ مرافق β

II- المستوي منسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ A، B و C النقط التي لاحقاتها على الترتيب:

$z_A = -\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ، $z_B = \overline{z_A}$ و $z_A = z_C . e^{i\frac{\pi}{3}}$

II-1-أ-اكتب z_A و z_C على الشكل الأسي ثم عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون $\left(\frac{z_A}{z_C}\right)^n$ حقيقيا سالبا.

II-1-ب- تحقق أن العدد المركب $2\left(\frac{z_A}{\sqrt{3}}\right)^{2015} + \left(\frac{z_B}{\sqrt{3}}\right)^{1962} - \left(\frac{z_C}{\sqrt{3}}\right)^{1435}$ حقيقي

II-2-D النقطة ذات اللاحقة $z_D = 1 + i$

II-2-أ-احدد النسبة وزاوية للتشابه المباشر S مركزه O ويحول D الى A

II-2-ب- اكتب $\frac{z_A}{z_D}$ على الشكل الجبري ثم استنتج القيمة المضبوطة لكل من: $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$

II-3-عين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي تحقق: $z = k(1+i)e^{i\left(\frac{7\pi}{12}\right)}$ حيث k يمسح $\mathbb{R}^+$

نص الإجابة

I-تعيين α و β حيث

$$\begin{cases} 2\alpha - \beta = -3 \\ 2\overline{\alpha} + \overline{\beta} = -3 - 2i\sqrt{3} \end{cases}$$

طريقة (1):

لدينا

$$2\overline{\alpha} + \overline{\beta} = -3 - 2i\sqrt{3}$$

نضع المرافق للطرفين نجد

$$\overline{2\overline{\alpha} + \overline{\beta}} = \overline{-3 - 2i\sqrt{3}}$$

ومنه $2\alpha + \beta = -3 + 2i\sqrt{3}$

يصبح لدينا

$$\begin{cases} 2\alpha - \beta = -3 \\ 2\alpha + \beta = -3 + 2i\sqrt{3} \end{cases}$$

نقوم بعملية الجمع عموديا طرفا لطرف نجد

$$4\alpha = -6 + 2i\sqrt{3}$$

ومنه $\boxed{\alpha = -\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}}$

لإيجاد β نعوض $\alpha = -\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ في المعادلة

$$2\left(-\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \beta = -3$$

إذن

$$\beta = 3 + 2\left(-\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

ومنه

$$\boxed{\beta = i\sqrt{3}}$$

ومنه

$$\beta = i\sqrt{3} \text{ و } \alpha = -\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

طريقة (2):

$$\begin{cases} 2\alpha - \beta = -3 \\ 2\overline{\alpha} + \overline{\beta} = -3 - 2i\sqrt{3} \end{cases}$$

لدينا

$$2\alpha - \beta = -3$$

ومنه

$$2\alpha + 3 = \beta$$

نقوم بتعويض $\beta = 2\alpha + 3$ في المعادلة الأخرى

$$2\overline{\alpha} + \overline{2\alpha + 3} = -3 - 2i\sqrt{3}$$

هذا يكافئ

$$2\overline{\alpha} + 2\overline{\alpha} + 3 = -3 - 2i\sqrt{3}$$

$$4\overline{\alpha} = -6 - 2i\sqrt{3}$$

ومنه

$$\overline{\alpha} = -\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

ومنه

$$\boxed{\alpha = -\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

لإيجاد β نعوض $\alpha = -\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ في المعادلة

$$2\left(-\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \beta = -3$$

إذن

$$\beta = 3 + 2\left(-\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

ومنه

$$\boxed{\beta = i\sqrt{3}}$$

ومنه

$$\beta = i\sqrt{3} \text{ و } \alpha = -\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

II-1-أ- كتابة z_A و z_C على الشكل الأسي:

كتابة z_A على الشكل الأسي

حساب $|z_A|$

$$|z_A| = \sqrt{\frac{9}{4}+\frac{3}{4}} = \sqrt{3}$$

حساب θ_A

$$\arg(z_A) = \theta_A : \begin{cases} cos\theta_A = \dfrac{-\frac{3}{2}}{\sqrt{3}} = -\dfrac{3}{2\sqrt{3}} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ sin\theta_A = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3}} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

اي

$$\theta_A = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

ومنه الشكل الأسي للعدد المركب z_A هو

$$\boxed{z_A = \sqrt{3}e^{i\frac{5\pi}{6}}}$$

كتابة z_B على الشكل الأسي

بما أن

$$\boxed{z_B = \overline{z_A} = \sqrt{3}e^{i-\frac{5\pi}{6}}}$$

كتابة z_C على الشكل الأسي

لدينا

$$z_A = z_C \cdot e^{i\frac{\pi}{3}}$$

ومنه

$$z_C = \frac{z_A}{e^{i\frac{\pi}{3}}}$$

اي

$$z_C = \frac{\sqrt{3}e^{i\frac{5\pi}{6}}}{e^{i\frac{\pi}{3}}} = \sqrt{3}e^{i\frac{5\pi}{6}} \cdot e^{i-\frac{\pi}{3}} = \sqrt{3}e^{i\left(\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\right)}$$

ومنه الشكل الأسي للعدد المركب z_C هو

$$\boxed{z_C = \sqrt{3}e^{i\left(\frac{\pi}{2}\right)}}$$

تعيين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون $\left(\frac{z_A}{z_C}\right)^n$ حقيقيا سالبا:

لدينا

$$\left(\frac{z_A}{z_C}\right)^n = \left(\frac{\sqrt{3}e^{i\frac{5\pi}{6}}}{\sqrt{3}e^{i\left(\frac{\pi}{2}\right)}}\right)^n = \left(e^{i\frac{5\pi}{6}} \cdot e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)}\right)^n$$

$$= \left(e^{i\left(\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{2}\right)}\right)^n = \left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^n$$

ومنه

$$\left(\frac{z_A}{z_C}\right)^n = \left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)^n$$

$$= \cos n\frac{\pi}{3} + i\sin n\frac{\pi}{3}$$

لكي يكون $\left(\frac{z_A}{z_C}\right)^n$ حقيقيا سالبا يجب ان يكون

$$\sin n\frac{\pi}{3} = 0 \text{ و } \cos n\frac{\pi}{3} < 0 :$$

$$\sin n\frac{\pi}{3} = 0$$

اي

$$n\frac{\pi}{3} = \pi(2k+1)$$

ومنه $\boxed{n = 6k+3}$

II-1-ب – التحقق أن العدد

$$2\left(\frac{z_A}{\sqrt{3}}\right)^{2015} + \left(\frac{z_B}{\sqrt{3}}\right)^{1962} - \left(\frac{z_C}{\sqrt{3}}\right)^{1435}$$ **هو حقيقي:**

لدينا

$$\left(\frac{z_A}{\sqrt{3}}\right)^{2015} = 2\left(\frac{\sqrt{3}e^{i\frac{5\pi}{6}}}{\sqrt{3}}\right)^{2015}$$

$$= 2\left(e^{i\frac{5\pi}{6}}\right)^{2015}$$

$$= 2e^{i(2015)\frac{5\pi}{6}} = 2e^{i(10075)\frac{\pi}{6}}$$

$$2\left(\frac{z_A}{\sqrt{3}}\right)^{2015} = 2e^{i((1679)(6)+1)\frac{\pi}{6}}$$

$$= 2e^{i\,1679\pi+\frac{\pi}{6}}$$

$$= 2e^{i\,1678\pi+\pi+\frac{\pi}{6}}$$

العدد 1678π نتخلص منه لأنه عدد دورات متكر
فقط ومنه

$$2\left(\frac{z_A}{\sqrt{3}}\right)^{2015} = 2e^{i\,1678\pi+\pi+\frac{\pi}{6}} = 2e^{i\frac{7\pi}{6}}$$

$$2\left(\frac{z_A}{\sqrt{3}}\right)^{2015} = 2\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$$

$$= 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)$$

ومنه

$$2\left(\frac{z_A}{\sqrt{3}}\right)^{2015} = -\sqrt{3} - i$$

$$2\left(\frac{z_A}{\sqrt{3}}\right)^{2015}+\left(\frac{z_B}{\sqrt{3}}\right)^{1962}-\left(\frac{z_C}{\sqrt{3}}\right)^{1435}$$
$$=-\sqrt{3}-i-1+i$$
$$=\boxed{-1-\sqrt{3}}$$

ومنه العدد $2\left(\frac{z_A}{\sqrt{3}}\right)^{2015}+\left(\frac{z_B}{\sqrt{3}}\right)^{1962}-\left(\frac{z_C}{\sqrt{3}}\right)^{1435}$ هو عدد حقيقي

II-2-أ – تعيين نسبة وزاوية التشابه المباشر S :

العبارة المختصرة للتشابه S الذي مركزه O ويحول D إلى A هي $z_A-z_O=a(z_D-z_O)$; $z_O=0$

ومنه $z_A=a\,z_D$

أي $a=\frac{z_A}{z_D}$

الشكل الأسي للعدد $z_D=1+i$ هو $|1+i|=\sqrt{2}$

$$\begin{cases}\arg(1+i)=\theta=\begin{cases}\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}\Rightarrow\theta_{z_D}=\frac{\pi}{4}\end{cases}$$

ومنه $z_D=\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}$

ومنه

$$a=\frac{z_A}{z_D}=\frac{\sqrt{3}\,e^{i\frac{5\pi}{6}}}{\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}}=\frac{\sqrt{3}\,e^{i\frac{5\pi}{6}}(\sqrt{2})}{\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}(\sqrt{2})}$$
$$=\frac{\sqrt{6}}{2}\,e^{i\left(\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{\sqrt{6}}{2}\,e^{i\left(\frac{7\pi}{12}\right)}$$

ومنه

$$a=\frac{\sqrt{6}}{2}\,e^{i\left(\frac{7\pi}{12}\right)}$$

نسبة التشابه المباشر S هي : $\boxed{k=|a|=\frac{\sqrt{6}}{2}}$

زاوية التشابه المباشر S هي : $\boxed{\theta=\arg(a)=\frac{7\pi}{12}}$

II-2-ب – كتابة $\frac{z_A}{z_D}$ على الشكل الجبري :

$$\frac{z_A}{z_D}=\frac{-\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}{1+i}$$

ولدينا

$$\left(\frac{z_B}{\sqrt{3}}\right)^{1962}=\left(\frac{\sqrt{3}e^{i\left(-\frac{5\pi}{6}\right)}}{\sqrt{3}}\right)^{1962}=\left(e^{i\left(-\frac{5\pi}{6}\right)}\right)^{1962}$$
$$=e^{i(-9810)\frac{\pi}{6}}$$
$$\left(\frac{z_B}{\sqrt{3}}\right)^{1962}=e^{i(-(1635)(6))\frac{\pi}{6}}=e^{i-1634\pi}$$
$$=e^{i(-1634\pi-\pi}$$

العدد -1634π نتخلص منه لأنه عدد دورات متكررة فقط ومنه

$$\left(\frac{z_B}{\sqrt{3}}\right)^{1962}=e^{-i\pi}=\cos-\pi+i\sin-\pi$$

من خواص الدوال المثلثية $\cos(\theta)=\cos(-\theta)$ و $-\sin(\theta)=\sin(-\theta)$ ومنه

$$\left(\frac{z_B}{\sqrt{3}}\right)^{1962}=\cos\pi-i\sin\pi=-1+0$$

ومنه

$$\left(\frac{z_B}{\sqrt{3}}\right)^{1962}=-1$$

ولدينا

$$-\left(\frac{z_C}{\sqrt{3}}\right)^{1435}=-\left(\frac{\sqrt{3}e^{i\left(\frac{\pi}{2}\right)}}{\sqrt{3}}\right)^{1435}$$
$$=-\left(e^{i\left(\frac{\pi}{2}\right)}\right)^{1435}$$
$$=-e^{i(1435)\left(\frac{\pi}{2}\right)}$$
$$-\left(\frac{z_C}{\sqrt{3}}\right)^{1435}=-e^{i(717(2)+1)\left(\frac{\pi}{2}\right)}$$
$$=-e^{i\,717\pi+\frac{\pi}{2}}$$
$$=-e^{i\,716\pi+\pi+\frac{\pi}{2}}$$

العدد 716π نتخلص منه لأنه عدد دورات متكررة فقط ومنه

$$-\left(\frac{z_C}{\sqrt{3}}\right)^{1435}=-e^{i\frac{3\pi}{2}}$$
$$=-\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$$
$$=0-i(-1)$$

ومنه

$$-\left(\frac{z_C}{\sqrt{3}}\right)^{1435}=i$$

ومنه

16. علوم تجريبية 2015 الموضوع 2

في المستوي المركب المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ نعتبر النقط A، B و C التي لاحقاتها على الترتيب: z_A، z_B و z_C حيث:

$z_A = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$ ، $z_B = -\overline{z_A}$ و

$z_C = -(z_A + z_B)$ ، ($\overline{z_A}$ هو مرافق z_A)

1-أ-اكتب كلا من العددين المركبين z_B و z_C على الشكل الأسي.

1-ب-استنتج أن النقط A، B و C تنتمي الى دائرة (γ) يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

1-جـ-أنشئ الدائرة (γ) والنقط A، B و C

2-أ-تحقق أن: $\frac{z_B - z_C}{z_B - z_A} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$

2-ب-استنتج أن المثلث ABC متقايس الأضلاع وأن النقطة O مركز ثقل هذا المثلث.

2-جـ-عين وأنشئ (E) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث: $|z| = |z - \sqrt{3} - i|$

3-أ-عين زاوية للدوران r الذي مركزه O ويحول B الى A

3-ب-اثبت أن صورة (E) بالدوران r هي محور القطعة $[OB]$

نص الإجابة

1-أ - كتابة z_B و z_C على الشكل الأسي:

أولا نكتب كلا من z_A، z_B و z_C على الشكل الجبري:

$$z_A = 2e^{i\frac{\pi}{6}} = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$
$$= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} + i$$

$$z_B = -\overline{z_A} = -(\sqrt{3} - i) = -\sqrt{3} + i$$

$$z_C = -(z_A + z_B) = -(\sqrt{3} + i - \sqrt{3} + i)$$
$$= -2i$$

كتابة z_B على الشكل الأسي

حساب $|z_B|$

$$|z_B| = \sqrt{3+1} = 2$$

حساب θ_B

$$\arg(z_B) = \theta_B : \begin{cases} \cos\theta_B = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta_B = \frac{1}{2} \end{cases}$$

نضرب في المرافق نجد

$$\frac{z_A}{z_D} = \frac{\left(-\frac{3}{2}+i\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{-\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}$$
$$= -\frac{3}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{4}i + \frac{\sqrt{3}}{4}$$

ومنه $\boxed{\frac{z_A}{z_D} = \frac{-3+\sqrt{3}}{4} + \frac{3+\sqrt{3}}{4}i}$

استنتاج القيمة المضبوطة لكل من :

$\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$

تطابق بين الشكل الجبري والشكل المثلثي للعدد $\frac{z_A}{z_D}$

- لدينا الشكل المثلثي للعدد $\frac{z_A}{z_D}$

$$\frac{z_A}{z_D} = \frac{\sqrt{6}}{2}e^{i\left(\frac{7\pi}{12}\right)} = \frac{\sqrt{6}}{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right)$$

$$\frac{z_A}{z_D} = \frac{\sqrt{6}}{2}\cos\frac{7\pi}{12} + i\frac{\sqrt{6}}{2}\sin\frac{7\pi}{12}$$

ولدينا الشكل الجبري للعدد $\frac{z_A}{z_D}$

$$\frac{z_A}{z_D} = \frac{-3+\sqrt{3}}{4} + \frac{3+\sqrt{3}}{4}i$$

ومنه

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{6}}{2}\cos\frac{7\pi}{12} = \frac{-3+\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{6}}{2}\sin\frac{7\pi}{12} = \frac{3+\sqrt{3}}{4} \end{cases} : \cos\frac{7\pi}{12} = \frac{\frac{-3+\sqrt{3}}{4}}{\frac{\sqrt{6}}{2}} = \boxed{\frac{-3+\sqrt{3}}{2\sqrt{6}}}$$
$$: \sin\frac{7\pi}{12} = \frac{\frac{3+\sqrt{3}}{4}}{\frac{\sqrt{6}}{2}} = \boxed{\frac{3+\sqrt{3}}{2\sqrt{6}}}$$

II-3- تعيين مجموعة النقط M التي تحقق $z = k(1+i)e^{i\left(\frac{7\pi}{12}\right)}$ حيث $k \in [0,+\infty[$:

لدينا $1 + i = z_D = \sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}$ بتعويضها نجد

$$z = k\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}} \cdot e^{i\left(\frac{7\pi}{12}\right)} = k\sqrt{2}\,e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{7\pi}{12}\right)}$$
$$= k\sqrt{2}\,e^{i\frac{5\pi}{6}}$$

ومنه $z = k\sqrt{2}\,e^{i\frac{5\pi}{6}}$

بما أن زاوية العدد z ثابتة وهي $arg(z) = \frac{5\pi}{6}$، أما الطويلة فمتغيرة بتغير العدد k أي

$|z| = k\sqrt{2}$ معناه

مجموعة النقط هي نصف مستقيم مبدؤه النقطة O ويميل بزاوية $\frac{5\pi}{6}$ وهو $[OA)$

أي: $\theta_B = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$

ومنه الشكل الأسي للعدد المركب z_B هو

$$\boxed{z_B = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}}$$

كتابة z_C على الشكل الأسي

حساب $|z_C|$

$$|z_C| = \sqrt{4+0} = 2$$

حساب θ_C

$$\arg(z_C) = \theta_C : \begin{cases} cos\theta_C = \frac{0}{2} = 0 \\ sin\theta_C = \frac{-2}{2} = -1 \end{cases}$$

أي

$$\theta_C = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

ومنه الشكل الأسي للعدد المركب z_C هو

$$\boxed{z_C = 2e^{-i\frac{\pi}{2}}}$$

1-ب – استنتاج أن النقط A ، B و C تنتمي إلى دائرة (γ)

لدينا

$$|z_A| = |z_B| = |z_C| = 2$$

وهذا يكافئ

$$|z_A - z_O| = |z_B - z_O| = |z_C - z_O| = 2$$

وهذا يكافئ

$$OA = OB = OC = 2$$

هذا يعني أن النقط A ، B و C تنتمي إلى دائرة (γ) مركزها المبدأ O ونصف قطرها $r = 2$

1-جـ- إنشاء الدائرة (γ) والنقط A ، B و C :

2- أ – التحقق أن $\frac{z_B - z_C}{z_B - z_A} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$:

بالتعويض نجد

$$\frac{z_B - z_C}{z_B - z_A} = \frac{-\sqrt{3} + i + 2i}{-\sqrt{3} + i - \sqrt{3} - i} = \frac{-\sqrt{3} + 3i}{-2\sqrt{3}}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{3}{2\sqrt{3}}i = \frac{1}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{6}i$$

ومنه

$$\frac{z_B - z_C}{z_B - z_A} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

حساب $\left|\frac{z_B - z_C}{z_B - z_A}\right|$

$$\left|\frac{z_B - z_C}{z_B - z_A}\right| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$$

حساب $\arg\left(\frac{z_B - z_C}{z_B - z_A}\right)$

$$\arg\left(\frac{z_B - z_C}{z_B - z_A}\right) = \begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{2} \\ \sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} : \theta$$

$$= -\frac{\pi}{3}$$

ومنه

$$\frac{z_B - z_C}{z_B - z_A} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

2-ب – استنتاج أن المثلث ABC متقايس الأضلاع:

لدينا

$$\frac{z_B - z_C}{z_B - z_A} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

ومنه

$$\left|\frac{z_B - z_C}{z_B - z_A}\right| = 1$$

معناه

$$|z_B - z_C| = |z_B - z_A|$$

أي

$$CB = AB \cdots (1)$$

ولدينا

$$\arg\left(\frac{z_B - z_C}{z_B - z_A}\right) = -\frac{\pi}{3}$$

معناه

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CB}) = -\frac{\pi}{3} \cdots (2)$$

من (1) و (2) المثلث ABC متقايس الأضلاع

استنتاج أن O مركز المثلث ABC:

تكون O مركز ثقل المثلث ABC إذا كانت مرجح الجملة $\{(A,1),(B,1),(C,1)\}$ ومنه

$$z_O = \frac{1z_A + 1z_B + 1z_C}{1+1+1}$$

$$= \frac{\sqrt{3} + i - \sqrt{3} + i - 2i}{3} = 0$$

ومنه O مركز ثقل المثلث ABC

2-جـ – تعيين المجموعة (E) :

طريقة (1):

لدينا $|z| = |z - \sqrt{3} - i|$

هذا يكافئ $|z - z_O| = |z - (\sqrt{3} + i)|$

وهذا يكافئ $|z - z_O| = |z - z_A|$

إذن $\boxed{OM = AM}$

ومنه المجموعة (E) هي محور القطعة المستقيمة $[OA]$

أي : $\theta_B = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$

ومنه الشكل الأسي للعدد المركب z_B هو

$$\boxed{z_B = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}}$$

كتابة z_C على الشكل الأسي

حساب $|z_C|$

$$|z_C| = \sqrt{4+0} = 2$$

حساب θ_C

$$\arg(z_C) = \theta_C : \begin{cases} cos\theta_C = \frac{0}{2} = 0 \\ sin\theta_C = \frac{-2}{2} = -1 \end{cases}$$

أي

$$\theta_C = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

ومنه الشكل الأسي للعدد المركب z_C هو

$$\boxed{z_C = 2e^{-i\frac{\pi}{2}}}$$

1-ب – استنتاج أن النقط A ، B و C تنتمي إلى دائرة (γ)

لدينا

$$|z_A| = |z_B| = |z_C| = 2$$

وهذا يكافئ

$$|z_A - z_O| = |z_B - z_O| = |z_C - z_O| = 2$$

وهذا يكافئ

$$OA = OB = OC = 2$$

هذا يعني أن النقط A ، B و C تنتمي إلى دائرة (γ) مركزها المبدأ O ونصف قطرها $r = 2$

1-جـ- إنشاء الدائرة (γ) والنقط A ، B و C :

2- أ – التحقق أن $\frac{z_B - z_C}{z_B - z_A} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$:

بالتعويض نجد

$$\frac{z_B - z_C}{z_B - z_A} = \frac{-\sqrt{3} + i + 2i}{-\sqrt{3} + i - \sqrt{3} - i} = \frac{-\sqrt{3} + 3i}{-2\sqrt{3}}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{3}{2\sqrt{3}}i = \frac{1}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{6}i$$

ومنه

$$\frac{z_B - z_C}{z_B - z_A} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

حساب $\left|\frac{z_B - z_C}{z_B - z_A}\right|$

$$\left|\frac{z_B - z_C}{z_B - z_A}\right| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$$

حساب $\arg\left(\frac{z_B - z_C}{z_B - z_A}\right)$

$$\arg\left(\frac{z_B - z_C}{z_B - z_A}\right) = \begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{2} \\ \sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} : \theta$$

$$= -\frac{\pi}{3}$$

ومنه

$$\frac{z_B - z_C}{z_B - z_A} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

2-ب – استنتاج أن المثلث ABC متقايس الأضلاع:

لدينا

$$\frac{z_B - z_C}{z_B - z_A} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

ومنه

$$\left|\frac{z_B - z_C}{z_B - z_A}\right| = 1$$

معناه

$$|z_B - z_C| = |z_B - z_A|$$

أي

$$CB = AB \cdots (1)$$

ولدينا

$$\arg\left(\frac{z_B - z_C}{z_B - z_A}\right) = -\frac{\pi}{3}$$

معناه

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CB}) = -\frac{\pi}{3} \cdots (2)$$

من (1) و (2) المثلث ABC متقايس الأضلاع

استنتاج أن O مركز المثلث ABC:

تكون O مركز ثقل المثلث ABC إذا كانت مرجح الجملة $\{(A,1),(B,1),(C,1)\}$ ومنه

$$z_O = \frac{1z_A + 1z_B + 1z_C}{1+1+1}$$

$$= \frac{\sqrt{3} + i - \sqrt{3} + i - 2i}{3} = 0$$

ومنه O مركز ثقل المثلث ABC

2-جـ – تعيين المجموعة (E) :

طريقة (1):

لدينا $|z| = |z - \sqrt{3} - i|$

هذا يكافئ $|z - z_O| = |z - (\sqrt{3} + i)|$

وهذا يكافئ $|z - z_O| = |z - z_A|$

إذن $\boxed{OM = AM}$

ومنه المجموعة (E) هي محور القطعة المستقيمة $[OA]$

طريقة (2):

لدينا $|z| = |z - \sqrt{3} - i|$

بتعويض $z = x + yi$ نجد

$$|x + yi| = |x + yi - \sqrt{3} - i|$$

هذا يكافئ:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(x - \sqrt{3})^2 + (y - 1)^2}$$

بتربيع الطرفين نجد

$$x^2 + y^2 = x^2 + 3 - 2x\sqrt{3} + y^2 + 1 - 2y$$

$$-2x\sqrt{3} - 2y + 4 = 0$$

ومنه $x\sqrt{3} + y - 2 = 0$

ومنه $\boxed{y = -\sqrt{3}x + 2}$

ومنه المجموعة (E) هي المستقيم ذو المعادلة $y = -\sqrt{3}x + 2$.

إنشاء المجموعة (E) :

3-أ – تعيين زاوية الدوران r :

لدينا العبارة المختصرة للدوران r الذي مركزه O ويحول C إلى A هي

$z_O = 0$: $z_A - z_O = a(z_C - z_O)$

أي

$$z_A = a\, z_C$$

ومنه

$$a = \frac{z_A}{z_C} = \frac{2e^{i\frac{\pi}{6}}}{2e^{-i\frac{\pi}{2}}} = e^{i\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}\right)} = e^{i\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}\right)}$$

$$= e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

ومنه

$$\boxed{\arg(a) = \frac{2\pi}{3}}$$

زاوية الدوران r هي $\frac{2\pi}{3}$

3-ب – إثبات أن صورة (E) هي محور القطعة $[OB]$ بالدوران r :

لدينا $z' = e^{i\frac{2\pi}{3}} z$

إيجاد صورة النقطة A بالدوران r

$$z' = e^{i\frac{2\pi}{3}} z_A = e^{i\frac{2\pi}{3}} \cdot 2e^{i\frac{\pi}{6}} = 2e^{i\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right)}$$

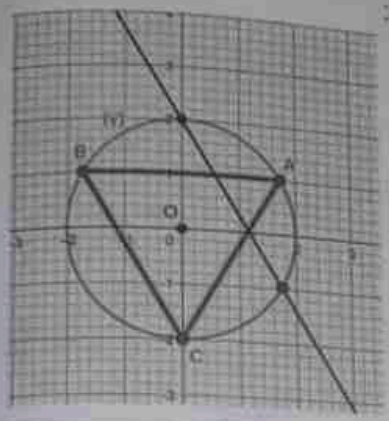
$$= 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$$

أي $z' = 2e^{i\frac{5\pi}{6}} = z_B$

ومنه صورة A بالدوران r هي B ، و O هي مركز الدوران فهي نقطة صامدة، والدوران يحافظ على المتصفات والتعامد، وصورة مستقيم بالدوران هي مستقيم(صورة محور هي محور).

ومنه صورة (E) هي محور القطعة $[OB]$ بالدوران r

الرسم:



17. علوم تجريبية 2014 الموضوع 01

1-حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة

$$z^2 - 6\sqrt{2}z + 36 = 0$$

2-المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$، لتكن النقط A ، B ، C و D التي لاحقاتها على الترتيب: $z_A = 3\sqrt{2}(1 + i)$ ، $z_B = \overline{z_A}$ و $z_C = 6\sqrt{2}$ ، $z_D = \frac{z_C}{2}$

2-أ- اكتب z_A ، z_B و $(1 + i)z_A$ على الشكل الأسي

2-ب-احسب $\left(\frac{(1+i)z_A}{6\sqrt{2}}\right)^{2014}$

2-جـ- بيّن أن النقط O ، A ، B و C تنتمي الى نفس الدائرة التي مركزها D، يطلب تعيين نصف قطرها.

2-د-احسب $\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}$ ثم جد قيسا لزاوية $(\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CB})$

ماهي طبيعة الرباعي $OACB$؟

3-ليكن R الدوران الذي مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

3-أ-اكتب العبارة المركبة للدوران R

3-ب-عين لاحقة النقطة C' صورة C بالدوران R ثم تحقق أن النقط A ، C و C' في استقامية.

3-جـ-عين لاحقة النقطة A' صورة A بالدوران R ثم حدد صورة الرباعي $OACB$ بالدوران R

نص الإجابة

1-حل في C المعادلة $z^2 - 6\sqrt{2}\,z + 36 = 0$:

$$z^2 - 6\sqrt{2}\,z + 36 = 0$$
$$\Delta = \left(-6\sqrt{2}\right)^2 - 4(1)(36) = -72$$
$$= (6i\sqrt{2})^2$$
$$z_1 = \frac{6\sqrt{2} - 6i\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2} - 3i\sqrt{2}$$
$$= 3\sqrt{2}(1 - i)$$
$$z_2 = \frac{6\sqrt{2} + 6i\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2} + 3i\sqrt{2}$$
$$= 3\sqrt{2}(1 + i)$$

ومنه $S = \left\{3\sqrt{2}(1-i), 3\sqrt{2}(1+i)\right\}$

2-أ - كتابة z_A و z_B و $(1+i)z_A$ على الشكل الأسي:

كتابة z_A على الشكل الأسي

حساب $|z_A|$

$$|z_A| = |3\sqrt{2}(1+i)| = |3\sqrt{2}||1+i|$$
$$= 3\sqrt{2} \times \sqrt{1+1} = 3 \times 2$$
$$|z_A| = 6$$

حساب θ_A

$$\arg(z_A) = \theta_A : \begin{cases} cos\theta_A = \frac{3\sqrt{2}}{6} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ sin\theta_A = \frac{3\sqrt{2}}{6} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

أي $\theta_A = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$

ومنه الشكل الأسي للعدد المركب z_A هو

$$\boxed{z_A = 6e^{i\frac{\pi}{4}}}$$

كتابة z_B على الشكل الأسي

$$z_B = \overline{z_A} = 6e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

كتابة $(1+i)z_A$ على الشكل الأسي

حساب $|(1+i)z_A|$

$$|(1+i)z_A| = |(1+i)||z_A| = \sqrt{2} \cdot 6$$
$$|(1+i)z_A| = 6\sqrt{2}$$

حساب $\theta_{(1+i)z_A}$

$$\arg((1+i)z_A) = \arg(1+i) + \arg(z_A)$$

$$\arg(z_{(1+i)}) = \theta_{(1+i)} : \begin{cases} cos\theta_{(1+i)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ sin\theta_{(1+i)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

ومنه $\theta_{(1+i)z_A} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}$

$$\theta_{(1+i)z_A} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

ومنه الشكل الأسي للعدد المركب $z_{(1+i)z_A}$ هو

$$\boxed{z_{(1+i)z_A} = 6\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{2}}}$$

2-ب – حساب $\left(\frac{(1+i)z_A}{6\sqrt{2}}\right)^{2014}$:

$$\left(\frac{(1+i)z_A}{6\sqrt{2}}\right)^{2014} = \left(\frac{6\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{2}}}{6\sqrt{2}}\right)^{2014}$$
$$= \left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^{2014} = e^{i(2014)\frac{\pi}{2}}$$
$$= e^{i1007\pi} = e^{i(1006\pi+\pi)}$$

نتخلص من العدد 1006π لأنه عدد دورات متكرر فقط يصبح

$$\left(\frac{(1+i)z_A}{6\sqrt{2}}\right)^{2014} = e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi$$
$$= -1$$

ومنه $\boxed{\left(\frac{(1+i)z_A}{6\sqrt{2}}\right)^{2014} = -1}$

2-جـ – البرهان أن النقط O ، A ، B و C تنتمي إلى نفس الدائرة مركزها D مع تعيين نصف قطرها:

لدينا

$$DO = |z_O - z_D| = \left|0 - \frac{z_C}{2}\right| = \left|-\frac{6\sqrt{2}}{2}\right|$$
$$= 3\sqrt{2}$$
$$DA = |z_A - z_D| = \left|3\sqrt{2}(1+i) - \frac{z_C}{2}\right|$$
$$= \left|3\sqrt{2} + 3i\sqrt{2} - \frac{6\sqrt{2}}{2}\right|$$
$$= \left|3i\sqrt{2}\right| = 3\sqrt{2}$$
$$DB = |z_B - z_D| = \left|3\sqrt{2}(1-i) - \frac{z_C}{2}\right|$$
$$= \left|3\sqrt{2} - 3i\sqrt{2} - \frac{6\sqrt{2}}{2}\right|$$
$$= \left|-3i\sqrt{2}\right| = 3\sqrt{2}$$
$$DC = |z_C - z_D| = \left|6\sqrt{2} - \frac{z_C}{2}\right|$$
$$= \left|6\sqrt{2} - \frac{6\sqrt{2}}{2}\right| = 3\sqrt{2}$$

بما أن $DO = DA = DB = DC = 3\sqrt{2}$

فإن النقط O ، A ، B و C تنتمي إلى نفس الدائرة مركزها D و نصف قطرها $r = 3\sqrt{2}$

2ـد ـ حساب $\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}$:

$$\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = \frac{3\sqrt{2} - 3i\sqrt{2} - 6\sqrt{2}}{3\sqrt{2} + 3i\sqrt{2} - 6\sqrt{2}}$$
$$= \frac{-3\sqrt{2} - 3i\sqrt{2}}{-3\sqrt{2} + 3i\sqrt{2}}$$

نستخرج $3\sqrt{2}$ كعامل مشترك نجد

$$\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = \frac{(3\sqrt{2})(-1 - i)}{(3\sqrt{2})(-1 + i)}$$

نضرب في المرافق للمقام نجد

$$\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = \frac{(-1 - i)(-1 - i)}{(-1 + i)(-1 - i)} = \frac{2i}{2}$$

ومنه $\boxed{\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = i}$

قيس الزاوية $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$

$$(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = arg\left(\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right) = arg(i) = \frac{\pi}{2}$$

وبما أن $\left|\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right| = |i| = 1$

فإن المثلث CAB متساوي الساقين وقائم في C

ونكتب: $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \frac{\pi}{2}$ و $CA = CB$

طبيعة الرباعي $OACB$:

النقط C ، D و O في استقامية لأنها تنتمي إلى (xx') ، وكذلك النقطتان A و B متناظرتان بالنسبة إلى (xx')، ومنه فالرباعي $OACB$ هو مستطيل ولكن الزاوية $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \frac{\pi}{2}$ و المثلث CAB متساوي الساقين وقائم في C فالرباعي $OACB$ هو مربع.

3ـأ ـ كتابة العبارة المركبة للدوران R الذي مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{2}$:

لدينا العبارة المختصرة للدوران R هي :

$$z' - z_O = e^{i\frac{\pi}{2}}(z - z_O) \quad ; \; z_O = 0$$

أي $z' = e^{i\frac{\pi}{2}} z$

ومنه العبارة المركبة للدوران R هي : $\boxed{z' = iz}$

3ـب ـ تعيين C' صورة C بالدوران R:

لدينا $z_{C'} = iz_C$

بالتعويض نجد $z_{C'} = i(6\sqrt{2}) = 6i\sqrt{2}$

ومنه $\boxed{z_{C'} = 6i\sqrt{2}}$

التحقق أن النقط A ، C و C' في استقامية:

يكفي أن نبرهن أن $\frac{z_{C'} - z_A}{z_{C'} - z_C} \in R$ أي تكون عددا حقيقيا

$$\frac{z_{C'} - z_A}{z_{C'} - z_C} = \frac{6i\sqrt{2} - 3\sqrt{2} - 3i\sqrt{2}}{6i\sqrt{2} - 6\sqrt{2}}$$
$$= \frac{3i\sqrt{2} - 3\sqrt{2}}{6i\sqrt{2} - 6\sqrt{2}} = \frac{i - 1}{2i - 2}$$

نقوم بالجراح $\frac{1}{2}$ كعامل مشترك نجد

$$\frac{z_{C'} - z_A}{z_{C'} - z_C} = \frac{1}{2}(1) = \frac{1}{2}$$

ومنه النقط A ، C و C' في استقامية

3ـجـ ـ تعيين A' صورة A بالدوران R:

لدينا $z_{A'} = iz_A$

بالتعويض نجد

$$z_{A'} = i(3\sqrt{2} + 3i\sqrt{2}) = 3i\sqrt{2} - 3\sqrt{2}$$
$$= 3\sqrt{2}(-1 + i)$$

ومنه $\boxed{z_{A'} = 3\sqrt{2}(-1 + i)}$

تحديد صورة الرباعي $OACB$ بالدوران R:

صورة المربع $OACB$ هو المربع $OAC'A'$ لأن الدوران يحافظ على المسافات وعلى الأشكال وعلى المساحة

18. علوم تجريبية 2014 الموضوع 02

1ـحل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z حيث:

$$(z - i)(z^2 - 2z + 5) = 0$$

2ـفي المستوي المركب المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ (وحدة الطول $1cm$)، نعطي النقط A ، B و C التي لاحقاتها:

$z_A = i$ ، $z_B = 1 + 2i$ و $z_C = 1 - 2i$

على الترتيب.

2ـأ ـ علم النقط A ، B و C

2ـب ـ عين z_H لاحقة النقطة H المسقط العمودي للنقطة A على المستقيم (BC)

2ـجـ ـ احسب مساحة المثلث ABC.

3ـ ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه A ونسبته $\frac{1}{2}$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

3ـأ ـ عين الكتابة المركبة للتشابه S.

3ـب ـ بين أن مساحة صورة المثلث ABC بالتشابه S تساوي $\frac{1}{2} cm^2$

4ـ M نقطة لاحقتها z، عين مجموعة النقط M حيث:

$$|z| = |iz + 1 + 2i|$$

نص الإجابة

1-حل في C المعادلة $(z-i)(z^2-2z+5)=0$

لدينا $(z-i)(z^2-2z+5)=0$
معناه

$$\begin{cases} z-i=0 \\ \text{أو} \\ z^2-2z+5=0 \end{cases}$$

إذن

$$z-i=0$$
$$z=i$$

ومنه $z_0=i$
و

$$z^2-2z+5=0$$
$$\Delta=(-2)^2-4(1)(5)=-16=(4i)^2$$
$$z_1=\frac{2+4i}{2}=1+2i$$
$$z_2=\frac{2-4i}{2}=1-2i$$

ومنه $\boxed{S=\{i\,,1+2i\,,1-2i\}}$

2-أ - إنشاء النقط A ، B و C :

النقطة $A(0,1)$ ، النقطة $B(1,2)$ ، و النقطة $C(1,-2)$

2-ب – إيجاد z_H لاحقة النقطة H المسقط العمودي للنقطة A على (BC):

من التمثيل البياني نلاحظ أن النقطة $H(1,1)$ ومنه

$$\boxed{z_H=1+i}$$

2-جـ- حساب مساحة المثلث ABC :

طريقة (1):

$$S_{ABC}=\frac{BC\times HA}{2}=\frac{4\times 1}{2}$$

ومنه $\boxed{S_{ABC}=2\,cm^2}$

طريقة (2):

$$S_{ABC}=\frac{|z_C-z_B||z_A-z_H|}{2}$$

بالتعويض نجد

$$S_{ABC}=\frac{|1-2i-1-2i||i-1-i|}{2}$$
$$=\frac{|-4i||-1|}{2}$$

$$\boxed{S_{ABC}=2\,cm^2}$$

3-أ – تعيين الكتابة المركبة للتشابه S:

لدينا الكتابة المختصرة للتشابه S الذي مركزه A ، نسبته $\frac{1}{2}$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$ هي

$$z'-z_A=\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{2}}(z-z_A)$$

نقوم بتعويض z_A نجد

$$z'-i=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)(z-i)$$
$$z'-i=\frac{1}{2}(0+i)(z-i)=\frac{1}{2}i(z-i)$$

ومنه الكتابة المركبة للتشابه S هي

$$\boxed{z'=\frac{1}{2}iz+\frac{1}{2}+i}$$

3-ب – البرهان أن مساحة صورة المثلث ABC بالتشابه S تساوي $\frac{1}{2}\,cm^2$:

المثلث $AB'C'$ صورة المثلث ABC بالتشابه S الذي مركزه A، والتشابه المباشر يؤثر على الأطوال بنسبته $k=\frac{1}{2}$ ويصبح : $B'C'=k\,BC$

ومنه $B'C'=\frac{1}{2}4=2$

$$AH'=k\,AH$$

ومنه $AH'=\frac{1}{2}1=\frac{1}{2}$

ومنه مساحة $AB'C'$ تكون

$$S_{AB'C'}=\frac{B'C'\times AH'}{2}=\frac{2\times\frac{1}{2}}{2}$$

ومنه $S_{AB'C'}=\frac{1}{2}\,cm^2$

4 – تعيين مجموعة النقط M حيث $|z|=|iz+1+2i|$:

لدينا

$$|z|=|iz+1+2i|=\left|i\left(z+\frac{1}{i}+2\right)\right|$$
$$=\left|i\left(z+\frac{1}{i}+\frac{2i}{i}\right)\right|$$
$$=\left|i\left(z+\frac{1+2i}{i}\right)\right|$$

نضرب في مرافق المقام نجد

$$|z|=\left|i\left(z+\frac{(1+2i)(-i)}{i(-i)}\right)\right|$$
$$=\left|i\left(z+\frac{-i+2}{1}\right)\right|$$
$$=|i(z+2-i)|$$

من خواص الطويلة أن $|a\cdot b|=|a|\cdot|b|$ ومنه

$|z|=|i|\cdot|z+2-i|=1\cdot|z+2-i|$

الأعداد المركبة من الألف الى الياء

أي $|z| = |z + 2 - i|$

وهذا يكافئ

$|z - z_O| = |z - (-2 + i)|$

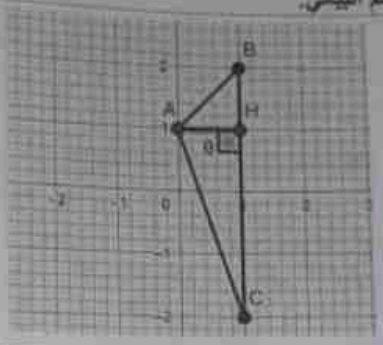
وهذا يكافئ (بوضع $z_D = -2 + i$)

$|z - z_O| = |z - z_D|$

إذن $OM = DM$

ومنه مجموعة النقط M هي محور القطعة المستقيمة $[OD]$

الرسم البياني:



19. علوم تجريبية 2013 الموضوع 01

1-حل في $\mathbb{C}$ مجموعة الأعداد المركبة، المعادلة (I) ذات المجهول z التالية:

$z^2 - (4\cos\alpha)z + 4 = 0 \ldots\ldots (I)$

حيث α وسيط حقيقي.

2-من أجل $\alpha = \frac{\pi}{3}$، نرمز الى حلي المعادلة (I) بـ z_1 و z_2 بيّن أن: $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2013} = 1$

3- نعتبر في المستوي المركب المنسوب الى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ النقط A، B و C والتي لاحقاتها:

$z_A = 1 + i\sqrt{3}$ ،$z_B = 1 - i\sqrt{3}$

و $z_C = 4 + i\sqrt{3}$ على الترتيب.

3-أ-أنشئ النقط A، B و C

3-ب-اكتب على الشكل الجبري العدد المركب $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$، ثم استنتج أن C هي صورة B بالتشابه المباشر S الذي مركزه A ويطلب تعيين نسبته وزاويته.

3-جـ-عين لاحقة النقطة G مرجح الجملة $\{(A;1),(B;-1),(C;2)\}$، ثم أنشئ G.

3-د-احسب z_D لاحقة النقطة D بحيث يكون الرباعي $ABDG$ متوازي أضلاع.

نص الإجابة

1-حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (I) ذات المجهول z:

$z^2 - (4\cos\alpha)z + 4 = 0$

$\Delta = [-(4\cos\alpha)]^2 - 4(1)(4)$

$= 16\cos^2\alpha - 16$

نقوم بإخراج 16 كعامل مشترك نجد

$\Delta = 16(\cos^2\alpha - 1)$

ومن خواص الدائرة المثلثية $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ أي $\cos^2\alpha - 1 = -\sin^2\alpha$ ومنه

$\Delta = -16\sin^2\alpha = (4i\sin\alpha)^2$

$z_1 = \frac{4\cos\alpha - 4i\sin\alpha}{2} = 2\cos\alpha - 2i\sin\alpha$

$z_2 = \frac{4\cos\alpha + 4i\sin\alpha}{2} = 2\cos\alpha + 2i\sin\alpha$

ومنه $S = \{z_1, z_2\}$

2-التبيين أن $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2013} = 1$ حيث $\alpha = \frac{\pi}{3}$:

$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2013} = \left(\frac{2\cos\frac{\pi}{3} - 2i\sin\frac{\pi}{3}}{2\cos\frac{\pi}{3} + 2i\sin\frac{\pi}{3}}\right)^{2013}$

$= \left(\frac{\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}}\right)^{2013}$

من خواص الدوال المثلثية

$\cos\alpha = \cos(-\alpha)$ و $-\sin\alpha = \sin(-\alpha)$ ومنه

$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2013} = \left(\frac{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)}{\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}}\right)^{2013}$

$= \left(\frac{e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)}}{e^{i\frac{\pi}{3}}}\right)^{2013}$

$= \left(e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)} \cdot e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)}\right)^{2013}$

$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2013} = \left(e^{i\left(-\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3}\right)}\right)^{2013} = e^{-i(2013)\frac{2\pi}{3}}$

$= e^{i(-1342\pi)}$

هذا يكافئ

$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2013} = \cos(-1342\pi) + i\sin(-1342\pi)$

بما أن العدد -1342π زوجي فإن

$\cos(-1342\pi) = 1$ و $\sin(-1342\pi) = 0$

ومنه $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2013} = 1$

3-أ – إنشاء النقط A ، B و C :

النقطة $A(1,\sqrt{3})$ ، النقطة $B(1,-\sqrt{3})$ والنقطة $C(4,\sqrt{3})$

طريقة إنشاء النقط التي بها أعداد مجذورة:

أو لا نقوم بحساب طويلة العدد:

$$z_A = 1 + i\sqrt{3}$$

ومنه $|z_A| = |1 + i\sqrt{3}| = \sqrt{1+3} = 2$

ثانيا ننشئ بالمدور دائرة: مركزها المبدأ O ونصف قطرها $r = |z_A| = 2$

ثالثا نعين العدد المضبوط بين الاحداثيات: العدد 1 وبالضرورة العدد الآخر بعد إسقاطه هو العدد $\sqrt{3}$ بقيمة مضبوطة.

وبنفس الطريقة ننشأ النقط B و C

3-ب – كتابة العدد المركب $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ على الشكل الجبري:

لدينا

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{4 + i\sqrt{3} - 1 - i\sqrt{3}}{1 - i\sqrt{3} - 1 - i\sqrt{3}} = \frac{3}{-2i\sqrt{3}}$$

نضرب في مرافق المقام

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{3(2i\sqrt{3})}{(-2i\sqrt{3})(2i\sqrt{3})} = \frac{6i\sqrt{3}}{12}$$

ومنه $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{\sqrt{3}}{2}i$

استنتاج أن C هي صورة B بالتشابه المباشر S :

لدينا $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{\sqrt{3}}{2}i$

بضرب الوسطين في الطرفين نجد

$$(z_C - z_A)2 = i\sqrt{3}\,(z_B - z_A)$$

ومنه

$$(z_C - z_A) = \frac{i\sqrt{3}}{2}\,(z_B - z_A)$$

ومنه

$$|a| = \left|\frac{i\sqrt{3}}{2}\right| = \frac{\sqrt{3}}{2} \neq 1$$

أي S تشابه مباشر نسبته هي $k = \frac{\sqrt{3}}{2}$ وزاويته $\theta = \arg\left(\frac{i\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$ ومركزه هي النقطة A ويحول B إلى C

3-جـ – تعيين لاحقة النقطة G مرجح الجملة $[(A,1),(B,-1)(C,2)]$:

$$z_G = \frac{1z_A + (-1)z_B + 2z_C}{1 - 1 + 2}$$

$$= \frac{1 + i\sqrt{3} - 1 + i\sqrt{3} + 8 + 2i\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{8 + 4i\sqrt{3}}{2}$$

ومنه

$$z_G = 4 + 2i\sqrt{3}$$

إنشاء النقطة G :

3-د – حساب z_D حتى يكون الرباعي $ABDG$ متوازي أضلاع:

حتى يكون الرباعي $ABDG$ متوازي أضلاع يجب أن يكون $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{GD}$

أي $z_B - z_A = z_D - z_G$

ومنه $z_D = z_B - z_A + z_G$

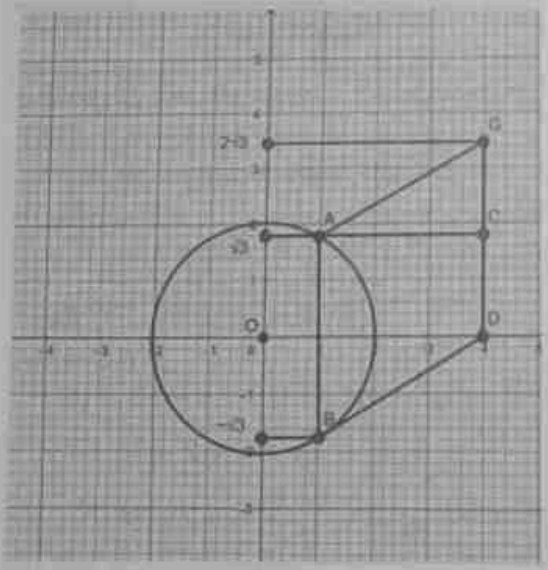
بالتعويض نجد

$$z_D = 1 - i\sqrt{3} - 1 - i\sqrt{3} + 4 + 2i\sqrt{3}$$

ومنه

$$z_D = 4$$

الرسم البياني:



20. علوم تجريبية 2013 الموضوع 02

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة (E) ذات المجهول z الآتية:

$$z^2 + 4z + 13 = 0 \quad \ldots\ldots (E)$$

1-نتحقق أن العدد المركب $-2 - 3i$ حل للمعادلة (E) ، ثم جد الحل الآخر .

2- A و B نقطتان من المستوي المركب لاحقتاهما $z_A = -2 - 3i$ و $z_B = i$ على الترتيب. التشابه المباشر الذي مركزه A، نسبته $\frac{1}{2}$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$ والذي يحول كل نقطة $M(z)$ من المستوي الى النقطة $M'(z')$

2-أ-بين أن: $z' = \frac{1}{2}iz - \frac{7}{2} - 2i$

2-ب-احسب z_C لاحقة النقطة C ، علما أن C هي صورة B بالتشابه S

3-لتكن النقطة D ، حيث: $2\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$

3-أ-بين أن D هي مرجح النقطتين A و B المرفقتين بمعاملين حقيقيين يطلب تعيينهما.

3-ب-احسب z_D لاحقة النقطة D

3-جـ-بين أن $i = \frac{z_D - z_A}{z_C - z_A}$ ، ثم استنتج طبيعة المثلث ACD

نص الإجابة

1-التحقق أن العدد المركب $-2 - 3i$ حل للمعادلة: $z^2 + 4z + 13 = 0 \ldots\ldots (E)$

$$(-2-3i)^2 + 4(-2-3i) + 13 = 0$$

هذا يكافئ

$$4 - 9 + 12i - 8 - 12i + 13 = 0$$
$$-17 + 17 = 0$$

ومنه $-2 - 3i$ حل للمعادلة (E)

إيجاد الحل الآخر:

$$\Delta = (4)^2 - 4(1)(13) = 16 - 52 = (6i)^2$$
$$z_1 = \frac{-4 - 6i}{2} = -2 - 3i$$
$$z_2 = \frac{-4 + 6i}{2} = -2 + 3i$$

ومنه الحل الآخر هو $-2 + 3i$

2-أ – التبيين أن $z' = \frac{1}{2}iz - \frac{7}{2} - 2i$:

التشابه المباشر S الذي مركزه A ونسبته $\frac{1}{2}$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$ ويحول M إلى M' عبارته المختصرة هي:

$$z' - z_A = \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{2}}(z - z_A)$$

نعوض z_A نجد

$$z' + 2 + 3i = \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{2}}(z + 2 + 3i)$$

ومنه

$$z' = \frac{1}{2}(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})(z + 2 + 3i) - 2 - 3i$$
$$z' = \frac{1}{2}(0 + i)(z + 2 + 3i) - 2 - 3i$$
$$z' = \frac{1}{2}iz + i - \frac{3}{2} - 2 - 3i$$

ومنه $z' = \frac{1}{2}iz - \frac{7}{2} - 2i$

2-ب – حساب z_C حيث C صورة B بالتشابه S:

لدينا $z' = \frac{1}{2}iz - \frac{7}{2} - 2i$

ومنه $z_C = \frac{1}{2}iz_B - \frac{7}{2} - 2i$

بتعويض z_B نجد

$$z_C = \frac{1}{2}i(i) - \frac{7}{2} - 2i = -\frac{1}{2} - \frac{7}{2} - 2i$$

ومنه $\boxed{z_C = -4 - 2i}$

3-أ – التبيين أن D هي مرجح A و B مع تعيين المعاملين الحقيقيين:

لدينا

$$2\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$$

نقوم بإدخال D على $\overrightarrow{AB}$ ونطبق علاقة شال نجد

$$2\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} = \vec{0}$$

هذا يكافئ

$$3\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} = \vec{0}$$

ويكافئ

$$-3\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} = \vec{0}$$

أن D هي مرجح A و B مع المعاملين

$$\alpha = -3 \text{ و } \beta = 1$$

3-ب – حساب z_D :

بما أن D هي مرجح A و B فإن

$$z_D = \frac{-3z_A + 1z_B}{-3 + 1} = \frac{-3(-2 - 3i) + 1(i)}{-3 + 1}$$
$$= \frac{6 + 9i + i}{-2}$$

ومنه $\boxed{z_D = -3 - 5i}$

3-جـ- التبيين أن $\frac{z_D - z_A}{z_C - z_A} = i$:

$$\frac{z_D - z_A}{z_C - z_A} = \frac{-3 - 5i + 2 + 3i}{-4 - 2i + 2 + 3i} = \frac{-1 - 2i}{-2 + i}$$

نضرب في المرافق نجد

$$\frac{z_D - z_A}{z_C - z_A} = \frac{(-1-2i)(-2-i)}{(-2+i)(-2-i)} = \frac{2+i+4i-2}{5} = \frac{5i}{5} = i$$

ومنه $\frac{z_D - z_A}{z_C - z_A} = i$

استنتاج طبيعة المثلث ACD :

لدينا $\frac{z_D - z_A}{z_C - z_A} = i$

ومنه $\left|\frac{z_D - z_A}{z_C - z_A}\right| = |i| = 1$

أي

$$|z_D - z_A| = |z_C - z_A|$$

أي

$$AD = AC \ldots\ldots (1)$$

ولدينا $\arg\left(\frac{z_D - z_A}{z_C - z_A}\right) = \arg(i) = \frac{\pi}{2}$

معناه $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2} \ldots\ldots (2)$

من (1) و (2) نستنتج أن المثلث ACD متساوي الساقين وقائم في A

21. علوم تجريبية 2012 الموضوع 01

1- نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية: $z = \frac{3i(z+2i)}{z-2+3i}$ (حيث $z \neq 2 - 3i$)

حل في $\mathbb{C}$ هذه المعادلة.

2- نيتسب المستوي المركب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$. A و B نقطتان لاحقتاهما على الترتيب z_A و z_B حيث: $z_A = 1 + i\sqrt{5}$ و $z_B = 1 - i\sqrt{5}$

تحقق أن A و B تنتميان الى دائرة مركزها O يطلب تعيين نصف قطرها.

3- نرفق بكل نقطة M من المستوي لاحقتها z $(z \neq 2 - 3i)$ النقطة M' لاحقتها z' حيث $z' = \frac{3i(z+2i)}{z-2+3i}$

النقط C ، D ، E لواحقها على الترتيب: $z_C = -2i$ ، $z_D = 2 - 3i$ و $z_E = 3i$ و (Δ) محور القطعة $[CD]$.

3-أ- عبر عن المسافة OM' بدلالة المسافتين CM و DM.

3-ب- استنتج انه من اجل كل نقطة M من (Δ) فان النقطة M' تنتمي الى دائرة (γ) يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها. تحقق أن E تنتمي الى (γ)

نص الاجابة

1- حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z = \frac{3i(z+2i)}{z-2+3i}$:

$$z = \frac{3i(z+2i)}{z-2+3i}$$

نستعمل جداء الطرفين في جداء الوسطين نجد

$$z(z-2+3i) = 3i(z+2i)$$

هذا يكافئ

$$z^2 - 2z + 3iz = 3iz - 6$$

هذا يكافئ

$$z^2 - 2z + 3iz - 3iz + 6 = 0$$

إذن

$$z^2 - 2z + 6 = 0$$

$$\Delta = (-2)^2 - 4(1)(6) = -20 = (2i\sqrt{5})^2$$

$$z_1 = \frac{2 - 2i\sqrt{5}}{2} = 1 - i\sqrt{5}$$

$$z_2 = \frac{2 + 2i\sqrt{5}}{2} = 1 + i\sqrt{5}$$

ومنه $S = \{1 - i\sqrt{5}, 1 + i\sqrt{5}\}$

2- التحقق أن A و B تنتميان الى دائرة مركزها O مع تعيين نصف قطرها:

يجب أن يكون $|z_O - z_A| = |z_O - z_B|$ معناه

$$AO = BO$$

أي

$$AO = |z_A| = \sqrt{1+5} = \sqrt{6}$$

$$BO = |z_B| = \sqrt{1+5} = \sqrt{6}$$

بما أن $AO = BO = \sqrt{6}$ فإن A و B تنتميان الى دائرة مركزها O ونصف قطرها $r = \sqrt{6}$

3-أ - التعبير عن المسافة OM' بدلالة المسافتين CM و DM :

لدينا

$$OM' = |z' - z_O| = |z'| = \left|\frac{3i(z+2i)}{z-2+3i}\right|$$

هذا يكافئ

$$OM' = \frac{|3i| \cdot |z+2i|}{|z-2+3i|} = |3i| \frac{|z - z_C|}{|z - z_D|}$$

ومنه $\boxed{OM' = 3\frac{CM}{DM}}$

3-ب – استنتاج انه من أجل كل $M \in (\Delta)$ فإن M' تنتمي لدائرة (γ) مع تعيين مركزها ونصف قطرها:

من أجل كل $M \in (\Delta)$ فإن $CM = DM$

نضرب في المرافق نجد

$$\frac{z_D - z_A}{z_C - z_A} = \frac{(-1-2i)(-2-i)}{(-2+i)(-2-i)} = \frac{2+i+4i-2}{5} = \frac{5i}{5}$$

ومنه $\frac{z_D - z_A}{z_C - z_A} = i$

استنتاج طبيعة المثلث ACD :

لدينا $\frac{z_D - z_A}{z_C - z_A} = i$

ومنه $\left|\frac{z_D - z_A}{z_C - z_A}\right| = |i| = 1$

أي

$$|z_D - z_A| = |z_C - z_A|$$

أي

$$AD = AC \ldots\ldots (1)$$

ولدينا $\arg\left(\frac{z_D - z_A}{z_C - z_A}\right) = \arg(i) = \frac{\pi}{2}$

معناه $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2} \ldots\ldots (2)$

من (1) و (2) نستنتج أن المثلث ACD متساوي الساقين وقائم في A

21. علوم تجريبية 2012 الموضوع 01

1- نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية: $z = \frac{3i(z+2i)}{z-2+3i}$

(حيث $z \neq 2 - 3i$)

حل في $\mathbb{C}$ هذه المعادلة.

2-ينسب المستوي المركب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$. A و B نقطتان لاحقتاهما على الترتيب: z_A و z_B حيث: $z_A = 1 + i\sqrt{5}$ و $z_B = 1 - i\sqrt{5}$

-تحقق أن A و B تنتميان الى دائرة مركزها O يطلب تعيين نصف قطرها.

3-نرفق بكل نقطة M من المستوي لاحقتها z $(z \neq 2 - 3i)$ النقطة M' لاحقتها z' حيث $z' = \frac{3i(z+2i)}{z-2+3i}$ النقط C ، D ، E لواحقها على الترتيب: $z_C = -2i$ ، $z_D = 2 - 3i$ و $z_E = 3i$ و (Δ) محور القطعة $[CD]$.

3-أ-عبر عن المسافة OM' بدلالة المسافتين CM و DM.

3-ب-استنتج أنه من أجل كل نقطة M من (Δ) فإن النقطة M' تنتمي الى دائرة (γ) يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها. تحقق أن E تنتمي الى (γ)

نص الإجابة

1-حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z = \frac{3i(z+2i)}{z-2+3i}$:

$$z = \frac{3i(z+2i)}{z-2+3i}$$

نستعمل جداء الطرفين في جداء الوسطين نجد

$$z(z-2+3i) = 3i(z+2i)$$

هذا يكافئ

$$z^2 - 2z + 3iz = 3iz - 6$$

هذا يكافئ

$$z^2 - 2z + 3iz - 3iz + 6 = 0$$

إذن

$$z^2 - 2z + 6 = 0$$

$$\Delta = (-2)^2 - 4(1)(6) = -20 = (2i\sqrt{5})^2$$

$$z_1 = \frac{2 - 2i\sqrt{5}}{2} = 1 - i\sqrt{5}$$

$$z_2 = \frac{2 + 2i\sqrt{5}}{2} = 1 + i\sqrt{5}$$

ومنه $S = \{1 - i\sqrt{5}, 1 + i\sqrt{5}\}$

2-التحقق أن A و B تنتميان إلى دائرة مركزها O مع تعيين نصف قطرها:

يجب أن يكون $|z_O - z_A| = |z_O - z_B|$

معناه

$$AO = BO$$

أي

$$AO = |z_A| = \sqrt{1+5} = \sqrt{6}$$

$$BO = |z_B| = \sqrt{1+5} = \sqrt{6}$$

بما أن $AO = BO = \sqrt{6}$ فإن A و B تنتميان إلى دائرة مركزها O ونصف قطرها $r = \sqrt{6}$

3-أ - التعبير عن المسافة OM' بدلالة المسافتين CM و DM :

لدينا

$$OM' = |z' - z_O| = |z'| = \left|\frac{3i(z+2i)}{z-2+3i}\right|$$

هذا يكافئ

$$OM' = \frac{|3i| \cdot |z+2i|}{|z-2+3i|} = |3i| \frac{|z-z_C|}{|z-z_D|}$$

ومنه $\boxed{OM' = 3\frac{CM}{DM}}$

3-ب – استنتاج أنه من أجل كل $M \in (\Delta)$ فإن M' تنتمي لدائرة (γ) مع تعيين مركزها ونصف قطرها:

من أجل كل $M \in (\Delta)$ فإن $CM = DM$

معناه

$$\frac{CM}{DM} = 1$$

ولدينا من الجواب السابق أن

$$OM' = 3\frac{CM}{DM}$$

وبتعويض $\frac{CM}{DM} = 1$ نجد أن

$$OM' = 3$$

ومنه (γ) هي دائرة مركزها O ونصف قطرها $r = 3$

التحقق أن E تنتمي إلى (γ) :

حتى تكون E تنتمي إلى (γ) يجب أن يكون $OE = 3$

لدينا

$$OE = |z_E - z_O| = |z_E| = |3i| = 3$$

ومنه E تنتمي إلى (γ)

22. علوم تجريبية 2012 الموضوع 02

1-$P(z)$ كثير حدود للمتغير المركب z حيث:

$$P(z) = z^3 - 12z^2 + 48z - 72$$

1-أ-تحقق أن 6 هو جذر لكثير الحدود $P(z)$

1-ب-جد العددين الحقيقيين α و β بحيث من أجل كل عدد مركب :

$$P(z) = (z-6)(z^2 + \alpha z + \beta)$$

1-جـ- حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة

$$P(z) = 0$$

2- المستوي المركب منسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ ، A، B و C نقط من المستوي المركب لواحقها على الترتيب: $z_A = 6$ ،

$z_B = 3 + i\sqrt{3}$ و $z_C = 3 - i\sqrt{3}$

2-أ-اكتب كلا من z_A ، z_B و z_C على الشكل الأسي.

2-ب- اكتب العدد المركب $\frac{z_A - z_B}{z_A - z_C}$ على الشكل الجبري ، ثم على الشكل الأسي.

2-جـ-استنتج طبيعة المثلث ABC

3-ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه C ، نسبته $\sqrt{3}$ و زاويته $\frac{\pi}{2}$.

3-أ-جد الكتابة المركبة للتشابه S

3-ب- عين $z_{A'}$ لاحقة النقطة A' صورة النقطة A بالتشابه S.

3-جـ-بين أن النقط A، B و A' في استقامية

نص الإجابة

1-أ – التحقق أن 6 هو جذر لكثير الحدود $P(z)$:

لدينا $P(z) = z^3 - 12z^2 + 48z - 72$

بتعويض العدد 6 مكان z نجد

$$P(6) = 6^3 - 12(6)^2 + 48(6) - 72$$
$$= 216 - 432 + 288 - 72$$
$$= 0$$

ومنه $P(6)$ جذر لكثير الحدود $P(z)$

1-ب – إيجاد العددين α و β حيث يكون :

$$P(z) = (z-6)(z^2 + \alpha z + \beta)$$

نقوم بنشر العبارة كما يلي

$$P(z) = z^3 + \alpha z^2 + \beta z - 6z^2 - 6\alpha z - 6\beta$$

نقوم بترتيب القوى

$$P(z) = z^3 + (\alpha - 6)z^2 + (\beta - 6\alpha)z - 6\beta$$

نقوم بالمطابقة مع $P(z) = z^3 - 12z^2 + 48z - 72$ نجد ما يلي:

$$(\alpha - 6) = -12$$
$$(\beta - 6\alpha) = 48$$
$$-6\beta = -72$$

ومنه $\boxed{\alpha = -6}$

بتعويض α في المعادلة $(\beta - 6\alpha) = 48$ نجد

$$\beta - 6(-6) = 48$$

ومنه $\boxed{\beta = 12}$

ومنه $\alpha = -6$ و $\beta = 12$

1-جـ – حل في $\mathbb{C}$ المعادلة

$$P(z) = (z-6)(z^2 - 6z + 12)$$

$$P(z) = 0$$
$$(z-6)(z^2 - 6z + 12) = 0$$

معناه

$$\begin{cases} z - 6 = 0 \\ \text{أو} \\ z^2 - 6z + 12 = 0 \end{cases}$$

إذن

$$z - 6 = 0$$
$$z = 6$$

ومنه $z_0 = 6$

و

$$z^2 - 6z + 12 = 0$$

$$\Delta = (-6)^2 - 4(1)(12) = -12 = (2i\sqrt{3})^2$$

$$z_1 = \frac{6 - 2i\sqrt{3}}{2} = 3 - i\sqrt{3}$$

$$z_2 = \frac{6 + 2i\sqrt{3}}{2} = 3 + i\sqrt{3}$$

ومنه $S = \{6, 3 - i\sqrt{3}, 3 + i\sqrt{3}\}$

2-أ - كتابة z_A ، z_B و z_C على الشكل الأسي :

كتابة z_A على الشكل الأسي

حساب $|z_A|$

$$|z_A| = 6$$

حساب θ_A

$$\arg(z_A) = \theta_A : \begin{cases} cos\theta_A = \frac{6}{6} = 1 \\ sin\theta_A = \frac{0}{6} = 0 \end{cases}$$

أي $\theta_A = 2\pi + 2k\pi$

ومنه الشكل الأسي للعدد المركب z_A هو

$$\boxed{z_A = 6e^{i2\pi}}$$

كتابة z_B على الشكل الأسي

حساب $|z_B|$: $|z_B| = \sqrt{9+3} = 2\sqrt{3}$

حساب θ_B

$$\arg(z_B) = \theta_B : \begin{cases} cos\theta_B = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ sin\theta_B = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

أي

$$\theta_B = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

ومنه الشكل الأسي للعدد المركب z_B هو

$$\boxed{z_B = 2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}}$$

كتابة z_C على الشكل الأسي

$$\boxed{z_C = \overline{z_B} = 2\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{6}}}$$

2-ب - كتابة العدد $\frac{z_A - z_B}{z_A - z_C}$ على الشكل الجبري:

$$\frac{z_A - z_B}{z_A - z_C} = \frac{6 - 3 - i\sqrt{3}}{6 - 3 + i\sqrt{3}} = \frac{3 - i\sqrt{3}}{3 + i\sqrt{3}}$$

نضرب في مرافق المقام نجد

$$\frac{z_A - z_B}{z_A - z_C} = \frac{(3 - i\sqrt{3})(3 - i\sqrt{3})}{(3 + i\sqrt{3})(3 - i\sqrt{3})}$$

$$= \frac{9 - 3 - 6i\sqrt{3}}{12} = \frac{6 - 6i\sqrt{3}}{12}$$

ومنه $\boxed{\frac{z_A - z_B}{z_A - z_C} = \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}}$

كتابة العدد $\frac{z_A - z_B}{z_A - z_C}$ على الشكل الأسي :

حساب $\left|\frac{z_A - z_B}{z_A - z_C}\right|$

$$\left|\frac{z_A - z_B}{z_A - z_C}\right| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$$

حساب $\theta_{\frac{z_A - z_B}{z_A - z_C}}$

$$\arg\left(\frac{z_A - z_B}{z_A - z_C}\right) = \theta : \begin{cases} cos\theta = \frac{1}{1} = \frac{1}{2} \\ sin\theta = \frac{-\sqrt{3}}{1} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

أي $\theta = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$

ومنه الشكل الأسي للعدد المركب $\frac{z_A - z_B}{z_A - z_C}$ هو

$$\boxed{\frac{z_A - z_B}{z_A - z_C} = e^{-i\frac{\pi}{3}}}$$

2-جـ - استنتاج طبيعة المثلث ABC:

بما أن $\left|\frac{z_A - z_B}{z_A - z_C}\right| = 1$

معناه $|z_A - z_B| = |z_A - z_C|$

أي $BA = CA$ ..... (1)

وأيضا $\arg\left(\frac{z_A - z_B}{z_A - z_C}\right) = -\frac{\pi}{3}$

معناه $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{BA}) = -\frac{\pi}{3}$ ..... (2)

من (1) و (2) نستنتج أن المثلث ABC متقايس الأضلاع

3-أ - إيجاد الكتابة المركبة للتشابه S :

العبارة المختصرة للتشابه S الذي مركزه C ونسبته $\sqrt{3}$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$ هي

$$z' - z_C = \sqrt{3}\, e^{i\frac{\pi}{2}}(z - z_C)$$

بتعويض z_C نجد

$$z' - 3 + i\sqrt{3} = \sqrt{3}\,(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})(z - 3 + i\sqrt{3})$$

هذا يكافئ

$$z' - 3 + i\sqrt{3} = \sqrt{3}\,(0 + i)(z - 3 + i\sqrt{3})$$

$$= i\sqrt{3}(z - 3 + i\sqrt{3})$$

$$z' - 3 + i\sqrt{3} = i\sqrt{3}z - 3i\sqrt{3} - 3$$

إذن

$$z' = i\sqrt{3}z - 3i\sqrt{3} - 3 + 3 - i\sqrt{3}$$

ومنه العبارة المركبة للتشابه S هي

$$\boxed{z' = i\sqrt{3}\,z - 4i\sqrt{3}}$$

3-ب - تعيين $z_{A'}$ لاحقة النقطة A' صورة النقطة A بالتشابه S :

$$z_{A'} = i\sqrt{3}\,z_A - 4i\sqrt{3}$$

بتعويض z_A نجد

$$z_{A'} = i\sqrt{3}\,(6) - 4i\sqrt{3}$$

ومنه $\boxed{z_{A'} = 2i\sqrt{3}}$

3-جـ – التبيين أن A ، B و A' على استقامية:

لكي تكون A ، B و A' على استقامية يجب أن يكون $\frac{z_{A'}-z_A}{z_B-z_A} \in R$:

$$\frac{z_{A'}-z_A}{z_B-z_A} = \frac{2i\sqrt{3}-6}{3+i\sqrt{3}-6} = \frac{2i\sqrt{3}-6}{i\sqrt{3}-3}$$

نضرب في مرافق المقام نجد

$$\frac{z_{A'}-z_A}{z_B-z_A} = \frac{(2i\sqrt{3}-6)(i\sqrt{3}+3)}{(i\sqrt{3}-3)(i\sqrt{3}+3)}$$

$$= \frac{-6+6i\sqrt{3}-6i\sqrt{3}-18}{-12}$$

ومنه $\boxed{\frac{z_{A'}-z_A}{z_B-z_A} = \frac{-24}{-12} = 2}$

ومنه A ، B و A' على استقامية

23. علوم تجريبية 2011 الموضوع 01

نعتبر في المستوي المنسوب الى المعلم و المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، النقط A ، B و C التي لاحقاتها على الترتيب:

$z_A = -i$ ، $z_B = 2+3i$ و $z_C = -4+i$

1-أ-اكتب على الشكل الجبري العدد المركب $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$

1-ب-عين طويلة العدد المركب $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ وعمدة له ، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC

2-نعتبر التحويل النقطي T في المستوي الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z ، النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث: $z' = iz - 1 - i$

2-أ- عين طبيعة التحويل T محددا عناصره المميزة.

2-ب-ماهي صورة النقطة B بالتحويل T.

3-لتكن D النقطة ذات اللاحقة $z_D = -6+2i$

3-أ- بين أن النقط A ، C و D في استقامية

3-ب-عين لسبة التحاكي h الذي مركزه A ويحول النقطة C الى النقطة D.

3-جـ-عين العناصر المميزة للتشابه S الذي مركزه A و يحول B الى D

نص الإجابة

1-أ - كتابة العدد $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ على الشكل الجبري:

$$\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A} = \frac{-4+i+i}{2+3i+i} = \frac{-4+2i}{2+4i}$$

نضرب في مرافق المقام نجد

$$\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A} = \frac{(-4+2i)(2-4i)}{(2+4i)(2-4i)}$$

$$= \frac{-8+16i+4i+8}{20} = \frac{20i}{20}$$

ومنه $\boxed{\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A} = i}$

1-ب – تعيين الطويلة $\left|\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right|$:

$$\boxed{\left|\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right| = |i| = 1}$$

تعيين العمدة $arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)$:

$arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right) = \theta =$

$$\begin{cases}\cos\theta = \frac{0}{1} = 0 \\ \sin\theta = \frac{1}{1} = 1\end{cases} \quad \boxed{\theta = \frac{\pi}{2}}$$

استنتاج طبيعة المثلث ABC :

لدينا $\left|\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right| = 1$

معناه $|z_C - z_A| = |z_B - z_A|$

أي $AC = AB$ ..... (1)

ولدينا $arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right) = \frac{\pi}{2}$

معناه $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2}$ ..... (2)

من (1) و (2) نستنتج أن المثلث ABC متساوي الساقين وقائم في A

2-أ – تعيين طبيعة التحويل T مع تعيين عناصره المميزة:

$$z' = az + b$$
$$z' = iz - 1 - i$$

لدينا $|a| = |i| = 1$

ومنه طبيعة التحويل T هو دوران، زاويته هي $\arg(i) = \frac{\pi}{2}$ ومركزه ω حيث

$$z_\omega = \frac{b}{1-a} = \frac{-1-i}{1-i} = \frac{(-1-i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}$$

$$= \frac{-1-i-i+1}{2} = -i = z_A$$

ومنه مركزه هو النقطة A

2-ب – إيجاد صورة النقطة B بالتحويل T :

لدينا $z_{B'} = iz_B - 1 - i$

بتعويض z_B نجد

$z_{B'} = i(2+3i) - 1 - i = 2i - 3 - 1 - i$

ومنه $\boxed{z_{B'} = -4+i = z_C}$

ومنه صورة النقطة B بالتحويل T هي C

3-أ -إثبات أن النقط A ، C و D على استقامية :

لكي تكون A ، C و D على استقامية يجب أن يكون $\frac{z_D - z_A}{z_C - z_A} \in R$:

$$\frac{z_D - z_A}{z_C - z_A} = \frac{-6 + 2i + i}{-4 + i + i} = \frac{-6 + 3i}{-4 + 2i}$$

نضرب في مرافق المقام نجد

$$\frac{z_D - z_A}{z_C - z_A} = \frac{(-6 + 3i)(-4 - 2i)}{(-4 + 2i)(-4 - 2i)} = \frac{30}{20}$$

ومنه $\boxed{\frac{z_D - z_A}{z_C - z_A} = \frac{3}{2}}$

ومنه A ، C و D على استقامية

3-ب – تعيين نسبة التحاكي h :

العبارة المختصرة للتحاكي h الذي مركزه A ويحول C إلى D هي: $z_D - z_A = k(z_C - z_A)$

ومنه $\frac{z_D - z_A}{z_C - z_A} = k = \frac{3}{2}$ ومنه $\boxed{k = \frac{3}{2}}$

3-جـ- تعيين العناصر المميزة للتشابه S الذي مركزه A يحول B إلى D:

العبارة المختصرة للتشابه S الذي مركزه A ويحول B إلى D هي:

$$z_D - z_A = ke^{i\theta}(z_B - z_A)$$

ومنه $\frac{z_D - z_A}{z_B - z_A} = ke^{i\theta}$

بالتعويض نجد

$$\frac{z_D - z_A}{z_B - z_A} = \frac{6 + 2i + i}{2 + 3i + i} = \frac{6 + 3i}{2 + 4i}$$

نضرب في مرافق المقام نجد

$$\frac{z_D - z_A}{z_B - z_A} = \frac{(6 + 3i)(2 - 4i)}{(2 + 4i)(2 - 4i)}$$

$$= \frac{-12 + 24i + 6i + 12}{20}$$

$$= \frac{30i}{20}$$

ومنه $\frac{z_D - z_A}{z_B - z_A} = \frac{3}{2}i$

ومنه نسبة التشابه المباشر S هي

$$k = \left|\frac{3}{2}i\right| = \frac{3}{2}$$

إذن $\boxed{k = \frac{3}{2}}$

وزاوية التشابه المباشر S هي

$$\theta = \arg\left(\frac{3}{2}i\right) = \frac{\pi}{2}$$

إذن $\boxed{\theta = \frac{\pi}{2}}$

24. علوم تجريبية 2011 الموضوع 02

نعتبر في المستوي المركب المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$، النقط A ، B و C التي لاحقاتها على الترتيب:

$z_A = 3 - 2i$ ، $z_B = 3 + 2i$ و $z_C = 4i$.

1-أ-علم النقط A ، B و C.

1-ب-ماطبيعة الرباعي $OABC$؟ علل اجابتك.

1-جـ-عين لاحقة النقطة Ω مركز الرباعي $OABC$.

2-عين ثم أنشئ (E) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق:

$$\|\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = 12$$

3-أ- حل في مجموعة الأعداد المركبة C، المعادلة ذات المجهول z التالي:

$$z^2 - 6z + 13 = 0$$

نسمي z_1 ، z_0 حلي هذه المعادلة.

3-ب-لتكن M نقطة من المستوي لاحقتها العدد المركب z

عين مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق:

$$|z - z_0| = |z - z_1|$$

نص الإجابة

1-أ – إنشاء النقط A ، B و C :

1-ب – تحديد طبيعة الرباعي $OABC$ مع التعليل:

لدينا

$$\overrightarrow{OA} = z_A - z_O = 3 - 2i$$

$$\overrightarrow{CB} = z_B - z_C = 3 + 2i - 4i = 3 - 2i$$

بما أن : $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CB}$

فان الرباعي $OABC$ هو متوازي أضلاع

1-جـ – تعيين لاحقة النقطة Ω مركز الرباعي $OABC$:

النقطة Ω تمثل مركز ثقل الرباعي $OABC$ أي هي مرجح النقط A ، B ، C و O حيث

$$[(O,1),(A,1)(B,1)(C,1)]$$

ومنه

$$z_\Omega = \frac{1z_O + 1z_A + 1z_B + 1z_C}{1 + 1 + 1 + 1}$$

$$= \frac{0 + 3 - 2i + 3 + 2i + 4i}{4}$$

ومنه $\boxed{z_\Omega = \frac{3}{2} + i}$

25. علوم تجريبية 2010 الموضوع 01

نعتبر في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ النقطتين A و B اللتين لاحقتيهما على الترتيب: $z_A = 1+i$ و $z_B = 3i$.

1-اكتب على الشكل الأسي: z_A و z_B.

2-ليكن S التشابه المباشر الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث: $z' = 2iz + 6 + 3i$

2-أ-عين العناصر المميزة للتشابه المباشر S.

2-ب-عين z_C لاحقة النقطة C صورة النقطة A بالتشابه المباشر S.

2-جـ-استنتج طبيعة المثلث ABC.

3-لتكن النقطة D مرجح الجملة $\{(A;2),(B;-2),(C;2)\}$

3-أ-عين z_D لاحقة النقطة D.

3-ب-عين مع التبرير طبيعة الرباعي $ABCD$.

4-لتكن M نقطة من المستوي تختلف عن B و عن D لاحقتها z ولتكن (Δ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي يكون من أجله $\frac{z_B - z}{z_D - z}$ عددا حقيقيا موجبا تماما.

4-أ- تحقق أن النقطة E ذات اللاحقة $z_E = 6+3i$ تنتمي الى (Δ).

4-ب-أعط تفسيرا هندسيا لعمدة العدد المركب $\frac{z_B - z}{z_D - z}$.

عين حينئذ المجموعة (Δ).

نص الإجابة

1-كتابة z_A و z_B على الشكل الأسي:

كتابة z_A على الشكل الأسي

حساب $|z_A|$:

$$|z_A| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

حساب θ_A

$$\arg(z_A) = \theta_A : \begin{cases} cos\theta_A = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ sin\theta_A = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

أي $\theta_A = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$

ومنه الشكل الأسي للعدد المركب z_A هو

$$\boxed{z_A = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}$$

كتابة z_B على الشكل الأسي

حساب $|z_B|$

$$|z_B| = \sqrt{9} = 3$$

حساب θ_B

2-تعيين (E) مجموعة النقط التي تحقق:

$$\|\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = 12$$

لدينا $\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$

نقوم بإدخال النقطة Ω بعلاقة شال كالتالي

$$\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$$
$$= \overrightarrow{M\Omega} + \overrightarrow{\Omega O} + \overrightarrow{M\Omega} + \overrightarrow{\Omega A}$$
$$+ \overrightarrow{M\Omega} + \overrightarrow{\Omega B} + \overrightarrow{M\Omega} + \overrightarrow{\Omega C}$$

بما أن Ω مرجح النقط A ، B ، C و O فإن $\overrightarrow{\Omega O} + \overrightarrow{\Omega A} + \overrightarrow{\Omega B} + \overrightarrow{\Omega C} = \vec{0}$ ومنه يصبح

$$\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 4\overrightarrow{M\Omega}$$

ومنه $\|4\overrightarrow{M\Omega}\| = 12$

أي $4M\Omega = 12$

ومنه $M\Omega = 3$

ومنه مجموعة النقط (E) تمثل دائرة مركزها النقطة Ω ونصف قطرها $r = 3$

3-أ – حل في C المعادلة $z^2 - 6z + 13 = 0$:

$$z^2 - 6z + 13 = 0$$
$$\Delta = (-6)^2 - 4(1)(13) = -16 = (4i)^2$$
$$z_0 = \frac{6-4i}{2} = 3-2i$$
$$z_1 = \frac{6+4i}{2} = 3+2i$$

ومنه $S = \{3-2i\,,3+2i\}$

3-ب – تعيين مجموعة النقط M التي تحقق:

$$|z - z_0| = |z - z_1|$$

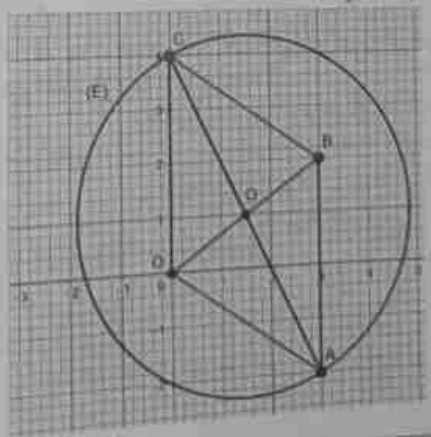
$$|z - z_0| = |z - z_1|$$

وهذا يكافئ $|z - z_A| = |z - z_B|$

أي $AM = BM$

ومنه مجموعة النقط M تمثل محور القطعة المستقيمة $[AB]$ ، أي محور الفواصل $y = 0$

الرسم البياني:



$\arg(z_B) = \theta_B$: $\begin{cases} cos\theta_B = \frac{0}{3} = 0 \\ sin\theta_B = \frac{3}{3} = 1 \end{cases}$

أي $\theta_B = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

ومنه الشكل الأسي للعدد المركب z_B هو $\boxed{z_B = 3e^{i\frac{\pi}{2}}}$

2-أ – تعيين العناصر المميزة للتشابه المباشر S :

لدينا $z' = 2iz + 6 + 3i$

نسبة التشابه المباشر S

$k = |a| = |2i| = 2$

ومنه $\boxed{k = 2}$

زاوية التشابه المباشر S

$\theta = \arg(a) = \arg(2i)$

$= \begin{cases} \cos\theta = \frac{0}{2} = 0 \\ \sin\theta = \frac{2}{2} = 1 \end{cases}$ $\boxed{\theta = \frac{\pi}{2}}$

مركز التشابه المباشر S

$z_\omega = \frac{b}{1-a} = \frac{6+3i}{1-2i} = \frac{(6+3i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)}$

$= \frac{6+12i+3i-6}{5}$

ومنه : $\boxed{z_\omega = 3i = z_B}$

ومنه مركز التشابه المباشر S هو النقطة B

2-ب - تعيين z_C :

لدينا $z_C = 2iz_A + 6 + 3i$

بتعويض z_A نجد

$z_C = 2i(1+i) + 6 + 3i = 2i - 2 + 6 + 3i$

ومنه $\boxed{z_C = 4 + 5i}$

2-جـ- استنتاج طبيعة المثلث ABC :

بما أن زاوية التشابه المباشر هي $\frac{\pi}{2}$ و C صورة A بالتشابه S إذن المثلث ABC قائم في B

3-أ – تعيين z_D :

بما أن D مرجح الجملة $\{(A,2),(B,-2),(C,2)\}$ فإن:

$z_D = \frac{2z_A - 2z_B + 2z_C}{2-2+2}$

$= \frac{2(1+i) - 2(3i) + 2(4+5i)}{2}$

هذا يكافئ $z_D = \frac{2+2i-6i+8+10i}{2}$

ومنه $\boxed{z_D = 5 + 3i}$

3-ب – تعيين طبيعة الرباعي $ABCD$ مع التبرير:

لدينا

$\overrightarrow{AB} = z_B - z_A = 3i - 1 - i = -1 - 2i$

$\overrightarrow{DC} = z_C - z_D = 4 + 5i - 5 - 3i = -1 - 2i$

بما أن $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

فإن الرباعي $ABCD$ هو متوازي أضلاع، ولكن المثلث ABC قائم ومنه فالرباعي $ABCD$ هو مستطيل

4-أ - التحقق أن $E \in (\Delta)$:

لدينا $\frac{z_B - z}{z_D - z}$

نقوم بتعويض z_E مكان z ويجب أن تعطينا عددا حقيقيا موجبا لتحقيق الانتماء

$\frac{z_B - z_E}{z_D - z_E} = \frac{3i - 6 - 3i}{5 + 3i - 6 - 3i} = \frac{-6}{-1} = 6$

ومنه $E \in (\Delta)$

4-ب – التفسير الهندسي لعمدة العدد المركب $\frac{z_B - z}{z_D - z}$:

$\arg\left(\frac{z_B - z}{z_D - z}\right) = (\overrightarrow{MD}, \overrightarrow{MB}) = 0 + 2k\pi$

تعيين مجموعة النقط (Δ) :

بما أن $(\overrightarrow{MD}, \overrightarrow{MB}) = 0 + 2k\pi$ معناه مجموعة النقط (Δ) هي المستقيم (BD) ما عدا القطعة $[BD]$ ونكتب:

$(\Delta) = (BD) - [BD]$

26. علوم تجريبية 2010 الموضوع 02

1-حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2 - 6z + 18 = 0$ ، ثم اكتب الحلين على الشكل الأسي.

2-في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$، نعتبر النقط A، B، C و D لاحقاتها على الترتيب: $z_A = 3 + 3i$ ،

$z_B = \overline{z_A}$ ، $z_C = -z_A$ و $z_D = -z_B$

2-أ-بين أن النقط A، B، C و D تنتمي الى نفس الدائرة ذات المركز O مبدأ المعلم.

2-ب-عين زاوية للدوران R الذي مركزه O ويحول النقطة A الى النقطة B

2-جـ-بين أن النقط A ، O و C في استقامية وكذلك النقط B ، O و D.

2-د-استنتج طبيعة الرباعي $ABCD$

نص الإجابة

1-حل في C المعادلة $z^2 - 6z + 18 = 0$:

$z^2 - 6z + 18 = 0$ لدينا

$\Delta = (-6)^2 - 4(1)(18) = -36 = (6i)^2$

$z_1 = \frac{6 - 6i}{2} = 3 - 3i$

$z_2 = \frac{6 + 6i}{2} = 3 + 3i$

ومنه $S = \{3 - 3i, 3 + 3i\}$

كتابة z_1 و z_2 على الشكل الأسي:

كتابة z_1 على الشكل الأسي

حساب $|z_1|$

$|z_1| = \sqrt{9 + 9} = 3\sqrt{2}$

حساب θ_{z_1}

$arg(z_1) = \theta_{z_1}$: $\begin{cases} cos\theta_{z_1} = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ sin\theta_{z_1} = \frac{-3}{3\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

أي $\theta_{z_1} = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$

ومنه الشكل الأسي للعدد المركب z_1 هو

$\boxed{z_1 = 3\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}$

كتابة z_2 على الشكل الأسي

$\boxed{z_2 = \overline{z_1} = 3\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}$

2-أ - التحقق أن A ، B ، C و D تنتمي إلى دائرة مركزها O مع تعيين نصف قطرها:

$AO = |z_A - z_O| = |z_A| = \sqrt{9 + 9} = 3\sqrt{2}$

$BO = |z_B - z_O| = |z_B| = \sqrt{9 + 9} = 3\sqrt{2}$

$CO = |z_C - z_O| = |z_C| = \sqrt{9 + 9} = 3\sqrt{2}$

$DO = |z_D - z_O| = |z_D| = \sqrt{9 + 9} = 3\sqrt{2}$

بما أن $AO = BO = CO = DO = 3\sqrt{2}$ فإن A ، B ، C و D تنتمي إلى دائرة مركزها O ونصف قطرها $r = 3\sqrt{2}$

2-ب - تعيين زاوية الدوران R :

العبارة المختصرة للدوران R الذي مركزه O ويحول A إلى B هي: $z_B - z_O = e^{i\theta}(z_A - z_O)$

بما أن $z_O = 0$ فإن

$\frac{z_B}{z_A} = \frac{3 - 3i}{3 + 3i} = \frac{(3 - 3i)(3 - 3i)}{(3 + 3i)(3 - 3i)}$

$= \frac{9 - 9 - 18i}{18} = -i$

ومنه زاوية الدوران R هي $\boxed{\theta = \arg(-i) = -\frac{\pi}{2}}$

2-جـ - التبيين أن النقط A ، O و C على استقامية

لكي تكون A ، O و C على استقامية يجب أن يكون $\frac{z_C - z_O}{z_A - z_O} \in R$:

$\frac{z_C - z_O}{z_A - z_O} = \frac{-3 - 3i}{3 + 3i}$

نضرب في مرافق المقام نجد

$\frac{z_C - z_O}{z_A - z_O} = \frac{(-3 - 3i)(3 - 3i)}{(3 + 3i)(3 - 3i)}$

$= \frac{-9 + 9i - 9i - 9}{18} = \frac{-18}{18}$

ومنه $\boxed{\frac{z_C - z_O}{z_A - z_O} = -1}$

ومنه A ، O و C على استقامية

التبيين أن النقط B ، O و D على استقامية :

لكي تكون B ، O و D على استقامية يجب أن يكون $\frac{z_D - z_O}{z_B - z_O} \in R$:

$\frac{z_D - z_O}{z_B - z_O} = \frac{-3 + 3i}{3 - 3i}$

نضرب في مرافق المقام نجد

$\frac{z_D - z_O}{z_B - z_O} = \frac{(-3 + 3i)(3 + 3i)}{(3 - 3i)(3 + 3i)}$

$= \frac{-9 - 9i + 9i - 9}{18} = \frac{-18}{18}$

ومنه $\boxed{\frac{z_D - z_O}{z_B - z_O} = -1}$

ومنه B ، O و D على استقامية

2-د - استنتاج طبيعة الرباعي $ABCD$:

بما أن النقط A ، B ، C و D تنتمي إلى نفس الدائرة فإن $AC = BD$ لأنهما قطران للدائرة فهما **متساويان**

وبما أن النقط في استقامية فإن القطران BD و AC **متناصفان**

وبما أن الدوران R زاويته $\frac{\pi}{2}$ فإن القطران BD و AC **متعامدان**

ومنه الرباعي $ABCD$ هو مربع

27. علوم تجريبية 2009 الموضوع 01

$P(Z)$ كثير حدود حيث:

$$P(Z) = (Z-1-i)(Z^2-2Z+4)$$

و Z عدد مركب

1-حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة $P(Z)=0$

2-نضع: $Z_1 = 1+i$ ، $Z_2 = 1-\sqrt{3}i$

2-أ- اكتب كل من Z_1 و Z_2 على الشكل الأسي.

2-ب-اكتب $\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)$ على الشكل الجبري ثم الشكل الأسي.

2-جـ-استنتج القيمة المضبوطة لكل من $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$، $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$

3-أ-n عدد طبيعي. عين قيم n بحيث يكون العدد $\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)^n$ حقيقيا.

3-ب-احسب قيمة العدد $\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)^{456}$

نص الإجابة

1-حل في C المعادلة $P(z)=(z-1-i)(z^2-2z+4)=0$:

لدينا

$$P(z)=(z-1-i)(z^2-2z+4)=0$$

معناه $\begin{cases} z-1-i=0 \\ \text{أو} \\ z^2-2z+4=0 \end{cases}$

إذن

$$z-1-i=0$$
$$z=1+i$$

ومنه $z_0 = 1+i$

و $z^2-2z+4=0$

$$\Delta = (-2)^2-4(1)(4) = -12 = (2i\sqrt{3})^2$$

$$z_1 = \frac{2-2i\sqrt{3}}{2} = 1-i\sqrt{3}$$

$$z_2 = \frac{2+2i\sqrt{3}}{2} = 1+i\sqrt{3}$$

ومنه $\boxed{S=\{1+i,\ 1-i\sqrt{3},\ 1+i\sqrt{3}\}}$

2-أ- كتابة z_1 و z_2 على الشكل الأسي:

كتابة z_1 على الشكل الأسي

حساب $|z_1|$

$$|z_1| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

حساب θ_{z_1}

$$\arg(z_1)=\theta_{z_1}: \begin{cases} \cos\theta_{z_1} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta_{z_1} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

أي

$$\theta_{z_1} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

ومنه الشكل الأسي للعدد المركب z_1 هو

$$\boxed{z_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}$$

كتابة z_2 على الشكل الأسي

حساب $|z_2|$

$$|z_2| = \sqrt{1+3} = 2$$

حساب θ_{z_2}

$$\arg(z_2)=\theta_{z_2}: \begin{cases} \cos\theta_{z_2} = \frac{1}{2} \\ \sin\theta_{z_2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

أي

$$\theta_{z_2} = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

ومنه الشكل الأسي للعدد المركب z_2 هو

$$\boxed{z_2 = 2e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)}}$$

2-ب - كتابة $\frac{z_1}{z_2}$ على الشكل الجبري:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1+i}{1-i\sqrt{3}} = \frac{(1+i)(1+i\sqrt{3})}{(1-i\sqrt{3})(1+i\sqrt{3})} = \frac{1+i\sqrt{3}+i-\sqrt{3}}{4}$$

ومنه $\boxed{\frac{z_1}{z_2} = \frac{1-\sqrt{3}}{4} + \frac{1+\sqrt{3}}{4}i}$

كتابة $\frac{z_1}{z_2}$ على الشكل الأسي:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}{2e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)}} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\cdot e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)}$$

ومنه $\boxed{\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}}$

2-جـ- استنتاج القيمة المضبوطة لكل من $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{7\pi}{12}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right)$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{7\pi}{12} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\sin\frac{7\pi}{12}$$

الشكل المثلثي للعدد $\frac{z_1}{z_2}$ هو

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{7\pi}{12}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{7\pi}{12}$$

نقوم بالمطابقة بين الشكل المثلثي والشكل الجبري للعدد $\frac{z_1}{z_2}$ نجد

$$\begin{cases}\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{7\pi}{12}=\frac{1-\sqrt{3}}{4} & \Rightarrow \cos\frac{7\pi}{12}=\frac{1-\sqrt{3}}{\frac{2\sqrt{2}}{2}}=\boxed{\frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}}\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{7\pi}{12}=\frac{1+\sqrt{3}}{4} & \Rightarrow \cos\frac{7\pi}{12}=\frac{1+\sqrt{3}}{\frac{2\sqrt{2}}{2}}=\boxed{\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}}\end{cases}$$

3-أ – تعيين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون العدد $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n$ عددا حقيقيا :

$$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}\right)^n$$

$$=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12}\right)\right)^n$$

بتطبيق دستور موافر نجد:

$$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n\cos n\frac{7\pi}{12}+i\sin n\frac{7\pi}{12}$$

حتى يكون $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n$ عددا حقيقيا يجب أن يكون الجزء التخيلي معدوم أي $\sin n\frac{7\pi}{12}=0$ ومنه

$$n\frac{7\pi}{12}=k\pi \qquad ;k\in Z$$

أي

$$n\frac{7}{12}=k$$

ومنه $\boxed{n=\frac{12}{7}k}$

حتى يكون $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n$ عددا حقيقيا يجب أن يكون $n=k$ مع $\frac{12}{7}k$ من مضاعفات العدد 7

3-ب – حساب قيمة العدد $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{456}$:

$$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{456}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}\right)^{456}$$

$$=\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12}\right)\right]^{456}$$

بتطبيق دستور موافر نجد:

$$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{456}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{456}\left(\cos\frac{(456)7\pi}{12}+i\sin\frac{(456)7\pi}{12}\right)$$

هذا يكافئ

$$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{456}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{456}\left(\cos\frac{12\times266\,\pi}{12}+i\sin\frac{12\times266\,\pi}{12}\right)$$

ويكافئ

$$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{456}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{456}(\cos 266\,\pi+i\sin 266\,\pi)$$

بما أن $266\,\pi$ هو عدد زوجي فيمكن استبداله بالصفر نجد

$$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{456}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{456}(\cos 0+i\sin 0)$$

$$=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{456}(1+0)$$

ومنه $\boxed{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{456}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{456}}$

28. علوم تجريبية 2009 الموضوع 02

المستوي منسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$

1-حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة:

$$z^2-2z+4=0$$

2-نسمي z_1 و z_2 حلي هذه المعادلة.

2-أ- اكتب العددين z_1 و z_2 على الشكل الأسي.

2-ب- A، B، C هي النقط من المستوي التي لواحقها على الترتيب:

$z_A=1-i\sqrt{3}$ ، $z_B=1+i\sqrt{3}$ ، $z_C=\frac{1}{2}(5+i\sqrt{3})$

(i يرمز الى العدد المركب الذي يحقق $i^2=-1$)

أحسب الأطوال AB ، AC ، BC ثم استنتج طبيعة المثلث ABC.

2-جـ- حدد الطويلة وعمدة للعدد المركب Z حيث:

$$Z=\frac{z_C-z_B}{z_A-z_B}$$

2-د- أحسب Z^3 و Z^6 ثم استنتج أن Z^{3K} عدد حقيقي من أجل كل عدد طبيعي K.

نص الإجابة

1-حل في C المعادلة $z^2-2z+4=0$:

لدينا

$$z^2-2z+4=0$$

$$\Delta=(-2)^2-4(1)(4)=-12=(2i\sqrt{3})^2$$

$$z_1=\frac{2-2i\sqrt{3}}{2}=1-i\sqrt{3}$$

$$z_2=\frac{2+2i\sqrt{3}}{2}=1+i\sqrt{3}$$

ومنه $\boxed{S=\{1-i\sqrt{3}\,,1+i\sqrt{3}\}}$

2-أ- كتابة z_1 و z_2 على الشكل الأسي:

كتابة z_1 على الشكل الأسي

حساب $|z_1|$

$$|z_1|=\sqrt{1+3}=2$$

حساب θ_{z_1}

$$\arg(z_1)=\theta_{z_1}:\begin{cases}cos\theta_{z_1}=\frac{1}{2}\\ sin\theta_{z_1}=-\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$$

أي

$$\theta_{z_1}=-\frac{\pi}{3}+2k\pi$$

ومنه الشكل الأسي للعدد المركب z_1 هو

$$\boxed{z_1=2e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)}}$$

كتابة z_2 على الشكل الأسي

حساب $|z_2|$

$$\boxed{z_2=\overline{z_1}=2e^{i\frac{\pi}{3}}}$$

2-ب – حساب الأطوال AB ، AC و BC:

$$AB=|z_B-z_A|=|1+i\sqrt{3}-1+i\sqrt{3}|$$

$$=|2i\sqrt{3}|=\boxed{2\sqrt{3}}$$

$$AC=|z_C-z_A|=\left|\frac{5}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}-1+i\sqrt{3}\right|$$

$$=\left|\frac{3}{2}+i\frac{3\sqrt{3}}{2}\right|=\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{27}{4}}$$

$$=\boxed{3}$$

$$BC=|z_C-z_B|=\left|\frac{5}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}-1-i\sqrt{3}\right|$$

$$=\left|\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right|=\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{3}{4}}$$

$$=\boxed{\sqrt{3}}$$

استنتاج طبيعة المثلث ABC :

نضع

$$3^2+\left(\sqrt{3}\right)^2=(2\sqrt{3})^2$$

ومنه

$$9+3=12$$

معناه $AC^2+BC^2=AB^2$

حسب النظرية العكسية لفيثاغورس فإن المثلث ABC قائم في النقطة C

2-جـ – إيجاد الشكل الجبري للعدد $z=\frac{z_C-z_B}{z_A-z_B}$:

$$z=\frac{z_C-z_B}{z_A-z_B}=\frac{\frac{5}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}-1-i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}-1-i\sqrt{3}}$$

$$=\frac{\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}}{-2i\sqrt{3}}$$

نضرب في مرافق المقام نجد

$$z=\frac{\left(\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(2i\sqrt{3})}{(-2i\sqrt{3})(2i\sqrt{3})}=\frac{3i\sqrt{3}+3}{12}$$

ومنه $\boxed{z=\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}i}$

إيجاد طويلة العدد $z=\frac{z_C-z_B}{z_A-z_B}$

$$|z|=\left|\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}i\right|=\sqrt{\frac{1}{16}+\frac{3}{16}}=\frac{1}{2}$$

إذن $\boxed{|z|=\frac{1}{2}}$

إيجاد عمدة العدد $z=\frac{z_C-z_B}{z_A-z_B}$

$$\arg(z)=\theta_z:\begin{cases}cos\theta_z=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\\ sin\theta_z=\frac{\frac{\sqrt{3}}{4}}{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$$

أي $\boxed{\theta_z=\frac{\pi}{3}+2k\pi}$

29. علوم تجريبية 2008 الموضوع 01

1-حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة:
$z^2-(1+2i)z-1+i=0$
نرمز للحلين بـ z_1 و z_2 حيث: $|z_1|<|z_2|$
بين أن $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2008}$ عدد حقيقي.

2-نعتبر في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$. لتكن A و B و C نقط المستوي التي لاحقاتها على الترتيب 1، z_1، z_2.
ليكن Z العدد المركب حيث: $Z=\frac{z_2-1}{z_1-1}$

2-أ-انطلاقا من التعريف $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$
ومن الخاصية: $e^{i(\theta_1+\theta_2)}=e^{i\theta_1}\times e^{i\theta_2}$
برهن أن: $e^{-i\theta}=\frac{1}{e^{i\theta}}$ وأن $\frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}}=e^{i(\theta_1-\theta_2)}$ حيث θ، θ_1 و θ_2 أعداد حقيقية.

2-ب-اكتب Z على الشكل الأسي.

2-جـ-اكتب Z على الشكل المثلثي واستنتج أن النقط C هي صورة النقطة B بتشابه مباشر مركزه A، يطلب تعيين زاويته ونسبته.

نص الإجابة

1-حل في C المعادلة $z^2-(1+2i)z-1+i=0$:

لدينا $z^2-(1+2i)z-1+i=0$

$$\Delta=b^2-4ac$$
$$\Delta=[-(1+2i)]^2-4(1)(-1+i)$$
$$\Delta=1-4+4i+4-4i=1$$
$$z_1=\frac{1+2i-1}{2}=i$$
$$z_2=\frac{1+2i+1}{2}=1+i$$

ومنه $\boxed{S=[i,1+i]}$

التبيين أن $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2008}$ عدد حقيقي :

$$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2008}=\left(\frac{i}{1+i}\right)^{2008}$$
$$=\left(\frac{i(1-i)}{(1+i)(1-i)}\right)^{2008}$$
$$=\left(\frac{1+i}{2}\right)^{2008}$$
$$=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)^{2008}$$

2-جـ- حساب z^3 :

$$z^3=\left(\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^3=\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^3$$
$$=\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^3$$

هذا يكافئ

$$z^3=\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\left(\cos\frac{(3)\pi}{3}+i\sin\frac{(3)\pi}{3}\right)$$
$$=\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot(\cos\pi+i\sin\pi)$$
$$=\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot(-1+0)$$

ومنه $\boxed{z^3=-\frac{1}{8}}$

حساب z^6 :

$$z^6=\left(\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^6=\left(\frac{1}{2}\right)^6\cdot\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^6$$
$$=\left(\frac{1}{2}\right)^6\cdot\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^6$$

هذا يكافئ

$$z^6=\left(\frac{1}{2}\right)^6\cdot\left(\cos\frac{(6)\pi}{3}+i\sin\frac{(6)\pi}{3}\right)$$
$$=\left(\frac{1}{2}\right)^6\cdot(\cos 2\pi+i\sin 2\pi)$$
$$=\left(\frac{1}{2}\right)^6\cdot(1+0)$$

ومنه $\boxed{z^6=\frac{1}{64}}$

استنتاج أن z^{3k} عدد حقيقي من أجل كل عدد طبيعي k :

لدينا

$$z^3=-\frac{1}{8}$$

نضع قوة k للطرفين نجد

$$(z^3)^k=\left(-\frac{1}{8}\right)^k$$

إذن $\boxed{z^{3k}=\left(-\frac{1}{8}\right)^k}$

ومنه z^{3k} عدد حقيقي من أجل كل عدد طبيعي k

هذا يكافئ

$$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2008} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^{2008}$$
$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2008} \cdot \left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^{2008}$$
$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2008} \cdot e^{i(2008)\frac{\pi}{4}}$$

ويكافئ

$$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2008} = \frac{(\sqrt{2})^{2008}}{(2)^{2008}} \cdot e^{i(502\pi)}$$
$$= \frac{(\sqrt{2})^{2008}}{(2)^{2008}} \cdot (\cos 502\pi + i \sin 502\pi)$$

إذن

$$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2008} = \frac{(2)^{2008\times\frac{1}{2}}}{(2)^{2008}} \cdot (\cos 502\pi + i \sin 502\pi)$$

بما أن 502π عدد زوجي فيصبح يساوي 0 ومنه

$$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2008} = \frac{(2)^{1004}}{(2)^{1004} \cdot (2)^{1004}} \cdot (\cos 0 + i \sin 0)$$
$$= \frac{1}{(2)^{1004}} \cdot (1 + 0)$$

ومنه $\boxed{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2008} = \frac{1}{2^{1004}} \in R}$

ومنه $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2008}$ عدد حقيقي

2-أ - البرهان أن : $e^{-i\theta} = \frac{1}{e^{i\theta}}$

لدينا من التعريف $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

نضع الإشارة السالبة أمام θ تصبح :

$$e^{-i\theta} = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta)$$

من خواص الدوال المثلثية $\cos(-\theta) = \cos(\theta)$ و

ومنه $\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$

$$e^{-i\theta} = \cos(\theta) - i\sin(\theta) \ldots\ldots (1)$$

لدينا من التعريف

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

نضع المقلوب للطرفين نجد

$$\frac{1}{e^{i\theta}} = \frac{1}{\cos\theta + i\sin\theta}$$

نضرب في مرافق المقام نجد

$$\frac{1}{e^{i\theta}} = \frac{(\cos\theta - i\sin\theta)}{(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta - i\sin\theta)}$$
$$= \frac{(\cos\theta - i\sin\theta)}{\cos^2\theta + \sin^2\theta}$$

ومن الخواص أن $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ ومنه

$$\frac{1}{e^{i\theta}} = (\cos\theta - i\sin\theta) \ldots\ldots (2)$$

ومنه بالمساواة بين (1) و (2) نجد

$$e^{-i\theta} = \frac{1}{e^{i\theta}}$$

البرهان أن: $\frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}} = e^{i(\theta_1-\theta_2)}$

لدينا من الخاصية $e^{i(\theta_1+\theta_2)} = e^{i\theta_1} \times e^{i\theta_2}$

$$\frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}} = e^{i\theta_1} \cdot \frac{1}{e^{i\theta_2}}$$

ولدينا من الجواب السابق أن $e^{-i\theta} = \frac{1}{e^{i\theta}}$ ومنه

$$\frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}} = e^{i\theta_1} \cdot e^{-i\theta_2}$$

ومنه

$$\frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}} = e^{i(\theta_1-\theta_2)}$$

2-ب - كتابة z على الشكل الأسي:

$$z = \frac{z_2 - 1}{z_1 - 1} = \frac{1 + i - 1}{i - 1} = \frac{i}{-1 + i}$$

نضرب في مرافق المقام

$$z = \frac{i(-1 - i)}{(-1 + i)(-1 - i)} = \frac{-i + 1}{2}$$

ومنه

$$z = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$$

حساب $|z|$

$$|z| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

حساب θ_z

$\arg(z) = \theta_z$:

$$\begin{cases} \cos\theta_z = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta_z = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = -\frac{2}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

أي $\theta_z = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$

ومنه الشكل الأسي للعدد المركب z هو

$$\boxed{z = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i(-\frac{\pi}{4})}}$$

الأعداد المركبة من الألف إلى الياء

2-جـ- كتابة z على الشكل المثلثي:

$$z = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$$

ومنه الشكل المثلثي لعدد z

$$\boxed{z = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)}$$

استنتاج التشابه المباشر مع تعيين زاويته ونسبته:

لدينا

$$z = \frac{z_2 - 1}{z_1 - 1} = \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}{1}$$

بضرب الوسطين في الطرفين نجد

$$z_C - z_A = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-i\frac{\pi}{4}}(z_B - z_A)$$

وهذه هي الكتابة المختصرة للتشابه المباشر الذي مركزه A ويحول B إلى C ،حيث:

نسبته هي $\boxed{k = \frac{\sqrt{2}}{2}}$ وزاويته $\boxed{\theta = -\frac{\pi}{4}}$

30. علوم تجريبية 2008 الموضوع 02

1-حل في مجموعة الأعداد المركبة C المعادلة ذات المجهول z التالية:

$$z^2 + iz - 2 - 6i = 0$$

2-نعتبر المستوي المركب المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ النقطتين A و B واللتين لاحقتاهما z_A و z_B على الترتيب حيث:

$z_A = 2 + i$ و $z_B = -2 - 2i$

عين z_ω لاحقة النقطة ω مركز الدائرة (T) ذات القطر $[AB]$.

3-لتكن C النقط ذات اللاحقة z_C حيث $z_C = \frac{4-i}{1+i}$ ،

اكتب z_C على الشكل الجبري ثم أثبت أن النقطة C تنتمي الى الدائرة (T).

4-أ-برهن أن عبارة التشابه المباشر S الذي مركزه M_0 ونسبته k $(k > 0)$ وزاويته θ والذي يرافق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$ هي: $z' - z_0 = ke^{i\theta}(z - z_0)$

ب-تطبيق: عين الطبيعة والعناصر المميزة للتحويل S المعرف بـ: $z' + \frac{1}{2}i = 2e^{i\frac{\pi}{3}}\left(z + \frac{1}{2}i\right)$

نص الإجابة

1-حل في C المعادلة $z^2 + iz - 2 - 6i = 0$:

$$z^2 + iz - 2 - 6i = 0$$ لدينا

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (i)^2 - 4(1)(-2 - 6i)$$

$$\Delta = -1 + 8 + 24i$$

$$\Delta = 7 + 24i$$ ومنه

إيجاد الجذور التربيعية للمميز Δ :

نضع $w = x + iy$ حيث

$$\Delta = w^2$$

$$\Delta = (x + iy)^2$$

$$\Delta = x^2 - y^2 + 2xyi$$ ومنه

أي يصبح العدد الحقيقي يساوي الحقيقي، والتخيلي يساوي التخيلي، والطويلة تساوي الطويلة:

$$\begin{cases} 7 = x^2 - y^2 \ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\ 24 = 2xy \ldots\ldots\ldots\ldots (2) \\ 25 = x^2 + y^2 \ldots\ldots\ldots\ldots (3) \end{cases}$$

بالجمع بين (1) و (3) نجد

$$2x^2 = 7 + 25$$

$$x^2 = 16$$ ومنه

$$\begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = -4 \end{cases}$$ معناه

بتعويض x_1 و x_2 في المعادلة (2) نجد

$$\begin{cases} y_1 = \frac{24}{8} = 3 \\ y_2 = \frac{24}{-8} = -3 \end{cases}$$

ومنه الجذرين التربيعيين للمميز Δ هما

$$\begin{cases} w_1 = 4 + 3i \\ w_2 = -4 - 3i \end{cases}$$

ومنه نختار أحد الجذرين وليكن $w_1 = 4 + 3i$ نجد

$$z_1 = \frac{-i - (4 + 3i)}{2} = \frac{-i - 4 - 3i}{2}$$

$$= -2 - 2i$$

$$z_2 = \frac{-i + (4 + 3i)}{2} = \frac{-i + 4 + 3i}{2} = 2 + i$$

ومنه $\boxed{S = \{-2 - 2i, 2 + i\}}$

2-تعيين z_ω مركز الدائرة (Γ) ذات القطر $[AB]$:

النقطة ω تمثل منتصف $[AB]$ ونكتب

$$z_\omega = \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{2 + i - 2 - 2i}{2} = -\frac{1}{2}i$$

إذن $\boxed{z_\omega = -\frac{1}{2}i}$

كتابة z_C على الشكل الجبري :

$$z_C = \frac{4-i}{1+i} = \frac{(4-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}$$
$$= \frac{4-4i-i-1}{2}$$
ومنه $\boxed{z_C = \frac{3}{2} - \frac{5}{2}i}$

3-إثبات أن النقطة C تنتمي إلى الدائرة (Γ) :

إذا كان $\omega C = \frac{AB}{2} = r$ فإن النقطة C تنتمي إلى الدائرة (Γ)

$$\frac{AB}{2} = \frac{|z_B - z_A|}{2} = \frac{|-2-2i-2-i|}{2} = \frac{|-4-3i|}{2}$$
$$= \frac{\sqrt{16+9}}{2} = \frac{5}{2}$$
$$\omega C = |z_C - z_\omega| = \left|\frac{3}{2} - \frac{5}{2}i + \frac{1}{2}i\right|$$
$$= \left|\frac{3}{2} - 2i\right| = \sqrt{\frac{9}{4}+4} = \frac{5}{2}$$
ومنه النقطة $C \in (\Gamma)$

4-أ – البرهان أن عبارة التشابه المباشر S هي:
$$z' - z_0 = ke^{i\theta}(z - z_0)$$

لدينا العبارة المختصرة للتشابه المباشر S هي
$$z' = az + b \ldots\ldots (1)$$
و لدينا مركز التشابه المباشر هو z_0 حيث
$$z_0 = \frac{b}{1-a}$$
بضرب الوسطين في الطرفين نجد
$$b = z_0(1-a) \ldots\ldots (2)$$
بتعويض (2) في (1) نجد
$$z' = az + z_0(1-a)$$
هذا يكافئ $z' = az - az_0 + z_0$
نقوم بنقل z_0 إلى الطرف الآخر نجد
$$z' - z_0 = a(z - z_0)$$
وبما أنه تشابه مباشر فإن $a = ke^{i\theta}$ ومنه
$$z' - z_0 = ke^{i\theta}(z - z_0)$$

4-ب - تعيين طبيعة وعناصر التحويل S المعرف بـ:
$$z' + \frac{1}{2}i = 2e^{i\frac{\pi}{3}}\left(z + \frac{1}{2}i\right)$$

لدينا $z' + \frac{1}{2}i = 2e^{i\frac{\pi}{3}}\left(z + \frac{1}{2}i\right)$

هذا يكافئ $z' - \left(-\frac{1}{2}i\right) = 2e^{i\frac{\pi}{3}}\left(z - \left(-\frac{1}{2}i\right)\right)$
ومنه طبيعة التحويل S هو تشابه مباشر نسبته $k = 2$ ، وزاويته $\theta = \frac{\pi}{3}$ ومركزه ω ذات اللاحقة
$$z_\omega = -\frac{1}{2}i$$

الأستاذ نور الدين

وفريق عكاشة

يتمنيان لك النجاح والتوفيق

كلمة فريق عكاشة

عندما كنا صغارا أحببنا المطر فكنا نلعب تحته ونستمتع به .

وعندما كبرنا أحببنا العلم فجمعنا شملنا لأجله، وعقدنا العزم على تسخير أنفسنا له

مواضيع شعبة التقني الرياضي

31. تقني 2019 الموضوع 01

المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ ، A و B و C النقط التي لاحقاتها على الترتيب $z_A = 1+i$ $z_B = 2+i$

و $z_C = \frac{3}{2} + i\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

(Γ) الدائرة التي مركزها A وطول نصف قطرها 1

1-أ- تحقق أن النقطة C من الدائرة (Γ)

1-ب- عين قيسا للزاوية $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$ ثم استنتج أن C صورة B بالدوران r الذي مركزه A يطلب تعيين زاويته

2- S التشابه المباشر الذي يحول النقطة M ذات اللاحقة z إلى النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث :

$z' = (1+i\sqrt{3})z + \sqrt{3} - i\sqrt{3}$

2-أ- حدد العناصر المميزة للتشابه S

2-ب- عين z_D لاحقة D صورة B بالتشابه S.

3- ماهي نسبة التحاكي h الذي مركزه A حيث $S = hor$؟

استنتج أن النقط A ، C و D في استقامية

4- (E) مجموعة النقط M من المستوي التي لاحقتها z حيث : $z = z_A + ke^{i\frac{\pi}{3}}$ مع $k \in \mathbb{R}_+^*$

- تحقق أن النقطة C من المجموعة (E). ثم حدد طبيعة (E).

الحل

1-أ- التحقق من أن النقطة C تنتمي الى الدائرة (Γ)

حتى تكون C من (Γ) فانه يجب $AC = 1$

لدينا

$$AC = |z_C - z_A|$$

$$= \left|\frac{3}{2} + i\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 1 - i\right| = \left|\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right| = 1$$

ومنه C تنتمي لـ (Γ)

1-ب- تعيين قيس بالراديان للزاوية $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$

$$(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) = Arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = Arg\left(\frac{\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}{1}\right)$$

$$(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) = Arg\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi; (k \in z)$$

-استنتاج أن C صورة B بالدوران r الذي مركزه A

لدينا : $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{i\frac{\pi}{3}}$

أي $z_C - z_A = e^{i\frac{\pi}{3}}(z_B - z_A)$

$|e^{i\frac{\pi}{3}}| = 1$

ومنه C صورة B بالدوران r الذي مركزه A وزاويته $\theta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$

2-أ- تعيين العناصر المميزة للتشابه S:

لدينا $z' = (1+i\sqrt{3})z + \sqrt{3} - i\sqrt{3}$

نسبته $|1+i\sqrt{3}| = 2$

زاويته $Arg(1+i\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$

مركزه $z_\omega = 1+i = z_A$

ب- تعيين z_D

$z_D = (1+i\sqrt{3})z_B + \sqrt{3} - i\sqrt{3}$

$z_D = (1+i\sqrt{3})(2-i) + \sqrt{3} - i\sqrt{3}$

$z_D = 2 + (1+\sqrt{3})i$

-ايجاد نسبة التحاكي h

نعلم أن التشابه هو تركيب تحاكي ودوران ومنه زاوية الدوران هي نفسها زاوية التشابه ونسبة التحاكي هي نفسها نسبة التشابه.

ومنه: $k = 2$

استنتاج أن النقط A ، C و D في استقامية

بما أن C صورة B بالدوران r و D صورة B بالتشابه S

ولدينا: $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3}$

$$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{3}$$

ومنه يوجد إرتباط خطي بين $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AD}$ ومنه النقط A و C و D في إستقامية

4- التحقق من أن النقطة C تنتمي إلى المجموعة (E)

لدينا $z_C = \frac{3}{2} + i\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

تكافئ $z_C = \frac{3}{2} + i + 1 - 1 + \frac{i\sqrt{3}}{2}$

$$z_C = z_A + \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$$

$$z_C = z_A + e^{i\frac{\pi}{3}}$$

ومنه C تنتمي إلى (E) حيث $k = 1$

- تحديد طبيعة (E)

هي نصف مستقيم مبدؤه النقطة A ويميل بزاوية قدرها $\frac{\pi}{3}$

32. بكالوريا 2019 الموضوع 02

1- تحقق أن $(2-2\sqrt{3})^2 = 16-8\sqrt{3}$

ب- عين على الشكل الجبري العددين المركبين L_1 و L_2 العددة المركب z حيث:

$$z = -16\sqrt{3} - 16i$$

II- في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ نعتبر النقط A ، B و C التي لاحقاتها $z_A = 4e^{\frac{i\pi}{3}} + 4e^{\frac{i5\pi}{6}}$ ،

$z_C = -\frac{1}{6}z_A$ ، $z_B = \frac{1}{2}iz_A$

1- اكتب z_A على الشكل الجبري، ثم بين أن $z_A = 4\sqrt{2}e^{\frac{i7\pi}{12}}$

2- استنتج القيمتين المضبوطتين للعددين الحقيقيين $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ و $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$

3- S التشابه المباشر الذي يحول A إلى B وحول B إلى C

نشكل M' النقطة ذات اللاحقة z' صورة النقطة M ذات اللاحقة z بالتشابه S

أ- بين أن $z' = \frac{1}{2}iz$

ب- حدد العناصر المميزة للتشابه S

4- G النقطة ذات اللاحقة z_G مرجح الجملة $\{(A;2),(B;-2),(C;4)\}$

أ- بين أن $z_G = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$

ب- (E) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z بحيث $\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{2MC}\| = 2\sqrt{2}$

حدد طبيعة (E) و عناصرها المميزة، ثم احسب محيط (E') صورة (E) بالتشابه S

الحل

1- التحقق من أن $(2-2\sqrt{3})^2 = 16-8\sqrt{3}$

$$(2-2\sqrt{3})^2 = 2^2 + (2\sqrt{3})^2 - 2(2)(2\sqrt{3})$$
$$= 4 + 12 - 8\sqrt{3}$$
$$= 16 - 8\sqrt{3}$$

1ب- التعيين على الشكل الجبري للعددين المركبين L_1 و L_2 للعدد المركب z

$$z = -16\sqrt{3} - 16i$$

نضع $z = w^2$

$$(x+iy)^2 = -16\sqrt{3} - 16i$$
$$x^2 - y^2 + 2xyi = -16\sqrt{3} - 16i$$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -16\sqrt{3} \quad ...(1) \\ 2xy = -16 \quad ...(2) \\ x^2 + y^2 = 32 \quad ...(3) \end{cases}$$

نجمع (1) و (3) نجد

$$2x^2 = -16\sqrt{3} + 32$$
$$x^2 = 16 - 8\sqrt{3}$$

ولدينا $(2-2\sqrt{3})^2 = (16-8\sqrt{3})$

معناه $x^2 = (2-2\sqrt{3})^2$

ومنه

$$x_1 = 2-2\sqrt{3}$$
$$x_2 = -(2-2\sqrt{3}) = 2\sqrt{3}-2$$

نعوض في (2) نجد

$$y_1 = \frac{-16}{2x_1}$$

$$y_1 = \frac{-8(2+2\sqrt{3})}{(2-2\sqrt{3})(2+2\sqrt{3})} = \frac{-8(2+2\sqrt{3})}{-8}$$

$$y_1 = 2+2\sqrt{3}$$

$$y_2 = \frac{-16}{2x_2} = \frac{-8(2\sqrt{3}+2)}{(2\sqrt{3}-2)(2\sqrt{3}+2)}$$
$$= -(2\sqrt{3}+2)$$

ومنه

$$L_1 = (2-2\sqrt{3}) + i(2+2\sqrt{3})$$
$$L_2 = (2\sqrt{3}-2) - i(2+2\sqrt{3})$$

II-1- كتابة z_A على الشكل الجبري

$$z_A = 4e^{i\frac{\pi}{3}} + 4e^{i\frac{5\pi}{6}}$$
$$z_A = 4\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} + 4\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}$$
$$z_A = 4\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 4\left(\cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)\right)$$
$$z_A = 4\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 4\left(-\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$
$$z_A = (2+2\sqrt{3}i) + 4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$$
$$z_A = 2+2\sqrt{3}i - 2\sqrt{3} + 2i$$
$$z_A = (2-2\sqrt{3}) + i(2\sqrt{3}+2)$$

تبيين أن $z_A = 4\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}$

$$4\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{12}} = 4\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)} = 4\sqrt{2}\left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)$$
$$= 4\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$
$$= 4\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$= (2-2\sqrt{3}) + i(2\sqrt{3}+2) = z_A$$

2- استنتاج القيمتين المضبوطتين

لـ- $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$

لدينا

$$4\sqrt{2}\,e^{i\frac{7\pi}{12}} = 4\sqrt{2}(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12})$$

$$= 4\sqrt{2}\left(e^{i\frac{\pi}{3}} \times e^{i\frac{\pi}{4}}\right)$$

$$= 4\sqrt{2}\left(\left(\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$$

$$= 4\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{i\sqrt{2}}{4}+\frac{i\sqrt{6}}{4}-\frac{\sqrt{6}}{4}\right)$$

$$= 4\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}+i\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\right)$$

ومنه $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

$\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

3-أ- تبيين أن $z' = \frac{1}{2}iz$

لدينا B صورة A بالتشابه S معناه $z_B = \frac{1}{2}iz_A$

و C صورة B بالتشابه S معناه $z_C = \frac{1}{2}iz_B$

لدينا $z_B = \frac{1}{2}iz_A$ ومنه $z_A = \frac{2z_B}{i}$ أي

$$z_C = -\frac{1}{4}\left(\frac{2z_B}{i}\right)$$

$$z_C = \frac{-1(i)z_B}{2(i)(i)} = \frac{1}{2}iz_B$$

ومنه العبارة المركبة للتشابه هي $z' = \frac{1}{2}iz$

3-ب- تحديد العناصر المميزة للتشابه S

لدينا $a = \frac{1}{2}i$ و $b = 0$

ومنه نسبته: $|a| = \frac{1}{2}$

زاويته: $Arg(a) = \frac{\pi}{2}$

مركزه هو النقطة $0\,(0;0)$

4-أ- تبيين أن $z_G = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$

G مرجح الجملة $\{(A;2),(B;-2),(C;4)\}$ معناه

$$z_G = \frac{2z_A-2z_B+4z_C}{2-2+4}$$

$$= \frac{4-4\sqrt{3}+i(4+4\sqrt{3})-iz_A-z_A}{4}$$

$$z_G = \frac{4+4\sqrt{3}}{4} = 1+\sqrt{3}$$

$$z_G = 2\left(\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right) = 2(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})$$

ومنه $z_G = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$

4-ب- تحديد طبيعة (E)

لدينا مرجح الجملة المثقلة

$\{(A;2),(B;-2),(C;4)\}$

$2\overrightarrow{GA} - 2\overrightarrow{GB} + 4\overrightarrow{GC} = 0$ أي

$\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{GC} = 0$ نكافئ

$\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MG}$ ومنه

$\|2\overrightarrow{MG}\| = 2\sqrt{2}$ وبالتالي

$MG = \sqrt{2}$ أي

ومنه مجموعة النقط (E) هي دائرة مركزها G

ونصف قطرها $r = \sqrt{2}$

حساب محيط (E')

لدينا r' نصف قطر الدائرة (E')

$$r' = \frac{1}{2}r = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$P = 2r'\pi = \frac{2\times\sqrt{2}}{2}\pi = \pi\sqrt{2}$ (وحدة الطول)

33. تقني 2018 الموضوع 01

I- حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z: $z^2 - 2\sqrt{2}z + 4 = 0$

II- المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$.

لتكن النقطتين A و B

لاحقتاهما $z_A = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ و $z_B = \overline{z_A}$

($\overline{z_A}$ يرمز الى المرفق z_A)

1- اكتب على الشكل الأسي كل من العددين المركبين z_A و $\frac{1}{z_B}$ ثم بين أن العدد $\left(\frac{2}{z_B}\right)^{2018}$ تخيلي صرف.

2- لتكن النقطة C صورة B بالتحاكي h الذي مركزه ω ذات اللاحقة $z_\omega = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ونسبته (-3)

بين أن لاحقة النقطة C هي $z_C = -\sqrt{2} + i3\sqrt{2}$

3- احسب z_D لاحقة النقطة D صورة B بالدوران r الذي مركزه O وزاويته $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$.

4-أ- بين أن $\frac{z_C - z_A}{z_D - z_A} = -i$ ثم استنتج طبيعة المثلث ACD

ب- أوجد لاحقة النقطة E بحيث يكون الرباعي ACED مربعا

الحل

I-حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة

$$z^2 - 2\sqrt{2}z + 4 = 0$$
$$\Delta = \left(-2\sqrt{2}\right)^2 - 4(1)(4) = 8 - 16$$
$$= -8 = 8i^2$$
$$\Delta = \left(2\sqrt{2}i\right)^2$$

للمعادلة حلان

$$z_1 = \frac{2\sqrt{2}-2\sqrt{2}i}{2} = \sqrt{2} - \sqrt{2}i$$
$$z_1 = \frac{2\sqrt{2}+2\sqrt{2}i}{2} = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$$
$$S(z_1, z_2)$$

II-1- الكتابة على الشكل الأسي كلا من العددين المركبين z_A و $\frac{1}{z_B}$

$$|z_A| = \sqrt{2+2} = 2 \quad ; \quad \text{Arg}(z_A) = \theta_A$$

لدينا $\begin{cases} \cos\theta_A = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta_A = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

ومنه $\arg(z_A) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \; ; k\epsilon\mathbb{Z}$

وبالتالي $z_A = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$

لدينا $z_B = \overline{z_A} = 2e^{-i\frac{\pi}{4}}$ ومنه

$$\frac{1}{z_B} = \frac{1}{2e^{-i\frac{\pi}{4}}} = \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

-تبيين أن العدد $\left(\frac{2}{z_B}\right)^{2018}$ تخيلي صرف

لدينا $z_B = 2e^{-i\frac{\pi}{4}}$

$$\left(\frac{2}{z_B}\right)^{2018} = \left(\frac{2}{2e^{-i\frac{\pi}{4}}}\right)^{2018} = \left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^{2018}$$
$$= e^{i\left(504\pi+\frac{\pi}{2}\right)}$$
$$= \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i$$
$$\left(\frac{2}{z_B}\right)^{2018} = i$$

ومنه العدد $\left(\frac{2}{z_B}\right)^{2018}$ تخيلي صرف

2- تبيين لاحقة النقطة z_C

$$z_C - z_\omega = -3(z_B - z_\omega)$$
$$z_C = -3z_B + 3z_\omega + z_\omega$$
$$z_C = -3\left(\sqrt{2} - i\sqrt{2}\right) + 3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$z_C = -3\sqrt{2} + 3i\sqrt{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$z_C = -3\sqrt{2} + 3i\sqrt{2} + 2\sqrt{2}$$

ومنه $z_C = -\sqrt{2} + 3i\sqrt{2}$

3- حساب z_D

z_D لاحقة النقطة D صورة B بالدوران r الذي مركزه O وزاويته $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ ومنه

$$z_D - z_O = e^{-i\frac{\pi}{2}}(z_B - z_O)$$
$$z_D = \left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]\left[\sqrt{2} - i\sqrt{2}\right]$$
$$z_D = -i\left(\sqrt{2} - i\sqrt{2}\right)$$
$$z_D = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$$

4-أ- بيان أن $\frac{z_C - z_A}{z_D - z_A} = -i$

$$\frac{z_C - z_A}{z_D - z_A} = \frac{-\sqrt{2} + 3i\sqrt{2} - \sqrt{2} - i\sqrt{2}}{-\sqrt{2} - i\sqrt{2} - \sqrt{2} - i\sqrt{2}}$$
$$= \frac{-2\sqrt{2} + 2i\sqrt{2}}{-2\sqrt{2} - 2i\sqrt{2}}$$
$$= \frac{(-1+i)(-1+i)}{(-1-i)(-1+i)}$$
$$= \frac{1 - i - i - 1}{2} = -\frac{2i}{2} = -i$$

وهو المطلوب.

-استنتاج طبيعة المثلث ACD

لدينا $\frac{z_D - z_A}{z_C - z_A} = -i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$

$$\left|\frac{z_C - z_A}{z_D - z_A}\right| = 1$$

أي

$$AC = AD \; \ldots\ldots (1)$$

و $\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_D - z_A}\right) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \;\; (k \in \mathbb{Z})$

$$\left(\overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AC}\right) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \; \ldots\ldots (2)$$

من 1 و 2 نجد أن المثلث ACD قائم في A ومتساوي الساقين

ب- إيجاد لاحقة النقطة E

لكي يكون $ACED$ مربعا يجب أن يكون متوازي أضلاع أولا أي $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DE}$

$$z_C - z_A = z_E - z_D$$
$$z_E = z_C - z_A + z_D$$
$$z_E = -\sqrt{2} + 3i\sqrt{2} - \sqrt{2} - i\sqrt{2} - \sqrt{2} - i\sqrt{2}$$
$$z_E = -3\sqrt{2} + i\sqrt{2}$$

34. تقني 2018 الموضوع 02

I-أ- حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة ذات المجهول z التالية

$$(E) \ldots \quad 4z^2 - 2z + 1 = 0$$

ب- اكتب العددان $\frac{1}{z_1}$ و $\frac{1}{z_2}$ على الشكل الاسي حيث z_1 و z_2 حلا المعادلة (E)

II- المستوي المركب المنسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ نعتبر النقط A و B و C لاحقاتها $z_A = 4$ ، $z_B = 1 + i\sqrt{3}$ و $z_C = 1 - i\sqrt{3}$

1-أ- احسب $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$ ثم حدد طبيعة المثلث ABC

ب- استنتج أن B هي صورة C بدوران مركزه A يطلب تعيين زاويته

2- اوجد لاحقة النقطة D صورة النقطة A بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{CB}$ واستنتج بدقة طبيعة الرباعي ACBD

3- حدد طبيعة (γ) مجموعة النقط M من المستوي المركب ذات اللاحقة z التي تحقق ما يلي

$$|iz + \sqrt{3} - i| = |z - 1 + i\sqrt{3}|$$

4-بين أن النقطة G مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABC تنتمي الى (γ)

الحل

I-أ- الحل في مجموعة الأعداد المركبة C المعادلة

$$4z^2 - 2z + 1 = 0$$

$$\Delta = 4 - 4(4)1 = -12 = \left(2i\sqrt{3}\right)^2$$

ومنه للمعادلة حلان

$$z_1 = \frac{2 + 2i\sqrt{3}}{8} = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i$$

$$z_2 = \frac{2 - 2i\sqrt{3}}{8} = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}i$$

ب- كتابة العددان $\frac{1}{z_1}$ و $\frac{1}{z_2}$ على الشكل الأسي

$$|z_1| = \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{3}{16}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\arg(z_1) = \theta_1$$

$$\begin{cases} \cos\theta_1 = \frac{1}{2} \\ \sin\theta_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta_1 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \ ; k \in \mathbb{Z}$$

ومنه $z_1 = \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}$

$$\frac{1}{z_1} = \frac{1}{\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}} = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

لدينا $z_2 = \overline{z_1} = \frac{1}{2}e^{-i\frac{\pi}{3}}$ ومنه

$$\frac{1}{z_2} = \frac{1}{\frac{1}{2}e^{-i\frac{\pi}{3}}} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$$

II-1-أ- حساب $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$

$$\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \frac{1 + i\sqrt{3} - 4}{1 - i\sqrt{3} - 4}$$

$$= \frac{(-3 + i\sqrt{3})(-3 + i\sqrt{3})}{(-3 - i\sqrt{3})(-3 + i\sqrt{3})}$$

$$= \frac{9 - 3i\sqrt{3} - 3i\sqrt{3} - 3}{12}$$

$$= \frac{6}{12} - \frac{6i\sqrt{3}}{12} = \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$$

$$= e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

تحديد طبيعة المثلث ABC

لدينا:

$$\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

$$\left|\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right| = 1 \ ; \ \arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right)$$

$$= -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \ ; k \in \mathbb{Z}$$

$$AC = AB \ldots (1); \left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}\right) = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \ldots (2)$$

من (1) و(2) نجد أن المثلث ABC متقايس الأضلاع

ب- استنتاج أن B هي صورة C بدوران مركزه A

لدينا $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$

$$z_B - z_A = \left(\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)(z_C - z_A)$$

و $\left|\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right| = 1$

$\left(\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) \in \mathbb{C}$

ومنه نستنتج أنه يوجد دوران مركزه A يحول C الى B وزاويته $\theta = \frac{-\pi}{3} + 2k\pi \ ; k \in \mathbb{Z}$

2-إيجاد لاحقة D صورة النقطة A بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{CB}$

بما أن D صورة A بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{CB}$ فإن

$$z_D = z_A + z_{\overrightarrow{CB}}$$

$z_D = 4 + z_B - z_C = 4 + 1 + i\sqrt{3} - 1 + i\sqrt{3}$
$= 4 + 2i\sqrt{3}$

- استنتاج طبيعة الرباعي $ACBD$

بما أن D صورة A بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{CB}$ معناه

$z_D = z_A + z_{\overrightarrow{CB}}$
$z_D - z_A = z_{\overrightarrow{CB}}$
$z_{\overrightarrow{AD}} = z_{\overrightarrow{CB}}$ أي $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CB}$

ومنه الرباعي $ACBD$ متوازي اضلاع
ولدينا $(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}) = \frac{\pi}{3}$ و $CA = CB$
ومنه نستنتج أن الرباعي $ACBD$ معين

3- تحديد طبيعة (γ) مجموعة النقط M من المستوي

$|iz + \sqrt{3} - i| = |z - 1 + i\sqrt{3}|$
$|i|\left|z + \frac{\sqrt{3} - i}{i}\right| = |z - (1 - i\sqrt{3})| \quad ; |i| = 1$
$|z - i\sqrt{3} - 1| = |z - z_C|$
$|z - (1 + i\sqrt{3})| = |z - z_C|$
$|z - z_B| = |z - z_C|$

يعني $BM = CM$
ومنه (γ) هي محور القطعة المستقيمة $[BC]$

4-البرهان أن $G \in (\gamma)$

طريقة1

بما أن G مركز للدائرة المحيطة بالمثلث ABC فان $GB = GC = GA$
ولدينا $BM = CM$ بوضع $G = M$ أي $BG = CG$
ومنه G نقطة من محور القطعة المستقيمة $[BC]$
ومنه $G \in (\gamma)$

طريقة2

بما أن المثلث ABC مقايس الأضلاع فان مركز الدائرة المحيطة به هي مركز ثقله ومرجح الجملة $\{(A;1);(B;1);(C;1)\}$

ومنه

$z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3}$
$= \frac{4 + 1 + i\sqrt{3} + 1 - i\sqrt{3}}{3}$
$= \frac{6}{3}$
$z_G = 2$
$|iz_G + \sqrt{3} - i| = |2i + \sqrt{3} - i| = |\sqrt{3} + i|$
$= 2$

ومن جهة أخرى لدينا
$|z_G - 1 + i\sqrt{3}| = |2 - 1 + i\sqrt{3}| = |1 + i\sqrt{3}|$
$= 2$
ومنه $|iz_G + \sqrt{3} - i| = |z_G - 1 + i\sqrt{3}|$
ومنه $G \in (\gamma)$

35. تقني 2017 الموضوع 01

المستوي المركب المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$
نعتبر النقط A، B وC التي لواحقها:
$z_C = -i\ ; z_A = -1;\ z_B = 2 + i$
1- اكتب العدد المركب $\frac{z_A - z_C}{z_B - z_C}$ على الشكل الأسي ثم استنتج طبيعة المثلث ABC
2- عين العبارة المركبة للتشابه المباشر S الذي مركزه C ويحول B الى A
3- نعتبر النقطة D نظيرة B بالنسبة الى C والنقطة E صورة D بالتشابه S
أ- عين z_D لاحقة D ثم تحقق أن: $z_E = 1 - 2i$ حيث z_E لاحقة E
ب- حدد طبيعة الرباعي $ADEB$
4- (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z (M تختلف عن A وB) حيث $k \in \mathbb{Z}$ و
$\arg(z - z_A) - \arg(z - z_B) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$
تحقق أن النقطة C تنتمي الى (Γ) ، ثم حدد طبيعة المجموعة (Γ) وأنشئها

الحل

1-كتابة العدد المركب $\frac{z_A - z_C}{z_B - z_C}$ على الشكل الأسي

$\frac{z_A - z_C}{z_B - z_C} = \frac{-1+i}{2+2i} = \frac{-1+i}{2+2i} \times \frac{(2-2i)}{(2-2i)} = \frac{-2+2i+2i+2}{8}$
$= \frac{1}{2}i$

حيث

$\left|\frac{z_A - z_C}{z_B - z_C}\right| = \frac{1}{2} \quad ; \arg\left(\frac{z_A - z_C}{z_B - z_C}\right) = \frac{\pi}{2}$
$\frac{z_A - z_C}{z_B - z_C} = \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{2}}$

- طبيعة المثلث ABC

لدينا $\frac{CA}{CB} = \frac{1}{2}$ أي $2CA = CB$
و $(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{CA}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$
ومنه المثلث ABC قائم في C

2- تعيين العبارة المركبة للتشابه المباشر

$z' = az + b$

$z_A - z_C = a(z_B - z_C)$

$a = \frac{z_A - z_C}{z_B - z_C} = \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{2}}$

أي $z'_A = \frac{1}{2}(z_B + b)$

$b = z_A - \frac{1}{2}iz_B$

$b = -1 - \frac{1}{2}i(2+i)$

$b = -\frac{1}{2} - i$

$z' = \frac{1}{2}iz - \frac{1}{2} - i$

3-أ- تعيين z_D لاحقة D

$z_C = \frac{z_B + z_D}{2}$

$z_D = 2z_C - z_B$

$z_D = 2(-i) - (2+i) = -2i - 2 - i$

$z_D = -2 - 3i$

-التحقق من أن $z_E = 1 - 2i$

$z_E = \frac{1}{2}i\,z_D - \frac{1}{2} - i$

$z_E = \frac{1}{2}i(-2 - 3i) - \frac{1}{2} - i$

$z_E = -i + \frac{3}{2} - \frac{1}{2} - i$

$z_E = 1 - 2i$

ب- تحديد طبيعة الرباعي ADEB

النقطة D نظيرة B بالنسبة الى C أي $CB = CD$

المثلث ABC قائم في C

$S(D) = E$ أي المثلث CDE قائم في C

أي المثلثان متقايسان أي $CA = CE$

و $(BD) \perp (AE)$ ومتقاطعان في C ومنه الرباعي فيه قطران متعامدان ومتناصفان ومنه $ADEB$ معين

4- التحقق من أن النقطة C تنتمي الى (Γ)

$\arg(z_C - z_A) - \arg(z_C - z_B)$

$= \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_C - z_B}\right)$

$\frac{z_C - z_A}{z_C - z_B} = \frac{-i+1}{-i-2-i}$

$= \frac{(1-i)(-2+2i)}{(-2-2i)(-2+2i)}$

$= \frac{-2+2i+2i+2}{8} = \frac{1}{2}i$

$\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_C - z_B}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

ومنه $C \in (\Gamma)$

تحديد طبيعة المجموعة (Γ)

$\arg(z - z_A) - \arg(z - z_B) = \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_C - z_B}\right)$

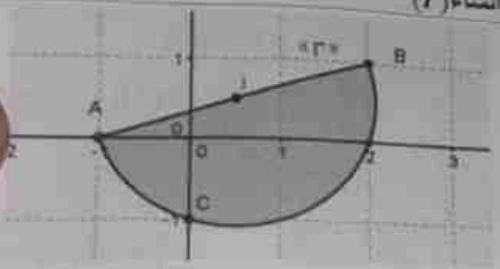
$= \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

$(\overrightarrow{BM}; \overrightarrow{AM}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

مجموعة النقط (Γ) هي نصف الدائرة المقوسة الطرفين حداها النقطتين B وA وتشمل النقطة C

$z_I = \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$

انشاء (Γ)



36. تقني 2017 الموضوع 02

المستوي المركب المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$

نعتبر النقط A، B، C و D التي لواحقها:

$z_A = 1 + i$ ، $z_B = \overline{z_A}$ ، $z_C = \frac{1}{2}(1 - i)$ و $z_D = \overline{z_C}$

1-أ- اكتب z_A و z_C على الشكل الأسي ثم استنتج الشكل الاسي للعددين z_B و z_D

ب- عين قيم العدد الطبيعي n التي تحقق:

$(z_A)^n = (z_B)^n$

2-أ- اوجد نسبة ومركز التحاكي h الذي يحول D الى A ويحول C الى B

ب- احسب طويلة العدد المركب $\frac{z_C - z_B}{z_D - z_A}$ ثم استنتج طبيعة الرباعي $ADCB$

3- جد z_G لاحقة النقطة G مرجح الجملة

$\{(A; 2), (B; 2), (C; -1), (D; -1)\}$

4- لتكن (Γ) مجموعة النقط M من المستوي بحيث:

$\|2\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD}\| = \sqrt{5}$

بين أن A نقطة من (Γ)، ثم حدد طبيعة المجموعة (Γ) وعناصرها المميزة وأنشئها.

الحل

1-أ- كتابة z_A و z_C على الشكل الأسي:

$$|z_A| = \sqrt{2}\ ;\ \arg z_A = \theta_A \quad \begin{cases} \cos\theta_A = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin\theta_A = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow \theta_A = \frac{\pi}{4}$$

ومنه $z_A = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

$$|z_C| = \frac{\sqrt{2}}{2}\ ;\ \arg z_C = \theta_C \quad \begin{cases} \cos\theta_C = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin\theta_C = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \quad \theta_A = -\frac{\pi}{4}$$

ومنه $z_C = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$

استنتاج الشكل الأسي لـ z_B و z_D

$$z_B = \overline{z_A} = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

$$z_D = \overline{z_C} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

ب- تعيين قيم العدد الطبيعي n بحيث $(z_A)^n = (z_B)^n$

$$(z_A)^n = \left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^n = \left(\sqrt{2}\right)^n e^{i\frac{n\pi}{4}}$$
$$= \sqrt{2}^n\left(\cos\frac{n\pi}{4} + i\sin\frac{n\pi}{4}\right)$$

$$(z_B)^n = \left(\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^n = \left(\sqrt{2}\right)^n e^{-i\frac{n\pi}{4}}$$
$$= \sqrt{2}^n\left(\cos\frac{n\pi}{4} + i\sin\frac{n\pi}{4}\right)$$

$$(z_A)^n = (z_B)^n$$
$$(\sqrt{2})^n\left(\cos\frac{n\pi}{4} + i\sin\frac{n\pi}{4}\right) =$$
$$(\sqrt{2})^n\left(\cos\left(\frac{-n\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{-n\pi}{4}\right)\right)$$
$$\cos\frac{n\pi}{4} + i\sin\frac{n\pi}{4} = \cos\left(-\frac{n\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{n\pi}{4}\right)$$

لدينا $\cos\left(\frac{-n\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)$

$$\sin\left(\frac{-n\pi}{4}\right) = -\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)$$

ومنه $i\sin\frac{n\pi}{4} = -i\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)$

$$2i\sin\frac{n\pi}{4} = 0 \qquad ;2i \neq 0$$

ومنه $\sin\frac{n\pi}{4} = 0$ أي $\frac{n\pi}{4} = k\pi$

ومنه $n = 4k \quad (k \in \mathbb{N})$

2-أ- إيجاد نسبة ومركز التحاكي h:

لدينا: $\begin{cases} z_A = az_D + b \ldots (1) \\ z_B = az_C + b \ldots (2) \end{cases}$

بطرح المعادلتين

$$z_A - z_B = a(z_D - z_C)$$

أي $a = \frac{z_A - z_B}{z_D - z_C}$

$$a = \frac{1+i-1+i}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i} = \frac{2i}{i} = 2 \in \mathbb{R}^* - \{1\}$$

ومنه $k = 2$

لدينا $b = z_A - 2z_D$ أي $z_A = 2z_D + b$ ومنه

$$b = 1+i-2\left(\frac{1}{2}(1+i)\right)$$
$$b = 1+i-(1+i) = 0$$
$$z' = 2z$$
$$z_w = \frac{b}{1-a} = \frac{0}{1-2} = 0 = z_0$$

ومركز هو المبدأ O

ب- حساب طويلة العدد المركب $\left(\frac{z_C - z_B}{z_D - z_A}\right)$

$$\frac{z_C - z_B}{z_D - z_A} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i - 1 + i}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i - 1 - i} = \frac{-1+i}{-1-i}$$
$$= \frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-1-2i}{2} = -i$$
$$\left|\frac{z_C - z_B}{z_B - z_A}\right| = 1 \qquad ;BC = AD$$

طبيعة الرباعي $ADCB$

لدينا $\begin{cases} \overrightarrow{BA} = 2\overrightarrow{CD} \\ BC = AD \end{cases}$

ومنه الرباعي $ADCB$ هو شبه منحرف متساوي الساقين

3- إيجاد z_G

$$z_G = \frac{2z_A + 2z_B - z_C - z_D}{2}$$
$$= \frac{2 + 2i + 2 - 2i - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i}{2}$$
$$z_G = \frac{4-1}{2} = \frac{3}{2}$$

4- تبيين أن النقطة A تنتمي الى (Γ)

$$\left\|2\overrightarrow{AA} + 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}\right\|$$
$$= |2(z_B - z_A) - (z_C - z_A) - (z_D - z_A)|$$
$$= \left|2(1-i-1-i) - \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}i - 1 - i\right) - \left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}i - 1 - i\right)\right|$$
$$= |1 - 4i + 2i| = |1 - 2i| = \sqrt{5}$$

ومنه A تنتمي الى (Γ)

تحديد طبيعة المجموعة (Γ)

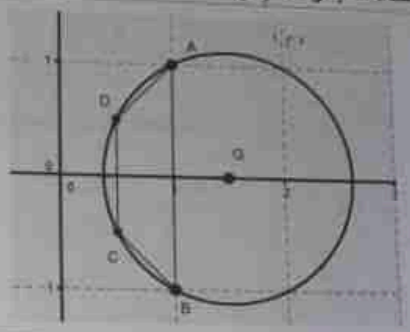
$$\|2\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD}\| = \|(2+2-1-1)\overrightarrow{MG}\| = \|2\overrightarrow{MG}\| = \sqrt{5}$$

$$MG = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

ومنه (Γ) دائرة مركزها G

ونصف قطرها $r = \frac{\sqrt{5}}{2}$ وتشمل النقطة A

انشاء المجموعة (Γ)



37. تقني 2016 الموضوع 01

1- حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة

$$9z^2 - 6\sqrt{3}z + 4 = 0$$

2- المستوي المركب المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ ، لتكن النقطتين A وB لاحقاتها على الترتيب

$z_A = \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{3}i$ و $z_B = \overline{z_A}$

أ- اكتب كلا من z_A و z_B على الشكل الأسي.

ب- بين أن: $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^{2016} + \left(\frac{z_A}{z_B}\right)^{1437} = 0$

جـ- عين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n$ عددا حقيقيا.

3- f التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z النقطة M' لاحقتها z' حيث

$$z' = \left(\frac{z_A}{z_B}\right)z$$

أ- عين طبيعة التحويل النقطي f وعناصره المميزة.

ب- احسب z_C لاحقة C صورة النقطة A بالتحويل f.

جـ- عين z_D لاحقة النقطة D حتى تكون O مركز ثقل الرباعي $ABCD$

الحل

1- حل المعادلة

$$9z^2 - 6\sqrt{3}z + 4 = 0$$

$$\Delta = \left(-6\sqrt{3}\right)^2 - 4(9)(4) = 36\sqrt{3}^2 - 36\times 4$$

$$\Delta = 36(3-4) = -36 = (6i)^2$$

للمعادلة حلان

$$z_1 = \frac{6\sqrt{3}-6i}{18} = \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{3}i$$

$$z_2 = \frac{6\sqrt{3}+6i}{18} = \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{3}i$$

2-أ- كتابة كلا من z_A و z_B على الشكل الأسي

$$|z_A| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{9}+\frac{1}{9}} = \frac{2}{3} \; ; \; \arg z_A = \theta_A$$

$$\begin{cases} \cos\theta_A = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta_A = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta_A = \frac{\pi}{6}$$

$$z_A = \frac{2}{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$$

$$|z_B| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{2}{3} \; ; \; \arg z_B = \theta_B$$

$$\begin{cases} \cos\theta_A = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta_A = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta_A = -\frac{\pi}{6}$$

$$z_B = \frac{2}{3}e^{-i\frac{\pi}{6}}$$

ب- تبيين أن $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^{2016} + \left(\frac{z_A}{z_B}\right)^{1437} = 0$

$$\frac{z_A}{z_B} = \frac{\frac{2}{3}e^{i\frac{\pi}{6}}}{\frac{2}{3}e^{-i\frac{\pi}{6}}} = e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}\right)} = e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^{2016} + \left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^{1437} = e^{i\frac{2016\pi}{3}} + e^{i\frac{1437\pi}{3}} = e^{i672\pi} + e^{i479\pi}$$

$$= \cos(672\pi) + i\sin(672\pi) + \cos(479\pi) + i\sin(479\pi)$$

$$= \cos(0) + i\sin(0) + \cos(\pi) + i\sin\pi$$

$= 1 + 0 - 1 + 0 = 0$

ومنه $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^{2016} + \left(\frac{z_A}{z_B}\right)^{1437} = 0$

جـ تعيين قيم n حتى يكون العدد $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n \in \mathbb{R}$

لدينا :

$$\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n = e^{\left(i\frac{\pi}{3}\right)^n} = \cos\frac{n\pi}{3} + i\sin\frac{n\pi}{3}$$

يكون العدد $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n \in \mathbb{R}$ اذا كان

$$\sin\frac{n\pi}{3} = 0$$

و $\cos\frac{n\pi}{3} \neq 0$

أي $(k \in \mathbb{N})$ $\frac{n\pi}{3} = k\pi$ ومنه $n = 3k$

3-أ- تعيين طبيعة التحويل f

لدينا $z' = \left(\frac{z_A}{z_B}\right)z = e^{i\frac{\pi}{3}}z$

$$z' = (\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})z$$

$$z' = \left(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)z$$

$$\left|\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right| = 1 \; ; \quad \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} \in \mathbb{C}$$

ومنه f دوران زاويته $\theta = \frac{\pi}{3}$ ومركزه المبدأ O

ب- حساب z_C

$$z_C = \left(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{3}i\right)$$

$$z_C = \frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{1}{6}i + \frac{3}{6}i - \frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$z_A = \frac{2}{3}i$$

جـ تعيين z_D

$$\frac{z_A + z_B + z_C + z_D}{4} = 0$$

$$z_A + z_B + z_C + z_D = 0$$

$$z_D = -(z_A + z_B + z_C)$$

$$z_D = -\left(\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{3}i + \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{3}i + \frac{2}{3}i\right)$$

$$z_D = -\frac{2\sqrt{3}}{3} - \frac{2}{3}i$$

38. تقني 2016 الموضوع 02

I-1- حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول التالية:

$$(z^2 - 2\sqrt{2}z + 4)(2z - \sqrt{2}) = 0$$

2- اكتب الحلول على الشكل الأسي.

II- المستوي المركب المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$، نعتبر النقط A ، B و C من المستوي التي لواحقها على الترتيب : $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ،

$b = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ و $c = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$

1- علم النقط A، B وC في المعلم السابق

2- نعتبر النقطة D صورة النقطة C بالتشابه S الذي مركزه Aونسبته 3 وزاويته π والنقطة E صورة النقطة C بالدوران R الذي مركزه O وزاويته $-\frac{\pi}{2}$.

- احسب اللاحقتين d و e للنقطتين D وE على الترتيب.

III- نضع : $z = \frac{d-b}{e-b}$.

1- اكتب العدد المركب z على الشكل المثلثي.

2- نعتبر النقطة I منتصف القطعة المستقيمة $[DE]$ ، F نظيرة النقطة B بالنسبة الى النقطة I.

ماهي طبيعة الرباعي $BDFE$؟

الحل

I-1- حل في $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z

$$(z^2 - 2\sqrt{2}z + 4)(2z - \sqrt{2}) = 0$$

إما:

$$\begin{cases} 2z - \sqrt{2} = 0 \\ z_D = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \quad \text{أي}$$

كلمة فريق عكاشة

عندما كنا صغارا أحبينا المطر فكنا نلعب تحته ونستمتع به .

وعندما كبرنا أحبينا العلم فجمعنا شملنا لأجله. وعقدنا العزم على تسخير أنفسنا له

$$z^2 - 2\sqrt{2}z + 4 = 0$$
$$\Delta = \left(-2\sqrt{2}\right)^2 - 4(1)(4) = 8 - 16 = 8i^2$$
$$z_1 = \frac{2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}i}{2} = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$$
$$z_2 = \frac{2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i}{2} = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$$
$$S(z_0, z_1, z_2)$$

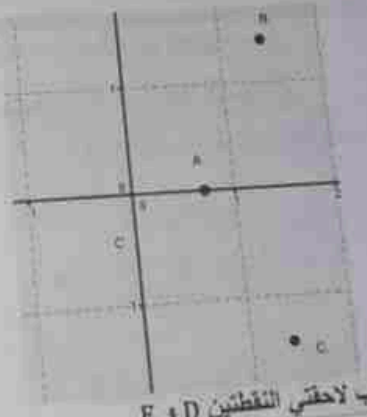
2-كتابة الحلول على الشكل الأسي

$$z_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i2\pi}$$
$$|z_1| = \sqrt{2+2} = 2 \quad ; \arg(z_1) =$$
$$\cos\theta_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\theta_1 \quad \sin\theta_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\theta_1 = \frac{\pi}{4}$$

ومنه

$$z_1 = 2e^{i\frac{-\pi}{4}}$$
$$z_2 = \overline{z_1} = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$$

II-1- تعليم النقط A و B و C



2- حساب لاحقتي النقطتين D و E

$$z_D - z_A = 3e^{i\pi}(z_C - z_A)$$
$$z_D = -3(z_C - z_A) + z_A$$
$$z_D = -3\left(\left(\sqrt{2} - i\sqrt{2}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$z_D = -3\sqrt{2} + 3i\sqrt{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$z_D = -\sqrt{2} + 3i\sqrt{2} = d$$

$$d = -\sqrt{2} + 3i\sqrt{2}$$
$$z_E = e^{-i\frac{\pi}{2}}z_C$$
$$z_E = -i\left(\sqrt{2} - i\sqrt{2}\right)$$
$$z_E = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$$
$$e = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$$

III-1- كتابة العدد المركبة z على الشكل المثلثي

$$z = \frac{-\sqrt{2} + 3i\sqrt{2} - \sqrt{2} - i\sqrt{2}}{-\sqrt{2} - i\sqrt{2} - \sqrt{2} - i\sqrt{2}}$$
$$= \frac{-\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{-\sqrt{2} - i\sqrt{2}}$$
$$= \frac{(-1+i)^2}{(-1-i)(-1+i)}$$
$$= \frac{1 - i - i - 1}{2} = \frac{-2i}{2} = -i$$
$$|z| = 1 \quad ; \arg z = -\frac{\pi}{2}$$
$$z = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

2-طبيعة الرباعي BDFE

بما أن I منتصف $[DE]$
$ID = IE$
F نظيرة B بالنسبة إلى I :
$IB = IF$
أي الرباعي قطراه متناصفان أي متوازي أضلاع
ولدينا $z = -i$
$BD = BE$ و $\arg\left(\frac{d-b}{e-b}\right) = \frac{-\pi}{2}$ أي المثلث BDE قائم في B ومتساوي الساقين ومنه الرباعي $BDFE$ مربع

39. تقني 2015 الموضوع 01

نعتبر المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ النقطتين A وB اللتين لاحقتيهما على الترتيب z_A و z_B
حيث: $z_A = 1 - i$ و $z_B = 3 + 3i$

1-أ- اكتب z_A و z_B على الشكل الأسي.

ب- n عدد طبيعي، عين قيم n بحيث يكون العدد $\left(\frac{z_A}{\sqrt{2}}\right)^n$ حقيقيا.

ج- z عدد مركب حيث: $\frac{z}{z_A} = 4e^{i\frac{\pi}{12}}$ ، احسب طويلة العدد z وعمدة له، ثم اكتب $\frac{z}{z_A}$ على الشكل الجبري.

د- استنتج $\cos\frac{\pi}{12}$ و $\sin\frac{\pi}{12}$

2-أ- احسب اللاحقة z_C للنقطة C صورة النقطة B بالدوران الذي مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$ ، واستنتج طبيعة المثلث ABC

ب- احسب z_D لاحقة النقطة D مرجح الجملة $\{(A;-1),(B;1),(C;1)\}$

ثم بين أن ABDC مربع

الحل

1-أ- كتابة z_A و z_B على الشكل الأسي

$$|z_A| = |1-i| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$\arg z_A = \theta_1 \begin{cases} \cos\theta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin\theta_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow \theta_1 = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

ومنه $z_A = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$

$$|z_B| = |3+3i| = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$\arg z_B = \theta_2 \begin{cases} \cos\theta_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin\theta_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow \theta_2 = \frac{\pi}{4}$$

ومنه $z_B = 3\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

ب- تعيين قيم n بحيث يكون العدد $\left(\frac{z_A}{\sqrt{2}}\right)^n$ حقيقيا.

$$\left(\frac{z_A}{\sqrt{2}}\right)^n = \left(\frac{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}\right)^n = e^{-i\frac{n\pi}{4}}$$

$$= \cos\left(-\frac{n\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{n\pi}{4}\right)$$

حتى يكون $\left(\frac{z_A}{\sqrt{2}}\right)^n$ حقيقيا يجب أن:

$$\sin\left(-\frac{n\pi}{4}\right) = 0$$

أي $-\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) = 0$

$$\frac{n\pi}{4} = k\pi \qquad (k \in \mathbb{N})$$

ومنه $n = 4k \quad (k \in \mathbb{N})$

جـ- حساب طويلة العدد z وعمدته

لدينا $\frac{z}{z_A} = 4e^{i\frac{\pi}{12}} \Rightarrow z = 4e^{i\frac{\pi}{12}}.\sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{4}}$

$$z = 4\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{12}-\frac{\pi}{4}\right)} = 4\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}$$

$$|z| = 4\sqrt{2} \quad \arg z = -\frac{\pi}{6}$$

- كتابة $\frac{z}{z_A}$ على الشكل الجبري

$$\frac{z}{z_A} = \frac{4\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}}{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}$$

$$= \frac{4\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)}{\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$= \frac{(4\sqrt{3}-4i)(\sqrt{2}+i\sqrt{2})}{(\sqrt{2}-i\sqrt{2})(\sqrt{2}+i\sqrt{2})}$$

$$= \frac{4(\sqrt{3}-i)(\sqrt{2}+i\sqrt{2})}{4}$$

$$= \sqrt{6}+i\sqrt{6}-i\sqrt{2}+\sqrt{2}$$

$$\sqrt{6}+\sqrt{2}+i(\sqrt{6}-\sqrt{2})$$

ب- استنتاج $\cos\frac{\pi}{12}$ و $\sin\frac{\pi}{12}$

بالمطابقة بين الشكل الجبري والشكل المثلثي لـ $\frac{z}{z_A}$ نجد:

$$\frac{z}{z_A} = 4\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$$

$$= \sqrt{6}+\sqrt{2}+i(\sqrt{6}-\sqrt{2})$$

$$\begin{cases} \cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \\ \sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \end{cases}$$

2-أ- حساب اللاحقة z_C للنقطة C

$$z_C - z_A = e^{i\frac{\pi}{2}}(z_B - z_A)$$

$$z_C = e^{i\frac{\pi}{2}}(z_B - z_A) + z_A$$

$$z_C = i(2+4i) + 1 - i$$

$$z_C = 2i - 4 + 1 - i$$

$$z_C = -3 + i$$

- استنتاج طبيعة المثلث ABC

لدينا: $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = i$ أي $z_C - z_A = i(z_B - z_A)$

$$\left|\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = |i| = 1$$

أي $AC = AB$

$(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2}$ أي $\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \frac{\pi}{2}$

ومنه المثلث ABC قائم في A ومتساوي الساقين

ب- حساب z_D

لدينا $-1+1+1=1\neq 0$ ومنه الجملة تقبل مرجحا

الأعداد المركبة من الأمتحان إلى الجامعة

$$z_D = \frac{-z_A + z_B + z_C}{1 - 1 + 1}$$
$$= -1 + i + 3 + 3i - 3 + i$$
$$z_D = -1 + 5i$$

.تبيين أن ABDC مربع

لدينا $z_{AB} = z_B - z_A = 2 + 4i$

$z_{\overrightarrow{CD}} = z_D - z_C = -1 + 5i + 3 - i = 2 + 4i$

ومنه $z_{AB} = z_{CD}$

الرباعي $ABDC$ متوازي الأضلاع والمثلث ABC قائم ومتساوي الساقين ومنه الرباعي $ABDC$ مربع

40. تقني 2015 الموضوع 02

1- حل في $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول التالية

$$z^2 - 4(\sin\theta)z + 4 = 0 \quad (I)$$

حيث θ وسيط حقيقي

2- من أجل $\theta = \frac{\pi}{3}$ نرمز الى حلي المعادلة (I)

بـ z_1 و z_2 . اكتب z_1 و z_2 على الشكل الأسي

3- نعتبر في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$، النقط A و B و C التي لاحقاتها على الترتيب

$z_A = \sqrt{3} + i$ ، $z_B = \sqrt{3} - i$ و

$z_C = 3\sqrt{3} + i$

أ- اكتب العدد المركب $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ على الشكل الجبري، ثم الأسي واستنتج طبيعة المثلث ABC

ب- استنتج أن النقطة C هي صورة النقطة B بالتشابه المباشر S الذي مركزه A وبطلب تعيين نسبته وزاوية له

جـ- عين لاحقة النقطة D صورة النقطة B بالانسحاب t الذي شعاعه $\overrightarrow{AC}$ ، ثم حدد طبيعة الرباعي $ABDC$

4-أ- عين (Γ_1) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث $\frac{z - z_C}{z - z_B}$ تخيلي صرف مع $z \neq z_B$

ب- عين (Γ_2) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث $\frac{z - z_C}{z - z_B}$ حقيقيا مع $z \neq z_B$

الحل

1-الحل في $\mathbb{C}$ المعادلة

$$z^2 - 4(\sin\theta)z + 4 = 0 \quad (I)$$
$$\Delta = (-4\sin\theta)^2 - 4(1)(4)$$
$$= 16\sin^2\theta - 16$$
$$\Delta = 16(\sin^2\theta - 1)$$

لدينا $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

ومنه $-1 + \sin^2\theta = -\cos^2\theta$

أي $\Delta = -16\cos^2\theta$

$$\Delta = 16i^2\cos^2\theta$$

ومنه $\sqrt{\Delta} = 4i\cos\theta$

للمعادلة حلان

$$z_1 = \frac{4\sin\theta - 4i\cos\theta}{2} = 2\sin\theta - 2i\cos\theta$$
$$z_2 = \frac{4\sin\theta + 4i\cos\theta}{2} = 2\sin\theta + 2i\cos\theta$$

$$S\{z_1, z_2\}$$

2- كتابة z_1 و z_2 على الشكل الأسي

$$z_1 = 2(\sin\theta - i\cos\theta)$$
$$= 2(-i^2\sin\theta - i\cos\theta)$$
$$= -2i(\cos\theta + i\sin\theta)$$
$$= 2e^{-i\frac{\pi}{2}} \times e^{i\frac{\pi}{3}} = 2e^{i\left(\frac{-\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right)} = 2e^{-i\frac{\pi}{6}}$$
$$z_2 = 2(\sin\theta + i\cos\theta)$$
$$= 2(-i^2\sin\theta + i\cos\theta)$$
$$= 2i(\cos\theta - i\sin\theta)$$
$$= 2e^{i\frac{\pi}{2}}.e^{-i\frac{\pi}{3}} = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$$

3-أ- كتابة $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ على الشكل الجبري ثم على الشكل الأسي

1-الجبري

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{3\sqrt{3} + i - \sqrt{3} - i}{\sqrt{3} - i - \sqrt{3} - i} = \frac{2\sqrt{3}(i)}{-2i(i)}$$
$$= i\sqrt{3}$$

2-الأسي

$$\left|\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = \sqrt{3} \quad ; \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \frac{\pi}{2}$$
$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}$$

- طبيعة المثلث ABC

لدينا:

$$\left|\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = \sqrt{3} \neq 1 \quad \text{و} \quad (\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2}$$

ومنه المثلث ABC قائم في A

بـ- استنتاج أن النقطة C هي صورة للنقطة B بالتشابه S

لدينا

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \sqrt{3}i \Rightarrow z_C - z_A = \sqrt{3}i(z_B - z_A)$$

بما أن $i\sqrt{3} \in \mathbb{C}$ و $|i\sqrt{3}| = \sqrt{3} \neq 1$

فإنه تشابه S يحول B إلى C حيث نسبته $k=\sqrt{3}$ وزاويته $\theta=\frac{\pi}{2}$

جـ تعيين لاحقة النقطة D

العبارة المركبة للانسحاب t

$z'=z+b \quad ;b=z_{\overrightarrow{AC}}$

ومنه $z_D=z_B+z_{\overrightarrow{AC}}$

$z_D=\sqrt{3}-i+(3\sqrt{3}+i-\sqrt{3}-i)$

$z_D=3\sqrt{3}-i$

د- طبيعة الرباعي ABDC

بما أن D صورة B بالانسحاب t فإن $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$

ومنه الرباعي ABDC متوازي الأضلاع والمثلث ABC قائم في A ومنه ABDC مستطيل

4-أ- تعيين (Γ_1)

لدينا $\frac{z-z_C}{z-z_B}$ تخيلي صرف معناه

$\arg\left(\frac{z-z_C}{z-z_B}\right)=\frac{\pi}{2}+k\pi$

حيث $\left(\overrightarrow{BM};\overrightarrow{CM}\right)=\frac{\pi}{2}+k\pi$ حيث $(k\in\mathbb{Z})$

ومنه مجموعة النقط (Γ_1) هي دائرة قطرها $[BC]$ باستثناء النقطة B

ب- تعيين (Γ_2)

لدينا $\frac{z-z_C}{z-z_B}$ حقيقي معناه

$\left(\overrightarrow{BM};\overrightarrow{CM}\right)=k\pi \quad k\in\mathbb{Z}$

ومنه مجموعة النقط (Γ_2) هي المستقيم (BC) باستثناء النقطة B

41. تقني 2014 الموضوع 01

1- حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة

$(z-i)(z^2-2\sqrt{3}z+4)=0$

2- المستوي المركب منسوب الى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ نسمي A و B و C نقط من المستوي التي لاحقتها على الترتيب

$z_1=\sqrt{3}+i \quad z_2=\sqrt{3}-i \quad$ و $z_3=i$

أ- اكتب العدد $\frac{z_1}{z_2}$ على الشكل الأسي.

ب- هل توجد قيم للعدد الطبيعي n يكون من أجلها العدد المركب $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n$ تخيليا صرفا؟ برر اجابتك.

3-أ- عين العبارة المركبة للتشابه المباشر S الذي مركزه A ويحول B الى C ، محددا نسبته وزاويته

ب- استنتج طبيعة المثلث ABC

4-أ- عين العناصر المميزة لـ (E) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z والتي تحقق

$|z-z_1|^2+|z-z_3|^2=5$

ب- عين (E') مجموعة النقط M من المستوي التي لاحقتها z حيث $|z-z_1|=|z-z_3|$

الحل

1-حل المعادلة في C

$(z-i)(z^2-2\sqrt{3}z+4)=0$

اما $\begin{cases}z-i=0\\ z_0=0\end{cases}$

او $\begin{cases}z^2-2\sqrt{3}z+4=0\\ \Delta=(2i)^2\end{cases}$

للمعادلة حلان

$z_1=\frac{2\sqrt{3}-2i}{2}=\sqrt{3}-i$

$z_2=\frac{2\sqrt{3}+2i}{2}=\sqrt{3}+i$

ومنه مجموعة حلول المعادلة $s=\{z_0;z_1;z_2\}$

2-أ- كتابة العدد $\frac{z_1}{z_2}$ على الشكل الأسي

$\frac{z_1}{z_2}=\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i}=\frac{(\sqrt{3}+i)^2}{4}=\frac{2+2\sqrt{3}i}{4}$

$=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\frac{\pi}{3} \qquad \left|\frac{z_1}{z_2}\right|=1$

$\frac{z_1}{z_2}=e^{i\frac{\pi}{3}}$

ب- لدينا: $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n=\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^n=e^{i\frac{n\pi}{3}}$

$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n=\cos\frac{n\pi}{3}+i\sin\frac{n\pi}{3}$

حتى يكون $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n$ تخيليا صرفا يجب أن:

$\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)=0$

$\frac{n\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+k\pi \quad (k\in\mathbb{N})$

$n=\frac{3}{2}+3k$

$n=\frac{3+6k}{2}$

$3+6k$ عدد فردي

ومنه لا يمكن أن يكون $\frac{3+6k}{2}$ طبيعيا

$r^2 = \frac{7}{4} \Leftrightarrow r = \frac{\sqrt{7}}{2}$

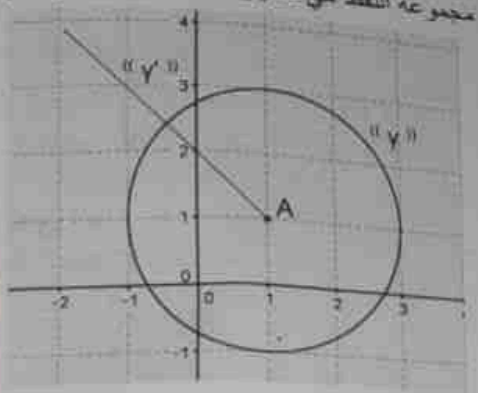
ومنه (E) دائرة مركزها $\omega\left(\frac{\sqrt{3}}{2};1\right)$

ونصف قطرها $r = \frac{\sqrt{7}}{2}$

ب- تعيين (E')

$|z - z_A| = |z - z_C|$ معناه $AM = CM$

مجموعة النقط هي محور القطعة المستقيمة $[AC]$



42. تقني 2014 الموضوع 02

نعتبر في المستوي المركب منسوب الى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$

النقطة A ذات اللاحقة $z_0 = 1 + i$

1-أ- عين ثم أنشئ (γ) مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي حيث $z = z_0 + 2e^{i\theta}$ و θ يمسح $\mathbb{R}$

ب- عين ثم استنتج (γ') مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي حيث $z = z_0 + ke^{i\left(\frac{3\pi}{4}\right)}$ و k يمسح $\mathbb{R}^+$

جـ- عين إحداثيات نقطة تقاطع (γ) و (γ')

2- نسمي B النقطة التي لاحقتها z_1 حيث

$z_1 = z_0 + 2e^{i\frac{3\pi}{4}}$

أ- عين الشكل الجبري للعدد المركب $\frac{z_1 - z_0}{z_0}$، ثم استنتج طبيعة المثلث OAB

ب- عين z_2 لاحقة النقطة C صورة النقطة B بالدوران الذي مركزه A وزاويته $-\frac{\pi}{2}$

جـ- عين العددين الحقيقين α و β بحيث تكون النقطة 0 مرجحا للجملة $\{(A;\alpha);(C;\beta)\}$ و $\alpha + \beta = \sqrt{2}$

د- عين ثم أنشئ (E) مجموعة النقط M من المستوي حيث:

$$\left((1+\sqrt{2})\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC}\right).\left(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC}\right) = 0$$

وبالتالي لا يوجد قيم لـ n التي تحقق $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n$ لتكون تخيلي صرف.

3-أ- تعيين العبارة المركبة للتشابه المباشر

$z_C - z_A = ke^{i\theta}(z_B - z_A)$

حيث k نسبته θ زاويته

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{1 - \sqrt{3} - i}{\sqrt{3} - 1 - \sqrt{3} - i} = \frac{-\sqrt{3}}{-2i} = \frac{-\sqrt{3}i}{2}$$

$$\arg\left(\frac{-\sqrt{3}i}{2}\right) = -\frac{\pi}{2} \quad ; \quad \left|\frac{-\sqrt{3}i}{2}\right| = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{\sqrt{3}}{2}e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

ومنه $k = \frac{\sqrt{3}}{2}$ و $\theta = -\frac{\pi}{2}$

لدينا

$z' = \frac{-i\sqrt{3}}{2}z + b$

$z_C = \frac{-i\sqrt{3}}{2}z_B + b$

$b = z_C + \frac{\sqrt{3}}{2}iz_B$

$b = i + \frac{\sqrt{3}}{2}i(\sqrt{3} - i)$

$$b = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{5}{2}i$$

العبارة المركبة للتشابه S: $z' = \frac{-i\sqrt{3}}{2}z + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{5}{2}i$

ب- طبيعة المثلث ABC

بما أن C صورة B بالتحول S أي B حولت بزاوية $-\frac{\pi}{2}$ الى C بالمركز A اذن المثلث ABC قائم في A

4-أ- تعيين العناصر المميزة لـ (E)

لدينا $|z - z_1|^2 + |z - z_3|^2 = 5$ أي

$AM^2 + CM^2 = 5$

$$\left(\sqrt{(x-\sqrt{3})^2 + (y-1)^2}\right)^2 + \left(\sqrt{x^2 + (y-1)^2}\right)^2 = 5$$

$x^2 + 3 - 2x\sqrt{3} + y^2 + 1 - 2y + x^2 + y^2 - 2y - 4 = 0$

$2x^2 + 2y^2 - 2x\sqrt{3} - 4y = 0$

تكافئ

$x^2 + y^2 - x\sqrt{3} - 2y = 0$

$$\left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + (y-1)^2 = r^2$$

$w(\frac{\sqrt{3}}{2};1)$

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 1 - r^2 = 0$$

الحل

1-أ- تعيين (γ) مجموعة النقط $M(z)$

لدينا: $z = z_A + 2e^{i\theta}$

$$z - z_A = 2e^{i\theta}$$
$$|z - z_A| = 2 \quad ; (\vec{u}; \overrightarrow{AM}) = \theta$$
$$AM = 2$$

ومنه (γ) دائرة مركزها A ونصف قطرها $r = 2$

ب- تعيين (γ')

$$z = z_0 + ke^{i\frac{3\pi}{4}}$$
$$z - z_A = ke^{i\frac{3\pi}{4}} \quad (k \in \mathbb{R}_+^*)$$
$$AM = k \; ; \arg(z - z_A) = \frac{3\pi}{4}$$

ومنه (γ') هي نصف مستقيم مبدؤه A $[AM)$ ويميل بزاوية $\frac{3\pi}{4}$

جـ- تعيين احداثيات نقطة تقاطع (γ') و (γ)

-استخراج معادلة الدائرة :

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 4$$

معادلة نصف المستقيم

$$y = ax + by \quad ; a = \tan\frac{3\pi}{4} = -1$$
$$y = -x + b$$
$$1 = -1 + b \Rightarrow b = 2$$
$$y = -x + 2$$

تصبح

$$(x-1)^2 + (-x+2-1)^2 = 4$$
$$(x-1)^2 + \big(-(x-1)\big)^2 = 4$$
$$(x-1)^2 + (x-1)^2 = 4$$
$$2(x-1)^2 = 4$$
$$(x-1)^2 = 2$$

ومنه $\begin{cases} x - 1 = \sqrt{2} \\ \text{أو} \\ x - 1 = -\sqrt{2} \end{cases}$

$\begin{cases} x_1 = \sqrt{2} + 1 & \text{مرفوض} \\ x_2 = -\sqrt{2} + 1 & \text{مقبول} \end{cases}$

$\begin{cases} y_1 = 1 - \sqrt{2} & \text{مرفوض} \\ y_2 = \sqrt{2} + 1 & \text{مقبول} \end{cases}$

اذن نقطة تقاطع (γ') و (γ)

$$H\left(-\sqrt{2}+1 ; \sqrt{2}+1\right)$$

2-أ- تعيين الشكل الجبري للعدد المركب $\frac{z_1 - z_0}{z_0}$

$$\frac{z_1 - z_0}{z_0} = \frac{z_0 + 2e^{i\frac{3\pi}{4}} - z_0}{z_0}$$
$$= \frac{2(\cos\frac{3\pi}{4}) + i\,2\sin\frac{3\pi}{4}}{1+i}$$
$$= \frac{-\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{1+i} \times \frac{1-i}{1-i}$$
$$\frac{z_1 - z_0}{z_0} = \frac{2i\sqrt{2}}{2} = i\sqrt{2}$$

-استنتاج طبيعة المثلث OAB

$$\frac{z_B - z_A}{z_A - z_O} = \sqrt{2}i$$
$$\arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_A - z_O}\right) = (\overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AB}) = \frac{\pi}{2}$$

ومنه المثلث OAB قائم في النقطة A

ب- تعيين z_C لاحقة النقطة C

لدينا:

$$z_C - z_A = e^{-i\frac{\pi}{2}}(z_B - z_A)$$
$$z_C - z_A = -i(z_B - z_A)$$
$$z_C = -iz_B + iz_A + z_A$$
$$z_C = -i\left(1+i+2\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) - 1 - i\right) + 1 + i$$

$$z_C = \left(1+\sqrt{2}\right) + i\left(1+\sqrt{2}\right)$$

جـ- تعيين العددين الحقيقيين α و β

لدينا

$$\begin{cases} \alpha + \beta = \sqrt{2} \\ z_0 = \dfrac{\alpha z_A + \beta z_B}{\alpha + \beta} = 0 \end{cases}$$

أي $\alpha z_A + \beta z_B = 0$

$$\alpha(1+i) + \beta\left(\left(1+\sqrt{2}\right) + i\left(\sqrt{2}+1\right)\right) = 0$$
$$\left(\alpha + \beta + \beta\sqrt{2}\right) + i\left(\alpha + \beta + \beta\sqrt{2}\right) = 0$$
$$\sqrt{2} + \beta\sqrt{2} + i\left(\sqrt{2} + \beta\sqrt{2}\right) = 0$$
$$\left(\sqrt{2} + \beta\sqrt{2}\right)(1+i) = 0$$

ومنه $(1+i) \neq 0$ $\sqrt{2} + \beta\sqrt{2} = 0$

وبالتالي $\beta = -1$

$$\alpha + \beta = \sqrt{2}$$

ومنه $\alpha = \sqrt{2} + 1$

د- تعيين (E)

$$\left((1+\sqrt{2})\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MC}\right).\left(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MC}\right)=0$$

لدينا $(1+\sqrt{2})\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MC}=\sqrt{2}\,\overrightarrow{MO}$

$$\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MC}=-(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MC})=-\overrightarrow{AC}$$

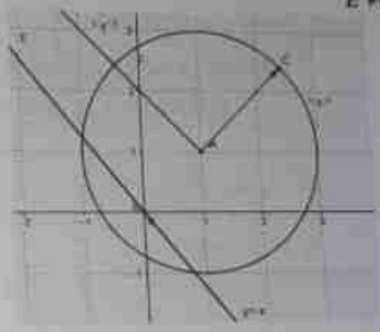
$$\left((1+\sqrt{2})\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MC}\right).\left(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MC}\right)$$
$$=\sqrt{2}\,\overrightarrow{MO}.(-\overrightarrow{AC})$$
$$=-\sqrt{2}(\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{AC})$$

ومنه $-\sqrt{2}(\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{AC})=0$

ومنه $-\sqrt{2}\neq 0$ $\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{AC}=0$

مجموعة النقط M من المستوي هي مستقيم الذي يشمل النقطة O و $\overrightarrow{AC}$ شعاع تظلمي له

انشاء E



43. تقني 2013 الموضوع 01

1-حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $2z^2+6z+17=0$

2-في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ ، النقط A,B,C لاحقاتها على الترتيب $z_A=-4$; $z_B=-\frac{3}{2}+\frac{5}{2}i$ و $z_C=-\frac{3}{2}-\frac{5}{2}i$

احسب الطويلة و عمدة للعدد المركب $\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}$ ثم استنتج طبيعة المثلث ABC.

3-أ-عين z_D و z_E لاحقتي النقطتين D و E على الترتيب حتى يكون الرباعي $BCDE$ مربعا مركزه A

ب-عين (Γ_1) مجموعة النقط M من المستوي حيث $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{ME}\right\|=10\sqrt{2}$

4- (Γ_2) مجموعة النقط M من المستوي، ذات اللاحقة z حيث: $\arg(z+4)=\frac{\pi}{4}$

تحقق أن النقطة B تنتمي إلى (Γ_2) ، ثم عين المجموعة (Γ_2).

الحل

1-الحل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z

$$2z^2+6z+17=0$$
$$\Delta=36-4(2)(17)=36-136=-100$$
$$\Delta=(10i)^2$$

للمعادلة حلان:

$$z_1=\frac{-6-10i}{4}=-\frac{3}{2}-\frac{5}{2}i$$
$$z_2=\frac{-6+10i}{4}=-\frac{3}{2}+\frac{5}{2}i$$

مجموعة حلول المعادلة:

$$S(z_1;z_2)$$

2-حساب طويلة و عمدة العدد المركب $\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}$:

$$\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}=\frac{-\frac{3}{2}+\frac{5}{2}i+4}{-\frac{3}{2}-\frac{5}{2}i+4}=\frac{\frac{5}{2}+\frac{5}{2}i}{\frac{5}{2}-\frac{5}{2}i}$$
$$=\frac{5+5i}{5-5i}$$

نضرب في المرافق:

$$=\frac{(5+5i)^2}{(5-5i)(5+5i)}=)\frac{25-25+50i}{50}$$
$$=\frac{50i}{50}$$

$$\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}=i$$

ومنه:

$$\left|\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\right|=1\ ;\arg\left(\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\right)=\frac{\pi}{2}$$

طبيعة المثلث ABC :

بما أن: $(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB})=\frac{\pi}{2}$ و $AB=AC$

فإن المثلث ABC قائم في A ومتساوي الساقين.

3-أ- تبيين z_D و z_E لاحقتي النقطتين D و E على الترتيب

A منتصف $[BD][CE]$

$$z_A=\frac{z_C+z_E}{2}$$
$$2z_A=z_C+z_E$$
$$z_E=2z_A-z_C$$
$$z_E=-8+\frac{3}{2}+\frac{5}{2}i$$

$$z_E = -\frac{13}{2} + \frac{5}{2}i$$

• D نظيرة E بالنسبة لمحور الفواصل

ومنه $z_D = -\frac{13}{2} - \frac{5}{2}i$

• أو $z_D = 2z_A - z_B$

$$z_E = -8 + \frac{3}{2} - \frac{5}{2} = -\frac{13}{2} - \frac{5}{2}i$$

3-ب تعيين (Γ_1) مجموعة النقط M

لدينا: الجملة المثقلة

$\{(B;1);(C;1);(D;1);(E;1)\}$

ثقل مرجحا هو A

لأن: $(1+1+1+1) = 4 \neq 0$

لأن A مركز ثقل المربع $BCDE$

$$\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME}$$
$$= \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AE}$$
$$\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} = 4\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$$

$(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = \vec{0})$

ومنه $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} = 4\overrightarrow{MA}$

$$\left|4\overrightarrow{MA}\right| = 10\sqrt{2}$$
$$4MA = 10\sqrt{2}$$

ومنه: $MA = \frac{5\sqrt{2}}{2}$

ومنه (Γ_1) هي دائرة (C) مركزها A ونصف قطرها $r = \frac{5\sqrt{2}}{2}$

4-التحقق من أن النقطة B تنتمي إلى (Γ_2)

$$\arg\left(-\frac{3}{2} + \frac{5}{2}i + 4\right) = \arg\left(\frac{5}{2} + \frac{5}{2}i\right)$$
$$= \arg\left(\frac{5}{2}(1+i)\right) = \arg\frac{5}{2} + \arg(1+i)$$

لدينا

$$|1+i| = \sqrt{2}\ ;\ \arg(1+i) = 0$$

$$\begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

ومنه B تنتمي إلى (Γ_2)

تعيين طبيعة المجموعة

لدينا:

$$\arg(z+4) = \arg(z+z_A) = \frac{\pi}{4}$$

أي:

$$(\vec{u}; \overrightarrow{AM}) = \frac{\pi}{4}$$
$$z - z_A = ke^{\frac{i\pi}{4}}$$

أي $(k \in \mathbb{R}_+^*)$

$$z = ke^{\frac{i\pi}{4}} + z_A$$

ومنه (Γ_2) هي منتصف مستقيم $[AB]$ باستثناء النقطة A مبدؤه A ويميل بزاوية $\frac{\pi}{4}$

$$[AB) - \{A\}$$

44. تقني 2013 الموضوع 02

1-حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z.

$$(z+5-i\sqrt{3})(z^2+2z+4) = 0$$

2-في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(\vec{O};\vec{u};\vec{v})$ ، النقط A, B, C لاحقاتها على الترتيب

$$z_B = -1 + i\sqrt{3}\ ; z_A = -1 - i\sqrt{3}$$
$$z_C = -5 + i\sqrt{3}\ ,$$

S التشابه المباشر الذي يحول A إلى C ويحول O الى B جد الكتابة المركبة للتشابه المباشر S ، ثم عيّن العناصر المميزة له.

3-أ- عيّن z_D لاحقة النقطة D مرجح الجملة $\{(A;2),(B;-1),(C;1)\}$

3-ب- اكتب العدد المركب $\frac{z_B - z_A}{z_D - z_A}$ على الشكل الأسي، ثم استنتج طبيعة المثلث ABD.

جـ- عيّن المجموعة (Γ) للنقط M من المستوي حيث:

$$\left\|\overrightarrow{2MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = \left\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\right\|$$

الحل

1-حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول Z

$$(z+5-i\sqrt{3})(z^2+2z+4) = 0$$

معناه: إما

الإعداد المركبة من الألف الى الياء

$$\begin{cases} z+5-i\sqrt{3}=0 \\ z_0=-5+i\sqrt{3} \\ \text{أو} \\ z^2+2z+4=0 \end{cases}$$

$\Delta = 4-4(1)(4) = -12 = (2\sqrt{3}i)^2$

للمعادلة حلان

$$z_1 = \frac{-2-2\sqrt{3}i}{2} = -1-\sqrt{3}i$$

$$z_2 = \frac{-2+2\sqrt{3}i}{2} = -1+\sqrt{3}i$$

$S = \{z_0; z_1; z_2\}$ مجموعة حلول المعادلة هي

2-ايجاد الكتابة المركبة للتشابه المباشر S:

العبارة المركبة لأي تحويل نقطي $z' = az+b$

لدينا:

$$\begin{cases} z_c = az_A + b \ldots\ldots -1 \\ z_B = az_0 + b \ldots\ldots -2 \end{cases}$$

نطرح المعادلة 1من2

$$z_c - z_B = a(z_A - z_0)$$

$$a = \frac{z_c - z_B}{z_A - z_0} = \frac{-5+i\sqrt{3}+1-i\sqrt{3}}{-1-i\sqrt{3}}$$

$$a = \frac{4(1-i\sqrt{3})}{4} = 1-i\sqrt{3}$$

$$z_B = az_0 + b$$

$$z_B = b$$

أي $b = -1+i\sqrt{3}$

وبالتالي $z' = (1+i\sqrt{3})z - 1 + i\sqrt{3}$

العناصر المميزة للتشابه s

النسبة $k = |a| k$

$$K = \sqrt{1+3} = 2$$

الزاوية $\theta = \arg(a) : \theta$

$$\begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{2} \\ \sin\theta = \frac{-\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{-\pi}{3}$$

المركز z_w:

$$z_w = \frac{b}{1+a}$$

$$z_w = \frac{-1+\sqrt{3}i}{1-1+i\sqrt{3}} = \frac{(-1+\sqrt{3}i)(-i\sqrt{3})}{(i\sqrt{3})(-i\sqrt{3})} = \frac{3+\sqrt{3}i}{3}$$

$$z_w = 1+\frac{\sqrt{3}}{3}i \quad ; \quad w\left(1;\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

3-استعين z_D لاحقة النقطة D مرتبة الجملة المثقلة $\{(A;2);(B;-1);(C;1)\}$ فالجملة تقبل مرجحا $(2-1+1=2\neq 0)$

$$\frac{(-1-\sqrt{3}i)-1(-1+i\sqrt{3})+1(-5+i\sqrt{3})}{2-1+1} = \frac{(-6-2i\sqrt{3})}{2}$$

$$z_D = -3-i\sqrt{3}$$

بكتابة العدد المركب $\frac{z_B-z_A}{z_D-z_A}$ على الشكل الأسي:

$$\frac{z_B-z_A}{z_D-z_A} = \frac{(-1+i\sqrt{3}-(-1-i\sqrt{3})}{-3-i\sqrt{3}-(-1-i\sqrt{3})}$$

$$= \frac{2i\sqrt{3}}{-2} = -i\sqrt{3}$$

$$\frac{z_B-z_A}{z_D-z_A} = \sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

بما أن $\sqrt{3}\neq 1$ ليس متساوي الساقين

لكن $(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB}) = -\frac{\pi}{2}$ ومنه المثلث ABD قائم في A.

جـ - تعيين المجموعة (Γ)

لدينا:

$$2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$$

$$= 2(\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DA})-(\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DB})+(\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DC})$$

$$2\overrightarrow{MD}-\overrightarrow{DB}+2\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{MD}$$

$$\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB} = -\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{MB} = -\overrightarrow{AB}$$

أي:

$$\|2\overrightarrow{MD}\| = \|-\overrightarrow{AB}\|$$

$$2MD = +AB$$

$$MD = \frac{1}{2}AB$$

ومنه مجموعة النقط (Γ) للنقطة M هي دائرة (c) مركزها النقطة D ونصف قطرها $r = \frac{AB}{2}$

$$AB = \sqrt{(2\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{3} \quad ; r = \sqrt{3}$$

45. تقني 2012 الموضوع 01

1-عين العددين المركبين z_1 و z_2 بحيث:
$\begin{cases} 2z_1 + 3z_2 = 9 - 2i \\ 3z_1 - 2z_2 = 8 + 8i \end{cases}$

2- نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ ،
النقط A ، B و Ω
التي لاحقاتها على الترتيب z_A ، z_B و z_Ω حيث :
$z_\Omega = 1 - 2i$; $z_B = -3$; $z_A = 3 + 2i$

أ. أثبت أن: $z_B - z_\Omega = i(z_A - z_\Omega)$

ب. عين طبيعة المثلث ΩAB

3- h هو التحاكي الذي مركزه النقطة A ونسبته 2

أ. عين الكتابة المركبة للتحاكي h.

ب-عين z_C لاحقة النقطة C صورة النقطة Ω بالتحاكي h

جـ-عين z_D لاحقة النقطة D مرجح الجملة $\{(A,1),(B,-1),(C,1)\}$

د- بين أن $ABCD$ مربع.

4-(E) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق $\|\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = 4\sqrt{5}$

4-أ-تحقق أن النقطة B تنتمي إلى المجموعة (E) ، ثم عين طبيعة (E) وعناصرها المميزة.

4-ب-أنشئ المجموعة (E).

الحل

1-تعيين $z_1; z_2$

$$\begin{cases} 2z_1 + 3z_2 = 9 - 2i \\ (3z_1 - z_2 = 8 + 8i)3 \end{cases}$$
$$\begin{cases} 2z_1 + 3z_2 = 9 - 2i \\ (9z_1 - 3z_2 = 24 + 24i) \end{cases}$$

بجمع المعادلتين نجد:
$$11z_1 = 33 - 22i$$
$$z_1 = 3 - 2i$$

نعوض z_1 في المعادلة:
$$2(3 - 2i) + 3z_2 = 9 - 2i$$
$$3z_2 = 3 - 6i$$
$$z_2 = 1 - 2i$$
$$S = \{z_1, z_2\}$$

2-أ- إثبات أن $z_B - z_\Omega = i(z_A - z_\Omega)$

$$\frac{z_B - z_\Omega}{z_A - z_\Omega} = \frac{-3 - 1 + 2i}{3 + 2i - 1 + 2i} = \frac{-4 + 2i}{2 + 4i}$$
$$= \frac{(-4 + 2i)(2 - 4i)}{4 + 16} =$$
$$\frac{20i}{20} = i$$

تعيين طبيعة المثلث ΩAB /

$$\frac{z_B - z_\Omega}{z_A - z_\Omega} = i \; ; |i| = 1 \; ; \arg(i) = \frac{\pi}{2} \; ;$$
$$\Omega_A = \Omega_B \; ; \; (\vec{\Omega_A}; \vec{\Omega_B}) = \frac{\pi}{2}$$

ومنه المثلث ΩAB قائم في Ω ومتساوي الساقين.

3-أ-تعيين الكتابة المركبة للتحاكي h

$$\frac{z' - z_A}{z - z_A} = 2$$
$$z' - z_A = 2(z - z_A)$$
$$z' = 2z - z_A$$
$$z' = 2z - 3 - 2i$$

3-ب- تعيين z_c لاحقة c صورة Ω

$$z_c = 2z_\Omega - 3 - 2i = 2(1 - 2i) - 3 - 2i$$
$$= -1 - 6i$$
$$z_c = -1 - 6i \; ; \; C(-1; -6)$$

جـ-تعيين z_D لاحقة النقطة D مرجح الجملة المثقلة $\{(A;1);(B,-1);(C;1)\}$

$$z_D = \frac{z_A - z_B - z_C}{1 - 1 + 1}$$

$$z_D = \frac{3 + 2i + 3 - 1 - 6i}{1} = 5 - 4i$$

د-تبيين أن $ABCD$ مربع:

لدينا:

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \end{pmatrix}$$
$$= \overrightarrow{DC}\begin{pmatrix} -1 & -5 \\ -6 & +4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \end{pmatrix}$$
$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$$

ومنه $ABCD$ متوازي أضلاع

ولدينا $\Omega_B = \Omega_A$

$(\Omega_A) \perp (\Omega_B)$

بما أن المثلث ΩAB قائم متساوي الساقين

h تحاكي حيث c صورة ΩAB قائم ومتساوي الساقين

46. تقني 2012 الموضوع 02

1-حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة ذات المجهول z:

$$(z^2+2z+4)(z^2-2\sqrt{3}z+4)=0$$

2-المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$

النقط D,C,B,A من المستوي لاحقاتها على الترتيب:

$z_B=\sqrt{3}-1, z_A=\sqrt{3}+1$

$z_D=-1+i\sqrt{3}$ و $z_C=-1-i\sqrt{3}$

اكتب كلا من z_D و z_C z_B ، z_A على الشكل الأسي

بـ-تحقق أن: $\frac{z_B-z_A}{z_A-z_C}=i$ ثم استنتج أن المستقيمين (AC) و (BD) متعامدان.

3-z_n العدد المركب الذي طويلته $\frac{3}{2^n}$ و $\frac{2\pi}{3}n$ عمدة

حيث n عدد طبيعي

L_n العدد المركب المعرف بـ: $L_n=z_D\times z_N$

اكتب كلا من L_1, L_0 على الشكل الجبري.

ب-(U_n) هي المتتالية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي: $U_n=|L_n|$

-اثبت أن المتتالية (U_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

-$M_0, M_1, \ldots, M_n$ صورة الأعداد المركبة $L_0, L_1, \ldots L_n$ على الترتيب.

-احسب بدلالة n المجموع S_n حيث:

$$S_n=\|\overrightarrow{OM_0}\|+\|\overrightarrow{OM_1}\|+\cdots+\|\overrightarrow{OM_n}\|$$

-جد نهاية S_n عندما يؤول n إلى $+\infty$.

الحل

1-حل المعادلة في $\mathbb{C}$:

$$(z^2+2z+4)(z^2-2\sqrt{3}z+4)=0$$

$$\begin{cases} z^2+2z+4=0 & \cdots (1) \\ z^2-2\sqrt{3}z+4=0 & \cdots (2) \end{cases}$$

الطرف الأول: (1)

$$\begin{cases} z^2+2z+4=0 \\ \Delta=4-(4)(1)(4)=-12=12i=12i^2=(2\sqrt{3}i)^2 \end{cases}$$

حلا المعادلة $z_1=\frac{-2-2\sqrt{3}i}{2}=-1-\sqrt{3}i$

$z_2=\frac{-2+2\sqrt{3}i}{2}=-1+\sqrt{3}i$

الطرف الثاني: $z^2-2\sqrt{3}z+4=0$

$\Delta=\left(-2\sqrt{3}\right)^2-4(1)(4)=12-16=-4$

$\Delta=(2i)^2$

الأعداد المركبة من الأول إلى الثاني

O, A, B على استقامة و النسبة 2

وسم الرباعي $ABCD$ مربع

1-بـ- التحقق من أن النقطة B تنتمي إلى المجموعة (E)

لدينا:

$$\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$$

$$=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{BB}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BC}$$

$$\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BB}+\overrightarrow{BC}$$

$$\|\overrightarrow{MD}\|=4\sqrt{5}$$

حتى تكون B تنتمي إلى (E) يجب:

$$\|\overrightarrow{BD}\|=4\sqrt{5}$$

لدينا:

$$\|\overrightarrow{BD}\|=\sqrt{(5+3)^2(-4+0)^2}=\sqrt{80}$$

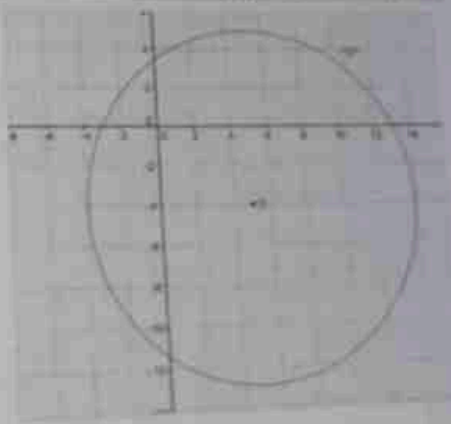
$$=4\sqrt{5}$$

وبه B تنتمي إلى (E)

تعيين طبيعة (E) : هي دائرة (c) مركزها D

ونصف قطرها $r=4\sqrt{5}$

4-بـ-إنشاء المجموعة (E):



المعادلة أيضا حلان:

$$z_3 = \frac{2\sqrt{3}-2i}{2} = \sqrt{3}-i$$

$$z_4 = \frac{2\sqrt{3}+2i}{2} = \sqrt{3}+i$$

مجموعة حلول المعادلة $S\{z_1; z_2; z_3; z_4\}$

2-أكتابة كل من $z_1; z_2; z_3; z_4$ على الشكل الأسي:

$$z_A = |z_A|e^{i\theta} \quad ; \quad \arg z_1 = \theta$$

$$|z_A| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2 \begin{cases} \cos\theta_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta_1 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\theta_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

ومنه: $z_A = 2e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)}$

- $z_B = |z_B|e^{i\theta}$; $|z_B| = 2$; $\arg z_B = \theta_2$

$$\begin{cases} \cos\theta_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta_2 = \frac{-1}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta_2 = -\frac{\pi}{6}$$

ومنه: $z_B = 2e^{-i\left(\frac{\pi}{6}\right)}$

$$|z_c| = 2 \; ; \arg z_c = \theta_3$$

$$\begin{cases} \cos\theta_3 = -\frac{1}{2} \\ \sin\theta_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta_3 = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$$

ومنه: $z_c = 2e^{i\left(\frac{4\pi}{3}\right)}$

$$|z_D| = 2 \; ; \arg z_D = \theta_4$$

$$\begin{cases} \cos\theta_4 = -\frac{1}{2} \\ \sin\theta_4 = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta_4 = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

ومنه $z_D = 2e^{\frac{2\pi}{3}}$

ب-التحقق من أن

$$\frac{z_D - z_B}{z_A - z_C} = i$$

$$\frac{z_D - z_B}{z_A - z_C} = \frac{-1 + i\sqrt{3} - \sqrt{3} + i}{\sqrt{3} + i + 1 + i\sqrt{3}}$$

$$= \frac{(-1-\sqrt{3})+i(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}+1)+i(1+\sqrt{3})}$$

$$= \frac{-(1+\sqrt{3})+i(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}+1)+i(1+\sqrt{3})}$$

$$\frac{(1+\sqrt{3})(-1+i)}{(1+\sqrt{3})(1+i)} = \frac{(-1+i)(1-i)}{(i+1)(1-i)} = \frac{-1+i+i+1}{2}$$

$$= \frac{2i}{2} = i$$

ومنه $i = \frac{z_D - z_B}{z_A - z_C}$

نستنتج أن المستقيمين (AC) و (BD) متعامدان:

$$\arg\left(\frac{z_D - z_B}{z_A - z_C}\right) = \frac{\pi}{2}$$

بما أن $(BD) \perp (AC)$ فإن $\left(\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{BD}\right) = \frac{\pi}{2}$

3-أكتابة كلا من L_0 L_1 على الشكل الجبري:

$$L_0 = z_0 \times z_0 = (-1 + i\sqrt{3})(1)$$

$$L_0 = -1 + i\sqrt{3}$$

$$L_1 = z_D \times z_c = \left(-1 + i\sqrt{3}\right)\left(-\frac{1}{4} + \frac{i\sqrt{3}}{4}\right)$$

بالنشر نجد:

$$= \frac{1}{4} - \frac{i\sqrt{3}}{4} - \frac{i\sqrt{3}}{4} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{4} - \frac{2\sqrt{3}}{4}$$

ومنه: $L_1 = \left(-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)$

ب- إثبات أن المتتالية (u_n) هندسية:

لدينا: $u_n = L_n = |z_D \times z_0|$

$$u_n = \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$u_{n+1} = \frac{1}{2^{n+1-1}} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{2^{n-1}} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}u_n$$

ومنه (u_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$ وحدها الأول $u_0 = 2$

- حساب بدلالة n المجموع S_n

$$S_n = L_0 + L_1 + \cdots + L_n$$

$$S_n = U_0 + U_0 + \cdots + U_n$$

$$S_n = U_0\left(\frac{\left[q^{n+1}-1\right]}{q-1}\right) = 2\left(\frac{\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}-1\right)}{\frac{1}{2}-1}\right)$$

ومنه: $S_n = -4\left(\left(\left(\frac{1}{2}\right) - 1^{n+1}\right)\right)$

- إيجاد نهاية S_n عندما يؤول n الى $+\infty$:

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty}\left(-4\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 1\right)\right)$$

$$\left(-1 < \frac{1}{2} < 1\right)$$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = 4$$

47. تقني 2011 الموضوع 01

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة
$z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0 \quad \ldots (E)$

1-حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E) ثم اكتب حلولها على الشكل الأسي.

2-المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ نعتبر النقط A, B, C التي لا حداتها على الترتيب:

$z_A = 2i ; z_B = \sqrt{3} + i ; z_C = \sqrt{3} - i$ نضع

$$L = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

اكتب L على الشكل الأسي.

بـ-اثبت أن: $z_A - z_B = L(z_C - z_B)$ ، ثم استنتج أن A صورة C بتحويل نقطي يطلب تعيينه وتحديد عناصره المميزة

جـ- استنتج نوع المثلث ABC ثم احسب مساحته S.

الحل

1-حل في $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول Z

$$z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$$
$$\Delta = b^2 - 4ac$$
$$= \left(-2\sqrt{3}\right)^3 - 4(1)(4) = -4 = (2i)^2$$

للمعادلة حلان:

$$Z_1 = \frac{2\sqrt{3} - 2i}{2} = \sqrt{3} - i$$
$$Z_2 = \frac{2\sqrt{3} + 2i}{2} = \sqrt{3} + i$$

كتابة الحلول على الشكل الأسي:

z_1

$$|z_1| = \sqrt{3+1} = 2 \; ; \; \arg z_1 = \theta_1$$
$$\begin{cases} \cos\theta_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta_1 = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta_1 = -\frac{\pi}{6}$$
$$z_1 = 2e^{-i\left(\frac{\pi}{6}\right)}$$

z_2 أي

$$|z_2| = \sqrt{3+1} = 2 \; ; \; \arg z_2 = \theta_2$$
$$\begin{cases} \cos\theta_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta_2 = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta_2 = \frac{\pi}{6}$$

أي: $z_2 = 2e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)}$

2-كتابة L على الشكل الأسي:

$$L = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \quad ; |L| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$$

$$\arg L = \theta \quad L = e^{\frac{i4\pi}{3}} \; ; \begin{cases} \cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = -\frac{1}{2} \end{cases}$$
$$\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3} + \pi = \frac{4\pi}{3}$$

بـ-إثبات أن $z_A - z_B = L(z_C - z_B)$

$$\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} = \frac{2i - \sqrt{3} - i}{\sqrt{3} - i - \sqrt{3} - i} = \frac{-\sqrt{3} + i}{-2i} \times \frac{i}{i}$$
$$= \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} = L$$

ومنه $z_A - z_B = L(z_C - z_B)$

*استنتاج أن A صورة C بتحويل نقطي:

$$z_A - z_B = e^{\frac{i4\pi}{3}}(z_C - z_B)$$

التحويل هو دوران مركزه B وزاويته $\frac{4\pi}{3}$ حيث يحول C إلى A

جـ-استنتاج نوع المثلث ABC:

$$\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} = e^{i\left(\frac{4\pi}{3}\right)} \; ; \; \frac{|z_A - z_B|}{|z_C - z_B|} = 1$$

أي: $AB = AC$

ومنه المثلث ABC متساوي الساقين

مساحة المثلث S :

$S = \frac{1}{2}AC, BH$ حيث H منتصف القطعة $[AC]$

$$z_H = \frac{z_A + z_C}{2} = \frac{2i - i + \sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$
$$HB = |z_B - z_H| = \left|\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right| = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = 1$$
$$HB = 1$$
$$AC = |z_C - z_A| = |\sqrt{3} - 3i| = \sqrt{3+9}$$
$$= \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$
$$S = \frac{1}{2} \times 1 \times 2\sqrt{3} = \sqrt{3}$$

ومنه: $S = \sqrt{.3}\,(u.a)$

48. تقني 2011 الموضوع 02

المستوي إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(o;\vec{u};\vec{v})$

L العدد المركب المعرف كما يلي: $L=\frac{-4\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{5+3i}$

1-أ-اكتب L على الشكل الجبري ثم على الشكل الأسي.

1-ب-بيّن أن: $L^{12}+1=0$ ، ثم احسب:

$$\left(-4\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)^{12}+(5+3i)^{12}$$

1-جـ n عدد طبيعي فردي و p عدد طبيعي زوجي

اثبت أن: $L^{4n}+L^{4p}=0$

2-أ- النقطتان A و B لاحقتاهما على الترتيب:

$z_A=5+3i$ و $z_B=5-3i$ عيّن اللاحقة z_A للنقطة A' صورة النقطة A بالتشابه المباشر الذي مركزه النقطة B ونسبته $\sqrt{2}$ وزاويته $\frac{3\pi}{4}$

ب- عيّن z_G لاحقة النقطة G مركز ثقل المثلث ABA'

الحل

1-أ-كتابة L على الشكل الأسي ثم على الشكل الجبري:

$$L=\frac{-4\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{5+3i}\times\frac{5-3i}{5-3i}$$

$$=\frac{-20\sqrt{2}+12+\sqrt{2}i+5i\sqrt{2}+3\sqrt{2}}{34}$$

$$L=\frac{17i\sqrt{2}-17\sqrt{2}}{34}=\frac{-\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

الشكل الأسي:

$$L=\frac{-\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$|L|=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}=1\ ;\ \arg L=\theta \quad \begin{cases}\cos\theta=-\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$$

$$\theta=\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}$$

$$L=e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

ب-تبيين أن $L^{12}+1=0$

$$L^{12}+1=0$$

$$\left(e^{i\frac{3\pi}{4}}\right)^{12}+1=e^{i9\pi}+1$$

$$=\cos 9\pi+i\sin 9\pi+1$$

$$\cos\pi+i\sin\pi+1=-1+1=0$$

ومنه: $L^{12}+1=0$

حساب $\left(-4\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)^{12}+(5+3i)^{12}$

لدينا: $L^{12}+1=0$

تكافئ $L^{12}=-1$

$$\left(\frac{-4\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{5+3i}\right)^{12}=-1$$

$$\frac{\left(-4\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)^{12}}{(5+3i)^{12}}=-1$$

$$\left(-4\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)^{12}+(5+3i)^{12}=0$$

جـ-إثبات أن $L^{4n}+L^{4p}=0$

$$\left(e^{i\frac{3\pi}{4}}\right)^{4n}+e^{i\left(\frac{3\pi}{4}\right)^{4p}}=e^{i3n\pi}+e^{i3p\pi}$$

نعلم أن(n زوجي و p فردي)

$$=\cos(3n\pi)+i\sin(3n\pi)$$
$$+i\sin(3p\pi)+i\cos(3p\pi)$$
$$=-1+0+0+1=0$$

ومنه: 0

وهو المطلوب.

2-أ-تعيين $Z_{A'}$

$$z_{A'}-z_B=\sqrt{2}\,e^{i\frac{3\pi}{4}}(z_A-z_B)$$

$$z_{A'}=\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)(5+3i-5+3i)+5-3i$$

$$z_{A'}=\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{i\sqrt{2}}{2}\right)(6i)+5-3i$$

$$z_{A'}=(-1+i)6i+5-3i$$

ومنه: $z_{A'}=-1-9i$

ب- تعيين z_G لاحقة النقطة G:

مركز ثقل المثلث هي مرجح الجملة المثقلة

$$\{(A;1);(B;1);(A';1)\}$$

$$z_G=\frac{5+3i+5-3i-1-9i}{3}=\frac{9-9i}{3}=3-3i$$

ومنه: $z_G=3-3i$

49. تقني 2010 الموضوع 01

1-حلّ، في مجموعة الأعداد المركّبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة ذات المجهول z:

$$(z-3+2i)(z^2+6z+10)$$

(i هو العدد المركب الذي طويلته 1 و $\frac{\pi}{2}$ عمدة له)

2-علّم في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ النقط A,C,D و I ذات اللاحقات:

$z_I=1;z_D=-3-i;z_C=-3+i;z_A=3-2i$

على الترتيب.

3-z عدد مركب يحقق الجملة:

الأعداد المركبة من الألف إلى الياء

$$\begin{cases} \arg(z-3+2i) = \arg(z-1) + \frac{\pi}{2} \\ |z-3+2i| = |z-1| \end{cases}$$

أعين أن الجملة تكافئ: $\frac{z-3+2i}{z-1} = i$ ثم عين قيمة z

بـ- B النقطة التي لاحقها $z_B = 3$، تحقق أن: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$، ماهي طبيعة الرباعي $ABCD$؟

جـ- النقطة I لاحقها $z_I = 1 - 2i$

أكتب z على الشكل الأسي حيث: $z = \frac{z_A - z_I}{z_B - z_I}$

تحقق أن: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{JI}$، ماهي طبيعة الرباعي $ABJI$؟

الحل

1-حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة:

$$(z-3+2i)(z^2+6z+10) = 0$$

معناه إما

$$\begin{cases} z-3+2i = 0 \\ z_0 = 3-2i \text{ أي} \\ z^2+6z+10 = 0 \text{ أو} \end{cases}$$

$\Delta = b^2 - 4ac = 36 - 4(10) = -4 = (2i)^2$

للمعادلة حلان:

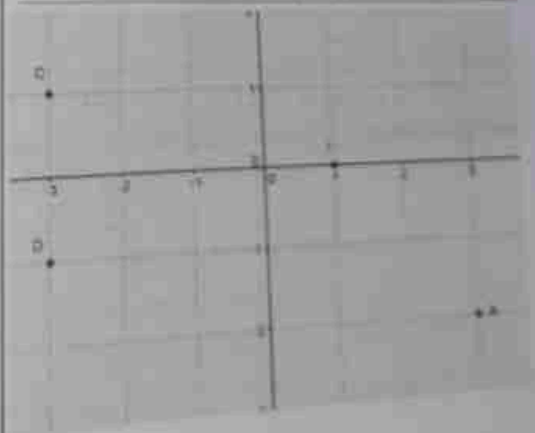
$$z_1 = \frac{-6-2i}{2} = -3-i$$

$$z_2 = \frac{-6+2i}{2} = -3+i$$

مجموعة حلول المعادلة

$$S\{-3-i\,;\,-3+i\,;\,3-2i\}$$

2-التعليم في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد متجانس النقط I,D ,C,A



3-أتحقق أن الجملة تكافئ $\frac{(z-3+2i)}{(z-1)} = i$

لدينا

$$\arg(z-3+2i) = \arg(z-1) + \frac{\pi}{2}$$

تكافئ

$$\arg(z-3+2i) - \arg(z-1) = \frac{\pi}{2}$$

نعلم أن: من خواص اللوغاريتم

$$\arg(z_1) - \arg(z_2) = \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)$$

تكافئ

$$\arg\left(\frac{(z-3+2i)}{(z-1)}\right) = \frac{\pi}{2}$$

ولدينا:

$$|z-3+2i| = |z-1|$$

$$\left|\frac{z-3+2i}{z-1}\right| = 1 \text{ أي}$$

$$\frac{z-3+2i}{z-1} = i \text{ ومنه}$$

تعيين قيمة z

لدينا: $\frac{z-3+2i}{z-1} = i$

تكافئ:

$$z-3+2i = iz-i \cdot$$

تكافئ

$$z-iz = 3-2i-i$$

تكافئ

$$z(1-i) = 3-3i$$

تكافئ

$$z = \frac{3(1-i)}{1-i}$$

$$z = 3 \quad \text{ومنه}$$

بـ-البرهان على أن $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

لدينا:

$$z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = 3-3+2i$$

$$z_{\overrightarrow{AB}} = 2i \quad \text{أي } \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$$

ولدينا: $z_{\overrightarrow{DC}} = z_C - z_D = -3+i+3+i$

$$z_{\overrightarrow{DC}} = 2i \qquad \overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$$

ومنه $z_{\overrightarrow{AB}} = z_{\overrightarrow{AC}}$

وبالتالي $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

طبيعة الرباعي $ABCD$

بما أن $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ فان الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع

ج-كتابة $z = \frac{z_A - z_I}{z_B - z_I}$ على الشكل الأسي:

$$z = \frac{z_A - z_I}{z_B - z_I} = \frac{3 - 2i - 1}{3 - 1 + 2i} = \frac{2 - 2i}{2 + 2i}$$
$$= \frac{1 - i}{1 + i} \times \frac{1 - i}{1 - i}$$
$$z = \frac{1 - 1 - 2i}{2} = -i$$
$$z = e^{-i\frac{\pi}{2}} = e^{i\left(\frac{3\pi}{2}\right)}$$ ومنه

-التحقق من أن $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{JI}$

لدينا:

$$z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = 3 - 3 + 2i = 2i$$

أي $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$

$$z_{\overrightarrow{JI}} = z_I - z_J = 1 - 1 + 2i = 2i$$

أي $\overrightarrow{JI}\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$

ومنه: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{JI}$

-تجديد طبيعة الرباعي $ABIJ$

لدينا: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{JI}$ ومنه الرباعي متوازي أضلاع

ليكن $(IB) \perp (IA)$ و $IA = JA$

وبالتالي: متوازي أضلاع فيه قطران متعامدان ومتناصفان ومتقايسان فالرباعي $ABIJ$ مربع.

50. تقني 2010 الموضوع 02

1-أ-اكتب على الشكل الاسي العدد المركب a حيث:

$$a = -2 + 2i\sqrt{3}$$

(i هو العدد المركب الذي طويلته 1 و $\frac{\pi}{2}$ عمدة له)

ب-حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول Z : $Z^2 = -2 + 2i\sqrt{3}$

2-ينسب المستوي إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$

أ-علم النقط التي لاحقاها $Z_A = -2$ و $Z_B = -1 - \sqrt{3}i$ و $Z_C = 1 + \sqrt{3}i$ على الترتيب.

ب-احسب طويلة العدد المركب $\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}$ وعمدة له.

ج-استنتج طبيعة المثلث ABC.

3-لتكن (E) مجموعة النقط ذات اللاحقة z حيث:

$$\arg(\overline{z} + 2) = \frac{\pi}{3}$$

أ-تحقق أن B تنتمي إلى (E).

ب-عين المجموعة (E).

الحل

1-أ- كتابة العدد المركب a على الشكل الأسي حيث:

$$a = -2 + 2i\sqrt{3}$$

لدينا: $|a| = \sqrt{4 + 12} = 4$

$$\arg(a) = \theta \begin{cases} \cos\theta = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2} \\ sin\theta = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases};$$

ومنه $\theta = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$

وبالتالي: $a = 4e^{i\frac{2\pi}{3}}$

ب- حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول Z:

$$z^2 = -2 + 2i\sqrt{3}$$

لدينا: $z^2 = -2 + 2i\sqrt{3} = 4e^{i\frac{2\pi}{3}}$

ومنه

$$z_1 = \sqrt{4e^{i\frac{2\pi}{3}}} = \sqrt{4}.\sqrt{e^{i\frac{2\pi}{3}}} = 2e^{\left(i\frac{2\pi}{3}\right)\frac{1}{2}}$$
$$= 2e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$z_2 = -\sqrt{4e^{i\frac{2\pi}{3}}} = -\sqrt{4}.\sqrt{e^{i\frac{2\pi}{3}}} = -2e^{\left(i\frac{2\pi}{3}\right)\frac{1}{2}}$$
$$= -2e^{i\frac{\pi}{3}}$$

لدينا: $-1 = i^2 = e^{i\pi}$

ومنه $z_2 = 2e^{i\pi}.e^{i\frac{\pi}{3}} = 2e^{i\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)}$

$$z_2 = 2e^{i\frac{4\pi}{3}}$$

ومنه حلول المعادلة $s = \left\{2e^{i\frac{\pi}{3}}; 2e^{i\frac{4\pi}{3}}\right\}$

2-أ-حساب طويلة العدد المركب $\frac{z_c - z_A}{z_B - z_A}$

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{1 + i\sqrt{3} + 2}{-1 - i\sqrt{3} + 2}$$
$$= \frac{3 + i\sqrt{3}}{1 - i\sqrt{3}} \times \frac{1 + i\sqrt{3}}{1 + i\sqrt{3}}$$
$$= i\sqrt{3}$$
$$\left|\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = \sqrt{3}$$
$$\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \arg(i\sqrt{3}) = \frac{\pi}{2}$$

الأعداد المركبة من الأمتحان إلى البناء

بتطبيقة المثلث ABC :

$(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3}$ ومنه المثلث ABC قائم في A

3-أتحقق من أن B تنتمي الى (E)

$\arg(-1-i\sqrt{3}+2) = \arg(-1+i\sqrt{3}+2)$
$= \arg(1+i\sqrt{3})$

لدينا:

$|1+i\sqrt{3}| = \sqrt{4} = 2$; $\arg(1+i\sqrt{3}) = \theta$

$$\begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{2} \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$$

$\arg(1+i\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$

ومنه النقطة B تنتمي الى (E)

ب: تعيين المجموعة (E)

لدينا: $\arg(\overline{z+2}) = -\frac{\pi}{3}$

$\arg(z+2) = -\frac{\pi}{3}$

$\arg(z-z_A) = -\frac{\pi}{3}$; $(\vec{u};\overrightarrow{Au}) = -\frac{\pi}{3}$

$z+2 = ke^{-i\frac{\pi}{3}}$; $(k\epsilon\mathbb{R}_+^*)$

مجموعة النقط (E) هي نصف المستقيم $[AM)$

باستثناء النقطة A : $[AM)-[A]$

الذي يميل بزاوية قدرتها $-\frac{\pi}{3}$ ومبدؤه النقطة A

51. تقني 2009 الموضوع 01

1- حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2-2z+2=0$ حيث z هو المجهول.

ب- استنتج في $\mathbb{C}$ حلول المعادلة ذات المجهول z :

$(\overline{z}+3)^2-2(\overline{z}+3)+2=0$

حيث $\overline{z}$ مرافق z.

2- المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$

النقط A,B و M لواحقها $(1-i),(1+i),z$ على الترتيب.

أ- عين (Γ) مجموعة النقط M من المستوي حيث:

$z=1-i+ke^{i\frac{5\pi}{4}}$ عندما k يمسح $\mathbb{R}^+$

ب- عين (E) مجموعة النقط M من المستوي حيث:

$|z-1+i| = |z-1-i|$

الحل

1-أ-حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2-2z+2=0$

$\Delta = b^2-4AC = 4-4(1)(2) = -4$
$= (2i)^2$

للمعادلة حلين:

$z_1 = \frac{2-2i}{2} = 1-i$

$z_2 = \frac{2+2i}{2} = 1+i$

ب-استنتاج حلول المعادلة ذات المجهول z

$(\overline{z}+3)^2-2(\overline{z}+3)+2=0$

نضع $t = \overline{z}+3$

ليصبح: $t^2-2t+2=0$

أي حلول المعادلة: $t_1 = 1-i$

$t_2 = 1+i$

*ومنه $1-i = \overline{z}+3$

تكافئ: $\overline{z} = -2-i$

$z_3 = -2+i$

$1+i = \overline{z}+3$

$\overline{z} = -2+i$

$z_4 = -2-i$

2-أ-تعيين (Γ) مجموعة النقط M من المستوي حيث:

$z = 1-i+ke^{i\frac{5\pi}{4}}$; $k\epsilon\mathbb{R}$

$z = z_A+ke^{i\frac{5\pi}{4}}$

تكافئ: $z-z_A = ke^{i\frac{5\pi}{4}}$

$|z-z_A| = k$ أي $AM = k$

$agr(z-z_A) = \frac{5\pi}{4}$ أي $(\vec{U};AM) = \frac{5\pi}{4}$

وبالتالي مجموعة النقط (Γ) هي نصف مستقيم $[AM)$

مبدؤه النقطة A ويميل بزاوية $\frac{5\pi}{4}$

ب-تعيين (E) مجموعة النقط M من المستوي حيث:

$|z-1+i| = |z-1-i|$

تكافئ: $|z-(1-|\ |i)| = |z-(1+i)|$

$|z-z_A)| = |z-z_B|$

$AM = BM$

ومنه مجموعة النقط (E) من المستوى هي محور القطعة المستقيمة $[AB]$

52. تقني 2009 الموضوع 02

1- حل في $\mathbb{C}$ المعادلة

$$z^2 - 6z + 18 = 0 \ldots\ldots\ldots (1)$$

2- لتكن العدد المركب z_1 حيث $z_1 = 3 - 3i$

(أ هو العدد المركب الذي طويلته 1 و $\frac{\pi}{2}$ عمدة له)

أ- اكتب z_1 على الشكل الأسي

ب- احسب طويلة العدد z_3 وعمدة له حيث

$$z_1 \times z_3 = 6(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12})$$

استنتج قيمتي $\cos\frac{\pi}{12}$ و $\sin\frac{\pi}{12}$

3- نعتبر في المستوي المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ النقط A و B و C ذات اللاحقات $3+3i$; $3-3i$ و $\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{i\sqrt{6}}{2}$ على الترتيب

أ- عين قيم العدد الحقيقي α حتى تقبل الجملة المثقلة $\{(A;1),(B;-1),(C;\alpha)\}$ مرجحا نرمز له بالرمز G_α

ب- عين مجموعة النقط G_α لما يتغير α في $\mathbb{R}^*$

الحل

1-الحل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة:

$$z^2 - 6z + 18 = 0 \ldots\ldots\ldots (1)$$

$$\Delta = 36 - 4(1)(18) = 36 - 72 = -36 = (6i)^2$$

ومنه للمعادلة حلان:

$$z_1 = \frac{(6-6i)}{2} = 3 - 3i$$

$$z_2 = \frac{(6+6i)}{2} = 3 + 3i$$

مجموعة حلول المعادلة: $S = \{3-3i\,;3+3i\}$

2-أ-كتابة $3-3i$ على الشكل الأسي:

$$|z_1| = \sqrt{3^2 + (-3)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$\begin{cases} \cos\theta = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \frac{-3}{3\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

وبالتالي $z_1 = 3\sqrt{2}e^{-i\left(\frac{\pi}{4}\right)}$

2-ب-حساب طويلة z_3 وعمدة له:

لدينا: $z_1 \times z_3 = 6\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$

$$z_1 \times z_3 = 6e^{i\frac{\pi}{12}}$$

$$z_3 = \frac{6e^{i\frac{\pi}{12}}}{z_1} = \frac{6e^{i\frac{\pi}{12}}}{3\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}$$

$$z_3 = \frac{2}{\sqrt{2}}e^{i\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\sqrt{2}^2}{\sqrt{2}}e^{i\left(\frac{4\pi}{12}\right)}$$

$$z_3 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{3}}$$

الطويلة: $|z_3| = \sqrt{2}$

العمدة: $\arg(z_3) = \frac{\pi}{3}$

***استنتاج قيمة مضبوطة لـ $\cos\frac{\pi}{12}$ و $\sin\frac{\pi}{12}$**

لدينا:

$$z_1 \times z_3 = (3-3i) \times \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$z_1 \times z_3 = (3-3i) \times \sqrt{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$z_1 \times z_3 = (3-3i) \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{i\sqrt{6}}{2}\right)$$

$$= (3-3i)\sqrt{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3i\sqrt{6}}{2} - \frac{3i\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{6}}{2}$$

$$= 3\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}\right) + 3i\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\right) = 6\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$$

معناه:

$$3\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}\right) = 6\cos\frac{\pi}{12}$$

أي:

$$\frac{3(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{2} = 6\sin\frac{\pi}{12}$$

$$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{(\sqrt{2}+\sqrt{6})}{4}$$

$$\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

3-أ- تعيين قيم العدد الحقيقي α :

حتى تقبل الجملة المثقلة مرجحا يجب أن:

الأعداد المركبة من الأكاديمي الثاني

$1-1+\alpha \neq 0$

معناه $\alpha \neq 0$ أي $\alpha \in \mathbb{R}^*$

3-مستعين مجموعة النقط G_α :

$$z_{G_\alpha} = \frac{\left(3+3i-3+3i+\alpha\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{6}}{2}\right)\right)}{\alpha}$$

$$z_{G_\alpha} = \frac{6i}{\alpha} - \frac{\sqrt{2}}{2} + i\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$$

$$z_{G_\alpha} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\left(\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{6}{\alpha}\right)$$

ومنه مجموعة النقط G_α $(\alpha \in \mathbb{R})$ هي المستقيم ذو المعادلة

$x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ باستثناء النقطة $D\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$

53. تقني 2008 الموضوع 01

لتكن في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة (*) المعرفة كما يلي:

$z^3 + (2-4i)z^2 - (6+9i)z + 9(-1+i) = 0$ ..(*)

1-تبين أن $z_0 = 3i$ هو حل للمعادلة (*)

2-حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (*) ثم أكتب حلولها z_2, z_1, z_0 على الشكل الأسي حيث

$|z_1| < |z_2|$

3-لتكن A, B, C صور الحلول z_2, z_1, z_0 على الترتيب في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ عين النقطة G مرجح الجملة $\{(A,1);(B,1);(c,-1)\}$

4-عين المجموعة (E) للنقطة M حيث:

$AM^2 + BM^2 - CM^2 = -13$

بين أن النقطة A تنتمي إلى المجموعة (E) ثم أنشئ (E).

5-تحقق أن النقطة B, O و G في استقامية ثم عين المجموعة (E) بالتحاكي الذي مركزه النقطة O ويحول B إلى G محددا عناصرها المميزة.

الحل

نضع $p(z) = z^3 + (2-4i)z^2 - (6+9i)z + 9(-1+i)$

1-البرهان على أن $z_0 = 3i$ حل للمعادلة (*)

$p(z) = 0$ .....(*)

لدينا:

$$p(3i) = (3i)^3 + (2-4i)(3i)^2 - (6+9i)(3i) + 9(-1+i)$$

$$p(3) = -27i - 18 + 36i - 18i + 27 - 9 + 9i = 0$$

ومنه $z_0 = 3i$ حل للمعادلة (*)

2-حل المعادلة (*) :

بما أن $z_0 = 3i$ جذر للعبارة $p(z)$ فإنه يمكن كتابتها على الشكل

$$p(z) = (z-3i)(z^2+\alpha z+\beta)$$

$$p(z) = z^3 + \alpha z^2 + \beta z - 3iz^2 - 3\alpha iz - 3\beta i$$

$$p(z) = 3^3 + (\alpha - 3i)z^2 + (\beta - 3\alpha i)z - 3\beta i$$

بالمطابقة نجد: $\alpha - 3i = 2 - 4i$

ومنه: $\alpha = 2 - i$

$$-3\beta i = 9(-1+i)$$

$$\beta i = -3(-1+i)$$

$$\beta = \frac{-3(-1+i)\times(-i)}{i\times(-i)} = -3i - 3$$

$$\beta = -3 - 3i$$

وبالتالي

$$p(z) = (z-3i)(z^2+(2-i)z-3-3i)$$

$$p(z) = 0$$

معناه: إما

$$\begin{cases} z-3i=0 \\ z_0 = 3i \\ z^2+(2-i)z-3-3i=0 \end{cases}$$ أي

حساب المميز:

$$\Delta = (2-i)^2 - 4(-3-3i)$$

$$\Delta = (2-i)^2 + 4(3+3i)$$

$$\Delta = 4 - 1 - 4i + 12 + 12i$$

$$\Delta = 15 + 8i$$

نستخرج الجذور التربيعية لـ Δ:

نضع $\Delta = w^2$ حيث $w = x + iy$

نضع: $(x+iy)^2 = 15 + 8i$

نكافئ

$$x^2 - y^2 + 2xyi = 15 + 8i$$

معناه:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 15 & (1) \\ 2xy = 8 & (2) \\ x^2 + y^2 = 17 & (3) \end{cases}$$

بجمع 1 و3 نجد: $2x^2 = 32$

ومنه

$$\begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = -4 \end{cases}$$

بتعويض في 2 نجد:

$$\begin{cases} y_1 = \dfrac{8}{2(4)} = 1 \\ y_2 = \dfrac{8}{2(-4)} = -1 \end{cases}$$

ومنه: $\begin{cases} w_1 = 4 + i \\ w_2 = -4 - i \end{cases}$

ومنه: $\Delta = (4+i)^2$

وبالتالي حلول المعادلة:

$$(z^2 + (2-i)z - 3 - 3i = 0)$$

$$z_1 = \frac{-2 + i + 4 + i}{2} \; ; \; z_2 = \frac{-2 + i - 4 - i}{2}$$

$$z_1 = 1 + i \; ; \quad z_2 = -3$$

$$(|z_2| = 3 \; ; \; |z_1| = \sqrt{2})$$

حلول المعادلة (*) هي:

$$(z_0 = 3i ; z_1 = 1 + i ; z_2 = -3)$$

***كتابة الحلول على الشكل الأسي:**

$$z_0 = 3e^{\frac{\pi}{2}i} ; z_1 = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i} ; z_2 = 3e^{\pi i}$$

3- تعيين z_G لاحقة G:

$$z_G = \frac{3i + 1 + i + 3}{1 + 1 - 1} = 4 + 4i$$

أي $(4;4)$

4-تعيين المجموعة (E) للنقط M حيث:

$$AM^2 + BM^2 - CM^2 = -13$$

لدينا

$$(x-0)^2 + (y-3i)^2 + (x-1)^2 + (y-0)^2 - (x+3)^2 - (y-0)^2 = -13$$

تكافئ: $x^2 + y^2 - 8x - 8y + 15 = 0$

تكافئ: $(x+4)^2 + (y-4)^2 = 17$

$(17 > 0)$

ومنه المجموعة (E) هي دائرة مركزها G ونصف قطرها $r = \sqrt{17}$

*تبيين أن النقطة A تنتمي إلى (E)

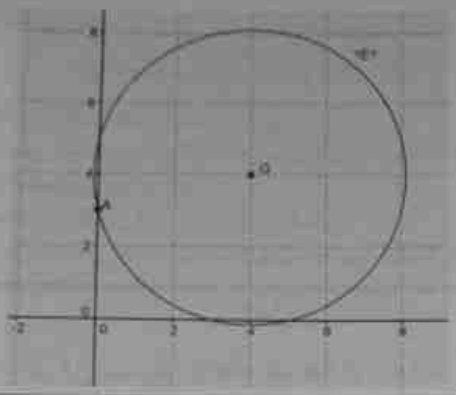
حتى تكون A تنتمي إلى (E)

فإن $AG = r = \sqrt{17}$

لدينا: $AG = \sqrt{4^2 + 1^2} = \sqrt{16 + 1} = \sqrt{17}$

ومنه A تنتمي الى (E)

انشاء (E)



5- البرهان على ان النقط G,B,O في استقامية:

ط1: الارتباط الخطي $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OG}$

$$\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} ; \overrightarrow{OG}\begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix}$$

ومنه $(k = 4)$ أي $\overrightarrow{OG} + 4\overrightarrow{OB}$

وبالتالي OG يوازي OB أي النقط في استقامية.

ط2: النسبة:

البرهان على أن النقط G,B,O في استقامية يكفي أن نبرهن أن النسبة

$$\frac{z_G - z_o}{z_B - z_o} \; \epsilon \mathbb{R}^*$$

$$\frac{z_G}{z_B} = \frac{4+4i}{1+i} = 4\left(\frac{1+i}{1+i}\right) = 4 \quad ; 4\epsilon\mathbb{R}^*$$

ومنه النقط على استقامية $\left(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OG}\right) = k\pi = 0$

- تعيين صورة المجموعة (E) بالتحاكي الذي مركزه النقطة o

$$z_G - z_0 = k(z_B - z_o)$$

$$z_G = kz_B$$

$$k = \frac{z_G}{z_B} = 4$$

نسبة التحاكي هي $k = 4$ ومركزه o عبارته المركبة: $z' = 4z$

صورة الدائرة (c) هي دائرة (c') مركزها G' ذات اللاحقة $z_{G'}$

$$z_{G'} = 4z_G = 4(4 + 4i)$$

$$z_{G'} = 16 + 16i$$

ونصف قطرها $r' = 4r = 4\sqrt{17}$

54. تقني 2008 الموضوع 02

r عدد حقيقي موجب تماما و θ عدد حقيقي كيفي.
نحل في مجموعة الأعداد المركبة C المعادلة ذات المجهول z

$$z^2 - 2i\left(r\cos\frac{\theta}{2}\right)z - r^2 = 0$$

اكتب الحلين على الشكل الأسي.
2-في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$
نعتبر النقطتين A و B صورتي الحلين.
عين θ حتى يكون المثلث OAB متقايس الأضلاع.

الحل

1- حل في مجموعة الأعداد المركبة C المعادلة التالية ذات المجهول z

$$z^2 - 2i\left(r\cos\frac{\theta}{2}\right)z - r^2 = 0$$

معادلة من الدرجة الثانية:

$$az^2 + bz + c = 0$$

$$a = 1\ ;\ b = -2i\left(r\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)\ ;\ c = -r^2$$

$$\Delta = \left(-2ir\cos\frac{\theta}{2}\right)^2 - 4(1)(-r^2)$$

$$\Delta = -4r^2\cos^2\frac{\theta}{2} + 4r^2$$

$$\Delta = 4r^2\left(-\cos^2\frac{\theta}{2} + 1\right)$$

لدينا: $(\theta'\in\mathbb{R})\ \cos^2\theta' + \sin^2\theta' = 1$

ومنه $1 - \cos^2\frac{\theta}{2} = \sin^2\frac{\theta}{2}$

وبالتالي:

$$\Delta = 4r^2\sin\frac{\theta}{2}$$

أي $\sqrt{\Delta} = 2r\sin\frac{\theta}{2}$

للمعادلة حلين

$$z_1 = \frac{\left(2ir\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - 2r\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)}{2}$$

$$= ri\cos\frac{\theta}{2} - r\sin\frac{\theta}{2}$$

$$z_2 = \frac{\left(2ir\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + 2r\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)}{2}$$

$$= ri\cos\frac{\theta}{2} + r\sin\frac{\theta}{2}$$

كتابة الحلين على الشكل الأسي:

$$z_1 = z_1 e^{i\theta_1}\quad ;\ \theta_1 = \arg(z_1)$$

$$z_1 = |z_1|(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2})$$

$$z_1 = r(-\sin\frac{\theta}{2} + i\cos\frac{\theta}{2})$$

$$z_1 = r(i^2\sin\frac{\theta}{2} + i\cos\frac{\theta}{2})$$

$$z_1 = ir(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2})$$

لدينا: $|i| = 1\ ;\ \arg i = \frac{\pi}{2}$

$$z_1 = re^{\frac{\pi}{2}i}(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2})$$

$$z_1 = re^{\frac{\pi}{2}i} \times e^{i\frac{\theta}{2}} = re^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$z_2 = |z_2|e^{i\theta_2}$$

$$\theta_2 = \arg(z_2)$$

$$z_2 = r\sin\frac{\theta}{2} + ir\cos\frac{\theta}{2}$$

$$z_2 = r\left(\sin\frac{\theta}{2} + i\cos\frac{\theta}{2}\right)$$

$$z_2 = r\left(-i^2\sin\frac{\theta}{2} + i\cos\frac{\theta}{2}\right)$$

$$z_2 = ir\left(-i\sin\frac{\theta}{2} + \cos\frac{\theta}{2}\right)$$

خاصية:

$$-\sin\frac{\theta}{2} = \sin(-\frac{\theta}{2})\ ;\ \cos\frac{\theta}{2} = \cos(-\frac{\theta}{2})\ )$$

$$z_2 = ri\left(\cos\left(-\frac{\theta}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\theta}{2}\right)\right)$$

$$= re^{\frac{i\pi}{2}} \times re^{-i\frac{\theta}{2}}$$

ومنه

$$z_2 = re^{i\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)}$$

2- تعيين θ حتى يكون المثلث OAB متقايس أضلاع:

$$z_A = re^{i\left(\frac{\pi+\theta}{2}\right)};\ z_B = re^{i\left(\frac{\pi-\theta}{2}\right)}$$

حتى يكون OAB مثلث متقايس أضلاع

$$\arg\left(\frac{z_B - z_\Omega}{z_A - z_\Omega}\right) = \frac{\pi}{3} \; ; \left|\frac{z_B - z_\Omega}{z_A - z_\Omega}\right| = 1$$

لدينا

$$\left(\frac{z_B - z_\Omega}{z_A - z_\Omega}\right) = \frac{re^{i\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right)}}{re^{i\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{2}\right)}} = e^{i\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right)}$$

$$= e^{-i\theta}$$

$$-\theta = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

ومنه إما:

$$\theta = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$$

أو $-\theta = -\frac{\pi}{3} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$

مواضيع شعبة الرياضيات

55. رياضي 2019 الموضوع 01

في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ نعتبر النقط A ، B ، C و D حيث :

$z_A = 1+i\sqrt{2}$ ، $z_B = \overline{z_A}$ ، $z_C = \overline{z_A}$ ، $z_D = \overline{z_B}$

1-حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z :

$(z^2+1)(z^2-2z+3)=0$

2-أ-احسب كلا من $|z_A-1|$ ، $|z_B-1|$ و $|z_C-z_E|$ ثم تحقق أن النقط الأربعة A ، B ، C و D تنتمي الى نفس الدائرة التي يطلب تعيين مركزها وطول نصف قطرها

ب-بين أن : $z_B-z_E=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)(z_A-z_E)$

ثم استنتج أن B هي صورة A بتحويل نقطي يطلب تعيين عناصره المميزة

3-ما طبيعة المثلث ABE ؟

عين لاحقتي الشعاعين $\overrightarrow{BD}$ و $\overrightarrow{AE}$ محددا طبيعة الرباعي $ABDE$

4-$\overrightarrow{w_1}$ و $\overrightarrow{w_2}$ شعاعان من المستوي لاحقتاهما على الترتيب z_1 و z_2

أ-بين أن : ($\overrightarrow{w_1}$ و $\overrightarrow{w_2}$ متعامدان) يكافئ $(z_1.\overline{z_2}+\overline{z_1}.z_2=0)$

ب-عين مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة Z حيث :

$(z-z_A)(\overline{z}-z_D)+(z-z_B)(\overline{z}-z_C)=0$

نص الإجابة

1- حل المعادلة

$$(z^2+1)(z^2-2z+3)=0$$

تكافئ $\begin{cases} z^2+1=0 \\ z^2-2z+3=0 \end{cases}$ أو

ومنه $\begin{cases} z_1=i & z_2=-i \\ z_3=1+i\sqrt{2} & z_4=1-i\sqrt{2} \end{cases}$

2-أ- حساب كلا من

$|z_A-1|$ ، $|z_B-1|$ و $|z_C-z_E|$

$|z_A-1|=|1+i\sqrt{2}-1|=\sqrt{2}$

$|z_B-1|=|i-1|=\sqrt{2}$

$|z_C-z_E|=|1-i\sqrt{2}-1|=\sqrt{2}$

تحقق أن النقط الأربعة A ، B ، C و D تنتمي الى نفس الدائرة:

لدينا $|z_A-z_E|=|z_B-z_E|=|z_C-z_E|=\sqrt{2}$

أي $EA=EB=EC=\sqrt{2}$

ولدينا $z_D=\overline{z_B}$ أي D تظيرة B بالنسبة لمحور الفواصل

ومنه $EA=EB=EC=ED=\sqrt{2}$

ومنه النقط D,C,B,A تنتمي إلى نفس الدائرة التي مركزها E ونصف قطرها $\sqrt{2}$

ب- إثبات أن

$$z_B-z_E=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}i+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(z_A-z_E)$$

لدينا

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(z_A-z_E)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{i\sqrt{2}}{2}\right)(i\sqrt{2})$$
$$=i-1$$
$$=z_B-z_E$$

ومنه $z_B-z_E=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{i\sqrt{2}}{2}\right)(z_A-z_E)$

الاستنتاج

$$\frac{z_B-z_E}{z_A-z_E}=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{i\sqrt{2}}{2}$$
$$\frac{z_B-z_E}{z_A-z_E}=e^{i\frac{\pi}{4}}$$

ومنه B صورة A بدوران مركزه E وزاويته $\frac{\pi}{4}$

-طبيعة المثلث ABE

لدينا مماسبق $\begin{cases} AE=BE \\ (\overrightarrow{EA},\overrightarrow{EB})=\frac{\pi}{4}+2k\pi \end{cases}$

ومنه المثلث ABE متساوي الساقين رأسه E

3-تعين لاحقتي الشعاعين $\overrightarrow{BD}$ و $\overrightarrow{AE}$

$$z_{\overrightarrow{AE}}=z_E-z_A=-i\sqrt{2}$$
$$z_{\overrightarrow{BD}}=z_D-z_B=-2i$$

طبيعة الرباعي $ABDE$

لدينا $\frac{z_{\overrightarrow{AE}}}{z_{\overrightarrow{BD}}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\in\mathbb{R}$ ومنه $\begin{cases} (AE)//(BD) \\ AE\neq BD \end{cases}$

أي الرباعي $ABDE$ شبه منحرف.

4-أ- إثبات أن $\overrightarrow{w_1}$ و $\overrightarrow{w_2}$ متعامدان

يكافئ $z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2=0$

لدينا $z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2=0$

أي $z_1\overline{z_2}=-\overline{z_1}z_2$

معناه $\frac{z_1}{z_2}=-\left(\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}\right)$

أي $\frac{z_1}{z_2}$ تخيلي صرف

وعليه $\frac{z_1}{z_2} = \alpha i$ حيث $\alpha \in \mathbb{R}$

ومنه $\overrightarrow{W_1}$ و $\overrightarrow{W_2}$ متعامدان.

4-ب-تحديد طبيعة مجموعة النقط M

$(z - z_A)(\overline{z} - z_D) + (z - z_B)(\overline{z} - z_C) = 0$

$(z - z_A)\left(\overline{z - z_D}\right) + (z - z_B)\overline{(z - z_C)} = 0$

نعلم أن $\overline{z_D} = z_B$

$\overline{z_C} = z_A$

ومنه

$(z - z_A)\overline{(z - z_B)} + (z - z_B)\overline{(z - z_A)} = 0$

وحسب السؤال 4 أ فإن

$z_{\overrightarrow{AM}} z_{\overrightarrow{BM}} + z_{\overrightarrow{BM}} \cdot \overline{z}_{\overrightarrow{AM}} = 0$

أي $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = 0$

ومنه مجموعة النقط $M(z)$ هي الدائرة التي قطرها $[AB]$

56. رياضي 2019 الموضوع 02

1-نضع من أجل كل عدد مركب z :

$p(z) = z^4 - 6z^3 + 29z^2 - 24z + 100$

1-أ-بين أنه من أجل كل عدد مركب z

$\overline{p(z)} = p(\overline{z})$ ، ثم استنتج أنه إذا كان z حلا للمعادلة $p(z) = 0$ فإن $\overline{z}$ حل لها

1-ب-حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة $p(z) = 0$ علما أنها تقبل حلا تخيليا صرفا

2-ب-نعتبر في المستوي المركب المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ ، النقط A ، B ، M و M' التي لاحقاتها على الترتيب:

$2i$ ، $3 - 4i$ ، z و z' حيث

$z' = \frac{-iz+4+3i}{z-2i}$ مع $z \neq 2i$

ولتكن I مرجح الجملة $\{(A; 2); (B; 1)\}$ و J مرجح الجملة $\{(A; -2), (B; 1)\}$

2-أ-عين اللاحقتين z_I و z_J للنقطتين I و J على الترتيب

2-ب-لتكن (E) مجموعة النقط $M(z)$ التي يكون من أجلها $|z'| = 2$ بين أن (النقطة M من (E)) يكافئ $(\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{JM} = 0)$ ، ثم عين (E) وأنشئها

2-ج-لتكن (T) مجموعة النقط $M(z)$ التي يكون من أجلها $\arg(z') = 2K\pi$ حيث k عدد صحيح

تحقق أن النقطة D ذات اللاحقة $\frac{9}{2} - \frac{5}{2}i$ تنتمي الى (T) ، ثم عين وأنشئ (T)

3-عين الشكل الجبري للاحقة النقطة G تقاطع المجموعتين (E) و (T)

نص الإجابة

1-أ-تبيان أن $\overline{p(z)} = p(\overline{z})$

لدينا $p(z) = z^4 - 6z^3 + 29z^2 - 24z + 100$

$$\overline{p(z)} = \overline{z^4 - 6z^3 + 29z^2 - 24z + 100}$$
$$= \overline{z}^4 - 6\overline{z}^3 + 29\overline{z}^2 - 24\overline{z} + 100$$
$$= p(\overline{z})$$

z حل للمعادلة $P(z) = 0$

معناه $P(z) = 0$ ومنه $\overline{p(z)} = \overline{0}$

ومنه $p(\overline{z}) = 0$ ، إذن $\overline{z}$ حل للمعادلة $P(z) = 0$

1-ب-حل المعادلة $p(z) = 0$

المعادلة تقبل حل تخيلي صرف أي

$p(\alpha i) = 0$

وحسب السؤال 1 أ فإن $p(-\alpha i) = 0$

ومنه

$$(\alpha i)^4 - 6(\alpha i)^3 + 29(\alpha i)^2 - 24(\alpha i) + 100 = 0$$
$$\alpha^4 + 6\alpha^3 i - 29\alpha^2 - 24\alpha i + 100 = 0$$
$$\alpha^4 - 29\alpha^2 + 100 + i(6\alpha^3 - 24\alpha) = 0$$

ومنه $\begin{cases} \alpha^4 - 29\alpha^2 + 100 = 0 \quad ...(1) \\ 6\alpha^3 - 24\alpha = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha^4 - 29\alpha^2 + 100 = 0 \ ...(1) \\ 6\alpha(\alpha^2 - 4) = 0 \end{cases}$$

وعليه $\begin{cases} \alpha^4 - 29\alpha^2 + 100 = 0 \\ \alpha = 0 \quad \alpha = 2 \quad \alpha = -2 \end{cases}$

بتعويض قيم α في (1) نجد أن المعادلة (1) محققة من أجل $\alpha = 2$ أو $\alpha = -2$ وعليه

$z_0 = 2i$ $z_0 = -2i$ الحلان التخيليان الصرفيان لـ $p(z)$

$p(z) = (z - 2i)(z + 2i)(z^2 + az + b)$

أي $p(z) = (z^2 + 4)(z^2 + az + b)$

بالنشر نجد

$p(z) = z^4 + az^3 + (4 + b)z^2 + 4az + 4b$

بالمطابقة نجد

$$\begin{cases} a = -6 \\ 4 + b = 29 \\ 4a = -24 \\ 4b = 100 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -6 \\ b = 25 \end{cases}$$

ومنه تصبح $p(z) = (z^2 + 4)(z^2 - 6z + 25)$

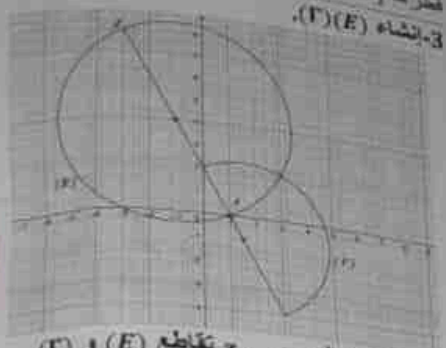
وعليه $p(z) = 0$

يكافئ $\begin{cases} z^2 + 4 = 0 \\ z^2 - 6Z + 25 = 0 \end{cases}$ أو

$(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ وعليه

ومنه مجموعة النقط (Γ) هي نصف الدائرة التي قطرها $[AB]$ ماعدا A و B.

3-إنشاء (E)، (Γ).



وتعيين الشكل الجبري z_{ω} تقاطع (E) و (Γ)

$|z'| = 2$ و $\arg(z') = 2k\pi$

$\frac{-iz+4+3i}{z-2i} = 2$ أي

$-iz_G + 4 + 3i = 2z_G - 4i$

$z_G(-i-2) = -4-7i$ أي

$z_G = 3 + 2i$ ومنه

57. رياضي 2018 الموضوع 01

المستوي المركب منسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ ، θ عدد حقيقي من المجال $]-\pi;\pi]$

أحل في مجموعة الاعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة ذات المجهول z التالية :

$(z^2-2z+2)(z^2-2(\sin\theta)z+1)=0$

II- A ، B ، C و D نقط من المستوي لاحقاتها على الترتيب

$z_A = -\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$ ، $z_B = 1-i$ ، $z_C = \sin\theta + i\cos\theta$

و $z_D = \overline{z_C}$ (يرمز $\overline{z}$ الى مرافق z_C)

1-اكتب الأعداد z_A ، z_B ، z_C و z_D على الشكل الأسي

2-E نقطة من المستوي لاحقتها z_E حيث $z_E = \frac{z_A}{z_B}$

بين أن النقط C ، D و E تنتمي الى دائرة يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها

3-ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه النقطة A وزاويته $\frac{\pi}{4}$ ونسبته $(2\sqrt{2}-2)$

الأعداد المركبة من الشكل الى الجبر

$\begin{cases} z = 2i \\ z = -2i \end{cases}$ $\Delta = (8i)^2$

ومنه $S = \{2i, -2i, 3+4i, 3-4i\}$

2-تعيين z_I z_J

$z_I = \frac{z_A+z_B}{2} = \frac{4i+3-4i}{2}$

$z_I = 1$

ومنه $z_J = \frac{-2z_A+z_B}{-1} = \frac{-4i+3-4i}{-1}$

$z_J = -3+8i$

2-ب-مجموعة النقط (E)

$|z'| = 2$

تبيين أن $M \in (E)$ يكافئ

$\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{JM} = 0$

$\left|\frac{iz+4+3i}{z-2i}\right| = 2$ يعني $M \in (E)$

$|-iz+4+3i| = 2|z-2i|$

$|z+4i-3| = 2|z-2i|$

$|z-(-4i+3)| = 2|z-2i|$

$MB = 2MA$

$MB^2 = 4MA^2$ وعليه

$MB^2 - 4MA^2 = 0$

$(\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MA})(\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MA}) = 0$

$\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{MI} = 0$ من خواص المرجح فإن

ومنه مجموعة النقط (E) هي الدائرة ذات القطر $[IJ]$

2-جـ (Γ): $\arg(z') = 2k\pi$

لتحقق أن D تنتمي لـ(Γ)

$z' = \frac{-iz_D+4+3i}{z_D-2i}$

$z' = \frac{-i\left(\frac{9}{2}-\frac{5}{2}i\right)+4+3i}{\frac{9}{2}-\frac{5}{2}i-2i}$

$z' = \frac{1}{3}$ أي $z' = \frac{-3i+3}{9-9i}$ ومنه

$\arg(z') = 2k\pi$

$D \in (\Gamma)$ ومنه

تحديد (Γ)

$\arg\left(\frac{-iz+4+3i}{z-2i}\right) = 2k\pi$ أي $\arg(z') = 2k\pi$

$\arg\left[\left(\frac{-iz+4+3i}{z-2i}\right)\left(\frac{i}{i}\right)\right] = 2k\pi$

$\arg\left(\frac{z-(-4i+3)}{z-2i}\right) + \arg\left(\frac{i}{i}\right) = 2k\pi$

$\arg\left(\frac{z-z_B}{z-z_A}\right) - \frac{\pi}{2} = 2k\pi$

عين قيمة θ حتى تكون النقطة B صورة النقطة C بالتشابه المباشر S

ب) نضع $\theta = -\frac{3\pi}{4}$ ، عين قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون العدد $(z_D)^n$ تخيليا صرفا

نص الإجابة

حل المعادلة

$$(z^2 - 2z + 2)(z^2 - 2\sin\theta\, z + 1) = 0$$

$$\begin{cases} z^2 - 2z + 2 = 0 \\ z^2 - 2\sin\theta\, z + 1 = 0 \end{cases} \quad \text{أو}$$

$$z^2 - 2z + 2 = 0 : \text{لـ}$$

$$\Delta = 4i^2 = (2i)^2$$

يوجد حلين:

$$z_1 = \left(\frac{2 + 2i}{2}\right) = 1 + i$$

$$z_2 = \left(\frac{2 - 2i}{2}\right) = 1 - i$$

ثانيا: $(z^2 - 2\sin\theta\, z + 1) = 0$

$$\Delta = 4\sin^2\theta - 4$$

$$= 4(\sin^2\theta - 1) \ldots (*)$$

نعلم أن: $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

$$\sin^2\theta - 1 = -\cos^2\theta \ldots (1)$$

نعوض (1) في (*)

نجد:

$$\Delta = -4\cos^2\theta$$

$$\sqrt{\Delta} = 2i\cos\theta$$

يوجد حلان

$$z_3 = \frac{2\sin\theta + 2i\cos}{2} = \sin\theta + i\cos\theta$$

$$z_4 = \frac{2\sin\theta - 2i\cos}{2} = \sin\theta - i\cos\theta$$

$$S = \{1 + i, 1 - i, \sin\theta + i\cos\theta, \sin\theta - i\cos\theta\}$$

1-كتابة z_D, z_C, z_B, z_A على الشكل الأسي

$$z_A = -\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}} = \sqrt{2}e^{i\pi}e^{\frac{i5\pi}{4}}$$

نعلم أن

$$-1 = e^{i\pi}$$

بكافئ:

$$z_A = \sqrt{2}\,e^{i\left(\frac{4\pi+5\pi}{4}\right)} = \sqrt{2}\,e^{i\left(\frac{8\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$\sqrt{2}\,e^{i\left(2\pi+\frac{\pi}{4}\right)} = \sqrt{2}\,e^{i\left(0+\frac{\pi}{4}\right)}$$

ومنه:

$$z_A = \sqrt{2}\,e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$z_B = 1 - i = \sqrt{2}e^{-\frac{i\pi}{4}}$$

$$z_C = \sin\theta + i\cos\theta$$

نعلم أن

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta$$

ومنه $z_C = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$

ومنه $z_C = e^{i\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}$

$$z_D = \overline{z_C}$$

$$z_D = e^{-i\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}$$

وعليه $z_D = e^{i\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)}$

2-تبيان أن E, D, C تنتمي لدائرة

لدينا $z_E = \frac{z_A}{z_B} = \frac{\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{2}e^{-\frac{i\pi}{4}}}$

ومنه $z_E = e^{\frac{i\pi}{2}}$

لدينا $|z_E| = |z_D| = |z_C|$

أي $OE = OC = OD$

ومنه النقط E, D, C تنتمي لدائرة مركزها O

ونصف قطرها $r = 1$

3- S تشابه مباشر مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{4}$ ونسبته $(2\sqrt{2} - 2)$

تعيين قيمة θ حتى تكون B صورة C بالتشابه S

$$z_B - z_A = (2\sqrt{2} - 2)e^{\frac{i\pi}{4}}(z_C - z_A)$$

$$\frac{\sqrt{2}e^{-\frac{i\pi}{4}} - \sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}}{e^{\frac{i\pi}{4}}} = (2\sqrt{2} - 2)(z_C - z_A)$$

$$\frac{\sqrt{2}e^{-\frac{i\pi}{4}}}{e^{\frac{i\pi}{4}}} - \frac{\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}}{e^{\frac{i\pi}{4}}} = (2\sqrt{2} - 2)(z_C - z_A)$$

$$\sqrt{2}e^{-i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)} - \sqrt{2} = \sqrt{2}(2 - \sqrt{2})(z_C - z_A)$$

$$\sqrt{2}e^{-i\left(\frac{\pi}{2}\right)} - \sqrt{2} = \sqrt{2}(2 - \sqrt{2})(z_C - z_A)$$

$$e^{-i\left(\frac{\pi}{2}\right)} - 1 = (2 - \sqrt{2})(z_C - z_A)$$

$$\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) - 1 = (2 - \sqrt{2})(z_C - z_A)$$

$$-i - 1 = (2 - \sqrt{2})(z_C - z_A)$$

$$(2 - \sqrt{2})z_C = -1 - i + (2 - \sqrt{2})z_A$$

58. رياضي 2018 الموضوع 02

1-m عدد حقيقي، نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة C المعادلة ذات المجهول z التالية:

$z^2 + (m+1)z + (2m-1) = 0$ ..... (E)

عين قيم العدد الحقيقي m التي من أجلها تقبل المعادلة (E) حلين مركبين غير حقيقيين

2- نضع $m = 3$ ، حل المعادلة (E)

3-نعتبر في المستوي المركب المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ النقط A ، B ، C و E التي لاحقاتها

$z_A = -2+i$ ، $z_B = -2-i$ ، $z_C = \alpha$ و

$z_E = \sqrt{3}$

حيث α عدد حقيقي و $\alpha > -2$

بين أن قيمة α التي يكون من أجلها المثلث ABC متقايس الأضلاع هي $(-2+\sqrt{3})$

نضع في كل ما يأتي $z_C = -2+\sqrt{3}$:

4-اكتب العدد المركب: $\frac{z_C - z_E}{z_A - z_B}$ على الشكل الأسي ثم استنتج أن:

أ-المستقيمان (AB) و (EC) متعامدان

ب-النقط A ، B و E تنتمي الى نفس الدائرة (γ) التي يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها

5-ليكن r الدوران الذي يحول النقطة B الى C ويحول C الى A ، عبارته المركبة هي:

$z' = az + \left(\frac{\sqrt{3}-6}{2}\right) + i\left(\frac{2\sqrt{3}-1}{2}\right)$ حيث a عدد مركب

أ-احسب العدد المركب a استنتج زاوية الدوران r

ب-تحقق أن النقطة G مركز ثقل المثلث ABC هي مركز الدوران r

نص الإجابة

1-تعيين قيم m التي من أجلها تقبل المعادلة حلين مركبين غير حقيقيين أي $\Delta < 0$

$z^2 + (m+1)z + (2m-1) = 0$ ...(E)

$\Delta = (m+1)^2 - 4(2m-1)$

$\Delta = m^2 - 6m + 5$

تعيين إشارة Δ

$\Delta' = (-6)^2 - 4(1)(5) = 36 - 20$

$\Delta' = 16$

$(2-\sqrt{2})z_C = -(1+i) + (2-\sqrt{2})(1-i)$

$(2-\sqrt{2})z_C = (1+i)[-1+2-\sqrt{2}]$

$= \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}(1-\sqrt{2})$

$(2-\sqrt{2})z_C = -(2-\sqrt{2})e^{i\frac{\pi}{4}}$

$z_C = -e^{i\frac{\pi}{4}}$

$z_C = e^{i\pi} \times e^{i\frac{\pi}{4}}$

$z_C = e^{i\left(\frac{5\pi}{4}\right)}$

$z_C = e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)} = e^{i\left(\frac{5\pi}{4}\right)}$

وعليه $\frac{\pi}{2} - \theta = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$

$-\theta = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$

$\theta = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi$

ولينا $\theta \in]-\pi;\pi]$

ومنه $k = 0$ أي $\theta = -\frac{3\pi}{4}$

يكون B صورة S إذا كانت $\theta = -\frac{3\pi}{4}$

4-تعيين قيم n حتى يكون $(z_D)^n$ تخيليا صرفا

$z_D = e^{i\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)}$ ...(*)

لدينا: $\theta = -\frac{3\pi}{4}$ ...(1)

نعوض (1) في (*)

نجد: $z_D = e^{i\left(-\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{2}\right)}$

$z_D = e^{-i\left(\frac{5\pi}{4}\right)} = e^{i\left(\frac{3\pi}{4}\right)}$

$(z_D)^n = e^{i\left(\frac{3\pi}{4}\right)^n} = \cos\left(3n\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(3n\frac{\pi}{4}\right)$

يكون $(z_D)^n$ تخيليا صرفا إذا كان $\cos\frac{3n\pi}{4} = 0$

حيث $\frac{3n\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi$ $k \in \mathbb{N}$

نضرب في العدد 4

$3n = 2 + 4k$

$3n \equiv 2[4]$

$3 \times 3n = 3 \times 2\,[4]$

$9n \equiv 6[4]$

$8n + n \equiv 2[4]$

$8n \equiv 0[4]$

ومنه: $n \equiv 2[4]$

وعليه $n = 4p + 2$ حيث $p \in \mathbb{N}$

قيم n بحيث (z_D) تخيلي صرف

وجد حالان:

$$\begin{cases} m_1 = \dfrac{6+4}{2(1)} = 5 \\ m_2 = \dfrac{6-4}{2(1)} = 1 \end{cases}$$

$m_2 = 1 \qquad m_1 = 5$

أي

m	$-\infty$		1		5		$+\infty$
Δ		+		−		+	

ومنه قيم m حيث $\Delta < 0$ هي : $1 < m < 5$

2-حل المعادلة E

$$z^2 + 4z + 5 = 0$$
$$\Delta = 4i^2 = (2i)^2$$
$$z_1 = -2 + i$$
$$z_2 = -2 - i$$
$$S = \{-2 + i, -2 - i\}$$

بيان أن قيمة α حتى يكون ABC متقايس الأضلاع هي $(-2 + \sqrt{3})$

ABC متقايس الأضلاع معناه

$$AB = AC = BC$$
$$AB = |z_B - z_A| = |-2i - i + 2 - i|$$
$$= |-2i| = 2$$
$$AC = |z_C - z_A| = |\alpha + 2 - i|$$
$$= \sqrt{(\alpha+2)^2 + 1}$$

$AB = AC$ معناه

$$\sqrt{(\alpha+2)^2 + 1} = 2$$
$$(\alpha+2)^2 + 1 = 4$$
$$(\alpha+2)^2 = 3$$
$$\begin{cases} \alpha + 2 = \sqrt{3} \\ \alpha + 2 = -\sqrt{3} \end{cases}$$

أي $\alpha = -2 + \sqrt{3}$

أو $\alpha = -2 - \sqrt{3}$ مرفوض لأن $\alpha > -2$

ومنه $\alpha = -2 + \sqrt{3}$

4-كتابة $\frac{z_C - z_E}{z_A - z_B}$ على الشكل الأسي

$$\frac{z_C - z_E}{z_A - z_B} = \frac{-2 + \sqrt{3} - \sqrt{3}}{-2 + i + 2 + i}$$

وعليه $\frac{z_C - z_E}{z_A - z_B} = e^{i\frac{\pi}{2}}$

الاستنتاج

$$(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{EC}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

ومنه $(BA) \perp (EC)$ أي (AB) و (EC) متعامدان

استنتاج أن النقط B, A و C تنتمي إلى نفس الدائرة

لدينا: $\frac{z_C - z_E}{z_A - z_B} = e^{i\left(\frac{\pi}{2}\right)}$

$$\frac{EC}{BA} = 1$$

أي $EC = BA$

والمثلث ABC متقايس الأضلاع معناه

ومنه $AB = AC = BC$

$EC = AC = BC$

يعني أن النقط E, B, A تنتمي لنفس الدائرة التي مركزها C ونصف قطرها

$r = AC = 2$

5-أحسب a

$$z' = az + \left(\frac{\sqrt{3}-6}{2}\right) + i\left(\frac{2\sqrt{3}-1}{2}\right)$$

لدينا $\begin{cases} r(B) = C \\ r(C) = A \end{cases}$

أي $\begin{cases} z_C = az_B + \left(\frac{\sqrt{3}-6}{2}\right) + i\left(\frac{2\sqrt{3}-1}{2}\right) \\ z_A = az_C + \left(\frac{\sqrt{3}-6}{2}\right) + i\left(\frac{2\sqrt{3}-1}{2}\right) \end{cases}$

$$z_C - z_A = a(z_B - z_C)$$
$$a = \frac{z_C - z_A}{z_B - z_C}$$
$$= \frac{-2 + \sqrt{3} + 2 - i}{-2 - i + 2 - \sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{3} - i)(-\sqrt{3} + i)}{(-\sqrt{3} - i)(-\sqrt{3} + i)}$$
$$= \frac{-2 + 2i\sqrt{3}}{4}$$

وعليه $a = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

-استنتاج زاوية الدوران لـ r

$$\theta = \arg(a) \arg\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$a = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$$

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{-\frac{1}{2}}{1} = -\dfrac{1}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

أي $\theta = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \; ; \; k \in \mathbb{Z}$

الأعداد المركبة من الألف إلى الياء

5-ب-التحقق ان لاحقة النقطة G مركز ثقل المثلث ABC هي مركز الدوران r

$$z_G = \frac{b}{1-a}$$

$$z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3}$$

$$= \frac{-2+i-2-i-2+\sqrt{3}}{3}$$

$$z_G = \frac{-6+\sqrt{3}}{3}$$ أي

ولدينا $$\frac{b}{1-a} = \frac{\frac{\sqrt{3}-6}{2} + i\left(\frac{2\sqrt{3}-1}{2}\right)}{1+\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$= \frac{(\sqrt{3}-6+2i\sqrt{3}-i)(3+i\sqrt{3})}{(3-i\sqrt{3})(3+i\sqrt{3})}$$

ومنه: $z_G = \frac{-6+\sqrt{3}}{3}$

ومنه G مركز الدوران r

ومنه G مركز ثقل المثلث ABC

هي مركز الدوران r

59. رياضي 2017 الاستثنائية
الموضوع 01

I-حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z الآتية : $2z^2 - 10z + \frac{29}{2} = 0$

II-المستوي المركب منسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ نعتبر النقط A ، B ، C و D التي لاحقتها $z_A = \frac{3}{2} + \sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}$ ، $z_B = \frac{3}{2}e^{-i\frac{\pi}{2}}$ ، $z_C = -\overline{z_A}$ و $z_D = i$

1-أ-اكتب العددين z_A و z_B على الشكل الجبري ثم علم النقط A ، B ، C و D في المعلم السابق

1-ب-اكتب العدد المركب $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$ على الشكل الأسي ثم استنتج طبيعة المثلث ABC

2-جد لاحقة النقطة E نظيرة B بالنسبة الى D ثم استنتج طبيعة الرباعي $ABCE$

3-اكتب العبارة المركب للتشابه المباشر S الذي مركزه B ويحول A الى D ثم حدد نسبته وزاويته

4-نعرف متتالية النقط $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ كما يلي : $A_0 = A$ و $A_{n+1} = S(A_n)$ (z_n هي لاحقة A_n)

4-برهن بالتراجع ان : من اجل كل عدد طبيعي n

$$z_n - z_B = 5\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1} e^{i\frac{\pi}{4}(n+1)}$$

4-ب-عين قيم n الطبيعية حتى تنتمي النقط A_n الى المستقيم (AB)

نص الإجابة

I- حل المعادلة

لدينا:

$$2z^2 - 10z + \frac{29}{2} = 0$$

$$\Delta = -16 = (4i)^2$$

$$S = \left\{\frac{5}{2} - i, \frac{5}{2} + i\right\}$$

II-1- أ-كتابة z_B, z_A على الشكل الجبري

$$z_A = \frac{3}{2} + \sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}$$

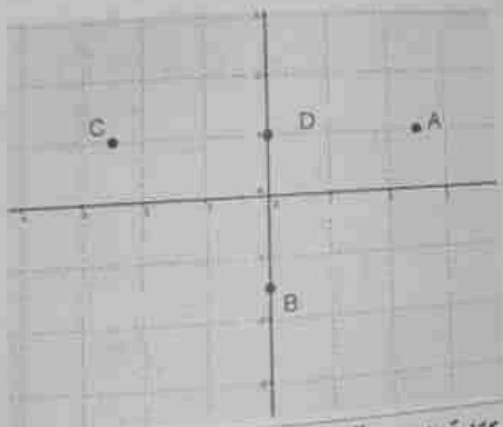
$$= \frac{3}{2} + 1 + i$$

ومنه $z_A = \frac{5}{2} + i$

$$z_B = \frac{3}{2}e^{\frac{i\pi}{2}} = \frac{3}{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$$z_B = -\frac{3}{2}i$$

-تعليم النقط



1-ب- كتابة العدد $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$ على الشكل الأسي

$$\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} = \frac{\frac{5}{2} + i + \frac{3}{2}i}{-\frac{5}{2} + i + \frac{3}{2}i} = -i$$

ومنه $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} = e^{-\frac{i\pi}{2}}$

-استنتاج طبيعة المثلث ABC

$$BA = BC$$

$$\left\{(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right.$$

ومنه المثلث ABC قائم في B ومتساوي الساقين.

2-إيجاد z_E

E نظيرة B بالنسبة لـ D

معناه D منتصف $[BE]$

$$z_D = \frac{z_B + z_E}{2}$$

وعليه $z_E = 2z_D - z_B$

$$= 2(i) + \frac{3}{2i}$$

$$z_E = \frac{7}{2}i$$

تحديد طبيعة الرباعي $ABCE$

بما أن E نظيرة B بالنسبة لـ D فإن D منتصف $[BE]$

ولدينا $\begin{cases} z_A = \frac{5}{2} + i \\ z_D = i \\ z_C = -\frac{5}{2} + i \end{cases}$

ومنه D منتصف $[CA]$

ومنه الرباعي $ABCE$ متوازي أضلاع لأن قطراه متناصفان

ولدينا مما سبق المثلث ABC قائم في B ومتساوي الساقين $BA = BC$ أي الرباعي $ABCE$ مربع

3-كتابة العبارة المركبة لـ S حيث

$$S(B) = B$$
$$S(A) = D$$
$$z_D - z_B = a(z_A - z_B)$$
$$a = \frac{z_D - z_B}{z_A - z_B} = \frac{1}{2}(1+i)$$

ومنه $z' - z_B = \frac{1}{2}(1+i)(z - z_B)$

$$z' = \frac{1}{2}(1+i)z - \frac{1}{2}(1+i)z_B + z_B$$
$$z' = \frac{1}{2}(1+i)z - \frac{3}{4} - \frac{3}{4}i$$

نسبته $k = \left|\frac{1}{2}(1+i)\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$

زاويته $\theta = \arg(\frac{1}{2}(1+i)) = \frac{\pi}{4}$

مركزه B

4-أ- البرهان بالتراجع أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ فإن

$$z_N - z_B = 5\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1} e^{\frac{i\pi}{4}(n+1)}$$

نسمي الخاصية

$$p(n) = z_N - z_B = 5\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1} e^{\frac{i\pi}{4}(n+1)}$$

نتحقق من صحة $p(n)$ من أجل $n = 0$

$$z_A - z_B = 5\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) e^{\frac{i\pi}{4}}$$

$$\frac{5}{2} + i + \frac{3}{2}i = 5\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) e^{\frac{i\pi}{4}}$$

$$\frac{5}{2} + \frac{5}{2}i = \frac{5\sqrt{2}}{2}[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin + \frac{\pi}{4})]$$

محققة $\frac{5}{2} + \frac{5}{2}i = \frac{5}{2} + \frac{5}{2}i$

نفرض أن $p(n)$ صحيحة ونبرهن أن $p(n+1)$ صحيحة

أي $z_{n+1} - z_B = 5\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1} e^{\frac{i\pi}{4}(n+1)}$

لدينا $A_{n+1} = S(A_n)$

أي $z_{n+1} - z_B = \left(\frac{1}{2}\right)(1+i)(z_n - z_B)$

$$= \frac{1}{2}(1+i)[5\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1} e^{\frac{i\pi}{4}(n+1)}]$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{i\pi}{4}} \times 5\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1} \times e^{\frac{i\pi}{4}(n+1)}$$

$$= 5\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+2} . e^{\frac{i\pi}{4}(n+2)}$$

وهو المطلوب ومنه حسب الإستدلال بالتراجع فإن

$$z_n - z_B = 5\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1} e^{\frac{i\pi}{4}(n+1)}$$

4-ب- تعيين قيم n حتى تنتمي النقط (A_n) إلى المستقيم (AB)

$A_n \in (AB)$ معناه النقط A_n, B, A في إستقامية

وعليه

$$\arg\left(\frac{z_n - z_B}{z_A - z_B}\right) = k\pi \quad k \in \mathbb{N}$$

$$\arg(z_N - z_B) - \arg(z_A - z_B) = k\pi$$

لدينا

$$\arg(z_n - z_B) = \frac{\pi}{4}(n+1)$$

$$\arg(z_A - z_B) = \arg\left(\frac{5}{2} + i + \frac{3}{2}i\right) = \frac{\pi}{4}$$

وعليه $\frac{\pi}{4}(n+1) - \frac{\pi}{4} = k\pi$

$$\frac{n+1}{4} - \frac{1}{4} = k$$
$$\frac{n}{4} = k$$

ومنه $n = 4k$ حيث $k \in \mathbb{N}$

60. رياضي 2017 الاستثنائية
الموضوع 02

I-نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة
$z^2 - 2(1-\sin\alpha)z + 2(1-\sin\alpha) = 0 \quad ...(E)$
حيث α عدد حقيقي
(نرمز بـ z_1 و z_2 إلى حلي المعادلة (E))
1-عين الحلين z_1 و z_2 بدلالة α
2-نضع $\alpha = \frac{\pi}{6}$ ، بين أن : $z_1^{2017} + z_2^{2017} = 1$
II- المستوي المركب منسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ نعتبر النقط A ، B ، C التي لاحقتها $z_A = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ، $z_B = \overline{z_A}$ و $z_C = 2z_A$
1-عين قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n$ عددا حقيقيا موجبا تماما.
2-ليكن S التحويل النقطي الذي يحول النقطة M ذات اللاحقة z الى النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث
$z' = (1+z_A)z + 2z_B$
-عين طبيعة التحويل S ثم حدد عناصره المميزة
3-(T) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث
$\arg(\overline{z} - z_B) = -\frac{\pi}{3} + 2K\pi$ و $k \in z$
تحقق أن النقطة C تنتمي الى (T) ، ثم حدد طبيعة (T) وأنشئها

نص الإجابة

I-1-حل المعادلة

لدينا:
$z^2 - 2(1-\sin\alpha)z + 2(1-\sin\alpha) = 0$

$\Delta = 4(1-\sin\alpha)^2 - 8(1-\sin\alpha)$
$= 4(1+\sin^2\alpha - 2\sin\alpha) - 8 + 8\sin\alpha$
$= 4 + 4\sin^2\alpha - 8\sin\alpha + 8\sin\alpha - 8$
$= -4 + 4\sin^2\alpha$
$= -4(1-\sin^2\alpha)$

نعلم أن $\sin^2\alpha = \cos^2\alpha$
ومنه $1-\sin^2\alpha = \cos\alpha$
وعليه $\Delta = 4i^2\cos^2\alpha$
وعليه $\Delta = (2i\cos\alpha)^2$
وعليه $z_1 = \frac{2-2\sin\alpha-2i\cos\alpha}{2}$

$z_1 = 1 - \sin\alpha - i\cos\alpha$

$z_2 = \frac{2-2\sin\alpha+2i\cos\alpha}{2}$

$z_2 = 1 - \sin\alpha + i\cos\alpha$

2-اثبات أن $z_1^{2017} + z_2^{2017} = 1$

لدينا
$z_1^{2017} + z_2^{2017} = \left(1 - \sin\frac{\pi}{6} + i\cos\frac{\pi}{6}\right)^{2017} + \left(\left(1 - \sin\frac{\pi}{6} - i\cos\frac{\pi}{6}\right)^{2017}\right.$
$= \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{2017} + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{2017}$
$= \left(e^{\frac{i\pi}{3}}\right)^{2017} + \left(e^{-\frac{\pi}{3}}\right)^{2017}$
$= \cos\frac{2017\pi}{3} + i\sin\frac{2017\pi}{3} + \cos-\frac{217\pi}{3} + i\sin-\frac{2017\pi}{3}$

نعلم أن $\cos(-\theta) = \cos(\theta)$
$\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$

وعليه
$z_1^{2017} + z_2^{2017} = \cos\frac{2017\pi}{3} + i\sin\frac{2017\pi}{3} + \cos\frac{2017\pi}{3} - i\sin\frac{2017\pi}{3}$
$= 2\cos\frac{2017\pi}{3}$

وعليه $z_1^{2017} + z_2^{2017} = 1$

1-تعيين قيم n التي يكون من أجلها $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n$ حقيقي موجب تماما

لدينا $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n = \left(\frac{e^{\frac{i\pi}{3}}}{e^{-\frac{i\pi}{3}}}\right)^n = e^{\frac{in2\pi}{3}}$

$\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n \in \mathbb{R}_+$ يعني $\arg\left(\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n\right) = 0 + 2k\pi$

ومنه $\frac{2n\pi}{3} = 0 + 2k\pi$
$2n = 6k$
$n = 3k$ حيث $k \in \mathbb{N}$

2-تعيين طبيعة التحويل S

$|1+z_A| = \left|\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right| = \sqrt{3} \neq 1$

ومنه S تشابه مباشر نسبته $\sqrt{3}$ وزاويته
$\theta = \arg(1+z_A) = \frac{\pi}{6}$
ومركزه $z_\omega = \frac{b}{1-a} = \frac{2z_B}{1-1+z_A} = 1 + i\sqrt{3}$
ومنه مركزه النقطة C

2-أ-اكتب z_A ، z_B و z_C على الشكل الأسي ثم استنتج أن النقط A ، B و C تنتمي الى دائرة (Ω) يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها

ب-عين قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون العدد المركب $\left(\frac{z_A}{z_C}\right)^n$ تخيليا صرفا

جـ-لتكن (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث: $z = z_C - k\left(\frac{z_A}{z_B}\right)$ مع k يمسح $\mathbb{R}$، تحقق أن النقطة C تنتمي الى (Γ) ، ثم عين وأنشئ (Γ)

3- r التواران الذي مركزه النقطة O وزاويته $\frac{2\pi}{3}$ ، h التحاكي الذي مركزه النقطة O ونسبته -2

عين طبيعة التحويل $h \circ r$ وعناصره المميزة، ثم استنتج صورة الدائرة (Ω) بالتحويل $h \circ r$

نص الإجابة

1-حل المعادلة

$$(z-2+2i)(z^2-2\sqrt{2}z+8)=0$$

$$\begin{cases} z-2+2i=0 \\ z^2-2\sqrt{2}z+8 \end{cases}$$ أو

أولا: $(z-2+2i)=0$

نجد: $z_0=2-2i$

ثانيا: $(z^2-2\sqrt{2}z+2)=0$

$$\Delta=-24=(2i\sqrt{6})^2$$

يوجد جذران:

$$\begin{cases} z_1=\dfrac{2\sqrt{3}-2i\sqrt{6}}{2}=\sqrt{2}-i\sqrt{6} \\ z_2=\dfrac{2\sqrt{3}+2i\sqrt{6}}{2}=\sqrt{2}+i\sqrt{6} \end{cases}$$

ومنه $S=\{2-2i,\sqrt{2}-i\sqrt{6},\sqrt{2}+i\sqrt{6}\}$

2-أ-كتابة z_C, z_B, z_A على الشكل الأسي

الشكل الأسي يكتب من الشكل:

$$z=re^{i\theta}$$

$$|z_A|=\sqrt{6+2}=2\sqrt{2}$$

$$\arg(z_A)=\theta_A$$

$$\begin{cases} \cos\theta_A=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\right)=\dfrac{1}{2} \\ \sin\theta_A=\dfrac{\sqrt{3}\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \theta_A=\frac{\pi}{3}+2k\pi$$

3-التحقق أن $C \in (\Gamma)$

$$\arg((\overline{z}-z_B)=-\frac{\pi}{3}+2k\pi$$

$$\arg\left(1-i\sqrt{3}-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=-\frac{\pi}{3}+2k\pi$$

$-\frac{\pi}{3}+2k\pi=-\frac{\pi}{3}+2k\pi$ محققة

ومنه $C \in (\Gamma)$

تعيين طبيعة (Γ)

ليكن

$$\arg((\overline{z}-z_B)=-\frac{\pi}{3}+2k\pi$$

$$\arg\left(\overline{(\overline{z}-z_B}\right)=+\frac{\pi}{3}+2k\pi$$

نعلم أن $\arg(\overline{z})=-\arg(z)$ ومنه

$$\arg((z-\overline{z_B})=\frac{\pi}{3}+2k\pi$$

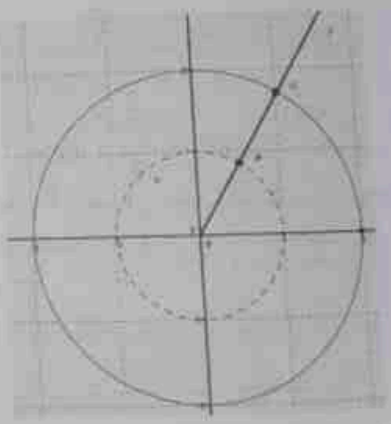
$$\overline{z_B}=z_A$$

وعليه $\arg(z-z_A)=\frac{\pi}{3}+2k\pi$

وعليه $(\vec{u},\overrightarrow{AM})=\frac{\pi}{3}+2k\pi$

ومنه مجموعة النقط (Γ) هي نصف المستقيم الذي مبدؤه A ماعدا النقطة A أي $]AC[$

إنشاء (Γ)



61. رياضي 2017 الموضوع 01

1-حل في مجموعة الاعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة ذات المجهول z :

$$(z-2+2i)(z^2-2\sqrt{2}z+8)=0$$

2- المستوي المركب منسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$، نعتبر النقط A ، B و C التي لاحقاتها

$z_A=\sqrt{2}+i\sqrt{6}$ ، $z_B=\overline{z_A}$ و $z_C=2(1-i)$

ومنه: $z_A = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{3}}$

$z_B = \overline{z_A} = 2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{3}}$ و $\overline{z_C} = 2\sqrt{2}$

$$\begin{cases} \cos\theta_C = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta_C = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta_C = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

ومنه: $z_C = 2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$

استنتاج أن النقط A, B, C تنتمي إلى نفس الدائرة بما أن:

$|z_A| = |z_B| = |z_C| = 2\sqrt{2}$

$z_A = z_A - z_0 = OA$

$OA = OB = OC = 2\sqrt{2} = r$

ومنه النقط تنتمي لدائرة مركزها O ونصف قطرها $r = 2\sqrt{2}$

2-ب-تعيين قيم n التي يكون من أجلها $\left(\frac{z_A}{z_C}\right)^n$ تخيلي صرف

$$\left(\frac{z_A}{z_C}\right)^n = \left(\frac{2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{3}}}{2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}\right)^n = \left(e^{i\frac{\pi}{3}}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^n$$

$$e^{\left(\frac{i(4\pi+3\pi)}{12}\right)^n} = e^{\frac{in7\pi}{12}}$$

$$= \cos\left(7\frac{n\pi}{12}\right) + i\sin\left(7\frac{n\pi}{12}\right)$$

يكون $\left(\frac{z_A}{z_C}\right)^n$ تخيلي صرف لما إذ كان:

$\cos\left(7\frac{n\pi}{12}\right) + i\sin\left(7\frac{n\pi}{12}\right)$

$\cos\left(7\frac{n\pi}{12}\right) = 0$

و $\sin\left(7\frac{n\pi}{12}\right) \neq 0$

$\frac{n7\pi}{12} = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad k\in\mathbb{N}$

$\frac{7n}{12} = \frac{1}{2} + k$

$12\left[\frac{7n}{12} = \frac{1}{2} + k\right]$

$7n = 12k + 6$

أي $7n \equiv 6[12]$

$7n \equiv 30[12]$

$35n \equiv 30[12]$

$35n \equiv 6[12]$

نعلم أن: $36n \equiv 0[12]$

يكافئ: $35n + n \equiv 0[12]$

ينتج: $6 + n \equiv 0[12]$

$-6 + 6 + n \equiv -6[12]$

$n \equiv 6[12]$

ومنه: $n = 12k' + 6 \quad k'\in\mathbb{N}$

2-ج-التحقق أن $C \in (\Gamma)$

$z = z_C - k\left(\frac{z_A}{z_B}\right)$

أي $z - z_C = -k\left(\frac{z_A}{z_B}\right)$

$-k\left(\frac{z_A}{z_B}\right) = 0$

$C \in (\Gamma)$ إذن $k \in [0, +\infty[$ وبما أن $k = 0$

تعيين طبيعة (Γ)

من أجل $z = z_C$

$z - z_C = -k\left(\frac{z_A}{z_B}\right)$

$z - z_C = -k\left(\frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{e^{-i\frac{\pi}{3}}}\right)$

$z - z_C = -k\,e^{\frac{i2\pi}{3}} \quad k \geq 0$

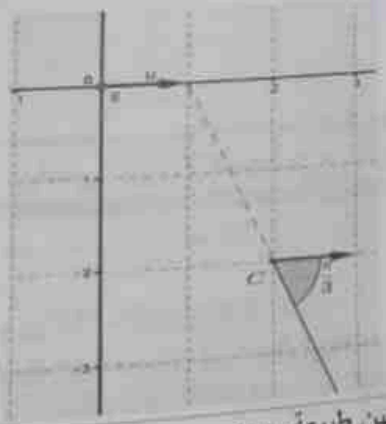
$z - z_C = ke^{\frac{5\pi}{4}}$

$(z - z_C) = \frac{5\pi}{3} + 2k'\pi$

$\arg(\vec{u}, \overrightarrow{CM}) = \frac{5\pi}{3} + 2k'\pi$

ومنه مجموعة النقط هي نصف المستقيم الذي مبتدؤه النقطة C ويصنع زاوية قدرها $\frac{5\pi}{3}$ مع الشعاع $\vec{u}$

إنشاء (Γ)



3-تعيين طبيعة hor

طبيعة التحويل hor تشابه مباشر (لأنه تركيب دوران مع تجاكي) مركزه O ونسبته $k = 2$ وزاويته

$$\theta = \frac{2\pi}{3} + \pi = \frac{5\pi}{3}$$

أو $\theta = -\frac{\pi}{3}$ أيضا صحيحة

صورة الدائرة (Ω) بالتحويل hor هي دائرة (Ω') مركزها O (لأن $S(O) = O$) ونصف قطرها $r' = 2r = 4\sqrt{2}$

62. رياضي 2017 الموضوع 02

I-اكتب العدد $\left(\frac{5}{2}+i\right)^2$ على الشكل الجبري ثم استنتج الجذرين التربيعيين للعدد المركب : $\frac{21}{4}+5i$

II- المستوي المركب منسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ ،نعتبر النقط A ، B ، C و I ذات اللواحق :

$z_A = \frac{3}{2}+\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ ، $z_B = -\frac{3}{2}i$ ، $z_C = -\overline{z_A}$ و $z_I = i$

1-اكتب z_A و z_C على الشكل الجبري

2-اكتب العدد المكرب $\frac{z_C-z_B}{z_A-z_B}$ على الشكل الأسي

مستنتجا طبيعة المثلث ABC

3-ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه B ويحول A الى I

3-أ-اكتب العبارة المركبة للتشابه المباشر S ثم عين نسبته وزاويته

3-ب-نعرف من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n \geq 2$ التحويل النقطي T_n كما يلي

$T_n = \underbrace{S \circ S \circ \ldots \circ S}_{n \text{ مرة}}$

عين قيم N حتى يكون T_n تحاكيا، عين عندئذ عناصره المميزة

نص الإجابة

I-كتابة العدد $\left(\frac{5}{2}+i\right)^2$ على الشكل الجبري

$$\left(\frac{5}{2}+i\right)^2 = \frac{25}{4} - 1 + 2\times\frac{5}{2}i$$

ومنه: $\left(\frac{5}{2}+i\right)^2 = \frac{21}{4}+5i$

استنتاج الجذرين التربيعين للعدد $\left(\frac{5}{2}+i\right)^2$

لدينا: $\left(\frac{5}{2}+i\right)^2 = \frac{21}{4}+5i$

يكافئ: $\frac{21}{4}+5i = \left(\frac{5}{2}+i\right)^2$

الجذرين التربيعين للعدد $\frac{21}{4}+5i$ هما: $\begin{cases} -\frac{5}{2}-i \\ \frac{5}{2}+i \end{cases}$

II- $z_A = \frac{3}{2}+\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ $\quad z_B = -\frac{3}{2}i$

$z_C = -\overline{z_A}$ $\quad z_I = i$

1-كتابة z_A و z_C على الشكل الجبري

$$z_A = \frac{3}{2}+\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$z_A = +\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{i\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$= \frac{3}{2}+1+i$$

وعليه $z_A = \frac{5}{2}+i$

$$z_C = -\overline{z_A} = -\left(\frac{5}{2}-i\right)$$

ومنه $z_C = -\frac{5}{2}+i$

2-كتابة العدد $\frac{z_C-z_B}{z_A-z_B}$ على الشكل الأسي

$$\frac{z_C-z_B}{z_A-z_B} = \frac{-\frac{5}{2}+i+\frac{3}{2}i}{\frac{5}{2}+i+\frac{3}{2}i} = \frac{-5+5i}{5+5i}$$

$$= \frac{-1+i}{1+i}$$

$$= \frac{(-1+i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{-1+i+i+1}{2} = \frac{2i}{2}$$

$$= i$$

$$\left|\frac{z_C-z_B}{z_A-z_B}\right| = |i| = 1$$

ومنه $\arg\left(\frac{z_C-z_B}{z_A-z_B}\right) = \arg(i) = e^{i\frac{\pi}{2}}$

-استنتاج طبيعة المثلث ABC

$$\begin{cases} |z_C-z_B| = |z_A-z_B| \\ \arg\left(\frac{z_C-z_B}{z_A-z_B}\right) = \frac{\pi}{2}+2k\pi \end{cases}$$

أي $\begin{cases} BC = BA \\ (\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}) = \frac{\pi}{2}+2k\pi \end{cases}$

ومنه المثلث ABC قائم في B ومتساوي الساقين.

3-أ-العبارة المركبة للتشابه S

$$z_I - z_B = a(z_A - z_B)$$

ومنه $a = \frac{z_I-z_B}{z_A-z_B}$

$$a=\frac{1+\frac{3}{2}i}{\frac{1}{2}+1+\frac{1}{2}i}=\frac{5i}{5+5i}=\frac{i}{1+i}$$

$$=\frac{i}{1+i}\left(\frac{1-i}{1-i}\right)$$

ومنه: $a=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$

ولدينا $z_B=\frac{b}{1-a}$

$$b=z_B(1-a)$$

$$=-\frac{3}{2}i\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)$$

ومنه: $b=-\frac{3}{4}-\frac{3}{4}i$

ومنه $z'=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)z-\frac{3}{4}-\frac{3}{4}i$

نسبته $k=|a|=\left|\frac{1+i}{2}\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}$

وزاويته $\theta=\arg(a)=\frac{\pi}{4}+2k\pi$

3ـب- من أجل كل عدد طبيعي $n\geq 2$

التحويل $T_n=SaSoS\ldots.aS$

تعيين قيم n حتى يكون T_n تحاكي

T_n هو تشابه مباشر مركزه B

ونسبته $k'=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$ وزاويته $\theta'=\frac{n\pi}{4}$

$$z'-z_B=a^n(z'-z_B)$$

$$z'-z_B=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)}\right)(z-z_B)$$

يكون T_n تحاكي إذا كان $a^n\in R^*-\{1\}$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{in\pi}{4}}\right)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n\left[\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4}\right]$$

يكون $a^n\in\mathbb{R}^*-\{1\}$

$$\sin\frac{n\pi}{4}=0$$

أي:

$$\frac{n\pi}{4}=k\pi$$

ومنه $k\in\mathbb{N}^*$ $n=4k$

ـعناصره المميزة

مركزه B

نسبته $k\in\mathbb{R}^*-\{1\}$

$$a^n=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n\left(\cos\frac{n\pi}{4}\right)$$

$$=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{4k}\left(\cos\frac{4k\pi}{4}\right)$$

$$=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{4k}(\cos k\pi)$$

ونميز حالتين

لما k زوجي $k'=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{4k}$

لما k فردي $k'=-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{4k}$

63. رياضي 2016 الموضوع 01

1ـأحل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة:

$$z^2-4z+5=0$$

1ـب-استنتج حلول المعادلة ذات المجهول المركب z الآتية:

$$\left(z+1+i(1-\sqrt{3})\right)^2-4z+1-4i(1-\sqrt{3})=0$$

2- θ عدد حقيقي حيث: $0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$ و z_0 عدد مركب طويلته 1 و θ عمدة له

أـاكتب العدد المركب $1+i\sqrt{3}$ على الشكل الأسي

بـعين θ علما أن: $\frac{z_0(1+i\sqrt{3})}{\bar{z}_0}=2e^{i\frac{\pi}{3}}$ ، ($\bar{z}_0$ هو مرافق العدد المركب z_0)

جـ-n عدد طبيعي، من أجل قيمة θ المحصل عليها، اكتب العدد المركب $\left[\frac{z_0(1+i\sqrt{3})}{2}\right]^n$ على الشكل المثلثي

دـعين قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون $\left[\frac{z_0(1+i\sqrt{3})}{2}\right]^n$ عددا حقيقيا موجبا تماما

3- المستوي المركب منسوب الى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ نعتبر النقط A و B و C التي لاحقاتها على الترتيب: z_A ، z_B و z_C حيث:

$$z_A=2-i \text{ ، } z_B=2+i$$

$$z_C=1+i\sqrt{3}$$

أـعين Z_D لاحقة النقطة D مرجح الجملة المثقلة $\{(A,1);(B,-1);(C,1)\}$

بـاستنتج أن الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع

جـ-E النقطة من المستوي المركب ذات اللاحقة z_E حيث:

$$\begin{cases}\arg(z_E-z_A)-\arg(z_E-z)=\frac{\pi}{2}\\ \left|\frac{z_E-z_A}{z_E-z_B}\right|=2\end{cases}$$

بين أن: $z_E=\frac{14}{5}+\frac{3}{5}i$

بين أن النقطة A هي صورة النقطة B بتشابه مباشر يطلب تعيين عناصره المميزة

M-4 نقطة من المستوي المركب لاحقتها z ، النقطة I منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$ لاحقة النقطة I هي z_I

ب- α عدد حقيقي، نسمي (Γ) مجموعة النقط M من المستوي المركب التي تحقق: $z - z_I = e^{i\alpha}$

تحقق أن النقطة E تنتمي الى المجموعة (Γ)

عين طبيعة المجموعة (Γ) و عناصرها المميزة عندما يتغير α في $\mathbb{R}$

نص الإجابة

1-أحل المعادلة

$$z^2 - 4z + 5 = 0$$
$$\Delta = -4 = (2i)^2$$

يوجد حلان:

$$\begin{cases} z_1 = \dfrac{4-2i}{2} = 2-i \\ z_2 = \dfrac{4+2i}{2} = 2+i \end{cases}$$

ومنه: $S = \{2-i, 2+i\}$

1-ب-استنتاج حلول المعادلة

$$\left(z^2 + 1 + i(1-\sqrt{3})^2\right) - 4z^2 + 1 - 4i(1-\sqrt{3}) = 0$$
$$\left(z+1+i(1-\sqrt{3})\right)^2 - 4z - 5 + 5 + 1 - 4i(1+\sqrt{3}) = 0$$
$$\left(z+1+i(1-\sqrt{3})\right)^2 - 4z^2 - 1 + -4i(1+\sqrt{3}) + 5 = 0$$
$$\left(z+1+i(1-\sqrt{3})\right)^2 - 4\left(z+1+i(1+\sqrt{3})\right) + 5 = 0$$

المعادلة حلولها تكافئ حلول المعادلة:

$$z^2 - 4z + 5 = 0$$

بالمطابقة: $z = z + 1 + i(1-\sqrt{3})$

نعوض بأحد الحلول السابقة للمعادلة

أولا نعوض بـ $z_1 = 2 - i$

$$2 - i = z + 1 + i(1-\sqrt{3})$$
$$z_1 = 1 - i - i(1-\sqrt{3})$$
$$z_1 = 1 - i(1+1-\sqrt{3})$$
$$z_1 = 1 - i(2-\sqrt{3})$$

ثانيا: نعوض بـ $Z_2 = 2 + i$

$$2 + i = z + 1 + i(1-\sqrt{3})$$
$$z_2 = 1 + i - i(1-\sqrt{3})$$
$$z_2 = 1 + i(1-1-\sqrt{3})$$
$$z_2 = 1 + i\sqrt{3}$$

وعليه $s = \{1 - i(2-\sqrt{3}), 1 + i\sqrt{3}\}$

2-أكتابة العدد $1 + i\sqrt{3}$ على الشكل الأسي

$$|1 + i\sqrt{3}| = \sqrt{1+3} = 2$$

$$\begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{1}{2} \\ \sin\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

ومنه:

$$\arg(1 + i\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

أي $1 + i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$

2-بتعيين θ حيث

نعلم أن $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$

تعيين θ علما أن:

$$\frac{z_0(1+i\sqrt{3})}{\overline{z_0}} = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$$
$$\frac{e^{i\theta} \times 2e^{i\frac{\pi}{3}}}{e^{-i\theta}} = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$$
$$e^{i(\theta+\theta)} \times 2e^{i\frac{\pi}{3}} = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$$
$$e^{2i\theta} = \frac{2e^{i\frac{\pi}{2}}}{2e^{i\frac{\pi}{3}}} = e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)}$$
$$e^{2i\theta} = e^{i\frac{\pi}{6}}$$

يكافئ: $2i\theta = i\frac{\pi}{6}$

أي $\theta = \frac{\pi}{12}$

ومنه: $0 \le \frac{\pi}{12} \le \frac{\pi}{2}$

2-جـكتابة $\left[\frac{z_0(1+i\sqrt{3})}{2}\right]^n$ على الشكل المثلثي

$$\left[\frac{z_0(1+i\sqrt{3})}{2}\right]^n = \left[\frac{2e^{i\frac{\pi}{3}} \times e^{i\frac{\pi}{12}}}{2}\right]^n$$
$$= e^{in\frac{5\pi}{12}}$$

ومنه $\left[\frac{z_0(1+i\sqrt{3})}{2}\right]^n = \cos\left(\frac{5n\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{5n\pi}{12}\right)$

2-دـقيم n حتى يكون عدد حقيقي موجب أي

$$\left(\frac{z_0(1+\sqrt{3})}{2}\right) \in \mathbb{R}_+^*$$

$$\left(\frac{z_0(1+\sqrt{3})}{2}\right)^n = \cos\left(\frac{5n\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{5n\pi}{12}\right)$$

يجب أن

$$\cos\left(\frac{5n\pi}{12}\right) > 0$$

$$\sin\left(\frac{5n\pi}{12}\right) = 0$$

$$\frac{5n}{12} = 2k$$

$5n = 24k \quad n\in\mathbb{N}$

مع k من مضاعفات 5

$k = 5p \quad p\in\mathbb{N}$

$$n = \frac{24}{5}(5)p = 24p$$

3-أ-تعيين z_D لاحقة D مرجح الجملة $((A,1);(B,-1);(C,1))$

$$z_D = \frac{z_A - z_B + z_C}{1} = 1 - 2i + i\sqrt{3}$$

أي $z_D = 1 + i(\sqrt{3} - 2)$

3-ب- استنتاج أن $ABCD$ متوازي أضلاع

يكفي أن نبرهن $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

لدينا

$$z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = 2 + i - 2 + i = 2i$$

$$z_{\overrightarrow{DC}} = z_C - z_D = 1 + i\sqrt{3} - \left(1 + i(-2 + \sqrt{3})\right) = 2i$$

وعليه $z_{\overrightarrow{AB}} = z_{\overrightarrow{DC}}$

ومنه: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

وعليه فإن الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع

3-جـ-إثبات أن $z_E = \frac{14}{5} + \frac{3}{5}i$

لدينا:

$$\Rightarrow \begin{cases} \arg\left(\frac{z_E - z_A}{z_E - z_B}\right) = \frac{\pi}{2} \\ \left|\frac{z_E - z_A}{z_E - z_B}\right| = 2 \end{cases}$$

$\frac{z_E - z_A}{z_E - z_B} = 2i$

وعليه

$$z_E - z_A = 2i(z_E - z_B)$$

$$z_E(1 - 2i) = -2iz_B + z_A$$

$$z_E = \frac{-2iz_B + z_A}{1 - 2i} = \frac{(-2i(2+i) + 2 + i)(1 + 2i)}{(1 - 2i)(1 + 2i)}$$

ومنه:

$$z_E = \frac{4 + 8i - 5i + 10}{5} = \frac{14 + 3i}{5}$$

$$z_E = \frac{14}{5} + \frac{3}{5}i$$

عناصر التشابه.

لدينا من الجواب السابق: $\frac{z_A - z_E}{z_B - z_E} = 2i$

$$\frac{z_A - z_E}{z_B - z_E} = 2\,e^{i\left(\frac{\pi}{2}\right)}$$

$$z_A - z_E = 2e^{i\frac{\pi}{2}}(z_B - z_E)$$

$2e^{\frac{i\pi}{2}} \in \mathbb{C}$

$$\left|2e^{\frac{i\pi}{2}}\right| = 2 \neq 1$$

ومنه يوجد تشابه مباشر يحول A الى B عناصره المميزة هي

نسبته: $k = 2$

وزاويته: $\theta = \frac{\pi}{2}$

ومركزه $z_E = \frac{14}{5} + \frac{3}{5}i$

4-أ-تعيين z_I

$$z_I = \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{2 - i + 2 + i}{2} = \frac{4}{2}$$

$z_I = 2$

4-ب-التحقق أن E تنتمي لـ(Γ)

$$|z_E - z_I| = \left|\frac{14}{5} + \frac{3}{5}i - 2\right| = \sqrt{\frac{25}{25}} = 1$$

أي $|z_E - z_I| = |e^{i\alpha}|$

ومنه $E \in (\Gamma)$

تعيين طبيعة (Γ)

لدينا: $z - z_I = e^{i\alpha}$

$IM = 1$

$\{(\vec{u}, \overrightarrow{IM}) = \alpha + 2k\pi$

ومنه (Γ) دائرة مركزها I ونصف قطرها $r = 1$

64. رياضي 2016 الموضوع 02

1-حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة :

$$z^2 - 2z + 2 = 0$$

2- العددين المركبين z_1 و z_2 حيث:

$$\begin{cases} 2z_1 - 3z_2 = 5i\sqrt{2} \\ z_1 + 3z_2 = -2i\sqrt{2} \end{cases}$$

II- المستوي المركب منسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$، النقط A ، B ، C ، D و H لاحقاتها على الترتيب:

$z_A = i\sqrt{2}$ ، $z_B = -i\sqrt{2}$ ، $z_C = 1+i$ ، $z_D = 1-i$ و $z_H = \frac{z_C - z_B}{z_E - z_B}$ حيث E النقطة التي تحقق: $\overrightarrow{DE} = 2\overrightarrow{DO}$

1-اكتب z_H على الشكل الأسي واستنتج نوع المثلث BEC

2-S تحويل نقطي في المستوي يرفق بكل نقطة M لاحقها z النقطة M' لاحقتها z' حيث:

$$z' = z_A z + z_B$$

أ-ماهي طبيعة التحويل S ؟ وماهي عناصره المميزة؟

ب-احسب مساحة الدائرة (γ) التي مركزها C ونصف قطرها CD

ج-عين (γ') صورة (γ) بالتحويل S واستنتج مساحتها

3-عين (δ) مجموعة النقط M من المستوي $(M$ تختلف عن B و $C)$ ذات الاحقات Z التي يكون من اجلها العدد $\frac{z_B - z}{z_C - z}$ حقيقيا سالبا تماما

نص الإجابة

I)1-حل المعادلة

$$z^2 - 2z + 2 = 0$$
$$\Delta = -4 = (2i)^2$$

وجد حلان:

$$\begin{cases} z' = \frac{2-2i}{2} = 1-i \\ z'' = \frac{2+2i}{2} = 1+i \end{cases}$$
$$S = \{1-i, 1+i\}$$

ب-ايجاد العددين المركبين z_1 و z_2

$$\begin{cases} 2z_1 - 3z_2 = 5i\sqrt{2} \\ z_1 + 3z_2 = -2i\sqrt{2} \end{cases}$$

بالجمع نجد

$$3z_1 = 3i\sqrt{2}$$
$$z_1 = i\sqrt{2}$$

بالتعويض نجد $3z_2 = -2i\sqrt{2} - i\sqrt{2}$

$$z_2 = -i\sqrt{2}$$

II-1-كتابة z_H على الشكل الأسي

نحسب أولا z_E

لدينا $\overrightarrow{DE} = 2\overrightarrow{DO}$

$$z_E - z_D = 2(z_O - z_D)$$
$$z_E = -z_D$$

ومنه $z_E = -1+i$

وعليه $z_H = \frac{z_C - z_E}{z_E - z_B}$

$$z_H = \frac{1-i+i\sqrt{2}}{-1+i+i\sqrt{2}}$$
$$= \frac{(1+i+i\sqrt{3})\left(-1-i(1+\sqrt{2})\right)}{\left[-1+i(1+\sqrt{2})\right]\left(-1-i(1+\sqrt{2})\right)}$$

وعليه $z_H = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$

$$|z_H| = \sqrt{\frac{2}{4} + \frac{2}{4}} = \frac{\sqrt{4}}{4} = 1$$
$$|z_H| = 1$$

$$\begin{cases} \cos\theta_H = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta_H = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

ومنه: $\Rightarrow \theta_H = -\frac{\pi}{4}$

أي $z_H = e^{-i\frac{\pi}{4}}$

لدينا $\left|\frac{z_C - z_B}{z_E - z_B}\right| = \left|e^{-\frac{\pi}{4}}\right|$

$$\frac{BC}{BE} = 1$$

ومنه: $BC = BE$

ومنه المثلث BCE متساوي الساقين

2-أ-طبيعة التحويل S

$$z' = i\sqrt{2}\,z - i\sqrt{2}$$
$$i\sqrt{2} \in \mathbb{C}$$
$$|i\sqrt{2}| = \sqrt{2} \neq 1$$

ومنه S تشابه مباشر نسبته $k = \sqrt{2}$ وزاويته

$$\theta = \arg(i\sqrt{2}) = \frac{\pi}{2}$$

ومركزه $z_\omega = \frac{b}{1-a} = \frac{-i\sqrt{2}}{1-i\sqrt{2}} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$

2-ب-حساب مساحة (γ)

نصف قطرها CD

$$CD = |z_D - z_C| = |1 - i - 1 - i| = |-2i| = 2$$

ومنه $S = 4\pi(u.a)$

2-جـ

(γ') هي دائرة ذات المركز C' صورة C بالتشابه S

أي

$$Z_{C'} = i\sqrt{2}Z_C - i\sqrt{2} = (i\sqrt{2})(1+i) - i\sqrt{2}$$

$$Z_{C'} = -\sqrt{2}$$

أي $C'(-\sqrt{2}, 0)$ ونصف قطرها $r' = 2\sqrt{2}$

استنتاج مساحتها

$$S_{\gamma'} = \pi . r'^2 = \pi(2\sqrt{2})^2$$

$$S_{\gamma'} = 8\pi \ (u.a)$$

3-مجموعة النقط

$$\frac{z_B - z}{z_C - z} \in \mathbb{R}.$$

أي $\arg\left(\frac{z_B - z}{z_C - z}\right) = \pi + 2k\pi$

أي $(\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MB}) = \pi + 2k\pi$

وعليه مجموعة النقط (δ) هي القطعة المستقيمة $[CB]$ باستثناء C و B

أي القطعة المستقيمة المفتوحة $]BC[$

65. رياضي 2015 الموضوع 01

ينسب المستوي الى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ نعتبر النقط A ، B ، C ، H و I لاحقاتها على الترتيب : $z_A = i$ ،

$z_B = -2 + i$ ،

$z_C = -3$ ،

$z_H = -3 + 4i$ و $z_I = -1 - i$

1-أ-مثل النقط A ، B ، C ، H و I في المعلم $(O;\vec{u};\vec{v})$

1-ب-عين النسبة وزاوية للتشابه المباشر الذي مركزه B ويحول النقطة A الى النقطة C

2-عين z_G لاحقة النقطة G مركز ثقل المثلث ABC

3-أ-اكتب على الشكل الجبري العدد المركب $\frac{z_B - z_C}{z_H - z_A}$

3-ب-استنتج أن المستقيمين (AH) و (BC) متعامدان

3-جـ-بين أن H هي نقطة تلاقي ارتفاعات المثلث ABC

4-بين أن النقط G ، H و I في استقامية

5-(T) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث :

$\theta \in \mathbb{R}$ مع $z + 1 + i = \sqrt{5}e^{i\theta}$

5-أ-بين أن النقطة A تنتمي الى المجموعة (Γ)

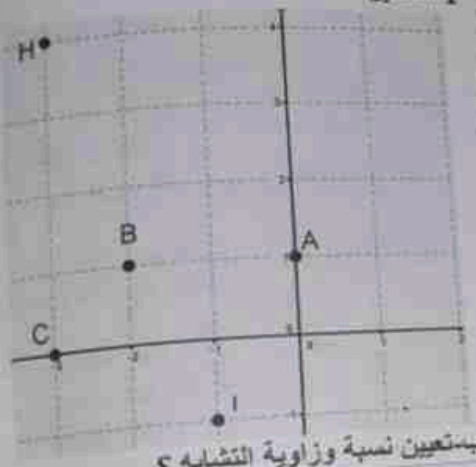
5-ب-عين طبيعة المجموعة (Γ) مع تحديد عناصرها المميزة

5-جـ-أنشئ المجموعة (Γ)

5-د-تحقق أن النقطتين B و C تنتميان الى المجموعة (Γ)

نص الإجابة

1-أ-تمثيل النقط



ب-تعيين نسبة وزاوية التشابه S

لدينا $z_C - z_B = a(z_A - z_B)$

ومنه

$$a = \frac{z_C - z_B}{z_A - z_B} = \frac{-3+2-i}{i+2-i} = \frac{1}{2}(-1-i) =$$

$$k = |a| = \frac{1}{2}\sqrt{(1+1)} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\theta = \arg(a)\begin{cases}\sin\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \cos\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$$

ومنه: $a = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{i5\pi}{4}}$

ومنه نسبة التشابه $k = \frac{\sqrt{2}}{2}$ وزاويته $\theta = \frac{5\pi}{4}$

2-ω مركز ثقل المثلث ABC

بما أن G مركز ثقل المثلث ABC فإنها مرجح الجملة $\{(A,1),(B,1),(C,1)\}$

$$z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3} = \frac{i - 2 + i - 3}{3}$$

ومنه

$$z_G = -\frac{5}{3} + \frac{2}{3}i$$

3-استنتاج العدد على الشكل الأسي

$$\frac{z_B - z_C}{z_M - z_A} = \frac{-2 + i + 3}{-3 + 4i - i}$$
$$= \frac{(1+i)}{(-3+3i)}\left(\frac{-3-3i}{-3-3i}\right)$$
$$= -\frac{1}{3}i$$

3-ب-استنتاج أن (AH) و (BC) متعامدان

بما أن: $\frac{z_B - z_C}{z_M - z_A} = -\frac{1}{3}i$

أي: $-\frac{1}{3}i$ - نحولي صرف

ومنه $\arg\left(\frac{z_B - z_C}{z_M - z_A}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

ومنه $\left(\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{CB}\right) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$

وعليه $\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{CB}$ أي (AH) و (CB) متعامدان.

3-جـ-تبيان أن H نقطة تلاقي ارتفاعات المثلث ABC

لدينا $\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{CB}$.....(1)

ولدينا

$$\frac{z_A - z_C}{z_h - z_B} = \frac{i+3}{-3+4i+2-i} = \frac{(3+i)(-1-3i)}{(-1+3i)(-1-3i)} = -i$$

ومنه $\left(\overrightarrow{BH}, \overrightarrow{CA}\right) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$

أي $(BH) \perp (CA)$ .....(2)

بما أن ارتفاعات المثلث تتلاقى في نقطة H فإن النقطة H هي نقطة تلاقي إرتفاعات المثلث ABC

4-تبيان أن I, H, G في استقامية

حتى تكون النقط G و H و I في استقامية

أي $\frac{z_H - z_I}{z_h - z_G} = \lambda \in \mathbb{R}$

لدينا $\frac{z_H - z_I}{z_h - z_G} = \frac{-3+4i+1+i}{-3+4i+\frac{5}{3}-\frac{2}{3}i}$

$$\frac{-3+4i+1+i}{-3+4i+\frac{5}{3}-\frac{2}{3}i}\left(\frac{(-6+15i)(-4-10i)}{(-4+10i)(-4-10i)}\right)$$
$$= \frac{174}{116} \in \mathbb{R}$$

وعليه $z_H - z_I = \frac{174}{116}(z_H - z_G)$

$$\overrightarrow{IH} = \frac{174}{116}\overrightarrow{GH}$$

ومنه I, H, G على استقامية.

5-تبيان أن A تنتمي الى (Γ)

لدينا $|z_A + 1 + i| = |2i + 1| = \sqrt{5}$

ومنه $|z_A - 1 + i| = |\sqrt{5}e^{i\theta}|$ أي $A \in (\Gamma)$

5-ب-تعيين طبيعة المجموعة (Γ)

$$z + 1 + i = \sqrt{5}e^{i\theta}$$

$$\begin{cases} |z+1+i| = \sqrt{5} \\ \arg(z+1+i) = \theta \end{cases}$$

أي

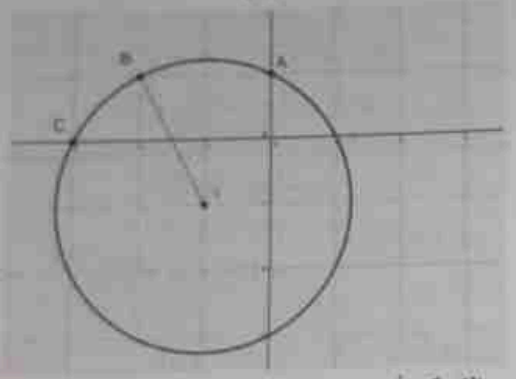
$$\begin{cases} |z - z_I| = \sqrt{5} \\ \arg(-z_I) = \theta \end{cases}$$

وعليه

$$\begin{cases} IM = \sqrt{5} \\ (\vec{u}, \overrightarrow{IM}) = \theta + 2k\pi \end{cases}$$

ومنه (Γ) دائرة مركزها I ونصف قطرها $\sqrt{5}$ وتشمل النقطة A

5-ج-انشاء المجموعة (Γ)



د-التحقق أن B و C تنتميان إلى المجموعة (Γ)

$$|z_B - 1 + i| = |-1 + 2i| = \sqrt{5}$$

ومنه $B \in (\Gamma)$

$$|z_C + 1 + i| = |-2 + i| = \sqrt{5}$$

ومنه $C \in (\Gamma)$

66. رياضي 2015 الموضوع 02

1-حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول Z التالية $z^2 - 2(1-\sqrt{3})z + 8 = 0$

(لاحظ أن: $(1+\sqrt{3})^2 = 4 + 2\sqrt{3}$)

المستوي منسوب الى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$

A و B نقطتان من المستوي ن لاحقتاهما على الترتيب:

$z_B = \overline{z_A}$ $z_A = (1-\sqrt{3}) + i(1+\sqrt{3})$

الأعداد المركبة من الأمتحان إلى الزاد

2-تبيين أن : $\frac{z_B}{z_A} = e^{-\frac{7\pi}{6}i}$

2-حساب عمدة العدد المركب z_B

2-حساب القيمة المضبوطة لكل من العددين $\sin\frac{7\pi}{12}$ و $\cos\frac{7\pi}{12}$

3-أحل ، في مجموعة الأعداد الصحيحة ، المعادلة ذات المجهول $(x;y)$ التالية : $7x-2y=1$

3-حدد من بين الثنائيات $(x;y)$ من الأعداد الصحيحة الحلا للمعادلة $7x-24y=12$ فإن x يكون مضاعفا للعدد 12

3-حساب نتائج كل الثنائيات $(x;y)$ من الأعداد الصحيحة حلولا للمعادلة $7x-24y=12$

3-عين مجموعة قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها العدد $(z_A)^n$ عددا حقيقيا سالبا تماما

نص الإجابة

1-حل المعادلة

$$z^2-2(1-\sqrt{3})z+8=0$$
$$\Delta = 4(1-\sqrt{3})^2-32$$
$$= 4(1+3-2\sqrt{3})-32$$
$$= -16-8\sqrt{3}$$
$$= -4(4+2\sqrt{3})$$

ومنه $\Delta = [2i(1+\sqrt{3})]^2$

$$\sqrt{\Delta} = 2i(1+\sqrt{3})$$

ومنه $z_1 = (1-\sqrt{3})-i(1+\sqrt{3})$

$$z_2 = (1-\sqrt{3})+i(1+\sqrt{3})$$
$$S = \{(1-\sqrt{3})-i(1+\sqrt{3}),(1-\sqrt{3})+i(1+\sqrt{3})\}$$

2-تبيان أن $\frac{z_B}{z_A} = e^{-\frac{7\pi}{6}i}$

لدينا $\frac{z_B}{z_A} = \frac{(1-\sqrt{3})-i(1+\sqrt{3})}{(1-\sqrt{3})+i(1+\sqrt{3})}$

$$= \frac{[(1-\sqrt{3})-i(1+\sqrt{3})][(1-\sqrt{3})-i(1+\sqrt{3})]}{[(1-\sqrt{3})+i(1+\sqrt{3})][(1-\sqrt{3})-i(1+\sqrt{3})]}$$
$$= \frac{[(1-\sqrt{3})-i(1+\sqrt{3})]^2}{(1-\sqrt{3})^2+(1+\sqrt{3})^2}$$

وعليه $\frac{z_B}{z_A} = -\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$

لدينا: $\left|\frac{z_B}{z_A}\right| = \left|-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right| = \sqrt{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}} = 1$

$$\arg\left(\frac{z_B}{z_A}\right) = \theta \begin{cases} \cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{5\pi}{6} = -\frac{7\pi}{6}$$

ومنه $\frac{z_B}{z_A} = e^{\frac{5\pi}{6}i} = e^{-\frac{7\pi}{6}i}$

2-باستنتاج $\arg(z_A)$

لدينا:

$$\arg(z_B) = \arg(\overline{z_A}) = -\arg(z_A)$$

وكذلك:

$$= -\arg\left(\frac{z_B}{z_A}\right) = \arg(z_B)-\arg(z_A)$$
$$= -\arg(z_A)-\arg(z_A) = -2\arg(z_A)$$

وعليه $-2\arg(z_A) = -\frac{7\pi}{6}$

أي $\arg(z_A) = \frac{7\pi}{12}$

2-استنتاج القيمة المضبوطة لـ $\cos\frac{7\pi}{12}$ و $\sin\frac{7\pi}{12}$

لدينا $z_A = |z_A|(\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12})$

حيث

$$|z_A| = \sqrt{(1-\sqrt{3})^2+(1+\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{2}$$

أي $z_A = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12}\right)$

بالمطابقة مع الشكل الجبري

نجد $\begin{cases} 2\sqrt{2}.\cos\frac{7\pi}{12} = 1-\sqrt{3} \\ 2\sqrt{2}.\sin(\frac{7\pi}{12}) = 1+\sqrt{3} \end{cases}$

وعليه $\begin{cases} \cos\frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} \\ \sin\frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} \end{cases}$

3-أحل المعادلة

$$7x-2y=1$$

لدينا $7(1)-2(3)=1$

وعليه $(x_0,y_0) = |(1,3)|$ حل خاص للمعادلة

$$\begin{cases} 7x-2y=1 \\ 7(1)-2(3)=1 \end{cases}$$

بالطرح نجد $7(x-1) = 2(y-3)$

2 قاسم لـ $7(x-1)$

2 و 7 أوليان فيما بينهما ومنه حسب غوص فإن 2 قاسم لـ $x-1$

وعليه $x-1 = 2k$

$$x = 2k+1 \qquad k \in \mathbb{Z}$$

بالتعويض نجد $7(2k+1-1) = 2(y-3)$

$$7(2k) = 2(y-3)$$

ومنه: $y = 7k+3$

67. رياضي 2014 الموضوع 01

1-حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة التالية
$(z-1-2i)(z^2-2(1+\sqrt{3})z+5+2\sqrt{3})=0$

2-A ، B ، C و D نقط من المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ لاحقتها على الترتيب :

$z_A=1+2i$ ، $z_B=1+\sqrt{3}+i$
$z_C=1+\sqrt{3}-i$ $z_D=1-2i$

اثبين أن : $AB=CD$ و (AD) يوازي (BC)

بـتحقق أن : $\frac{z_B+z_D}{2}\neq\frac{z_A+z_C}{2}$ ثم استنتج طبيعة الرباعي $ABCD$

3-أحسن ان : $\frac{z_D-z_B}{z_A-z_B}=\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}$

استنتج أن D هي صورة A بتشابه مباشر مركزه B يطلب تعيين نسبته وزاويته

3-جـبين أن المثلث ADB قائم وأن النقط A ، B و C و D تنتمي الى دائرة يطلب تحديد مركزها ونصف قطرها

3-جـاستنتج انشاء للرباعي $ABCD$

نص الإجابة

1-حل المعادلة

$(z-1-2i)(z^2-2(1+\sqrt{3})z-5+2\sqrt{3})=0$

يكافئ

$\begin{cases} z-1-2i=0 \\ z^2-2(1-\sqrt{3})z-5+2\sqrt{3}=0 \end{cases}$ أو

ومنه $z_1=1+2i$

$(z^2-2(1+\sqrt{3})z-5+2\sqrt{3})=0$

حل المعادلة من الدرجة الثانية

$\Delta=b^2-4ac=\left[-2(1+\sqrt{3})\right]^2-4(1)(5+2\sqrt{3})=-4$

أي $\Delta=4i^2$

ومنه

$\begin{cases} z_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{(2(1+\sqrt{3})-2i)}{2} \\ z_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{(2(1+\sqrt{3})+2i)}{2} \end{cases}$

$z_2=1+\sqrt{3}+i$

$z_3=1+\sqrt{3}-i$

$S=\{1+2i;1+\sqrt{3}-i;1+\sqrt{3}+i\}$

وعليه $(x,y)=\{(2k+1.7k+3)\}$ $k\in\mathbb{Z}$

3-جـبين انه إذا كانت (x,y) حل لـ $7x-24y=12$ فإن x مضاعف لـ12

لدينا $7x-24y=12$

$7x=24y+12$

$7x=12(2y+1)$

12 قاسم لـ$7x$

أي 12 أولي مع 7 ومنه حسب خوص 12 قاسم x(حسب مبرهنة غوص)

أي $x\equiv 0[12]$

$x=12x'$

ومنه x مضاعف للعدد12.

3-جـاستنتاج حلول المعادلة

$7x-24y=12$

لدينا $x=12x'$

أن x مضاعف لـ12 من الجواب السابق بالتعويض نجد

$7(12x')-24y=12$

$7x'-2y=1$

أي

بالمطابقة مع المعادلة الأولى نجد

$x'=2k+1$

أي $\begin{cases} x=12(2k+1)=24k+12 \\ y=7k+3 \end{cases}$

$k\in\mathbb{Z}$

وعليه حلول المعادلة هي

$(x,y)=\{(24k+12\ ,7k+3)\}$

مع $k\in\mathbb{Z}$

3-دـ تعيين قيم n حتى يكون $(z_A)^n$ ينتمي إلى $\mathbb{R}_-$

لدينا

$(z_A)^n=\left(2\sqrt{2}\right)^n\left[\cos\left(\frac{n7\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{n7\pi}{12}\right)\right]$

حتى يكون $(Zz_A)^n$ حقيقي سالب تماما يجب أن تكون

$\arg(z_A)^n=\pi+2k\pi$

أي $\frac{n7\pi}{12}=\pi+2k\pi$

$\frac{7n}{12}=2k+1$

$7n==24k+12$

$7n-24k=12$

بالمطابقة مع المعادلة السابقة نجد $n=x$

أي $n=24k+12$

قيم n حتى يكون $(z_A)^n\in\mathbb{R}_-^*$

2-أ-تبيان أن $AB = CD$ و (AD) يوازي (BC)

$$AB = CD$$

يجب أن نجد: $|z_B - z_A| = |z_C - z_D|$

لدينا:

$$|z_B - z_A| = |1 + \sqrt{3} + i - (1 + 2i)| = 2$$
$$AB = 2$$
$$|z_D - z_C| = |1 - 2i - (1 + \sqrt{3}) - i)| = 2$$
$$CD = 2$$

ومنه: $AB = CD = 2$

ولدينا $z_{\overrightarrow{AD}} = z_D - z_A = -4i$

$$z_{\overrightarrow{BC}} = z_C - z_B = -2i$$
$$\overrightarrow{AD} \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix} , \overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$
$$\frac{z_{\overrightarrow{AD}}}{z_{\overrightarrow{BC}}} = 2$$

ومنه $\begin{cases} AB = CD \\ \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{BC} \end{cases}$ ومنه $(BC)//(AD)$

ب-التحقق أن: $\frac{z_B + z_D}{2} \neq \frac{z_A + z_C}{2}$

لدينا $\frac{z_B + z_D}{2} = \frac{2 + \sqrt{3} - i}{2}$

$$\frac{z_A + z_C}{2} = \frac{2 + \sqrt{3} + i}{2}$$

ومنه $\frac{z_B + z_D}{2} \neq \frac{z_A + z_C}{2}$

-استنتاج طبيعة الرباعي $ABCD$

لدينا $AB = CD$ و (AD) يوازي (BC)

و $\frac{z_B + z_D}{2} \neq \frac{z_A + z_C}{2}$ (الأقطار غير متناصفة)

ومنه $ABCD$ شبه منحرف متساوي الساقين.

3-أ-تبيان أن $\frac{z_D - z_B}{z_A - z_B} = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}$

لدينا $\frac{z_D - z_B}{z_A - z_B} = \frac{-\sqrt{3} - 3i}{-\sqrt{3} + i} = \frac{4\sqrt{3}i}{4} = i\sqrt{3}$

ومنه $\left|\frac{z_D - z_B}{z_A - z_B}\right| = \sqrt{3}$

$$\arg\left(\frac{z_D - z_B}{z_A - z_B}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

أي $\frac{z_D - z_B}{z_A - z_B} = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}$

الإستنتاج

لدينا $z_D - z_B = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}(z_A - z_B)$

ومنه D صورة A بتشابه مباشر نسبته $k = \sqrt{3}$ وزاويته $\theta = \frac{\pi}{2}$

ب-تبيان أن ABC قائم في B

لدينا $\frac{z_D - z_B}{z_A - z_B} = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}$

$$(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BD}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

ومنه ABD قائم في B.

-تبيان أن النقط D, C, B, A تنتمي لنفس الدائرة

بما أن المثلث ABD قائم في B فإنه توجد دائرة تحيط برؤوسه وقطرها الوتر AD ومركزها I منتصف الوتر

حيث $z_I = \frac{z_A + z_D}{2} = 1$

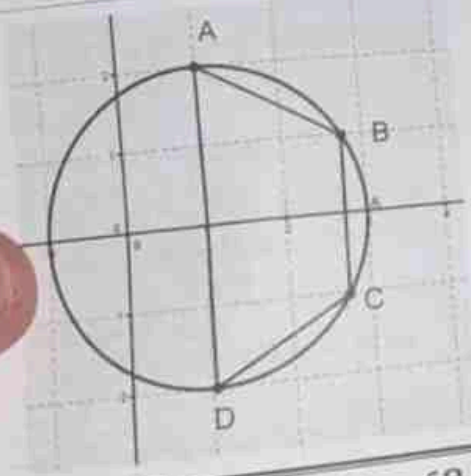
ونصف قطرها $r = \frac{AD}{2} = \frac{|z_D - z_A|}{2} = \frac{|4i|}{2} = 2$

ولدينا $IC = |z_C - z_I| = 2 = r$

ومنه النقط D, C, B, A تنتمي نفس الدائرة التي مركزها $z_I = 1 , r = 2$

وعليه D, C, B, A تنتمي إلى نفس الدائرة (γ).

ج-إنشاء الرباعي $ABCD$



68. رياضي 2014 الموضوع 02

المستوي منسوب الى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$

A و B النقطتان اللتان لاحقتاهما على الترتيب :

$a = -2 + 6i$ و $b = -1 + 2i$

1-اكتب العدد المركب $1 + i$ على شكل الأسي

2-S التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z النقطة M' لاحقتها z' حيث :

$$z' = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}z + 2$$

2-أ-D النقطة ذات اللاحقة d حيث $d = 2i$ جد لاحقة النقطة D' صورة D بالتحويل S ، ماذا تستنتج؟

2-بين أن : $z' - d = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}(z-d)$ واستنتج طبيعة وعناصر التحويل S

3-(Δ) المستقيم ذو المعادلة : $3x + 5y = 11$

أ-تحقق أن النقطة $M_0(-3;4)$ تنتمي الى (Δ) ثم عين نقط (Δ) التي إحداثياتها أعدادا صحيحة

ب-M'_0 صورة M_0 بالتحويل S ، بين أن المستقيمين (BM'_0) و (BA) متعامدان

4-x و y عددان صحيحان من المجال $[-5;5]$ عين مجموعة النقط $M(x;y)$ من المستوي بحيث يكون المستقيمان (BA) و (BM') متعامدين ، حيث M' هي صورة M بالتحويل S

نص الإجابة

1-كتابة $1+i$ على الشكل الأسي

$$|1+i| = |1+1| = \sqrt{2}$$

$$\arg(1+i) = \theta \begin{cases} \cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta$$

$$= \frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

ومنه: $1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

2-أ-إيجاد لاحقة D' صورة D بـ S

$$z_{D'} = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}z_D + 2$$
$$z_{D'} = (1+i)(2i) + 2$$
$$= 2i = z_D$$

نستنتج أن النقطة D صامدة بالتحويل S

2-ب-تبيان أن $z' - d = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}(z-d)$

لدينا $z' - 2i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}z + 2 - 2i$

ومنه $z' - 2i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}z - \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \times 2i$

$$z' - 2i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}(z-2i)$$

ومنه: $z' - d = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}(z-d)$

ومنه S تشابه مباشر مركزه D ونسبته $\sqrt{2}$ وزاويته $\frac{\pi}{4}$

3-(Δ) المستقيم ذو المعادلة

$$3x + 5y = 11$$

3-أ-التحقق أن $M_0(-3,4)$ تنتمي لـ (Δ)

$$3(-3) + 5(4) = 11$$
$$11 = 11 \text{ محققة}$$

ومنه $M_0 \in (\Delta)$

-تعيين نقط (Δ) التي إحداثياها صحيحة

$$\begin{cases} 3x + 5y = 11 \\ 3(-3) + 5(4) = 11 \end{cases}$$

بالطرح نجد:

$$3(x+3) + 5(y-4) = 0$$

ومنه

$$3(x+3) = 5(-y+4)$$

ومنه وحسب غوص فإن 5 يقسم $x+3$ وعليه

$$x = 5k - 3$$

بالتعويض نجد $y = -3k + 4$

ومنه $M(5k-3, -3k+4)$ مع $k \in \mathbb{Z}$

3-ب-M'_0 صورة M_0 بـ S

تبيان أن (BM'_0) و (BA) متعامدان

لدينا $z_{M'_0} = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}z_{M_0} + 2i$

$$z_{M'_0} = (1+i)(-3+4i) + 2$$
$$z_{M'_0} = -5 + i$$
$$M'_0(-5;1)$$

لدينا $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{BM'_0}\begin{pmatrix}-4\\-1\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BM'_0} = (-1)(-4) + (4)(-1)$$
$$= 0$$

ومنه $\overrightarrow{BA} \perp \overrightarrow{BM'_0}$

4-تعيين مجموعة النقط M حتى يكون (BA) و (BM') متعامدين

لدينا $M' = S(M)$

$$z_{M'} = (1+i)(z'_M - 2i) + 2i$$
$$z_{M'} = (1+i)z_M - 25 + 2 - 2i$$
$$x' + iy' = (1+i)(x+iy) + i$$
$$x' + iy' = x + iy + ix - y - 2$$
$$= x - y + 2 + i(y+x)$$

بالمطابقة نجد

$$\begin{cases} x' = x - y + 2 \\ y' = y + x \end{cases}$$

ومنه $M'\begin{pmatrix}x-y+2\\y+x\end{pmatrix}$

وعليه

$$BM'\begin{pmatrix}x-y+3\\y+x-2\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{BA} = 0$$

أي $(x-y+3)(-1) + (x+y-2)(4) = 0$

$3x + 5y = 11$

ومنه $\begin{cases} 3x + 5y = 11 \\ -5 \le y \le 5 \\ -5 \le x \le 5 \end{cases}$

ومنه وحسب السؤال السابق نجد

$-5 \le 5k - 3 \le 5$

$-5 \le -3k + 4 \le 5$

ومنه $-0.4 \le k \le 1.6$

$-0.33 \le k \le 3$

وعليه $k = \{0,1\}$

بتعويض قيمة k في كل من x و y نجد مجموعة النقط H هي $M_0(-3,4)$ ، $M_1(2,1)$

69. رياضي 2013 الموضوع 01

a-1 و b عددان حقيقيان موجبان تماما نعتبر في المستوي المركب المنسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ ، النقط A ، B ، C و E التي لاحقاتها : $z_A = ae^{i\frac{3\pi}{4}}$

$z_E = be^{i\frac{\pi}{2}}$ ، $z_C = \overline{z_A}\, z_B = -a\sqrt{2}$ على الترتيب

1-أ-اكتب على الشكل الأسي العدد المركب $\frac{z_A - z_B}{z_A}$ ، ثم استنتج طبيعة المثلث OAB

1-ب-حدد طبيعة الرباعي $OABC$ ، ثم استنتج مساحته

2-التشابه المباشر S ذو المركز O والنسبة $\frac{b}{a}$ والزاوية $\frac{3\pi}{4}$ ، يحول كل نقطة $M(z)$ من المستوي الى النقطة $M'(z)$

2-أ-اكتب العبارة المركبة للتشابه المباشر S ، ثم تحقق أن $S(A) = E$

2-ب-بين أن مساحة الرباعي $OEFG$ هي b^2 (مقدرة بوحدة المساحة) ، حيث $S(B) = F$ و $S(C) = G$

3-أ-احسب بدلالة a و b العبارة :

$$|z_C|^2 + |z_E|^2 - 2|z_C \times z_E| \cos\left[\arg\left(\frac{z_E}{z_C}\right)\right]$$

3-ب-استنتج قيمة CE^2 بدلالة a و b

II- عند طبيعي n و M_n نقطة من المستوي تختلف عن O ، لاحقتها Z_n

نضع : $M_0 = A$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $M_{n+1} = S(M_n)$

نعتبر المتتاليتين (u_n) و (v_n) المعرفتين ، من أجل كل عدد طبيعي n ، بـ :

$u_n = |z_n|$ و $v_n = \arg(z_n)$

1-اكتب العدد المركب $\frac{z_{n+1}}{z_n}$ على الشكل الأسي بدلالة a و b

2-نفرض أن : $a < b$ و $\arg\left(\frac{z_{n+1}}{z_n}\right) \in]-\pi;\pi]$

بين أن المتتالية (u_n) هندسية ، والمتتالية (v_n) حسابية يطلب تعيين أساسها وحساب الحد الأول لكل منهما

3-احسب بدلالة a ، b و n المجموع T_n ، حيث : $T_n = a + b + \frac{b^2}{a} + \cdots + \frac{b^n}{a^{n-1}}$ ، ثم $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n$

4-عين قيم الأعداد الطبيعية n التي تكون من أجل النقط M_n ، A ، O في استقامية

نص الإجابة

1-أ-كتابة $\frac{(z_A - z_B)}{z_A}$ على الشكل الأسي

$$\frac{z_A - z_B}{z_A} = \frac{ae^{i\frac{3\pi}{4}} + a\sqrt{2}}{ae^{i\frac{3\pi}{4}}} = \frac{e^{i\frac{3\pi}{4}} + \sqrt{2}}{e^{i\frac{3\pi}{4}}}$$

$$= \left(e^{i\frac{3\pi}{4}} + \sqrt{2}\right)\left(e^{-i\frac{3\pi}{4}}\right)$$

$$= 1 + \left(\sqrt{2}\right)\left(\frac{-\sqrt{2}}{2} - \frac{i\sqrt{2}}{2}\right) = 1 - 1 - \frac{2i}{2}$$

$$= -i$$

وعليه $\frac{z_A - z_B}{z_A} = e^{i\frac{3\pi}{2}} = e^{-i\frac{\pi}{2}}$

-استنتاج طبيعة المثلث OAB

$$\begin{cases} \left|\frac{z_A - z_B}{z_A}\right| = 1 \\ \arg\left(\frac{z_A - z_B}{z_A}\right) == -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases}$$

ومنه $\begin{cases} OA = BA \\ (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{BA}) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases}$

ومنه المثلث OAB قائم في A ومتساوي الساقين.

1-ب-تحديد طبيعة الرباعي $OABC$

لدينا $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = -a\sqrt{2} - ae^{i\frac{3\pi}{4}}$

$$= -a\left(\sqrt{2} + e^{i\frac{3\pi}{4}}\right)$$

$$= -a\left(\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$$

$$= -a\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{i\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$z_{\overrightarrow{AB}} = -ae^{i\frac{\pi}{4}}$$

3-أحسب العبارة بدلالة a و b

$$|z_C|^2 + |z_E|^2 - 2|z_C \times z_E| \cos\left|\arg\left(\frac{z_E}{z_C}\right)\right|$$

$$a^2 + b^2 - 2\left|ae^{-\frac{i3\pi}{4}} \times be^{-\frac{2\pi}{4}}\right| \cos\left|\arg\left(\frac{be^{i\frac{3\pi}{2}}}{ae^{-\frac{i3\pi}{4}}}\right)\right|$$

لدينا $|z_C| = a$ و $|z_E| = b$

و $|z_C \times z_E| = |z_C| \times |z_E| = a \times b$

$$\arg\left(\frac{z_E}{z_C}\right) = \arg(z_E) - \arg(z_C)$$

$$= \frac{3\pi}{4}$$

وعليه $|z_C|^2 + |z_E|^2 - \cos\left|\arg\left(\frac{z_E}{z_C}\right)\right| 2|z_C \times z_E|$

$$= a^2 + b^2 - 2ab.\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= a^2 + b^2 - \sqrt{2}.a.b$$

3-ب-استنتاج قيمة CE^2

المثلث OCE حسب

$$CE^2 = OC^2 + OE^2 - 2OC.OE.\cos(\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OE})$$

$$= |z_C|^2 + |z_E|^2 - 2|z_C \times z_E|.\cos[\arg\left(\frac{z_E}{z_C}\right)|$$

$$= a^2 + b^2 - \sqrt{2}.a.b$$

1-كتابة $\frac{z_{n+1}}{z_n}$ على الشكل الأسي

لدينا $M_{n+1} = S(M_n)$

وعليه $z_{n+1} = \frac{b}{a}e^{\frac{i3\pi}{4}}Z_n$

ومنه $\frac{z_{n+1}}{z_n} = \frac{b}{a}e^{\frac{i3\pi}{4}}$

2-تبيين أن (u_n) هندسية وأن (v_n) حسابية

$$u_{n+1} = |z_{n+1}|$$

$$= \left|\frac{b}{a}e^{\frac{i3\pi}{4}} \times z_n\right|$$

$$= \frac{b}{a}|z_n|$$

$$u_{n+1} = \frac{b}{a}u_n$$

ومنه (u_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{b}{a}$ وحدها الأول

$$u_0 = |z_A| = a$$

$$v_{n+1} = \arg(z_{n+1})$$

$$z_{\overrightarrow{OC}} = z_C - z_O$$

$$= a\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$$

$$= -a\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$$

$$z_{\overrightarrow{OC}} = -ae^{\frac{i\pi}{4}}$$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OC}$ اي $z_{\overrightarrow{AB}} = z_{\overrightarrow{OC}}$

ومنه الرباعي $OABC$ متوازي أضلاع ولدينا OAB قائم ومتساوي الساقين .

ومنه الرباعي ضلعان متجاوران متعامدان ومتقايسان

وعليه $OABC$ مربع

استنتاج مساحة المربع:

$$S_{OABC} = OA \times OA$$

$$= a \times a$$

$$S_{OABC} = a^2(u.a)$$

2-أ-العبارة المركبة لـ S

انطلاقا من:

$$z' - z_w = ke^{i\theta}(z - z_W)$$

ومنه:

$$z' = \frac{b}{a}e^{\frac{i3\pi}{4}}z$$

تحقق أن $S(A) = E$

$$z'_E = \frac{b}{a}e^{\frac{i3\pi}{4}}z_A$$

$$z'_E = \frac{b}{a}e^{\frac{i3\pi}{4}}\left(ae^{\frac{i3\pi}{4}}\right)$$

$$z'_E = be^{i\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{3\pi}{4}\right)}$$

$$z'_E = be^{\frac{i3\pi}{2}} = z_E$$

ومنه $S(A) = E$

2-ب-إثبات أن $S'_{OEFG} = b^2(u.a)$

$$\begin{cases} S(B) = F \\ S(C) = G \\ S(O) = O \\ S(A) = E \end{cases}$$ حيث

ومنه صورة المربع $OABC$ هي المربع $OEFG$ معناه

$$S'_{OEFG} = \left(\frac{b}{a}\right)^2 \times S_{OABC}$$

$$= \left(\frac{b}{a}\right)^2 \times a^2$$

$$S'_{OEFG} = b^2(u.a)$$ وعليه

70. رياضي 2013 الموضوع 02

1-حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z ، التالية : $z^2+z+1=0$

2-نعتبر في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ ، النقط A ، B و M ذات اللاحقات :

$z_A=-\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)$ ، $z_B=\overline{z_A}$ و z على الترتيب ،

($\overline{z_A}$ يرمز الى مرافق z_A)

2-أ-اكتب z_A الشكل الأسي

2-ب-عين مجموعة النقط M من المستوي ، حيث :

$\arg[(z-z_A)^2]=\arg(z_A)-\arg(z_B)$

3-أ-التحويل النقطي r ، يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(Z')$ ، حيث : $z'=z_A\,z+z_B\sqrt{3}$

-ما طبيعة التحويل r ؟ عين عناصره المميزة

3-ب-التحاكي h ، يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$ ، حيث : $z'=-2z+3i$

-عين نسبة ومركز التحاكي h

3-جـ-نضع: $S=h\circ r$

(يرمز $\circ$ الى تركيب التحويلين r و h)

-عين طبيعة التحويل S ، مبرزا عناصره المميزة ، ثم تحقق أن عبارته المركبة هي :

$$z'=2e^{i\frac{\pi}{3}}(z-i)+i$$

4-نعتبر النقطة Ω ذات اللاحقة i والنقط C ، D و E حيث : $S(O)=C$ ، $S(C)=D$ و $S(D)=E$

بين أن النقط O ، Ω و E في استقامية

5-أ-عين (Γ) مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي ، حيث :

$z=2e^{i\theta}+e^{i\frac{\pi}{2}}$ مع $\theta=\mathbb{R}$

5-ب-عين (Γ') صورة (Γ) بالتحويل S

نص الإجابة

1-حل المعادلة $z^2-z+1=0$

$$\Delta=-3=\left(\sqrt{3}i\right)^2$$

$$z_1=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$z_2=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

ومنه $S=\left\{-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right\}$

$$v_{n+1}=\arg\left(\frac{b}{a}e^{\frac{i3\pi}{4}}z_n\right)$$

$$=\arg\left(\frac{b}{a}e^{\frac{i3\pi}{4}}\right)+\arg(z_n)$$

$$v_{n+1}=v_n+\frac{3\pi}{4}$$

ومنه (v_n) متتالية حسابية أساسها $\frac{3\pi}{4}$ وحدها الأول

$$v_0=\arg(z_A)=\frac{3\pi}{4}$$

3-حساب T_n

لدينا $u_n=a\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{b^n}{a^{n-1}}$

ومنه $T_n=a+b+\frac{b^2}{a}+\frac{b^3}{a^2}+\cdots+\frac{b}{a^{n-1}}$

$$=a\left(\frac{b}{a}\right)^0+a\left(\frac{b}{a}\right)^1+a\left(\frac{b}{a}\right)^2+\cdots+a\left(\frac{b}{a}\right)^n$$

$$=u_0+u_1+\cdots+u_n$$

$$=a\left[\frac{\left(\frac{b}{a}\right)^{n+1}-1}{\frac{b}{a}-1}\right]$$

وعليه $T_n=\frac{a^2}{b-a}\left[\left(\frac{b}{a}\right)^{n+1}-1\right]$

-حساب $\lim\limits_{n\to+\infty}T_n$

$\lim\limits_{n\to+\infty}T_n=+\infty$

لأن $a<b$ معناه $\frac{b}{a}>1$

وبالتالي $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{b}{a}\right)^{n+1}=+\infty$

و $b-a>0$

4-تعيين قيم n حتى تكون A,O,M_n على استقامة

$$\frac{z_n-z_0}{z_A-z_0}=\lambda\in\mathbb{R}$$

أي $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM_n}\right)=k\pi$

$$\arg\left(\frac{z_n}{z_A}\right)=k\pi$$

$$\arg(z_n)-\arg(z_A)=k\pi$$

$$\frac{3\pi}{4}+\frac{n3\pi}{4}-\frac{3\pi}{4}=k\pi$$

$$\frac{3n}{4}=k$$

وعليه $3n=4k$

$$n=\frac{4}{3}k$$

($4k$ من مضاعفات 3)

بوضع $k'=\frac{k}{3}$ نجد $n=4k'$

-التحقق من العبارة المركبة لـ S

$$z' - z_\omega = 2e^{\frac{i\pi}{3}}(z - z_\omega)$$
$$z' = 2e^{\frac{i\pi}{3}}(z - i) + i$$

4-تبيان أن E, ω, O على استقامة

$$O \xrightarrow{S} C \xrightarrow{S} D \xrightarrow{S} E$$
ومنه $SoSoS(O) = E$
تركيب عدة تشابهات مباشرة لها نفس المركز هو تشابه مباشر مركزه $\omega(0,1)$ ونسبته $k'' = 2^3 = 8$
وزاويته $\theta'' = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \pi$
وعليه $(\overrightarrow{\omega O}, \overrightarrow{\omega E}) = \pi$
ومنه E, ω, O في استقامية

-تعيين (Γ) مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي

$$z - e^{\frac{i\pi}{3}} = e^{i\theta}$$
أي
$$z - z_\omega = 2e^{i\theta}$$
ومنه

$$\begin{cases} |z - z_\omega| = 2 \\ \arg(z - z_\omega) = \theta \end{cases}$$
أي

$$\begin{cases} \omega M = 2 \\ (\vec{u}, \overrightarrow{\omega M}) = \theta \end{cases}$$
ومنه مجموعة النقط (Γ) هي دائرة مركزها ω ونصف قطرها 2.

5-تعيين (Γ') صورة (Γ) بالتحويل S

صورة دائرة بالتشابه المباشر هي دائرة عناصرها المميزة هي ونصف قطرها $r' = 2r = 4$
ومركزها w' هي صورة w بالتحويل S

$$z_{w'} = 2e^{\frac{i\pi}{3}}(i - i) + i = i = z_w$$

71. رياضي 2012 الموضوع 01

1-حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $z^2 - \sqrt{2}z + 1 = 0$

2- المستوي المركب منسوب الى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ ، A ، B ، C ثلاث نقط من المستوي لاحقاتها على الترتيب :

$z_A = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$ ، $z_B = \overline{z_A}$ و $z_C = z_A + z_B$

2-أ-اكتب على الشكل الأسي الأعداد المركبة : z_A ، z_B و $\frac{z_A}{z_B}$

-الشكلة z_A على الشكل الأسي

$$z_A = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$$
$$|z_A| = \left|-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$$
$$\arg(z_A) = \theta \begin{cases} \cos\theta = -\frac{1}{2} \\ \sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{4\pi}{3}$$
$$= e^{\frac{i4\pi}{3}}$$

-تعيين مجموعة النقط M

$$\arg[(z - z_A)^2] = \arg(z_A) - \arg(z_B)$$
$$2\arg(z - z_A) = \frac{4\pi}{3} - \left(\frac{2\pi}{3}\right)$$
$$\arg(z - z_A) = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{3}$$
ومنه $(\vec{u}, \overrightarrow{AM}) = \frac{\pi}{3}$
ومنه مجموعة النقط M هي نصف المستقيم مبدؤه A ويحمل زاوية $\frac{\pi}{3}$ باستثناء A

ب- $(r): z' = z_A \cdot z + z_B\sqrt{3}$

-تبيعة التحويل r

$|z_A| = 1$ و $\mathrm{Arg}(z_A) = \frac{4\pi}{3}$
ومنه r هو دوران زاويته $\frac{4\pi}{3}$ ومركزه

$$z_\omega = \frac{b}{1-a} = \frac{(-\sqrt{3} + 3i)(3 - \sqrt{3}i)}{(3 + i3)(3 - \sqrt{3}i)}$$
$$= \frac{-3\sqrt{3} + 3i + 9i + 3\sqrt{3}}{12}$$
$$= i$$
ومنه $z_w = i$ أي $\omega(0,1)$

-تعيين نسبة ومركز التحاكي:

$(h): z' = -2z + 3i$
ومنه h تحاكي نسبته $k = -2$ و $a = -2$
مركزه $z_\omega = \frac{3i}{1+2} = i$ أي $\omega(0,1)$

-تبيعة التحويل S

$S = hor$
r هو دوران مركزه w وزاويته $\theta = \frac{4\pi}{3}$ و h تحاكي نسبته $k = -2$ ومركزه w فإن تركيب تحاك ودوران ينتج عنه تشابه مباشر S مركزه $\omega(0,1)$ ونسبته $k' = |-2| = 2$ وزاويته

$$\theta' = \frac{4\pi}{3} + \pi = \frac{\pi}{3}$$

الأعداد المركبة من الألف إلى الياء

2-بين لاحقتا كل من A' ، B' ، C' صورة النقطة A ، B ، C على الترتيب بالدوران الذي مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{4}$

1-عين لاحقة النقطة D حتى يكون $OA'C'D$ مربع

3-نسمي (Δ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z بحيث : $|z-z_A|=|z-z_B|$

3-أ-بين أن (Δ) هو محور القواصل

3-ب-بين أن حلي المعادلة : $\left(\frac{z-z_A}{z-z_B}\right)^2=i$ عددان حقيقيان (لا يطلب حساب الحلين)

نص الإجابة

1-حل المعادلة $z^2-\sqrt{2}z+1=0$

$$\Delta=2i^2=\left(i\sqrt{2}\right)^2$$

ومنه $\begin{cases} z_1=\frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2} \\ z_2=\frac{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

$$S=\left\{\frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{2}\right\}$$

2- $z_A=\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ $z_B=\overline{z_A}$

$$z_C=z_A+z_B$$

2-أ-كتابة الاعداد على الشكل الأسي

$$z_A=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i$$

$$|z_A|=\left|\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right|=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{4}{4}}=1$$

$$\arg(z_1)=\theta_1 \begin{cases} \cos\theta_1=\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta_1=\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta_1=\frac{\pi}{4}$$

ومنه

$$z_A=e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$z_B=\overline{z_A}=\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i=e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

$$\frac{z_A}{z_B}=\frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{e^{-i\frac{\pi}{4}}}=e^{i\frac{\pi}{4}}\times e^{i\frac{\pi}{4}}=e^{2i\frac{\pi}{4}}=e^{i\frac{\pi}{2}}$$

2-نسمي على التوالي $z_{C'}, z_{B'}, z_{A'}$

لدينا العبارة المركبة للدوران الذي مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{4}$

$$z'-z_O=e^{i\frac{\pi}{4}}(z-z_O)$$

ومنه $z'=e^{i\frac{\pi}{4}}.z$

وعليه $z_{A'}=e^{i\frac{\pi}{4}}z_A$

أي $z_{A'}=i$

$$z_{B'}=e^{i\frac{\pi}{4}}z_B$$

$$z_{B'}=1$$

$$z_{C'}=e^{i\frac{\pi}{4}}z_C$$

$$z_{C'}=1+i$$

2-جـ إثبات أن $OA'C'B'$ مربع

لدينا مما سبق $\frac{z_A-z_O}{z_B-z_O}=e^{i\frac{\pi}{2}}$

ومنه $\begin{cases} \left|\frac{z_A-z_O}{z_B-z_O}\right|=1 \\ \arg\left(\frac{z_A-z_O}{z_B-z_O}\right)=\frac{\pi}{2}+2k\pi \end{cases}$

وعليه فإن:

$$\begin{cases} OB=OA \\ \left(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA}\right)=\frac{\pi}{2}+2k\pi \end{cases}$$

ضلعان متعامدان ومتجاوران ومتقايسان ومنه $OACB$ مربع وبما أن الرباعي $OA'C'B'$ صورة المربع $OACB$ بالدوران (R) فإن الرباعي $OA'C'B'$ مربع لأن الدوران يحافظ على الأطوال.

3-أ- تبيان أن (Δ) هو محور القواصل

لدينا $|z-z_A|=|z-z_B|$

$$AM=BM$$

(Δ) هو محور القطعة $[AB]$ وبما أن $z_B=\overline{z_A}$ بما أن A و B متناظرتان بالنسبة لمحور القواصل فإن (Δ) هو محور $[AB]$

3-ب- إثبات أن حلي المعادلة $\left(\frac{z-z_A}{z-z_B}\right)^2=i$ هما عددان حقيقيان

لدينا $\left|\left(\frac{z-z_A}{z-z_B}\right)^2\right|=|i|$

أي $\left|\frac{z-z_A}{z-z_B}\right|^2=1$

أي $|z-z_A|^2=|z-z_B|^2$

$|z-z_A|=|z-z_B|$

وحسب الجواب " 3 – أ " فإن الحلين ينتميان لمحور القواصل ومنه الحلين حقيقين

72. رياضي 2012 الموضوع 02

المستوى منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ ، النقط A ، B و D التي لواحقها على الترتيب: $z_C = 0$ ، $z_B = \overline{z_A}$ ، $z_A = \sqrt{3}+i$ و $z_D = \overline{z_C} \times z_A$

1- بين أن النقط A ، B ، C و D تنتمي الى دائرة (γ) يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها ، ثم أنشئ النقط A ، B ، C ، D و (γ)

2- ليكن H التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z النقطة M' لاحقتها z' حيث: $z' = -iz + 2$

أ- عين طبيعة التحويل H وعناصره المميزة

ب- عين صورة النقطة B بالتحويل H ثم استنتج صورة الدائرة (γ) بالتحويل H

3- E نظيرة B بالنسبة لـ O

أ- تحقق أن: $\frac{z_A - z_C}{z_E - z_C} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$

ب- استنتج طبيعة المثلث AEC

ج- R هو التحاكي الذي مركزه O ونسبته 2

عين طبيعة التحويل $R \circ H$ وعناصره المميزة ، ثم استنتج صورة الدائرة (γ) بالتحويل $R \circ H$

نص الإجابة

1- حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $(z^2+4)(z^2-2\sqrt{3}+4)=0$

$$\begin{cases} z^2+4=0 \\ z^2-2\sqrt{3}z+4=0 \end{cases}$$ أو

$z^2+4=0$ نجد:

$$\begin{cases} z_1=-2i \\ z_2=+2i \end{cases}$$

$(z^2-2\sqrt{3}+4)=0$ نجد أيضا حلان:

$$\Delta=(2i)^2$$

$$z_1=\frac{2\sqrt{3}-2i}{2}=\sqrt{3}-i$$

$$z_1=\frac{2\sqrt{3}+2i}{2}=\sqrt{3}+i$$ أو

$$z_3=\sqrt{3}-i$$

$$z_4=\sqrt{3}+i$$

ومنه $S=\{+2i\ ,-2i\ ,\ \sqrt{3}-i\ ,\sqrt{3}+i\}$

2- تبيان أن A, B, C, D تنتمي لدائرة

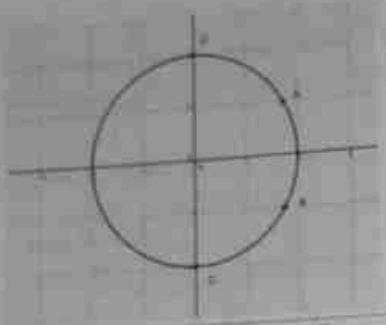
$$|z_A| = \sqrt{3+1} = 2$$
$$|z_B| = 2$$
$$|z_C| = |-2i| = 2$$
$$|z_D| = |2i| = 2$$

لدينا $|z_A| = |z_B| = |z_C| = |z_D| = 2$

أي $OA = OB = OC = OD$

ومنه A, B, C, D تنتمي الى دائرة مركزها O ونصف قطرها

2- الإنشاء



3- أ- تبيين أن $\frac{z_A - z_C}{z_E - z_C} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$

لدينا E نظيرة B بالنسبة لـ O ومنه O منتصف $[BE]$

$$z_O = \frac{z_B + z_E}{2}$$

وعليه $z_B + z_E = 0$

$$z_E = -z_B = -\sqrt{3}+i$$

ومنه $\frac{z_A - z_C}{z_E - z_C} = \frac{\sqrt{3}+i+2i}{-\sqrt{3}+i+2i}$

$$= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$\left|\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right| = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = 1$$

$$\theta = \arg\left(\frac{z_A - z_C}{z_E - z_C}\right) \quad \begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{2} \\ \sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

وعليه $\frac{z_A - z_C}{z_E - z_C} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$

3- ب- تبيين أن A صورة E بدوران مركزه C

لدينا $\frac{z_A - z_C}{z_E - z_C} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$

ومنه $(z_A - z_C) = e^{i\frac{\pi}{3}}(z_E - z_C)$

73. رياضي 2011 الموضوع 01

المستوي منسوب الى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$

A ، B ، C ثلاث نقط من المستوي لاحقاتها على الترتيب :

$z_A = 1 - i$ ، $z_B = -1 + i$ ، $z_C = \sqrt{3}(1 + i)$

1-اكتب على الشكل الأسي الأعداد المركبة : z_A ، z_B ، z_C

2-أ-احسب الطويلة و عمدة للعدد المركب $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$ ، ثم فسر هندسيا النتائج المحصل عليها

2-ب-حدد طبيعة المثلث ABC

3-عين لاحقة النقطة D بحيث يكون الرباعي $ACBD$ معينا

4- T التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M من المستوي لاحقتها z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث :

$z' = (-1 + i)z + 1 - 3i$

4-أ-عين طبيعة التحويل T وعناصره المميزة

4-ب-استنتج طبيعة التحول $T \circ T$ وعناصره المميزة

نص الإجابة

1-كتابة z_C, z_B, z_A على الشكل الأسي

$$z_A = 1 - i$$

$$|z_A| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$\theta_1 = \arg(z_A) \begin{cases} \cos\theta_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta_1 = -\frac{\pi}{4}$$

ومنه: $z_A = \sqrt{2}e^{-\frac{i\pi}{4}}$

و $z_B = -1 + i$

$$|z_B| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$\theta_2 = \arg(z_B) \begin{cases} \cos\theta_2 = \frac{-\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta_2 = \frac{3\pi}{4}$$

ومنه: $z_B = \sqrt{2}e^{\frac{i3\pi}{4}}$

و $z_C = \sqrt{3}(1+i)$

$$|1 + i| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$\theta_3 = \arg(z_C) \begin{cases} \cos\theta_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta_3 = \frac{\pi}{4}$$

الأعداد المركبة من الألف إلى الياء

ومنه نستنتج أن A صورة B بالدوران الذي مركزه C وزاويته $-\frac{\pi}{3}$

3-جـ-استنتاج طبيعة المثلث AEC

$$\begin{cases} \left|\frac{z_A - z_C}{z_E - z_C}\right| = 1 \\ \arg\left(\frac{z_A - z_C}{z_E - z_C}\right) = -\frac{\pi}{3} \end{cases}$$

وعليه $\begin{cases} CE = CA \\ (\vec{CE}, \vec{CA}) = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$

ومنه المثلث AEC متقايس الأضلاع .

3-د-تعيين طبيعة التحويل RoH وعناصره المميزة ثم استنتاج صورة الدائرة (Γ) بالتحويل RoH

لدينا RoH

العبارة المركبة للتحاكي H

$$z' = 2z$$

العبارة المركبة للدوران R

$$z' - z_C = (z - z_C)e^{-\frac{i\pi}{3}}$$

$$z' = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z + \sqrt{3} - i$$

لدينا RoH أي $R[H(Z)]$

ومنه $z' = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(2z) + \sqrt{3} - i$

$$z' = (1 - i\sqrt{3})z + \sqrt{3} - i$$

$$|1 - i\sqrt{3}| = 2 \neq 1$$

ومنه RoH هو تشابه مباشر نسبته $k = 2$ وزاويته

$$\arg(1 - i\sqrt{3}) = \frac{-\pi}{3} + 2k\pi$$

أي $\theta = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$

ومركزه $z_\omega = \frac{b}{1-a} = \frac{\sqrt{3}-i}{1-1+i\sqrt{3}}$

بالضرب في مرافق البسط نجد:

أي $z_\omega = -\frac{\sqrt{3}}{3} - i$

-استنتاج صورة الدائرة (γ) بالتحويل RoH

هي دائرة نصف قطرها $r' = kr$

أي $r' = 2 \times 2$

$$r' = 4$$

ومركزها w' صورة O بالتشابه RoH أي

$$z_{w'} = (1 - i\sqrt{3})z_0 + \sqrt{3} - i$$

$$z_{w'} = \sqrt{3} - i$$

$$z_C = \sqrt{3}\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}$$
$$z_C = \sqrt{6}e^{\frac{i\pi}{4}}$$

لحساب طويلة وعمدة العدد المركب $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$ ثم نفسر هندسيا النتائج المحصل عليها

$$\left|\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right| = L = \frac{-1+i-1+i}{\sqrt{3}(1+i)-1+i}$$
$$= \frac{(-2+2i)\left((\sqrt{3}-1)-i(\sqrt{3}+1)\right)}{\left((\sqrt{3}-1)+i(\sqrt{3}+1)\right)\left((\sqrt{3}-1)-i(\sqrt{3}+1)\right)}$$
$$L = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$|L| = 1$$
$$\arg(L) = \theta_L = \begin{cases} \sin\theta_L = \frac{1}{2} \\ \cos\theta_L = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta_L = \frac{\pi}{3}$$

التفسير الهندسي

$$\begin{cases} AC = AB \\ (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$$

ب-تحديد طبيعة المثلث ABC

لدينا معاسبق

$$\begin{cases} AC = AB \\ (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$$

وبما ABC مثلث متقايس الأضلاع .

3-تعيين Z_D حتى يكون $ABCD$ معين

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DB}$$
$$z_{\overrightarrow{AC}} = z_{\overrightarrow{DB}}$$
$$z_C - z_A = z_B - z_D$$
$$z_D = z_B - z_C + z_A$$
$$z_D = -1 + i - \sqrt{3}(1+i) + 1 - i$$
$$z_D = -\sqrt{3} - \sqrt{3}i$$

4-أ-تحديد طبيعة التحويل T وعناصره المميزة

لدينا $|-1+i| = \sqrt{2} \neq 1$

وبما T تشابه مباشر

نسبته $k = \sqrt{2}$

زاويته $\theta = \arg(-1+i) = \frac{3\pi}{4}$

ومركزه $z_\omega = \frac{b}{1-a}$

$$z_\omega = \frac{1-3i}{1+1-i} = 1-i$$

أي مركزه A

ب-طبيعة التحويل ToT

ToT تشابه مباشر مركزه A ونسبته $k' = k^2 = 2$ وزاويته $\theta' = 2\theta = \frac{3\pi}{2}$

74. رياضي 2011 الموضوع 02

أجب بصحيح أو خطأ مع التبرير في كل حالة من الحالات الآتية:

1-أ-الشكل المثلثي للعدد المركب $a = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{i\sqrt{2}}{2}$ هو $-\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}$

ب- $a^{2011} + \bar{a} = 0$ حيث: $\bar{a}$ مرافق a

2-في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$.

أ-التحويل T الذي كتابته المركبة:

$$z' = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{i\sqrt{2}}{2}\right)z$$

دوران زاويته $-\frac{\pi}{4}$ ومركزه مبداء المعلم .

ب-مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث:

$\arg(z-i) = \frac{-\pi}{4}$ هي المستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة A ذات اللاحقة i وشعاع توجيه $\vec{u}$ لاحقته $1+i$

3-(u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_0 = \frac{1}{12}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{6}$

أ- $u_n = -\frac{7}{12}\left(\frac{3}{4}\right)^n + \frac{2}{3}$

ب-(u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$

ج-(u_n) متباعدة.

نص الإجابة

1-أ- التحقق أن الشكل المثلثي للعدد المركب

$$a = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

هو : $-\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}$

$$|a| = \sqrt{\frac{2}{4} + \frac{2}{4}} = 1$$
$$\arg(a) = \theta$$

ومنه الجواب خاطئ أي زاوية الدوران هي $\frac{3\pi}{4}$

2-جـ- التحقق أن مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث: $\arg(z-i)=-\frac{\pi}{4}$ هي المستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة A ذات اللاحقة i وشعاع توجيه $\vec{u}$ لاحقته $1+i$

$$\arg(z-i)=-\frac{\pi}{4}$$
$$z-i=ke^{-\frac{\pi}{4}} \qquad k\in\mathbb{R}_+^*$$
$$|z-i|=k \qquad k>0$$
$$AM=k$$
$$(\vec{u},\overrightarrow{AM})=-\frac{\pi}{4}$$
$$z_A=i$$

$A(0,1)$ ومنه مجموعة النقط في نصف مستقيم الذي مبدؤه A باستثناء النقطة A ويميل بزاوية قدرها $-\frac{\pi}{4}$

ومنه الجواب خاطئ

3-أ-التحقق أن:

$$u_n=-\frac{7}{12}\left(\frac{3}{4}\right)^n+\frac{2}{3}$$

لدينا:

$$u_{n+1}=\frac{3}{4}u_n+\frac{1}{6}=\frac{3}{4}\left[-\frac{7}{12}\left(\frac{3}{4}\right)^n+\frac{2}{3}\right]+\frac{1}{6}$$
$$=-\frac{7}{12}\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}+\frac{6}{12}+\frac{1}{6}$$
$$=-\frac{7}{12}\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}+\frac{3}{4}+\frac{1}{6}$$
$$=-\frac{7}{12}\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}+\frac{4}{6}\times\left(\frac{2}{2}\right)$$
$$=-\frac{7}{12}\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}+\frac{2}{3}=u_{n+3}$$

ومنه الجواب صحيح.

3-جـ-التحقق أن: (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$

لدينا:

$$u_{n+1}-u_n=\frac{3}{4}u_n+\frac{1}{6}-u_n$$
$$=\frac{1}{24}[-6u_n+4]$$
$$=\frac{1}{24}\left[-6\left(-\frac{7}{12}\left(\frac{3}{4}\right)^n+\frac{2}{3}\right)+4\right]$$
$$\frac{1}{24}\left(\frac{7}{2}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^n>0$$

لأنها الحركة من الألف إلى الياء

$$\begin{cases}\cos\theta=-\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}\Rightarrow\theta=\frac{3\pi}{4}$$

$$a=\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}$$

لدينا

$$-\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}$$
$$-\cos\frac{\pi}{4}-\left(-i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

نعلم أن: $-1=e^{i\pi}$

$$\begin{cases}\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\\ \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\end{cases}$$

ومنه:

$$-\cos\frac{\pi}{4}-\left(-i\sin\frac{\pi}{4}\right)=-\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$
$$e^{i\pi}\left(e^{-\frac{i\pi}{4}}\right)=e^{\frac{3\pi}{4}}$$

ومنه الجواب خاطئ لأنها ليست كتابة مثلثية لعدد مركب.

1-جـ- التحقق أن $a^{2011}+a=0$:

$$a^{2011}=\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$$
$$a^{2011}=\cos\left(\frac{2011(3\pi)}{4}\right)+i\sin\left(\frac{2011(3\pi)}{4}\right)$$
$$=\cos\left((4(1508)+1)\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left((4(1508)+1)\frac{\pi}{4}\right)$$
$$=\cos\left((4(1508))\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left((4(1508))\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)$$
$$=\cos\left(108\pi+\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(108\pi+\frac{\pi}{4}\right)$$
$$=\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

ومنه:

$$a^{2011}=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$a^{2011}+\overline{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}=0$$

ومنه محققة والجواب صحيح.

2-أ- التحقق أن التحويل T الذي كتابته المركبة: $z'=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{i\sqrt{2}}{2}\right)z$ دوران زاويته $-\frac{\pi}{4}$ ومركزه مبدأ المعلم

لدينا $z'=az$

$|a|=1$

T هو دوران مركزه المبدأ O

لكن $\arg(a)=\frac{3\pi}{4}$

(u_n) متقاربة تماما

(u_n) متقاربة

2- التحقق أن (u_n) متباعدة

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty}\left[-\frac{7}{12}\left(\frac{3}{4}\right)^n + \frac{2}{3}\right] = \frac{2}{3}$$

بما أن

$$-1 < \frac{3}{4} < 1$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$$

(u_n) متقاربة نحو $\frac{2}{3}$ ومنه الجواب خطأ

75. رياضي 2010 الموضوع 01

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة :

$$Z^3 - 3Z^2 + 3Z - 9 = 0 \quad ...(E)$$

1- نتحقق أن 3 حل للمعادلة (E) ، ثم عين الأعداد الحقيقية a و b و c بحيث ، من أجل كل عدد مركب Z فإن :

$$Z^3 - 3Z^2 + 3Z - 9 = (Z-3)(aZ^2 + bZ + c)$$

2- نحل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E)

3- المستوي منسوب الى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ النقط A و B و C صورة الأعداد المركبة $Z_A = 3$ و $Z_B = i\sqrt{3}$ و $Z_C = -i\sqrt{3}$

بين أن المثلث ABC متقايس الأضلاع

4- النقطة التي لاحقتها $Z_D = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$ و E صورتها بالدوران الذي مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{3}$ ، عين Z_E لاحقة النقطة E

5- النقطة التي لاحقتها $Z_F = 1 - i\sqrt{3}$

بالتأكد من $\frac{Z_F}{Z_E}$ واستنتج أن المستقيمين (OE) و (OF) متعامدان

6- عين Z_G لاحقة النقطة G بحيث يكون OEGF مربعا

حل نص الاجابة

$$Z^3 - 3Z^2 + 3Z - 9 = 0 \quad ...(E)$$

1- التحقق أن 3 حل لـ (E)

من أجل التحقق نعوض بـ(3)

$$3^3 - 3(3)^2 + 3(3) - 9 = 0$$
$$27 - 27 + 9 - 9 = 0$$
$$0 = 0 \text{ محققة}$$

ومنه 3 حل لـ(E)

تعيين الأعداد الحقيقية a, b, c حيث

$$Z^3 - 3Z^2 + 3Z - 9 = (Z-3)(aZ^2 + bZ + c)$$

لدينا

$$(Z-3)(aZ^2 + bZ + c)$$
$$= aZ^3 + bZ^2 + cZ - 3aZ^2 - 3bZ - 3c$$
$$= aZ^3 + (b-3a)Z^2 + (c-3b)Z - 3c$$

بالمطابقة مع (E) نجد

$$\begin{cases} a = 1 \\ b - 3a = -3 \\ c - 3b = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = 3 \end{cases}$$

1-ب- حل المعادلة (E)

$$(Z-3)(Z^2+3) = 0$$

$$\begin{cases} Z - 3 = 0 \\ Z^2 + 3 = 0 \end{cases} \quad \text{أو}$$

ومنه

$$\begin{cases} Z = 3 \\ Z = i\sqrt{3} \\ Z = -i\sqrt{3} \end{cases} \quad \begin{matrix} \\ \text{أو} \\ \text{أو} \end{matrix}$$

$$S = \{3, i\sqrt{3}, -i\sqrt{3}\}$$

2- اثبات أن ABC مثلث متقايس الأضلاع

$$\begin{cases} |Z_B - Z_A| = 2\sqrt{3} \\ |Z_C - Z_A| = 2\sqrt{3} \\ |Z_C - Z_B| = 2\sqrt{3} \end{cases}$$

لدينا

$$AB = AC = BC \quad \text{أي}$$

ومنه ABC متقايس الأضلاع .

3- تعيين Z_E لاحقة النقطة E لدينا

$$R(D) = E$$

$$Z_E - Z_0 = e^{i\frac{\pi}{3}}(Z_D - Z_0) \quad \text{ومنه}$$

$$Z_E = e^{i\frac{\pi}{3}} \times Z_D \quad \text{ومنه}$$

$$Z_E = 2e^{i\frac{7\pi}{6}}$$

$$Z_E = 2\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$$

$$Z_E = -\sqrt{3} - i$$

الأعداد المركبة من الألف إلى الياء

4-أ-حساب $\frac{Z_E}{Z_E}$

$$\frac{Z_F}{Z_E}=\frac{1-i\sqrt{3}}{-\sqrt{3}-i}=\frac{(1-i\sqrt{3})(-\sqrt{3}+i)}{(-\sqrt{3}-i)(-\sqrt{3}+i)}=\frac{4i}{4}=i$$

وعليه $\frac{Z_F-Z_O}{Z_E-Z_O}=i$

$$\left|\frac{Z_F-Z_O}{Z_E-Z_O}\right|=|i|=1$$

وعليه $\arg\left(\frac{Z_F-Z_O}{Z_E-Z_O}\right)=\arg(i)=\frac{\pi}{2}+2k\pi$

$$(\overrightarrow{OE},\overrightarrow{OF})=\frac{\pi}{2}+2k\pi \quad k\in\mathbb{Z}$$

OFE قائم في O ومتساوي الساقين:

وعليه (OE) و (OF) متعامدان

4-ب-تعيين Z_G حتى يكون $OEGF$ مربع

$$\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{FG}$$
$$Z_{\overrightarrow{OE}}=Z_{\overrightarrow{FG}}$$
$$Z_E-Z_O=Z_G-Z_F$$
$$-\sqrt{3}-i=Z_G-1+i\sqrt{3}$$

وعليه $Z_G=1-\sqrt{3}-i(1+\sqrt{3})$

76. رياضي 2010 الموضوع 02

المستوي منسوب الى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$

1-نسمي A ، B و I النقط التي لاحقاتها على الترتيب $Z_A=1-4i$ ، $Z_B=-1-2i$ و $Z_I=1-2i$

1-أ-علم النقط A ، B و I

1-ب-اكتب على الشكل الجبري العدد المركب $Z=\frac{Z_I-Z_A}{Z_I-Z_B}$

1-جـ-ماهو نوع المثلث IAB ؟

1-د- C صورة I بالتحاكي الذي مركزه A ونسبته 2 ، احسب اللاحقة Z_C للنقطة C

1-هـ- D مرجح الجملة $\{(A;1),(B;-1),(C;1)\}$ ، احسب اللاحقة Z_D للنقطة D

1-وجين أن $ABCD$ مربع

2-عين وانشئ (Γ_1) مجموعة النقط M من المستوي حيث :

$$\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}\right\|$$

3- عين وانشئ (Γ_2) مجموعة النقط M من المستوي حيث

$$\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=1$$

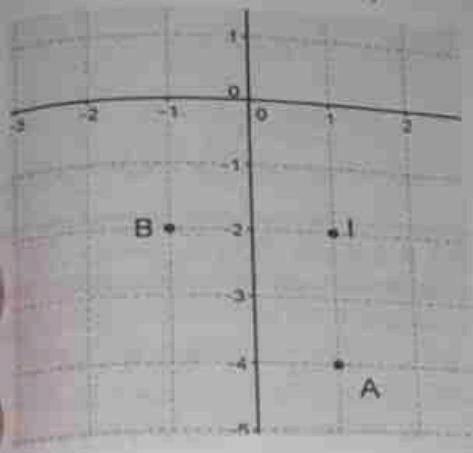
نص الإجابة

1-أ-تعليم النقط

$Z_A=1-4i$ $A(1,-4)$

$Z_B=-1-2i$ $B(-1,-2)$

$Z_I=1-2i$ $I(1,-2)$



1-ب-كتابة على الشكل الجبري العدد المركب

$z=\frac{z_I-z_A}{z_I-z_B}$

$$z=\frac{Z_I-Z_A}{Z_I-Z_B}=\frac{1-2i-(1-4i)}{1-2i-(1-2i)}=\frac{2i}{2}=i$$

1-جـ-تحديد نوع المثلث IAB

لدينا $\frac{Z_I-Z_A}{Z_I-Z_B}=i$

وعليه
$$\begin{cases}\left|\frac{Z_I-Z_A}{Z_I-Z_B}\right|=1\\ \arg\left(\frac{Z_I-Z_A}{Z_I-Z_B}\right)=\frac{\pi}{2}+2k\pi\end{cases}$$

$$\begin{cases}AI=BI\\ (\overrightarrow{BI},\overrightarrow{AI})=\frac{\pi}{2}+2k\pi\end{cases}$$

وعليه المثلث IAB قائم في I ومتساوي الساقين .

1-د- حساب Z_C حيث $h(I)=C$

ومنه
$$Z_C-Z_A=2(Z_I-Z_A)$$
$$Z_C=2(Z_I-Z_A)+Z_A$$
$$z_C=2-4i-1+4i$$
$$Z_C=1$$

1-هـ حساب Z_D

وعليه
$$Z_D=\frac{Z_A-Z_B+Z_C}{1-1+1}$$
$$Z_D=3-2i$$

1- تبيان أن $ABCD$ مربع

$Z_{AB} - Z_B - Z_A = -2 + 2i$

$Z_{DC} - Z_C - Z_D = -2 + 2i$ ومنه

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ أي

ومنه الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع

ولدينا المثلث IAB قائم ومتساوي الساقين أي

$IB = IA$ و $(IB) \perp (IA)$

ومن علاقة التحالكي $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AI}$

أي النقط C, I, A في استقامية

ومنه القطران متعامدان و متقايسان وعليه $ABCD$ مربع

2- تعيين وانشاء (Γ_1)

$\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}\|$

$\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$

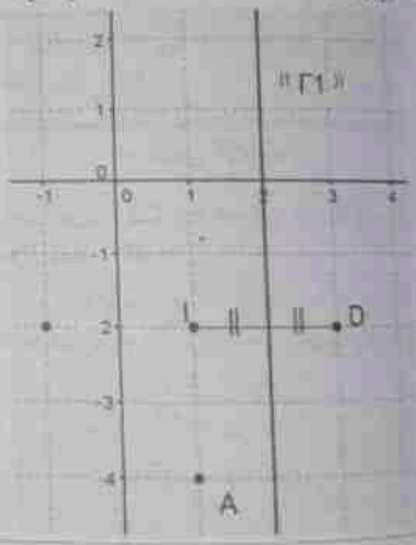
$= \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{MD} - \overrightarrow{DB}$

$+ \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{MD}$

$\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = 0$

$\|\overrightarrow{MD}\| = \|\overrightarrow{MI}\|$ يكافئ

ومنه (Γ_1) هي محور القطعة المستقيمة $[DI]$.



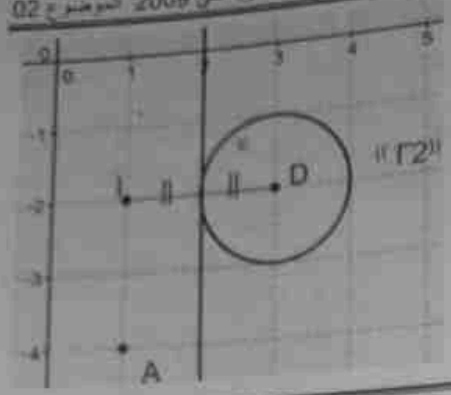
3- تعيين وانشاء (Γ_2)

$\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = 1$

$\{(A,1);(B,-1);(C,1)\}$ مرجح الجملة

أي $\|\overrightarrow{MD}\| = 1$

ومنه (Γ_2) دائرة مركزها D ونصف قطرها 1.



77. رياضي 2009 الموضوع 02

نرفق بكل مركب z يخالف عن 1 العدد المركب $f(z)$ حيث :

$$f(z) = \frac{z - i}{z - 1}$$

1-حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة :

$(45 + 45i)f(z) = 23 + 45i - 2z$

2-لتكن M صورة العدد المركب z في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$

2-أ-عين مجموعة النقط M بحيث يكون $f(z)$ عددا حقيقيا سالبا تماما

2-ب-احسب العدد المركب z_0 بحيث :

$|f(z_0)| = 1$ و $\arg(f(z_0)) = \frac{3\pi}{2}$

3-في المستوي المركب نعتبر النقط A ، B و C صورة الأعداد المركبة 1 ، i و z_0 على الترتيب

3-أ-ماهو نوع المثلث ABC ؟

3-ب-عين النقطة D نظيرة C بالنسبة الى المستقيم (AB) واستنتج طبيعة الرباعي $ACBD$

نص الإجابة

1-حل المعادلة

$(45 + 45i)f(z) = 23 + 45i - 2z$

تكافئ $(45 + 45i)\left(\frac{z-i}{z-1}\right) = 23 + 45i - 2z$

$z^2 + 10z + 34 = 0$

$\Delta = -36 = (6i)^2$

$z_1 = \frac{-10 - 6i}{2} = -5 - 3i$

$z_2 = \frac{-10 + 6i}{2} = -5 + 3i$

$S = \{-5 - 3i, -5 + 3i\}$

78. رياضي 2008 الموضوع 01

المستوي منسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ ، نعتبر النقطتين A و B اللتين لاحقتيهما $\sqrt{3}-i$ و $\sqrt{3}+3i$ على الترتيب

1-أكتب العبارة المركبة للتشابه المباشر S الذي مركزه O ويحول A الى B ثم عين زاويته ونسبته

2-نعرف متتالية النقط من المستوي المركب كما يأتي $A_0 = A$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $A_{n+1} = S(A_n)$ ، نرمز الى لاحقة A_n بالرمز z_n

2-أ-أنشئ في المستوي المركب النقط A_0 و A_1 و A_2

2-ب-برهن أن : $z_n = 2(\sqrt{3})^n e^{i\left(\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)}$

2-جـ-عين مجموعة الأعداد الطبيعية n التي تنتمي من أجلها النقطة A_n الى المستقيم (OA_1)

3-نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة كما يلي $u_0 = A_0A_1$ و $u_n = A_nA_{n+1}$

من أجل كل عدد طبيعي n

3-أ-بين أن المتتالية (u_n) هندسية يطلب تحديد حدها الأول u_0 وأساسها q

3-ب-استنتج عبارة u_n بدلالة n

3-جـ-احسب ، بدلالة n ، المجموع S_n حيث :

$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$

، ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

نص الإجابة

1-العبارة المركبة للتشابه المباشر S الذي مركزه O ويحول A إلى B

لدينا $S(A) = B$ ومنه $z_B - z_0 = a(z_A - z_0)$

$z_A = \sqrt{3}-i$ ، $z_B = \sqrt{3}+3i$

$z_B = az_A$

وعليه $a = \frac{z_B}{z_A} = \frac{\sqrt{3}+3i}{\sqrt{3}-i}$

$= \frac{\sqrt{3}+3i}{\sqrt{3}-i} \times \frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}+i}$

$= i\sqrt{3}$

إذن $z' = i\sqrt{3}z$

تعيين نسبة وزاوية التشابه S

$k = |a| = |i\sqrt{3}| = \sqrt{3}$

$\theta = \arg(a) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$

2-تعيين مجموعة النقط M حيث $f(z)$ عدد حقيقي سالب تماما

$\arg(f(z)) = \arg\left(\frac{z-i}{z-1}\right) = \pi + 2k\pi$

أي $(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{BM}) = \pi + 2k\pi$

حيث $A(1,0)$ $B(0,1)$ ومنه مجموعة النقط M هي : القطعة المستقيمة $[AB[$

2-بيد حساب العدد المركب z_0

$\begin{cases} |f(z_0)| = 1 \\ \arg(f(z_0)) = \frac{3\pi}{2} \end{cases}$

وعليه $f(z_0) = 1\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right) = -i$

ومنه $\frac{z_0-i}{z_0-1} = -i$

$z_0 - i = -iz_0 + i$

$z_0(1+i) = 2i$

$z_0 = \frac{2i(1-i)}{(1+i)(1-i)}$

وعليه $z_0 = 1+i$

3-أنوع المثلث ABC

$\begin{cases} z_A = 1 \\ z_B = i \\ z_C = 1+i \end{cases}$

لدينا $\frac{z_A-z_C}{z_B-z_C} = i$

$\begin{cases} \left|\frac{z_A-z_C}{Z_B-Z_C}\right| = 1 \\ \arg\left(\frac{z_A-z_C}{z_B-z_C}\right) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$

$\begin{cases} CA = CB \\ (\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CA}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases}$

وعليه ABC قائم في C ومتساوي الساقين .

3-بتعيين إحداثيات D نظيرة C بالنسبة للمستقيم (AB)

ومنه $D(0,0)$

طبيعة الرباعي $ACBO$

لدينا $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{BC}$

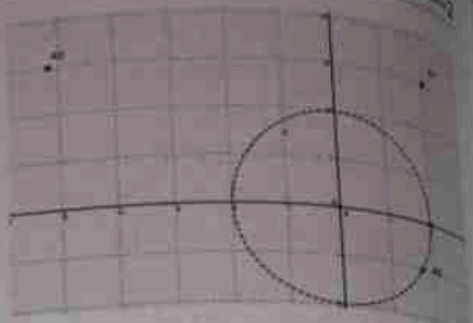
$z_A - z_D = z_C - z_B$

$1 - 0 = 1 + i - 0$

$1 = 1$ محققة

ومنه $ABCD$ متوازي أضلاع والمثلث ABC قائم ومتساوي الساقين أي الرباعي فيه ضلعان متعامدان متجاوران ومتقايسان ومنه $ABCD$ مربع.

إنشاء A_2, A_1, A_0



$z_0 = \sqrt{3} - i$

ومنه $A_0(\sqrt{3}, -1)$

$A_1 = S(A_0)$

ومنه $z_1 = i\sqrt{3}z_0 = i\sqrt{3}(\sqrt{3} - i)$

$= \sqrt{3} + 3i$

ومنه $A_1(\sqrt{3}, 3)$

$A_2 = S(A_1)$

ومنه $z_2 = i\sqrt{3}z_1 = i\sqrt{3}(\sqrt{3} + 3i)$

$= -3\sqrt{3} + 3i$

ومنه $A_2(-3\sqrt{3}, 3)$

إثبات البرهان أن $z_n = 2(\sqrt{3})^n e^{i\left(\frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right)}$

لدينا $A_{n+1} = S(A_n)$

ومنه

$$z_{n+1} = i\sqrt{3}z_n$$

$$\begin{cases} z_1 = i\sqrt{3}z_0 \\ z_2 = i\sqrt{3}z_1 \\ \cdots \\ z_{n-1} = i\sqrt{3}z_{n-2} \\ z_n = i\sqrt{3}z_{n-1} \end{cases}$$

$z_1 \times z_2 \times \ldots \times z_{n-1} \times z_n$

$= \left(\sqrt{3} \times \sqrt{3} \times \ldots \times \sqrt{3}\right) \times i^n$

$\times (z_0 \times z_1 \times \ldots \times z_{n-1})$

بالاختزال نجد

$z_n = (\sqrt{3})^n \times i^n \times (z_0)$

حيث $i^n = \left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right) = e^{\frac{in\pi}{2}}$

$z_0 = \sqrt{3} - i = 2e^{-\frac{i\pi}{6}}$

وعليه $z_n = (\sqrt{3})^n \times e^{\frac{n\pi}{2}} \times 2e^{-i\frac{\pi}{6}}$

وعليه $z_n = 2(\sqrt{3})^n e^{i\left(\frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right)}$

2-جـ-تعيين مجموعة الأعداد الطبيعية n حتى تكون النقط A_n من المستقيم (OA_1): $A_n \in (OA_1)$ أي O, A_1, A_n على استقامة واحدة

أي

$$\frac{z_n - z_0}{z_1 - z_0} = \lambda \in \mathbb{R}$$

لدينا $\frac{z_n}{z_1} = \frac{2(\sqrt{3})^n e^{i\left(\frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right)}}{2(\sqrt{3}).e^{i\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right)}}$

$$= \frac{(\sqrt{3})^{n-1}.e^{i\left(\frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right)}}{e^{i\frac{\pi}{3}}}$$

$$= (\sqrt{3})^{n-1}.e^{i\left(\frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right)} \times e^{-\frac{i\pi}{3}}$$

$$= (\sqrt{3})^{n-1}.e^{i\left(\frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right)}$$

$$= (\sqrt{3})^{n-1}\left[\cos\left((n-1)\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) + i\sin\left((n-1)\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)\right]$$

$\frac{z_n}{z_1} \in \mathbb{R}$

يكافئ $\sin\left[(n-1)\frac{\pi}{2}\right] = 0$

وعليه $(n-1).\frac{\pi}{2} = k\pi$

$n - 1 = 2k$

حيث $n = 2k + 1$

3-

$$\begin{cases} u_0 = A_0A_1 = |z_1 - z_2| \\ u_n = A_nA_{n+1} = |z_{n+1} - z_n| \end{cases}$$

3-أ-بيان أن (u_n) هندسية

حتى تكون (u_n) هندسية يجب أن $u_{n+1} = q.u_n$

لدينا $u_{n+1} = A_{n+2}A_{n+1} = |z_{n+2} - z_{n+1}|$

ومنه $u_{n+1} = \left|i\sqrt{3}z_{n+1} - i\sqrt{3}\,z_n\right|$

$= \left|i\sqrt{3}\,(z_{n+1} - z_n)\right|$

$= \left|i\sqrt{3}\right|.|z_{n+1} - z_n|$

$u_{n+1} = \sqrt{3}.u_n$

إذن (u_n) متتالية هندسية أساسها $q = \sqrt{3}$

حدها الأول

$u_0 = A_0A_1 = |z_1 - z_0|$

$= \left|\sqrt{3} + 3i - \sqrt{3} + i\right| = 4$

3-بـ-استنتاج عبارة u_n بدلالة n

$$u_n = u_p(\sqrt{3})^{n-p}$$
$$u_n = 4(\sqrt{3})^n$$

3-جـ-حساب المجموع S_n

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$$
$$= 4\left[\frac{(\sqrt{3})^{n+1} - 1}{\sqrt{3} - 1}\right]$$
$$S_n = \frac{4}{\sqrt{3}-1}\left((\sqrt{3})^{n+1} - 1\right)$$ وعليه

حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$$

لأن $\frac{4}{\sqrt{3}-1} > 0$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1 + (\sqrt{3})^{n+1}\right) = -\infty$

$-\infty(-) = +\infty$

79. رياضي 2008 الموضوع 02

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ كثير الحدود $p(z)$ المعرفة كما يلي :

$$p(z) = 2z^4 - 2iz^3 - z^2 - 2iz + 2$$

1-بين أنه إذا كان a جذرا لكثير الحدود $p(z)$ فإن $\frac{1}{a}$ جذرا له أيضا

2- تحقق أن $1+i$ جذر لـ كثير الحدود $p(z)$

3-حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $p(z) = 0$

4-اكتب الحلول على الشكل الأسي

5-لتكن A و B و C و D النقط من المستوي المركب المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ والتي لاحقتها على الترتيب : $1+i$ و $-1+i$ و $\frac{m}{2} - \frac{m}{2}i$ و $-\frac{m}{2} - \frac{m}{2}i$

حيث m عدد حقيقي ، عين m حتى يكون الرباعي $ABCD$ مربعا

✍ نص الإجابة

$$p(z) = 2z^4 - 2iz^3 - z^2 - 2iz + 2$$

1-بيان انه إذا كان a جذرا لـ $p(z)$ فإن $\frac{1}{a}$ جذرا له أيضا :

a جذر لـ $p(z)$ أي :

$$p(a) = 0$$
$$2a^4 - 2ia^3 - a^2 - 2ia + 2 = 0$$

ومنه $a^4\left[2 - 2i\left(\frac{1}{a}\right) - \left(\frac{1}{a^2}\right) - 2i\left(\frac{1}{a^3}\right) + 2\left(\frac{1}{a^4}\right)\right]$

$$a^4\left[2\left(\frac{1}{a}\right)^4 - 2i\left(\frac{1}{a}\right)^3 - \left(\frac{1}{a}\right)^2 - 2i\left(\frac{1}{a}\right) + 2\right] = 0$$

$a = 0$ أي $a^4 = 0$ ومنه إما

وهذا مستحيل لأن $p(0) \neq 0$

أو $2\left(\frac{1}{a}\right)^4 - 2i\left(\frac{1}{a}\right)^3 - \left(\frac{1}{a}\right)^2 - 2i\left(\frac{1}{a}\right) + 2 = 0$

إذن $p\left(\frac{1}{a}\right) = 0$ ومنه $\frac{1}{a}$ جذر لـ $p(z)$

2-التحقق أن $1+i$ و $(-1+i) = z$ جذران لـ $p(z)$

أولا: التحقق من $z = 1+i$ جذر لـ $p(z)$

$$p(1+i) = 2(1+i)^4 - 2i(1+i)^3 - (1+i)^2 - 2i(1+i) + 2$$
$$= 2[(1+i)^2] - 2i(1+i)(1+i)^2 - (1+i)^2 - 2i(1+i) + 2$$
$$= -8 + 4 + 4i - 4i + 4 = 0$$

إذن $p(1+i) = 0$

ومنه $1+i$ جذر لـ$p(z)$

ثانيا: التحقق من $z = -1+i$ جذر لـ $p(z)$

$$p(-1+i) = 2(-1+i)^4 - 2i(-1+i)^3 - (-1+i)^2 - 2i(-1+i) + 2$$
$$= 2[(-1+i)^2] - 2i(-1+i)(-1+i)^2 - (-1+i)^2 - 2i(-1+i) + 2$$
$$= -8 - 4i + 4 + 2i + 2i + 2 + 2 = 0$$

إذن $p(-1+i) = 0$

ومنه $(-1+i)$ جذر لـ$p(z)$

3-حل $p(z) = 0$

لدينا $1+i$ و $-1+i$ جذران لـ$p(z)$ أي هما حلان للمعادلة $p(z) = 0$

لكن لدينا a جذر $\frac{1}{a}$ جذرا له أيضا.

أي كذلك

$$p\left(\frac{1}{+1+i}\right) = 0$$

و

$$p\left(\frac{1}{-1+i}\right) = 0$$

$$\frac{1}{1+i} = \left(\frac{1}{1+i}\right)\left(\frac{(1-i)}{(1-i)}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$$

$$z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

$$z_3 = -1 + i$$

$$|-1+i| = |1+1| = \sqrt{2}$$

$$\begin{cases} \cos\theta_3 = \dfrac{-\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta_3 = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta_3 = \frac{3\pi}{4}$$

ومنه: $z_3 = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$

$$z_4 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}}$$

5-تعيين m حتى يكون $ABCD$ مربع

لدينا $z_A = 1 + i$ ، $z_B = -1 + i$

$$z_C = -\frac{m}{2} - \frac{mi}{i} \quad , \quad z_D = \frac{m}{2} - \frac{m}{2}i$$

$ABCD$ مربع يكافئ

$ABCD$ متوازي الأضلاع أي $z_{AB} = z_{DC}$

$$-1 + i - 1 - i = -\frac{m}{2} - \frac{m}{2}i - \frac{m}{2} + \frac{m}{2}$$

$$-2 = -m$$

ومنه $m = 2$.

السلسلة الثانية

$$\frac{1}{-1+i} = \left(\frac{1}{-1+i}\right)\left(\frac{(-1-i)}{(-1-i)}\right) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$$

$S = \left\{1+i, -1+i, \frac{1}{i} - \frac{1}{2}i, -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right\}$ ومنه

إمكانية الحلول على الشكل الأسي

$$z_1 = 1 + i$$

$$|1+i| = |1+1| = \sqrt{2}$$

$$\begin{cases} \cos\theta_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta_1 = \frac{\pi}{4}$$

ومنه $z_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

$$z_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$$

$$\left|\frac{1}{1+i}\right| = |1+1| = \sqrt{2}$$

$$\begin{cases} \cos\theta_2 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta_2 = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta_2 = -\frac{\pi}{4}$$

ومنه

مواضيع مقترحة

80. موضوع مقترح رقم 01

تابع على الموضوع : موضوع مقترح رقم 01 2019

I-1-حل في $\mathbb{C}$ مجموعة الأعداد المركبة المعادلة (E) ذات المجهول z التالية

$$z^2-(4\sin\theta)z+4=0 \quad ...(E)$$

حيث $\theta\in]-\pi,\pi]$

2-اكتب حلي المعادلة (E) على الشكل المثلثي ثم على الشكل الأسي بدلالة θ.

3-عين لما $\theta=\frac{\pi}{3}$ بين أن $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2019}=-1$

4-نعتبر العدد المركب α حيث $\alpha=1+i\sqrt{3}$ عين قيم العدد الطبيعي n

حتى يكون العدد $(\alpha)^n$:

أ- حقيقي

ب- حقيقي موجب

جـ- حقيقي سالب

د- تخيلي صرف

II-1-نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(o,\vec{u},\vec{v})$ النقط A,B,C لواحقها

$z_A=1+i\sqrt{3}$ ، $z_B=\overline{z_A}$ و $z_C=4+i\sqrt{3}$

على الترتيب

1-أ-اكتب على الشكل الأسي العدد المركب $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ ثم فسر طويلته و عمدته هندسيا.

1-ب-استنتج طبيعة المثلث ABC

2-عين مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z (M تختلف عن A) في كل حالة.

$$\arg\left(\frac{z_B-z}{z_A-z}\right)=k\pi \qquad k\in\mathbb{Z}$$

$$\arg\left(\frac{z_B-z}{z_A-z}\right)=2k\pi \qquad k\in\mathbb{Z}$$

$$\arg\left(\frac{z_B-z}{z_A-z}\right)=\pi+2k\pi \qquad k\in\mathbb{Z}$$

و

$$\arg\left(\frac{z_B-z}{z_A-z}\right)=\frac{\pi}{2}+k\pi \qquad k\in\mathbb{Z}$$

$$\arg\left(\frac{z_B-z}{z_A-z}\right)=\frac{\pi}{2}+2k\pi \qquad k\in\mathbb{Z}$$

$$\arg\left(\frac{z_B-z}{z_A-z}\right)=-\frac{\pi}{2}+2k\pi \qquad k\in\mathbb{Z}$$

و

$$\arg(z-z_A)=\frac{\pi}{2}$$

$$\arg(z-z_A)=\frac{\pi}{4}$$

$$\arg(z)^2=2k\pi$$

$$z-z_A=ke^{i\frac{\pi}{4}} \qquad k\in\mathbb{R}_+$$

$$z=e^{i\theta} \qquad \theta\in\mathbb{R}$$

الحل

1-حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E) :

$$z^2-(4\sin\theta)z+4=0$$

$$\Delta=b^2-4ac$$

$$\Delta=(-4\sin\theta)^2-4(1)(4)$$

$$=16\sin^2\theta-16$$

$$\Delta=16(\sin^2\theta-1)$$

نعلم أن $(\cos^2\theta+\sin^2\theta=1)$

ومنه $\sin^2\theta-1=-\cos^2\theta$

$$\Delta=-16\cos^2\theta=16i^2\cos^2\theta$$

$$\sqrt{\Delta}=4i\cos\theta$$

ومنه $z_1=\frac{4\sin\theta+4i\cos\theta}{2}$

$$=2\sin\theta+2i\cos\theta$$

$$z_2=\overline{z_1}=2\sin\theta-2i\cos\theta$$

$$S=\{2\sin\theta+2i\cos\theta\,,2\sin\theta-2i\cos\theta\}$$

2-كتابة حلي المعادلة (E) على الشكل المثلثي ثم الشكل الأسي بدلالة θ

- أولا z_1:

نعلم أن: $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta$ ... ... (1)

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta \text{ ... ... (2)}$$

$$z_1=2\sin\theta+2i\cos\theta \text{ ... ... (3)}$$

نعوض (1) و (2) في المعادلة (3)

$$z_1=2\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+2i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$$

ومنه الشكل المثلثي لـ z_1 هو:

ومنه $z_1=2\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right)$

ومنه الشكل الأسي لـ z_1 هو:

$$z_1=2e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}$$

- ثانيا z_2

الشكل المثلثي لـ z_2:

$$z_2=\overline{z_1}=2\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+2i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right)$$

الشكل الأسي لـ z_2 : $z_2=2e^{i\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)}$

$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2019} = -1$ ب- نبرهن أن:

من أجل: $\theta = \frac{\pi}{3}$ نجد

$z_1 = 2e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)} = 2e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)}$

$z_2 = 2e^{i\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{2}\right)} = 2e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)}$

$$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2019} = \left(\frac{2e^{i\frac{\pi}{6}}}{2e^{-i\frac{\pi}{6}}}\right)^{2019} = \left(e^{i\frac{\pi}{6}}e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^{2019}$$

$$= \left(e^{i\frac{2\pi}{6}}\right)^{2019} = e^{i2019\frac{\pi}{3}}$$

$$= e^{i673\pi}$$

نكتبه على الشكل المثلثي

$$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2019} = \cos(673\pi) + i\sin(673\pi)$$

$$= \cos(672\pi + \pi) + i\sin(672\pi + \pi)$$

بما أن 672 عدد زوجي

$$= \cos(\pi) + i\sin(\pi) = -1$$

إذن

$$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2019} = -1$$

نعين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون العدد (α^n) حقيقي:

$$\alpha = 1 + i\sqrt{3}$$

$$|\alpha| = \sqrt{1+3} = 2$$

نضع $\arg(\alpha) = \theta'$

$$\begin{cases} \cos\theta' = \frac{1}{2} \\ \sin\theta' = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta' = \frac{\pi}{3}$$

$$\alpha = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$\alpha^n = \left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^n = 2^n e^{in\frac{\pi}{3}}$$

$$\alpha^n = 2^n\left(\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)\right)$$

لتكن α^n حقيقي

يعني $\sin\frac{n\pi}{3} = 0$

و $\cos\frac{n\pi}{3} \neq 0$

$$\frac{n\pi}{3} = k\pi$$

إذن $n = 3k$

α^n حقيقي موجب

معناه $\sin\frac{n\pi}{3} = 0$ و $\cos\frac{n\pi}{3} \geq 0$

أي $\frac{n\pi}{3} = 2k\pi$

إذن $n = 6k$

جـ- α^n حقيقي سالب:

معناه $\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) = 0$ و $\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) \leq 0$

أي $\frac{n\pi}{3} = \pi + 2k\pi$

ومنه $n = 3 + 6k$

د- α^n يكون تخيلي صرف:

أي $\cos\frac{n\pi}{3} = 0$

أي $\frac{n\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k\pi$

ومنه $\frac{n}{3} = \frac{1}{2} + k$

$n = \frac{3}{2} + 3k$

$\left(\frac{3}{2}\right)$ ليس عدد طبيعي

نضرب الطرفين في 2

$$2n = \frac{2\times 3}{2} + 2\times 3k$$

$$2n = 3 + 6k$$

$$2n - 6k = 3 \ldots\ldots (E')$$

و $PGCD(6,2) = 2$

و 2 لا يقسم العدد 3 أي لا يوجد حلول للمعادلة (E')

أي لا يوجد قيم n الطبيعية حتى يكون α^n تخيلي صرف

1- اكتابة العدد $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ على الشكل الأسي

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{4+i\sqrt{3}-1-i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}-1-i\sqrt{3}} = \frac{3(i\sqrt{3})}{-2i\sqrt{3}(i\sqrt{3})}$$

$$= \frac{3i\sqrt{3}}{6} = \frac{i\sqrt{3}}{2}$$

أي طويلته: $\left|\frac{i\sqrt{3}}{2}\right| = \frac{\sqrt{3}}{2}$

وعمدته: $\arg\left(i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

ومنه نكتب على الشكل الأسي $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{\sqrt{3}}{2}e^{i\frac{\pi}{2}}$

التفسير الهندسي:

$$\left|\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{|z_C - z_A|}{|z_B - z_A|} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

ومنه أي $\frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$AC = \frac{\sqrt{3}}{2}AB$

و $\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

معناه $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

استنتاج طبيعة المثلث ABC

بما أن $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

فإن المثلث ABC قائم في A

2-تعيين مجموعة النقط M في كل حالة

$\arg\left(\frac{z_B-z}{z_A-z}\right)=k\pi$ مع $k\in\mathbb{Z}$ ..... (1)

معناه $(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB})=k\pi$

اي النقط A ، B و M في استقامة واحدة

مجموعة النقط هي المستقيم (AB) باستثناء A و B

$\arg\left(\frac{z_B-z}{z_A-z}\right)=2k\pi$ مع $k\in\mathbb{Z}$ ..... (2)

معناه $(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB})=2k\pi$

مجموعة النقط هي المستقيم (AB) باستثناء القطعة $[AB]$

$\arg\left(\frac{z_B-z}{z_A-z}\right)=\pi+2k\pi$ مع $k\in\mathbb{Z}$ ..... (3)

معناه $(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB})=\pi+2k\pi$

مجموعة النقط هي القطعة المستقيمة $[AB]$

$\arg\left(\frac{z_B-z}{z_A-z}\right)=\frac{\pi}{2}+k\pi$ مع $k\in\mathbb{Z}$ ..... (4)

معناه $(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB})=\frac{\pi}{2}+k\pi$

اي أن المثلث ABM قائم في M

مجموعة النقط M من المستوي هي الدائرة التي قطرها AB باستثناء النقطتين A و B

$\arg\left(\frac{z_B-z}{z_A-z}\right)=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ مع $k\in\mathbb{Z}$ ..... (5)

معناه $(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB})=\frac{\pi}{2}+2k\pi$

يعني المثلث ABM قائم في M

مجموعة النقط M من المستوي هي القوس $\overset{\frown}{AB}$ بالاتجاه الغير مباشر الذي قطره $[AB]$ باستثناء A و B

$\arg\left(\frac{z_B-z}{z_A-z}\right)=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$ مع $k\in\mathbb{Z}$ ..... (6)

معناه $(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB})=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$

يعني أن المثلث ABM قائم في M :

نقول إن مجموعة النقط M من المستوي هو القوس $\overset{\frown}{AB}$ بالاتجاه المباشر الذي قطره $[AB]$ باستثناء A و B

$\arg(z-z_A)=\frac{\pi}{2}$ ..... (7)

معناه $(\vec{u};\overrightarrow{AM})=\frac{\pi}{2}+2k\pi$

مجموعة النقط M من المستوي هي نصف مستقيم شاقولي مبداه A باستثناء A

$\arg(z-z_A)=\frac{\pi}{4}$ ..... (8)

معناه $(\vec{u};\overrightarrow{AM})=\frac{\pi}{4}+2k\pi$

ومنه مجموعة النقط من المستوي هي نصف مستقيم مبتوء A باستثناء A ويميل بزاوية $\frac{\pi}{4}$

$\arg(z)^2=2k\pi$ ..... (9)

ومنه $2\arg(z)=2k\pi$

اي $\arg(z)=k\pi$

معناه $(\vec{u};\overrightarrow{OM})=k\pi$

تقول مجموعة النقط M من المستوي هي محور الفواصل باستثناء A

$z-z_A=k\,e^{\frac{i\pi}{4}}$ مع $k\in\mathbb{R}$ ..... (10)

معناه $k\geq 0$

اي $|z-z_A|=k$ و $(\vec{u};\overrightarrow{AM})=\frac{\pi}{4}+2k\pi$

اي $AM=k$ و $(\vec{u};\overrightarrow{AM})=\frac{\pi}{4}+2k\pi$

مجموعة النقط M من المستوي هي نصف مستقيم مبتوء A ويميل بزاوية $\frac{\pi}{4}$

$z=e^{i\theta}$ مع $\theta\in\mathbb{R}$ ..... (11)

معناه $|z-z_O|=1$ و $(\vec{u};\overrightarrow{OM})=\theta$

اي $OM=1$ و $(\vec{u};\overrightarrow{AM})=\theta$

مجموعة النقط M من المستوي هي دائرة مركزها O ونصف قطرها $r=1$

81. موضوع مقترح رقم 02

الاسم على اليوتيوب : موضوع مقترح رقم 02 2019

1-حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة

$$(z^2+2z+4)(z^2-2\sqrt{3}z+4)=0$$

2-المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(o,\vec{u},\vec{v})$ النقط A,B,C و D من المستوي لاحقاتها على الترتيب

$$z_A=\sqrt{3}+i \qquad z_B=\overline{z_A}$$
$$z_C=-1-i\sqrt{3} \qquad z_D=\overline{z_C}$$

2-أ-اكتب كل من z_A, z_B, z_C و z_D على الشكل الأسي.

ثم استنتج أن النقط A,B,C و D تنتمي إلى نفس الدائرة (C) التي يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها ثم أنشئها.

2-ب-بين أن العدد $(z_A)^{2019}$ تخيلي صرف ثم أن العدد $(z_D)^{1440}$ عدد طبيعي.

2-جـ-احسب $\frac{z_D-z_C}{z_A-z_B}$ وفسر ذلك هندسيا، ثم استنتج طبيعة الرباعي $ABCD$

3-z_n العدد المركب الذي طويلته $\frac{1}{2^n}$ وعمدته $\frac{n\pi}{6}$ حيث n عدد طبيعي.

3-أ-عين قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون العدد z_n تخيلي صرف.

3-ب-ليكن العدد المركب L_n المعرف بـ $L_n=z_D\times z_n$

على الشكل الجبري L_1 و L_0

المعرفتين من أجل (u_n) و (v_n)

$u_n = |L_n|$ و $v_n = \arg(L_n)$

n عدد طبيعي

(u_n) هندسية، و أن المتتالية

(v_n) حسابية، يطلب تعيين الأساس و الحد الأول لكل

$M_n, \dots, M_2, M_1$ صور الأعداد

$L_n, \dots, L_2, L_1$ على الترتيب.

بدلالة n

$$S_n = \|\overrightarrow{OM_0}\| + \|\overrightarrow{OM_1}\| + \cdots + \|\overrightarrow{OM_n}\|$$

$$T_n = (\vec{u}, \overrightarrow{OM_0}) + (\vec{u}, \overrightarrow{OM_1}) + \cdots + (\vec{u}, \overrightarrow{OM_n})$$

$\lim_{n \to +\infty} S_n$

قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها تكون النقط

M_n و $0,0$ في استقامية

الحل

C في المعادلة

$$(z^2 + 2z + 4)(z^2 - 2\sqrt{3}z + 4) = 0$$

يساوي الصفر

$$\begin{cases} (z^2 + 2z + 4) = 0 \quad \dots (1) \\ (z^2 - 2\sqrt{3}z + 4) = 0 \quad \dots (2) \end{cases}$$

المميز لـ(1)

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Rightarrow \Delta = 4 - 16 = -12 = 12i^2$$

$$\sqrt{\Delta} = 2i\sqrt{3}$$

حلين

$$z_1 = \frac{-2 - 2i\sqrt{3}}{2}$$

$$= -1 - i\sqrt{3}$$

$$\begin{cases} z_1 = -1 - i\sqrt{3} \\ z_2 = \overline{z_1} = -1 + i\sqrt{3} \end{cases}$$

المميز لـ(2)

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 2i$$

$$z_3 = \frac{2\sqrt{3} - 2i}{2} = \sqrt{3} - i$$

$$z_4 = \overline{z_3} = \sqrt{3} + i$$

$$S = \{z_1, z_2, z_3, z_4\}$$

2-أ-كتابة الشكل الأسي لكل من z_D, z_C, z_B, z_A

$$z_A = \sqrt{3} + i$$

$$|z_A| = \sqrt{3 + 1} = 2$$

$$\arg(z_A) = \theta_A \Rightarrow \begin{cases} \cos\theta_A = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta_A = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \theta_A = \frac{\pi}{6}$$

$$z_A = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$$

ومنه $z_B = \overline{z_A} = 2e^{-i\frac{\pi}{6}}$

$z_C = -1 - i\sqrt{3}$ و:

$$|z_C| = \sqrt{1 + 3} = 2$$

$$\arg(z_C) = \theta_C \Rightarrow \begin{cases} \cos\theta_C = -\frac{1}{2} \\ \sin\theta_C = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$\theta_C = \frac{\pi}{3} - \pi = -\frac{2\pi}{3}$$

$$z_C = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

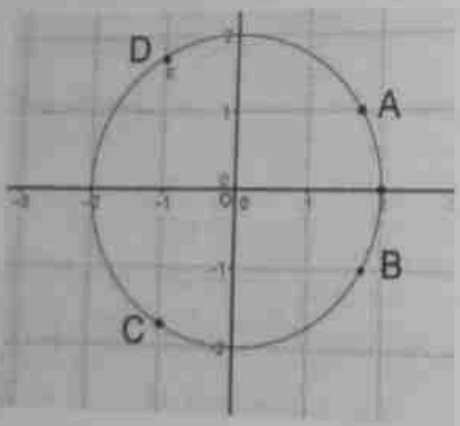
$$z_D = \overline{z_C} = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

بما أن النقط C, B, A تنتمي إلى نفس الدائرة (C)

$$|z_A| = |z_B| = |z_C| = |z_D| = OA = OB$$
$$= OC = OD = r = 2$$

ومنه النقط تنتمي الى نفس الدائرة (C) التي مركزها المبدأ O ونصف قطرها $r = 2$

-إنشاء الدائرة



2-ب-البرهان أن $(z_A)^{2019}$ تخيلي صرف

$$(z_A)^{2019} = \left(2e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^{2019}$$

حسب دستور موافر

$$= 2^{2019}e^{i\left(\frac{2019\pi}{6}\right)} \ldots (**)$$

$$\begin{array}{r|l} 2019 & 6 \\ \hline & 336.5 \end{array}$$

$$2019 - 6(336) = 3$$

$$2019 = 6(336) + 3 \ldots (*)$$

نعوض (*) في (**)

$$= 2^{2019}.e^{i((6(336)+3)\frac{\pi}{6}}$$

$$= 2^{2019}.e^{i\left(\frac{6(336)\pi}{6}+\frac{3\pi}{6}\right)}$$

$$= 2^{2019}.e^{i\left(336\pi+\frac{\pi}{2}\right)}$$

$$= 2^{2019}(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$$

$$= 2^{2019}i$$

ومنه $(z_A)^{2019}$ تخيلي صرف

البرهان أن العدد $(z_D)^{1440}$ عدد طبيعي

$$(z_D)^{1440} = \left(2e^{i\frac{2\pi}{3}}\right) = 2^{1440}.e^{i\,2880\frac{\pi}{3}}$$

$$= 2^{1440}.e^{i960\pi}$$

$$= 2^{1440}(\cos 960\,\pi + i\sin 960\,\pi)$$

$$= 2^{440}(\cos\theta + i\sin\theta) = 2^{1440} \in \mathbb{N}$$

ومنه العدد $(z_D)^{1440}$ عدد طبيعي

2-جـ- حساب $\frac{z_D - z_C}{z_A - z_B}$

$$\frac{z_D - z_C}{z_A - z_B} = \frac{-1 + i\sqrt{3} + 1 + i\sqrt{3}}{\sqrt{3} + i - \sqrt{3} + i}$$

$$= \frac{2i\sqrt{3}(i)}{2i(-i)} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

التفسير الهندسي

لدينا $\frac{z_D - z_C}{z_A - z_B} = \sqrt{3}$

معناه $z_D - z_C = \sqrt{3}(z_A - z_B)$

$$\overrightarrow{CD} = \sqrt{3}\,\overrightarrow{BA}$$

ومنه $\overrightarrow{BA}$ مرتبط خطيا مع $\overrightarrow{CD}$

-استنتاج طبيعة الرباعي $ABCD$

بما ان $\overrightarrow{CD} = \sqrt{3}\,\overrightarrow{BA}$

فإن الرباعي $ABCD$ شبه منحرف

3-أ- تعيين قيم العدد الطبيعي n حيث z_n تخيلي صرف

لدينا $z_n = \frac{1}{2^n}e^{i\frac{n\pi}{6}}$

$$z_n = \frac{1}{2^n}\left(\cos\frac{n\pi}{6} + i\sin\frac{n\pi}{6}\right)$$

z_n تخيلي صرف

معناه $\cos\frac{n\pi}{6} = 0$

نقول $\frac{n\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k\pi$

نضرب في العدد 6

$$\frac{6n\pi}{6} = \frac{6n\pi}{2} + 6k\pi$$

$$\Rightarrow n = 3 + 6k \quad k \in \mathbb{N}$$

3-ب- كتابة L_1 وL_0 على الشكل الجبري

$$L_0 = z_D \times z_O = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}.\frac{1}{2^0}e^{i\,0\frac{\pi}{6}}$$

$$\Rightarrow L_0 = z_D = -1 + i\sqrt{3}$$

$$L_1 = z_D \times z_A = 2^{i\frac{2\pi}{3}}.\frac{1}{2^1}e^{i\frac{\pi}{6}}$$

$$\Rightarrow e^{i\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)} = e^{i\frac{5\pi}{6}}$$

ومنه $L_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

4-أ- البرهان أن المتتالية (u_n) هندسية

لدينا $u_n = |L_n| = |Z_D.Z_n|$

$$= |z_D| \times |z_A| = 2.\frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}}$$

تكون (u_n) متتالية هندسية إذا كان $u_{n+1} = u_n.q$

$$u_{n+1} = \frac{1}{2^{n+1-1}} = \frac{1}{2^{n-1}}.\frac{1}{2^1}$$

$$= u_n.\frac{1}{2}$$

ومنه (u_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$

وحدها الأول

$$u_0 = (L_0) = 2$$

-البرهان ان المتتالية (v_n) حسابية

$$v_n = \arg(L_n) = \arg(Z_D \times Z_n)$$

$$= \arg(Z_D) + \arg(Z_n)$$

$$v_n = \frac{2\pi}{3} + \frac{n\pi}{6}$$

تكون (v_n) متتالية حسابية إذا كان

$v_{n+1} - v_n = r$ حيث r عدد حقيقي

$$v_{n+1} - v_n = \frac{2\pi}{3} + \frac{(n+1)\pi}{6} - \frac{2\pi}{3} - \frac{n\pi}{6}$$

82. موضوع مقترح رقم 03

الأستاذ على الموقوت : موضوع مقترح رقم 03 2019

$P(z)$ كثير الحدود في $\mathbb{C}$ معرف بـ:

$$P(z) = z^3 - (2\sin\theta + i\cos\theta)z^2 + (1 + i\sin 2\theta)z - i\cos\theta$$

مع $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$

أ-1-بين أن المعادلة $P(z) = 0$ تقبل حلا تخيليا صرفا Z_0 يطلب تعيينه.

أ-2-عين العددين الحقيقين α و β حيث

$$P(z) = (z - i\cos\theta)(z^2 + \alpha z + \beta)$$

ثم حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z) = 0$ حيث z_1 هو الحل الذي أتى التخيلي سالب و z_2 الحل الثالث.

3-أ- اكتب بدلالة θ الشكل الأسي للأعداد z_1, z_0 و z_2

ب- نعتبر النقط A, B, C من المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o, \vec{u}, \vec{v})$ لواحقها على الترتيب

$$z_C = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \ , \ z_B = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \ ,$$

$$z_A = \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

- علم النقط A, B, C ثم عين طبيعة المثلث ABC.

- برهن أن المبدأ O مرجح الجملة

$$\{(A, 2); (B, 1); (C, -1)\}$$

- ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي λ مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z

حيث $2MA^2 + MB^2 - MC^2 = \lambda$

الحل

1-أ-البرهان أن المعادلة $P(z) = 0$ تقبل حلا تخيليا صرفا z_0

ليكن $z_0 = \alpha i$ حيث $\alpha \in \mathbb{R}$

z_0 حل للمعادلة $P(z) = 0$ معناه $P(z_0) = 0$

أي $P(\alpha i) = 0$

لدينا المعادلة $P(z)$

$$P(z) = z^3 - (2\sin\theta + i\cos\theta)z^2 + (1 + i\sin 2\theta)z - i\cos\theta \ ... (*)$$

نعوض بـ αi في المعادلة $(*)$

$$P(\alpha i) = (\alpha i)^3 - (2\sin\theta + i\cos\theta)(\alpha i)^2 + (1 + i\sin 2\theta)\alpha i - i\cos\theta = 0$$

نعلم ان $\begin{cases} (\alpha i)^3 = -\alpha^3 i \\ (\alpha i)^2 = -\alpha^2 \end{cases}$

تصبح لدينا

$$-\alpha^3 i - (2\sin\theta + i\cos\theta)(-\alpha^2) + (1 + i\sin 2\theta)(\alpha i) - i\cos\theta = 0$$

$$= \frac{n\pi}{6} + \frac{\pi}{6} - \frac{n\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$$

ومنه $v_{n+1} - v_n = \frac{\pi}{6}$

ومنه المتتالية (v_n) حسابية أساسها $r = \frac{\pi}{6}$

وحدها الأول v_0

$$v_0 = \arg(L_0) = \arg(Z_D) + \arg(Z_0) = \frac{2\pi}{3}$$

لحساب S_n بدلالة n

لدينا $\|\overrightarrow{OM_n}\| = |L_n| = u_n$

ومنه نجد $S_n = |L_0| + |L_1| + \cdots + |L_n|$

$$= u_0 + u_1 + \cdots + u_n$$

$$S_n = (2\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)} = 2\left(\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\frac{1}{2}}\right)$$

$$S_n = 4\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]$$

حساب T_n بدلالة n

لدينا $(\vec{u}, \overrightarrow{OM}) = \arg(L_n) = v_n$

أي $T_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$

$$T_n = \frac{n+1}{2}[v_0 + v_n]$$

$$= \frac{n+1}{2}\left[\frac{2\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} + \frac{n\pi}{6}\right]$$

ومنه $T_n = \frac{n+1}{2}\left[\frac{4\pi}{3} + \frac{n\pi}{6}\right]$

حساب $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$$

لأن $-1 < \frac{1}{2} < 1$

ومنه $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = 4$

تعيين قيم n التي من أجلها النقط M_n, D, O في استقامية

يكفي أن نكون $k \in \mathbb{N}$ ، $\arg\left(\frac{L_n - z_O}{z_D - z_O}\right) = k\pi$

حيث z_O لاحقة المبدأ O

$$\arg\left(\frac{z_D \times z_n - O}{z_D - 0}\right) = k\pi$$

ومنه $\arg(z_n) = k\pi$

نصبح لدينا $\frac{n\pi}{6} = k\pi$

وأخيرا نجد $n = 6k$

الأعداد المركبة من الأعقد إلى الأبسط

$$= -\alpha^2 i + 2\alpha^2 \sin\theta + \alpha^2 i\cos\theta + \alpha i - \alpha \sin 2\theta - i\cos\theta = 0$$

ومنه

$$\begin{cases} 2\alpha^2 \sin\theta - \alpha \sin 2\theta = 0 _ (1) \\ -\alpha^2 + \alpha^2 \cos\theta + \alpha - \cos\theta = 0 _ (2) \end{cases}$$

نحل المعادلة (1) نجد

$$2\alpha^2 \sin\theta - \alpha \sin 2\theta = 0$$
$$\alpha(2\alpha \sin\theta - \sin 2\theta) = 0$$

جداء يساوي الصفر إما الطرف الأول يساوي الصفر

أو الثاني يساوي الصفر

$$\begin{cases} \alpha = 0 _ (A) \\ \text{أو} \\ 2\alpha \sin\theta - \sin 2\theta = 0 \\ 2\alpha \sin\theta = \sin 2\theta \\ \alpha = \dfrac{\sin 2\theta}{2\sin\theta} _ (*) \end{cases}$$

حسب دساتير الجمع

$$[\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta] _ (**)$$

نعوض (**) في (*)

نصبح لدينا

$$\alpha = \frac{2\sin\theta\cos\theta}{2\sin\theta}$$
$$\alpha = \cos\theta \ldots (B)$$

نعوض (A) في (2)

ومنه $\alpha = 0$ مرفوض لأنه لا يحقق المعادلة (2)

- نعوض (B) في (2)

ومنه $\alpha = \cos\theta$ مقبول لأنه يحقق المعادلة (2)

$z_0 = \alpha i$ ومنه $z_0 = i\cos\theta$

أي المعادلة تقبل حلا تخيليا صرفا z_0 حيث

$$z_0 = i\cos\theta$$

2-ـ تعيين α و β حيث

$$P(z) = (z - i\cos\theta)(z^2 + \alpha z + \beta)$$

$$p(z) = (z - i\cos\theta)(z^2 + \alpha z + \beta)$$
$$= z^3 + \alpha z^2 + \beta z$$
$$- i\cos\theta z^2$$
$$- \alpha i\cos\theta z - \beta i\cos\theta$$

$P(z) = z^3 + (\alpha - i\cos\theta)z^2 + (\beta - \alpha i\cos\theta)z - \beta i\cos\theta$

$P(z) = z^3 - (2\sin\theta + i\cos\theta)z^2 + (1 + i\sin 2\theta)z - i\cos\theta$

بالمقارنة نجد:

نقول

$$-\beta i\cos\theta = -i\cos\theta$$
$$-\beta = \frac{-i\cos\theta}{i\cos\theta} = 1$$

ومنه: $\beta = 1$

وكذلك $\alpha - i\cos\theta = -2\sin\theta - i\cos\theta$

$$\alpha = -2\sin\theta$$

ومنه نجد

$$P(z) = (z - i\cos\theta)(z^2 - 2\sin\theta z + 1)$$

حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z) = 0$

نقول أن $P(z) = 0$ معناه

$P(z) = (z - i\cos\theta)(z^2 - 2\sin\theta z + 1) = 0$

يصبح لدينا

$$\begin{cases} z - i\cos\theta = 0 \\ \text{أو} \\ z^2 - 2\sin\theta z + 1 = 0 \end{cases}$$

أولا: $z - i\cos\theta = 0$

$$z = i\cos\theta$$

ثانيا: $z^2 - 2\sin\theta z + 1 = 0$

نعلم أن $\Delta = b^2 - 4ac$

$$\Delta = 4\sin^2\theta - 4(1)(1)$$
$$= 4\sin^2\theta - 4 = 4(\sin^2\theta - 1)$$

لدينا $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

$$\sin^2\theta - 1 = -\cos^2\theta$$

ومنه $\Delta = 4i^2\cos^2\theta$

$$\sqrt{\Delta} = 2i\cos\theta$$

$$z_1 = \frac{2\sin\theta - 2i\cos\theta}{2} = \sin\theta - i\cos\theta$$

$$z_1 = \sin\theta - i\cos\theta$$
$$z_2 = \overline{z_1} = \sin\theta + i\cos\theta$$
$$S = \{z_0, z_1, z_2\}$$

3-كتابة الشكل الأسي للأعداد z_0, z_1, z_2 بدلالة θ

$$\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$$

أي $\cos\theta > 0$

$$z_0 = i\cos\theta = \cos\theta\, e^{i\frac{\pi}{2}}$$

لأن $(i\cos\theta)$ تخيلي صرف

حيث $|z_0| = \cos\theta$

وعمدته $\arg(z_0) = \frac{\pi}{2}$

$$z_1 = \sin\theta - i\cos\theta \ldots (1)$$

من دساتير الجمع

نعلم أن $\sin\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \ldots (2)$

$$\cos\theta = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \ldots (3)$$

نعوض (2) و (3) في (1).

نجد $z_1 = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \ldots (4)$

ونعلم أن $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) \ldots (5)$

ومنه المثلث ABC قائم في C

البرهان أن المبدأ O هو مرجح الجملة $\{(A,2);(B,1);(C,-1)\}$

لاحقة المبدأ O z_O

أي $z_O = 0$

$$\frac{2z_A + z_B - z_C}{2+1-1} = \frac{2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}i\right) + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{i\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{i\sqrt{2}}{2}}{2}$$

$$= \frac{\frac{2\sqrt{2}}{2}i - \frac{2i\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{0}{2} = 0 = z_O$$

ومنه O مرجح الجملة $\{(A,2);(B,1);(C,-1)\}$

ومنه نجد

$$2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = \vec{0}$$

المناقشة حسب قيم λ

نقول نعلم أن

$$MA^2 = \overrightarrow{AM}^2 = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MA}$$

لدينا $2MA^2 + MB^2 = MC^2 = \lambda$

أي

$$2\overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 - \overrightarrow{MC}^2 = \lambda$$

ليكن O مرجح الجملة $\{(A,2);(B,1);(C,-1)\}$

حسب علاقة شال:

$$2\left(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB}\right)^2 - \left(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC}\right)^2 = \lambda$$

حسب المتطابقات الشهيرة

$$= 2\left(\overrightarrow{MO}^2 + \overrightarrow{OA}^2 + 2\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{OA}\right) + \left(\overrightarrow{MO}^2 + \overrightarrow{OB}^2 + 2\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{OB}\right) - \left(\overrightarrow{MO}^2 + \overrightarrow{OC}^2 + 2\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{OC}\right) = \lambda$$

$$2\overrightarrow{MO}^2 + 2\overrightarrow{OA}^2 + 4\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{MO}^2 + \overrightarrow{OB}^2 + 2\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{MO}^2 - \overrightarrow{OC}^2 - 2\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{OC} = \lambda$$

$$2\overrightarrow{MO}^2 + 2\overrightarrow{OA}^2 + \overrightarrow{OB}^2 - \overrightarrow{OC}^2 - 2\overrightarrow{MO}(2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}) = \lambda$$

$$2MO^2 = \lambda - 2OA^2 - OB^2 + OC^2$$

$$MO^2 = \frac{\lambda - 2OA^2 - OB^2 + OC^2}{2}$$

$$MO = \sqrt{\frac{\lambda - 2OA^2 - OB^2 + OC^2}{2}}$$

$$OA^2 = |z_A - z_O|^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

$$2OA^2 = 1$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = -\sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) - (5)$$

بعكس (5) و (6) في (4).

$$z_1 = \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) - i\left(-\sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$z_1 = \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$$

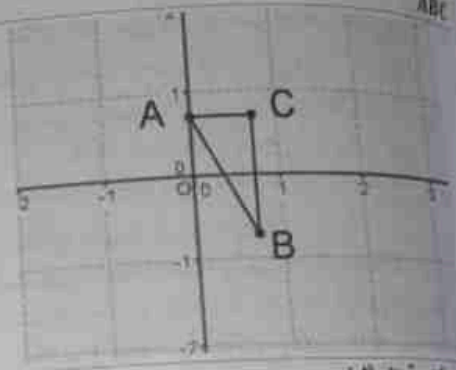
$$= e^{i\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)}$$

$$z_2 = \overline{z_1} = e^{-i\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)} = e^{i\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}$$

حدد تخمين الأسي لـ z_2, z_1

$$\begin{cases} z_1 = e^{i\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)} \\ z_2 = e^{i\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)} \end{cases}$$

بين تخمين النقط C, B, A ثم تعيين طبيعة المثلث ABC



تعيين طبيعة المثلث ABC

$$\frac{z_A - z_C}{z_B - z_C} = \frac{\frac{i\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{i\sqrt{2}}{2}}$$ حساب

$$= \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{i\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}(-i\sqrt{2})}{i\sqrt{2}(-i\sqrt{2})}$$

$$= \frac{-\frac{2i}{2}}{2} = -\frac{i}{2} = -\frac{1}{2}i$$

$\frac{z_A - z_C}{z_B - z_C} = -\frac{1}{2}i$ ومنه

$$\arg\left(-\frac{1}{2}i\right) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$\left|-\frac{1}{2}i\right| = \frac{1}{2}$$

$$\frac{CA}{CB} = \frac{1}{2}$$

$$\left(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}\right) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$OB^2 = |z_B - z_O|^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$$
$$= 1$$
$$OB^2 = 1$$
$$OC^2 = |z_C - z_O|^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$$
$$OC^2 = 1 \dots (*)$$
$$MO = \sqrt{\frac{\lambda - 2OA^2 - OB^2 + OC^2}{2}} \dots (1)$$

نعوض (*) في (1)

$$MO = \sqrt{\frac{\lambda - 1 - 1 + 1}{2}}$$
$$MO = \sqrt{\frac{\lambda-1}{2}}$$

1) $\lambda \in]-\infty; 1[$ يكون $\frac{\lambda-1}{2} < 0$

ومنه $\sqrt{\frac{\lambda-1}{2}}$ مستحيل

أي مجموعة النقط هي مجموعة خالية

2) $\lambda = 1$ أي $\sqrt{\frac{\lambda-1}{2}} = 0$

لدينا $MO = 0$ معناه النقطة M تنطبق على المبدأ O

ومنه مجموعة النقط هي النقطة O.

3) $\lambda \in]1; +\infty[$ أي $\lambda > 1$

أي $\frac{\lambda-1}{2} > 0$

ومنه $\sqrt{\frac{\lambda-1}{2}} > 0$

أي مجموعة النقط هي دائرة مركزها O.

ونصف قطرها

$$r = \sqrt{\frac{\lambda-1}{2}}$$

83. موضوع مقترح رقم 04

الأستاذ علي الوهاب : موضوع مقترح رقم 04 2019

1- حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة

$$z^2 - 2z + 2 = 0$$

2- استنتج حلول المعادلة

$$\left(\frac{1}{z}+1\right)^2 - 2\left(\frac{1}{z}+1\right) + 2 = 0$$

حيث $\overline{z}$ هو مرافق z.

3- في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{u}, \vec{v})$ نعتبر النقط A, B, C التي لواحقها على الترتيب

$$z_A = 1 + i \qquad z_B = 1 - i$$
$$z_C = 1 + \sqrt{3}$$

3-أ- اكتب كلا من z_A و z_B على الشكل الأسي. ثم استنتج الشكل الأسي للعددين $\frac{1}{z_B}$ و $(z_A)^{2019}$.

3-ب- عين مجموعة النقط M ذات اللاحقة Z حيث

$$|z - 1 - i| - |z - 1 + i| = 0$$

3-جـ- عين طويلة وعمدة العدد المركب $L = \frac{z_A - z_C}{z_B - z_C}$

ثم استنتج طبيعة المثلث ABC.

3-د- عين لاحقة النقطة G مركز ثقل المثلث ABC.

3-هـ- عين مجموعة النقط M ذات اللاحقة Z حيث

$$\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right).\left(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\right) = 0$$

الحل

1-حل في $\mathbb{C}$ المعادلة

$$z^2 - 2z + 2 = 0$$

حساب المميز Δ

$$\Delta = b^2 - 4ac$$
$$\Delta = 4 - 4(1)(2) = -4$$
$$\Delta = 4i^2$$
$$\sqrt{\Delta} = 2i$$
$$z_1 = 1 - i$$
$$z_2 = \overline{z_1} = 1 + i$$
$$S = \{z_1, z_2\}$$

2-استنتاج حلول المعادلة

$$\left(\frac{1}{z}+1\right)^2 - 2\left(\frac{1}{z}+1\right) + 2 = 0$$

نضع $z' = \frac{1}{z} + 1$ فنجد

$$z'^2 - 2z + 2 = 0$$

وهي مكافئة للمعادلة

$$z^2 - 2z + 2 = 0$$

$$\begin{cases} z_1' = 1-i \\ z_2' = 1+i \end{cases}$$

$\frac{1}{z} = -i$ ومنه $\frac{1}{z}+1 = 1-i$ لدينا

$\frac{1}{z} = i$ أي $\left(\frac{1}{z}\right) = -i$

$z = \frac{1}{i}$ أي $\frac{1}{z} = i$

نضرب في المرافق

$$z = \frac{1(-i)}{i(-i)}$$

$z_4 = \overline{z_3} = i$ و $z_3 = -i$

$S' = \{-i, i\}$

كتابة z_B, z_A على الشكل الأسي

$$z = re^{i\theta}$$

$$|z_A| = |1+i| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$\arg(z_A) = \theta$$

$$\begin{cases} \cos\theta_A = \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \dots (1) \\ \sin\theta_A = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \dots (2) \end{cases}$$

من (1) و(2) نجد

$$\theta_A = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

$$z_A = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$z_B = \overline{z_A} = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

استنتاج الشكل الأسي لـ $(z_A)^{2019}, \frac{1}{z_B}$

$$\frac{1}{z_B} = \frac{1}{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$(z_A)^{2019} = \left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^{2019} = \left(\sqrt{2}\right)^{2019} e^{i\frac{2019\pi}{4}}$$

$$= \left(\sqrt{2}\right)^{2019} e^{i(4(504)+3)\frac{\pi}{4}}$$

$$= \left(\sqrt{2}\right)^{2019} .e^{i\left(4(504)\frac{\pi}{4}+\frac{3\pi}{4}\right)}$$

$$= \left(\sqrt{2}\right)^{2019} .e^{i\left(504\pi+\frac{3\pi}{4}\right)}$$

$$= \left(\sqrt{2}\right)^{2019} .e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

$$(z_A)^{2019} = \left(\sqrt{2}\right)^{2019} .e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

تعيين مجموعة النقط M للمستوي حيث

$$|z-1-i| - |z-1+i| = 0$$

$$|z-1-i| - |z-1+i| = 0$$

$$|z-1-i| = |z-1+i|$$

$$|z-(1+i)| = |z-(1-0)|$$

$$|z_M - z_A| = |z_M - z_B|$$

$$AM = BM$$

ومنه مجموعة النقط هي محور القطعة المستقيمة $[AB]$.

3-تعيين طويلة L

$$L = \frac{z_A - z_C}{z_B - z_C} = \frac{1+i-1-\sqrt{3}}{1-i-1-\sqrt{3}}$$

$$L = \frac{-\sqrt{3}+i}{-\sqrt{3}-i}$$

نضرب في المرافق

$$\frac{(-\sqrt{3}+i)(-\sqrt{3}+i)}{(-\sqrt{3}-i)(-\sqrt{3}+i)}$$

$$L = \frac{3-i\sqrt{3}-i\sqrt{3}-1}{3+1} = \frac{2}{4} - \frac{2i\sqrt{3}}{4}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$$

الطويلة $|L| = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = 1$

$$\begin{cases} \cos\theta_2 = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2} \\ \sin\theta_2 = -\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$$ عمدته

ومنه

$$|L| = 1$$

$$\arg(L) = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

استنتاج طبيعة المثلث ABC

$|L| = 1$ معناه

$$\left|\frac{z_B - z_C}{z_B - z_C}\right| = 1$$

$CA = CB$ أي $\frac{CA}{CB} = 1$ أي

$$\arg(L) = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

$$\left(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}\right) = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$$ أي

ومنه نستنتج ان المثلث ABC متقايس الأضلاع

3-تعيين z_G

G مركز ثقل المثلث ABC معناه G مرجح الجملة المثقلة

$$\{(A,1);(B,1);(C,1)\}$$

$$z_G = \frac{1z_A + 1z_B + 1z_C}{3}$$

$$z_G = \frac{1+i+1-i+1+\sqrt{3}}{3} = \frac{3+\sqrt{3}}{3}$$

ومنه كذلك نجد أن

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

5.هـ-تعيين مجموعة النقط M من المستوي حيث:

$$(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}).(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}) = 0$$

بما أن G مرجح الجملة المثقلة

$$\{(A,1);(B,1);(C,1)\}$$

فإن $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$ ...(1)

$$\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB} \quad ...(2)$$

من (1) و (2) نجد

$$(3\overrightarrow{MG})(-\overrightarrow{AB}) = 0$$
$$-3(\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{AB}) = 0$$
$$-3 \neq 0$$

ومنه $\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{AB} = 0$

ومنه مجموعة النقط M من المستوي هي المستقيم الذي يشمل G و $\overrightarrow{AB}$ ناظمي له.

84. موضوع مقترح رقم 05

في كل ما يلي المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$

نعتبر النقط A_2, A_1, A_0 لواحقها على الترتيب z_2, z_1, z_0 حيث

$$z_2 = -4-i, z_1 = -1-4i, z_0 = 5-4i$$

1-أ-بين أنه يوجد تشابه مباشر وحيد S حيث

$$S(A_0) = A_1 \text{ و } S(A_1) = A_2$$

1-ب- أثبت أن العبارة المركبة للتشابه S هي

$$z' = \left(\frac{1-i}{2}\right)z + \frac{-3+i}{2}$$

1-جـ-استنتج النسبة والزاوية واللاحقة ω للمركز Ω للتشابه S.

1-د-نعتبر النقطة M لاحقتها z حيث $z \neq \omega$ وصورتها $M'(z')$ بواسطة S.

تحقق من أن $\omega - z' = i(z - z')$ واستنتج طبيعة المثلث $\Omega MM'$.

2-من أجل كل عدد طبيعي n نعرف متتالية النقط (A_n) كمايلي $A_{n+1} = S(A_n)$ ونضع

$$v_n = A_nA_{n+1}$$

2-أ-مثل النقط A_2, A_1, A_0 وأنشئ هندسيا النقط A_6, A_5, A_4, A_3.

2-ب-برهن أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{\sqrt{2}}{2}$. عين حدها الأول v_0.

3-المتتالية (u_n) معرفة على $\mathbb{N}$ كمايلي

$$u_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$$

3-أ-عبر عن v_n بدلالة n ثم عن u_n بدلالة n

3-ب-هل المتتالية (u_n) متقاربة؟

4-احسب بدلالة n الطول l_n حيث $l_n = \Omega A_n$ ثم عين أصغر عدد طبيعي n الذي يحقق $l_n < 0.06$

الحل

1-أ-البرهان أنه يوجد تشابه مباشر S وحيد حيث $S(A_0) = A_1$ و $S(A_1) = A_2$

بما أن $A_0 \neq A_1$ و $A_1 \neq A_2$

فإنه يوجد تشابه وحيد S يحول A_0 إلى A_1 ويحول A_1 إلى A_2

1-ب-إثبات ان العبارة المركبة للتشابه S

$$z' = \left(\frac{1-i}{2}\right)z + \left(\frac{-3+i}{2}\right)$$

$$\begin{cases} S(A_0) = A_1 \\ S(A_1) = A_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = az_0 + b \ldots (1) \\ z_2 = az_1 + b \ldots (2) \end{cases}$$

بالطرح طرفا لطرف (1) و (2)

$$z_1 - z_2 = az_0 - az_1 + b - b$$
$$a = \frac{z_1 - z_2}{z_0 - z_1}$$
$$a = \frac{-1-4i+4+i}{5-4i+1+4i}$$
$$= \frac{3-3i}{6}$$
$$a = \frac{1-i}{2}$$

نعوض قيمة a في (1)

نجد $z_1 = \frac{1-i}{2}z_0 + b$

$$b = z_1 - \frac{1-i}{2}z_0$$

بالتعويض نجد

$$b = -1-4i - \frac{1-i}{2}(5-4i)$$
$$b = -1-4i + \frac{(-1+i)(5-4i)}{2}$$
$$b = -1-4i + \frac{-5+4i+5i+4}{2}$$
$$= -1-4i + \frac{-1+9i}{2}$$

$$b=\frac{-2-8i-1+9i}{2}$$
$$=\frac{-3+i}{2}$$

ومنه العبارة المركبة للتشابه S هي

$$z'=\left(\frac{1-i}{2}\right)z+\frac{-3+i}{2}$$

1-جـ-استنتاج العناصر المميزة للتشابه المباشر S

نسبة k

$$k=|a|=\left|\frac{1-i}{2}\right|=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}$$
$$k=\sqrt{\frac{2}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

θ زاوية التشابه المباشر

$$\arg(a)=\theta$$

$$\begin{cases}\cos\theta=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin\theta=-\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=-\frac{1}{2}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$$

وزاويته هي $\theta=-\frac{\pi}{4}+2k\pi$

مركزه ω

$$\omega=\frac{b}{1-a}=\frac{\frac{-3+i}{2}}{1-\frac{1-i}{2}}=\frac{-3+i}{2-1+i}=\frac{-3+i}{1+i}$$

نضرب في المرافق

$$=\frac{(-3+i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}$$
$$\omega=\frac{(-3+3i+i+1)}{2}=\frac{-2+4i}{2}$$
$$=-\frac{2}{2}+\frac{4i}{2}$$

ومنه المركز ω: $\omega=-1+2i$

1-د-التحقق من ان $\omega-z'=i(z-z')$

يكفي أن نتأكد من $\omega-z'-i(z-z')=0$

$$=-1+2i-\left(\frac{1-i}{2}\right)z-\frac{-3+i}{2}-iz$$
$$+i\left(\frac{1-i}{2}\right)z+\left(\frac{-3+i}{2}\right)i$$
$$=-1+2i-\frac{1}{2}z+\frac{1}{2}iz+\frac{3}{2}-\frac{1}{2}i+\frac{1}{2}iz$$
$$+\frac{1}{2}z-\frac{3}{2}i-\frac{1}{2}-iz$$
$$=-\frac{2}{2}+\frac{4i}{2}+\frac{3}{2}-\frac{1}{2}i-\frac{3}{2}i-\frac{1}{2}$$

ومنه $\omega-z'=i(z-z')$

استنتاج طبيعة المثلث $\Omega MM'$

لدينا $\omega-z'=i(z-z')$

ومنه نجد $|\omega-z'|=|i||z-z'|$

$$M'\Omega=M'M\ldots(1)$$
$$\frac{\omega-z'}{z-z'}=i$$
$$\arg\left(\frac{\omega-z'}{z-z'}\right)=\frac{\pi}{2}+2k\pi$$
$$(M'M,M'\Omega)=\frac{\pi}{2}+2k\pi\ldots(2)$$

من (1) و (2) نستنتج ان المثلث $\Omega MM'$ قائم في M' ومتساوي الساقين.

2-أ-تمثيل النقط A_2,A_1,A_0

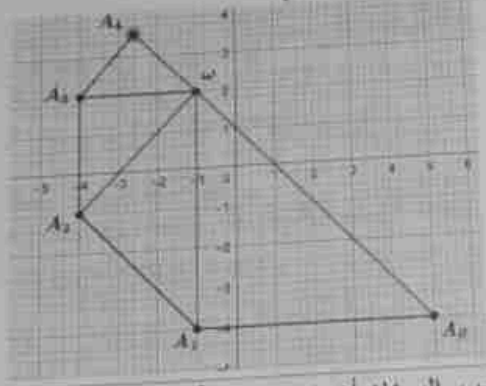
$\omega=-1+2i$ ، $z_2=-4-i$ ،

$z_1=-1-4i$

$z_0=5-4i$

المثلث $\Omega MM'$ قائم في M ومتساوي الساقين

ونطبقه على بقية النقط الأخرى $\begin{cases}A_1A_2=\Omega A_2\\ (\overrightarrow{A_1A_2},\overrightarrow{\Omega A_2})=\frac{\pi}{2}\end{cases}$



2-ب- البرهان أن (v_n) متتالية هندسية

تكون (v_n) متتالية هندسية إذا وفقط

$$v_{n+1}=v_n.q=v_n\frac{\sqrt{2}}{2}$$

لدينا $(*)$ ..... $v_n=A_nA_{n+1}=|z_{n+1}-z_n|$

$$v_{n+1}=A_{n+1}.A_{n+2}=|z_{n+2}-z_{n+1}|$$
$$A(n+2)=S(A_{n+1})$$
$$z_{n+2}=\frac{1-i}{2}z_{n+1}+\frac{-3+i}{2}$$
$$z_{n+1}=\frac{1-i}{2}z_n+\frac{-3+i}{2}$$

$$v_{n+1} = \left|\frac{1-i}{2}z_{n+1} + \frac{(-3+i)}{2} - \frac{(1-i)}{2}z_n - \frac{(-3+i)}{2}\right|$$

$$v_{n+1} = \left|\frac{1-i}{2}(z_{n+1} - z_n)\right|$$

$$v_{n+1} = \left|\frac{1-i}{2}\right||z_{n+1} - z_n|$$

$$\left|\frac{1-i}{2}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$v_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}|z_{n+1} - z_n|$$

$$= v_n\frac{\sqrt{2}}{2}$$

بالمطابقة مع (*) نجد

ومنه المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q = \frac{\sqrt{2}}{2}$

حساب v_0

نعوض بـ $n = 0$

$$v_0 = A_0A_{0+1}$$

$$v_0 = A_0A_1 = |z_1 - z_0|$$

$$= |-1 - 4i - 5 + 4i|$$

$$= |-6| = 6$$

$$v_0 = 6$$

3-أ-التعبير عن v_n بدلالة n

$$v_n = v_0q^n = 6\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$$

التعبير عن u_n بدلالة n

u_n عبارة عن مجموع حدود متتالية هندسية أساسها $q = \frac{\sqrt{2}}{2}$ وحدها الاول $v_0 = 6$

$$u_n = 6.\frac{\left(1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}\right)}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$u_n = 12\frac{\left(1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}\right)}{2-\sqrt{2}}$$

3-ب- معرفة إذا كانت المتتالية (u_n) متقاربة

يكفي حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

نعلم ان $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1} = 0$

لأن $-1 < \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$

ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(12\frac{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}}{2-\sqrt{2}}\right)$

$$= 12\frac{1}{2-\sqrt{2}} = \frac{12}{2-\sqrt{2}} \in \mathbb{R}$$

ومنه (u_n) متتالية متقاربة

4-حساب l_n بدلالة n

لدينا من المعطيات $A_{n+1} = S(A_n)$

معناه $z_{n+1} - \omega = a(z_n - \omega)$

حيث $a = \frac{1-i}{2}$

ملاحظة المركز له لاحقة ω

ومنه

$$|z_{n+1} - \omega| = \left|\frac{1-i}{2}\right||z_n - \omega|$$

حيث

$$\begin{cases} l_n = \Omega A_n \\ \text{و} \\ l_{n+1} = \Omega A_{n+1} \end{cases}$$

ومنه $l_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}l_n$

أي المتتالية (l_n) متتالية هندسية وأساسها $q' = \frac{\sqrt{2}}{2}$

وحدها الاول

$$l_0 = \Omega A_0 = |z_0 - \omega|$$

$$l_0 = |5 - 4i + 1 - 2i|$$

$$l_0 = |6 - 6i|$$

$$l = \sqrt{36+36} = \sqrt{36(2)}$$

$$l = 6\sqrt{2}$$

ومنه l_n بدلالة n هي:

$$l_n = l_0q^n$$

ومنه $l_n = 6\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$

تعيين أصغر عدد طبيعي n

$l_n < 0.06$

نحل المتراجحة $l_n < 0.06$

$$6\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n < 0.06$$

$$6\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n < 6.10^{-2}$$

$$\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n < 10^{-2}$$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n < \frac{10^{-2}}{\sqrt{2}}$$

نحل اللوغاريتمية على الطرفين نجد

$$\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n < \ln\left(\frac{10^{-2}}{\sqrt{2}}\right)$$

$$n\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) < \ln\left(\frac{10^{-2}}{\sqrt{2}}\right)$$

بما أن $\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) < 0$

$$\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -0.34$$

نضرب طرفي المتراجحة في (-1)

$$n > \frac{-\ln\frac{10^{-2}}{\sqrt{2}}}{-\ln(\frac{\sqrt{2}}{2})}$$

$$n > 14.28$$

أصغر عدد طبيعي n

حيث $\ln < 0.06$ هو $n = 15$

أي $l_{15} < 0.06$

85. موضوع مقترح رقم 06

الأستاذ على اليوتيوب : موضوع مقترح رقم 06 2019

1-تحقق أن $(\sqrt{3}+i)^2 = 2 + 2i\sqrt{3}$ ثم حل في $\mathbb{C}$ المعادلة

$$z^2 = 2 + 2i\sqrt{3}$$

واكتب الحلين على الشكل الأسي

2-ننسب المستوي المركب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(o, \vec{u}, \vec{v})$ نعتبر النقط A, B و C لواحقها على الترتيب

$z_A = \sqrt{3}+i$ ، $z_B = \overline{z_A}$ ، $z_C = -z_A$

احسب $\left(\frac{z_A}{2}\right)^{1440} \times \left(\frac{z_B}{2}\right)^{1962} \times \left(\frac{z_C}{2}\right)^{2019}$

3-لتكن (Γ) مجموعة النقط M من المستوي معرفة بـ: $(z - z_A)(\overline{z} - z_B) = z_C \cdot \overline{z_C}$

-عين طبيعة المجموعة (Γ) و عناصرها المميزة ثم احسب مساحتها

3-ب-عين (Γ') صورة (Γ) بالتحاكي h الذي مركزه A ونسبته 2 واستنتج مساحتها.

4-لتكن (E) مجموعة النقط M من المستوي حيث $\arg(\overline{z} - z_A) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ مع $k \in \mathbb{Z}$

-عين طبيعة المجموعة (E).

4-ب-عين طبيعة (E') مجموعة النقط M من المستوي حيث

$$\arg[(z - z_A)^2] = \arg(z_A) - \arg(z_B)$$

5-عين (Π) مجموعة النقط M من المستوي $(M$ تختلف عن C و $A)$ حيث z لاحقة M التي من أجلها يكون العدد $L = \frac{z_C - z}{z_A - z}$

$L \in \mathbb{R}^*$ -1

$L \in \mathbb{R}_+^*$ -2

$L \in \mathbb{R}^-$ -3

$L \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$ -4

الحل

1-التحقق أن $(\sqrt{3}+i)^2 = 2 + 2i\sqrt{3}$

$$(\sqrt{3}+i)^2 = 3 + i^2 + 2i\sqrt{3}$$

$$= 3 - 1 + 2i\sqrt{3}$$

ومنه $(\sqrt{3}+i)^2 = 2 + 2i\sqrt{3}$

حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2 = 2 + 2i\sqrt{3}$

لدينا $2 + 2i\sqrt{3} = (\sqrt{3}+i)^2$

$$z^2 = (\sqrt{3}+i)^2$$

ومنه

$$z_1 = \sqrt{3} + i$$

$$z_2 = -\sqrt{3} - i$$

ومنه $S = \{z_1, z_2\}$

-كتابة الحلين على الشكل الأسي

$$z_1 = \sqrt{3} + i$$

$$|z_1| = 2, \cos\theta_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}, \sin\theta_1 = \frac{1}{2}$$

$$\theta_1 = \frac{\pi}{6}$$

$$|z_2| = 2, \cos\theta_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \sin\theta_2 = -\frac{1}{2}$$

$$\theta_2 = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$$

$$z_2 = 2e^{-i\frac{5\pi}{6}}$$

2-حساب $\left(\frac{z_A}{2}\right)^{1440} \times \left(\frac{z_B}{2}\right)^{1962} \cdot \left(\frac{z_C}{2}\right)^{2019}$

$$z_A = z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{6}}; \left(\frac{z_A}{2}\right)^{1440} = \left(\frac{2e^{i\frac{\pi}{6}}}{2}\right)$$

حسب دستور موافر

$$z_A = e^{i1440\frac{\pi}{6}}$$

$$= \cos\left(1440\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(1440\frac{\pi}{6}\right)$$

$$= \cos(240\pi) + i\sin(240\pi)$$

$$= \cos(0) + i\sin(0) = 1$$

$$z_B = \overline{z_A} = 2e^{-i\frac{\pi}{6}} \cdot \left(\frac{z_B}{2}\right)^{1962} = \left(\frac{2e^{-i\frac{\pi}{6}}}{2}\right)^{1962}$$
$$= e^{-(1962\frac{\pi}{6})} = \cos\left(-1962\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-1962\frac{\pi}{6}\right)$$
$$= \cos(-\pi) + i\sin(-\pi) = -1$$
$$z_C = -z_A = z_2 = 2e^{-i\frac{5\pi}{6}}$$

حسب نيوتن موافر

$$\left(\frac{z_C}{2}\right)^{2019} = \left(\frac{2e^{-i\frac{5\pi}{6}}}{2}\right)^{2019}$$
$$= e^{-i\left(5(2019)\frac{\pi}{6}\right)} = e^{-i((6(1682)+3)\frac{\pi}{6}}$$
$$= e^{-i\left(1682\pi+\frac{3\pi}{6}\right)} = e^{-i\left(\frac{\pi}{2}\right)}$$
$$= \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -i$$

ومنه نجد $\left(\frac{z_A}{2}\right)^{1440} \times \left(\frac{z_B}{2}\right)^{1962} \times \left(\frac{z_C}{2}\right)^{2019}$
$$= 1(-1)(-i) = i$$

3-تعيين طبيعة المجموعة (Γ)

نعلم أن $z_C.\overline{z_C} = |z_C|^2$

ولدينا $z_B = \overline{z_A}$

$$(z - z_A)(\overline{z} - \overline{z_B}) = (z - z_A)(z - z_A)$$
$$= |z - z_A|^2$$

ومنه نجد $|z - z_A|^2 = |z_C|^2$

$$AM^2 = 2^2$$
$$AM = 2$$

ونعلم أن $|z_C| = 2$

ومنه مجموعة النقط (Γ) هي دائرة (C) التي مركزها A ونصف قطرها $r = 2$

$$z_A = \sqrt{3} + i$$

-حساب مساحة الدائرة (C')

$$S_{(C)} = \pi r^2 = 4 \times 3{,}14:$$
$$S_{(C)} = 12.56\,(u.a) \quad ; r = 2$$

3-بتعيين طبيعة (Γ') صورة (Γ) بالتحاكي h

(Γ') صورة (Γ) بالتحاكي h هي دائرة (C') التي نصف قطرها $r' = r(k)$

$$r' = 4$$

ومركزها هو A' صورة A بالتحاكي h

لكن مركز التحاكي h هو A أي A نقطة صامدة ومنه $h(A) = A$

أي مركزها هو A

وأخيرا (Γ') هي دائرة (C') التي مركزها A ونصف قطرها

$$r' = 4$$

-استنتاج مساحة الدائرة (C')

$$S_{(C')} = k^2.S_{(C)}$$
$$S_{(C')} = 2^2.12.56$$
$$S_{(C')} = 4 \times 12.56$$
$$S_{(C')} = 50.24\,(u.a)$$

4-تعيين طبيعة المجموعة (E)

$$\arg(\overline{z} - z_A) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

معناه $\arg(\overline{z} - z_A) = \arg(-i)$

ولدينا $\overline{z_B} = \overline{z_A}$

ومنه $z_A = \overline{z_B}$

$$\arg(\overline{z - z_B}) = \arg(\overline{-i})$$

نعلم أن $\overline{-i} = i$

$$\arg(z - z_B) = \arg(i)$$
$$\left(\vec{u}.\overrightarrow{BM}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$ أي

ومنه (E) عبارة عن نصف مستقيم شاقولي مبدؤه النقطة B باستثناء النقطة B ويميل بزاوية

$$\frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

-تعيين طبيعة (E')

$$\arg[(z - z_A)^2] = \arg(z_A) - \arg(z_B)$$

لدينا $z_B = \overline{z_A}$

$$\arg(z_B) = -\arg(z_A) + 2k\pi$$
$$\arg(z_A) - \arg(z_B) = \arg(z_A) + \arg(z_A)$$
$$= 2\arg(z_A) + 2k\pi \ldots (1)$$
$$\arg((z - z_A)^2) = 2\arg(z - z_A) \ldots (2)$$

من (1) و (2) نجد

$$2\arg(z - z_A) = 2\arg(z_A) + 2k\pi$$
$$\arg(z - z_A) = \arg(z_A) + k\pi$$
$$\left(\vec{u}.\overrightarrow{AM}\right) = \frac{\pi}{6} + k\pi$$

ومنه مجموعة النقط (E') هي المستقيم (AM) باستثناء النقطة A ويميل بزاوية

$$\theta = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

5-تعيين مجموعة النقط M من المستوي

أ) $L \in \mathbb{R}^*$ أي L حقيقي غير معدوم

معناه $\arg\left(\frac{z_C - z}{z_A - z}\right) = k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$

$$\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MC}\right) = k\pi$$

مجموعة النقط هي المستقيم (AC) باستثناء A و C

$L \in \mathbb{R}_+^*$ معناه L عدد حقيقي موجب

$$\arg\left(\frac{z_C - z}{z_A - z}\right) = 0 + 2k\pi$$

$$\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MC}\right) = 0 + 2k\pi = 2k\pi$$

مجموعة النقط هي المستقيم (AC) باستثناء النقط C, A

$L \in \mathbb{R}_-^*$ معناه L عدد حقيقي سالب تماما:

$$\arg\left(\frac{z_C - z}{z_A - z}\right) = \pi + 2k\pi$$

$\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MC}\right) = \pi + 2k\pi$ مجموعة النقط هي القطعة المستقيمة $[AC[$

$L \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$ معناه L عدد تخيلي صرف

$$\arg\left(\frac{z_C - z}{z_A - z}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MC}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$$

أي المثلث ACM قائم في M

ومنه مجموعة النقط هي دائرة قطرها $[AC]$ باستثناء C, A

86. موضوع مقترح رقم 07

الأستاذ على اليوتيوب : موضوع مقترح رقم 07 2019

نرفق بكل عدد مركب z يختلف عن $-2i$ العدد المركب z' حيث $z' = \frac{z-2i}{z+2i}$

لتكن النقط M', M, B, A صور الأعداد $2i, -2i, z$ و z' على الترتيب في مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o, \vec{u}, \vec{v})$ نضع

$z + 2i = re^{i\theta}$

حيث $r \in \mathbb{R}_+^*$ و $\theta \in \mathbb{R}$.

1-أ-بين أن $z' - 1 = \frac{4}{r}e^{i\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}$

1ب-عين مجموعة النقط M التي من أجلها يكون z' عددا حقيقيا.

1-جـبين انه إذا كانت M تنتمي إلى الدائرة (C) التي مركزها B ونصف قطرها 2 فإن M' تنتمي إلى دائرة (C') يطلب تحديد عناصرها المميزة.

2-نعتبر الدوران R الذي مركزه النقطة I ذات اللاحقة $\frac{3\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ وزاويته α.

2-أ-عين القيس الرئيسي للعدد α إذا علمت أن صورة A بالدوران R هي النقطة ذات اللاحقة 1

2-ب-عين على الرسم النقط $I; B; A$.

2-جـتحقق أن الدائرة (C') صورة دائرة مركزها A بالدوران R ثم ارسم شكلا في نفس المعلم السابق.

الحل

1-أ-البرهان أن: $z' - 1 = \frac{4}{r}e^{i\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}$

لدينا: $z' = \frac{z-2i}{z+2i}$

$$z' - 1 = \frac{z-2i}{z+2i} - 1 = \frac{z-2i-z-2i}{z+2i}$$

$$= -\frac{4i}{z+2i}$$

$$= z' - 1 = -\frac{4i}{re^{i\theta}}$$

$$z' - 1 = \frac{4}{r}e^{\frac{i\pi}{2} - i\theta}$$

ومنه: $z' - 1 = \frac{4}{r}e^{i\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}$

1-ب-تعيين مجموعة النقط M حيث $z' \in \mathbb{R}$

$z' \in \mathbb{R}$ معناه

$$\begin{cases} \arg\left(\frac{z - z_A}{z - z_B}\right) = k\pi \quad z' \in \mathbb{R}^* \ldots\ldots (أ) \\ k \in Z, M \neq A, M \neq B \\ M = A; M \neq B; z' = 0 \ldots\ldots (ب) \end{cases}$$

يكافئ

$$\begin{cases} \left(\overrightarrow{BM}; \overrightarrow{AM}\right) = k\pi \ldots\ldots (*) \quad z' \in \mathbb{R}^* \\ M \neq A, \ M \neq B \\ M = A; M \neq B; z' = 0 \end{cases}$$

لأن $\mathbb{R} = \mathbb{R}^* \cup \{0\}$

من خلال $(*)$ نفهم أن النقط M, B, A في استقامية ومنه مجموعة النقط هي المستقيم (AB) باستثناء B

1-جـ-البرهان أنه إذا كانت M تنتمي الى الدائرة مركزها B ونصف قطرها 2 فإن M' تنتمي الى دائرة (C')

M تنتمي الى الدائرة (c) التي مركزها B ونصف قطرها 2 معناه:

$BM = 2$ أي $|z - z_B| = 2$

أي $|z + 2i| = r$ ولدينا $|z + 2i|$

$r = 2$

ومنه $BM = 2 = r$ أي

ومنه نجد $(z' - 1) = \frac{4}{r}e^{i\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}$

ومنه نجد $|z' - 1| = |\frac{4}{2}|$ أي $|z' - 1| = 2$

معناه $|z' - z_H| = 2$

$HM' = 2$ ومنه M' تنتمي الى الدائرة (c') الذي مركزها H حيث $z_H = 1$ ونصف قطرها $r' = 2$

87. موضوع مقترح رقم 08

الاسم على اليوتيوب : موضوع مقترح رقم 08 2019

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية:

$$z^2 - 2(\cos\theta)z + 1 = 0 \quad \dots(1)$$

مع θ عدد حقيقي من المجال $]0, \frac{\pi}{2}[$

1-أ-بين أن للمعادلة (1) حلين مترافقين.

1-ب-حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (1) نرمز للحلين بـ z_1, z_2 حيث $Im(z_1) > Im(z_2)$

1-جـ-احسب قيمة $\frac{z_1^{1440} + z_2^{1440}}{1 + z_1^{1440} \times z_2^{1440}}$ ماذا تستنتج؟

2-ليكن L عدد مركب معرف كما يلي $L = \frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 \cdot z_2}$

2-أ-احسب $\overline{L}$ بدلالة z_1 و z_2 ($\overline{L}$ مرافق L)

2-ب-استنتج أن L عدد حقيقي.

3-نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o, \vec{u}, \vec{v})$ النقط A, B, C و D التي لواحقها على الترتيب 1، i، -1 و $-i$ والنقطة M لواحقها $z = z_1$ أو $z = -\overline{z_2}$

3-أ-أنشئ النقط A, B, C و D.

3-ب-عين ثم أنشئ مجموعة النقط M عندما يتغير θ في المجال $]0, \frac{\pi}{2}[$.

الحل

1-أ-البرهان أن للمعادلة حلين مترافقين

$$z^2 - 2(\cos\theta)z + 1 = 0 \quad \dots(1)$$

يكون للمعادلة (1) حلين مترافقين إذا كان المميز (Δ) عدد حقيقي سالب تماما:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2\cos\theta)^2 - 4(1)(1) \quad \dots(*)$$
$$= 4\cos^2\theta - 4 = 4(\cos^2\theta - 1)$$

نعلم أن $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

$$\cos^2\theta - 1 = -\sin^2\theta \quad \dots(**)$$

نعوض (**) في (*): يصبح $\Delta = -4\sin^2\theta < 0$

أي أن $\Delta \in \mathbb{R}_-^*$ أي Δ عدد حقيقي سالب تماما

ومنه المعادلة (1) تقبل حلين مترافقين:

1-ب- حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (1)

لدينا $\Delta = -4\sin^2\theta$

$$\Delta = i^2 4\sin^2\theta$$
$$\sqrt{\Delta} = 2i\sin\theta$$

$$z_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2\cos\theta + 2i\sin\theta}{2}$$

2-أ-تعيين القيس الرئيسي للعدد α

لدينا H صورة A بالدوران R معناه $R(A) = H$ حيث $z_H = 1$

يكافئ $e^{i\alpha} = \frac{z_H - z_I}{z_A - z_I} = e^{i\alpha}(z_A - z_I)$ ....(1)

$$z_I = \frac{3\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$
$$= \frac{3\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}i$$

نعوض (*) في (1)

$$e^{i\alpha} = \frac{1 - \frac{3}{2} - \frac{3}{2}i}{2i - \frac{3}{2} - \frac{3}{2}i} = \frac{-1 - 3i}{-3 + i}$$

نضرب في مرافق المقام:

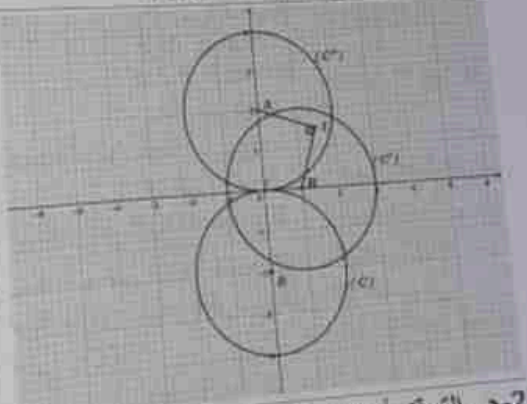
$$e^{i\alpha} = \frac{(-1 - 3i)(-3 - i)}{(-3 + i)(-3 - i)} = i$$

$$e^{i\alpha} = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

ومنه $\alpha = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

ومنه القيس الرئيسي هو $\alpha = \frac{\pi}{2}$

2-ب-تعيين على الرسم النقط I, B, A



2-جـ- التحقق أن الدائرة (C') صورة دائرة مركزها A بالدوران R

لدينا مما سبق أن $R(A) = H$

حيث H مركز الدائرة (C') فانه يوجد دائرة (c'') مركزها A بالدوران R حيث الدائرة (c') صورة الدائرة (c'') التي مركزها A بالدوران R مع نصف قطر الدائرة (c'') هو 2.

$$\begin{cases} z_1 = \cos\theta + i\sin\theta \\ z_2 = \overline{z_1} = \cos\theta - i\sin\theta \end{cases}$$ ومنه

حساب قيمة العدد: $\frac{z_1^{1440}+z_2^{1440}}{1+z_1^{1440}\times z_2^{1440}}$

$$z_1 = e^{i\theta}$$
$$z_2 = \overline{z_1} = e^{-i\theta}$$

$$\frac{z_1^{1440}+z_2^{1440}}{1+z_1^{1440}\times z_2^{1440}} = \frac{(e^{i\theta})^{1440}+(e^{-i\theta})^{1440}}{1+(e^{i\theta})^{1440}(e^{-i\theta})^{1440}}$$

$$= \frac{\cos(1440\theta)+i\sin(1440\theta)+\cos(-1440\theta)+i\sin(-1440\theta)}{1+\left(e^{i(\theta-\theta)}\right)^{1440}}$$

نسمي المعادلة السابقة بـ(*)

نعلم أن:

$$\begin{cases} \cos(-1440\,\theta) = \cos(1440\,\theta) \dots\dots (1) \\ \sin(-1440\,\theta) = -\sin(1440\,\theta) \dots\dots (2) \end{cases}$$

نعوض (1) و (2) في (*):

$$= \frac{\cos(1440\theta)+i\sin(1440\theta)+\cos(1440\theta)-i\sin(1440\theta)}{1+(e^{\theta})^{1440}}$$

$$= \frac{2\cos(1440\,\theta)}{2} = \cos(1440\,\theta)$$ ومنه :

ونستنتج أن العدد $\frac{z_1^{1440}+z_2^{1440}}{1+z_1^{1440}\times z_2^{1440}}$ عدد حقيقي

2-أحساب L بدلالة z_1 و z_2

$$\overline{L} = \overline{\left(\frac{z_1+z_2}{1+z_1.z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}+\overline{z_2}}{\overline{1+z_1.z_2}}$$

$$\overline{L} = \frac{\overline{z_1}+\overline{z_2}}{1+\overline{z_1}.\overline{z_2}}$$

لكن لدينا: $\begin{cases} \overline{z_1} = z_2 \\ \overline{z_2} = z_1 \end{cases}$

ومنه $\overline{L} = \frac{z_2+z_1}{1+z_2.z_1} = \frac{z_1+z_2}{1+z_1.z_2} = L$

2-بـاستنتاج L عدد حقيقي:

يكون L عدد حقيقي إذا كان: $\overline{L} = L$

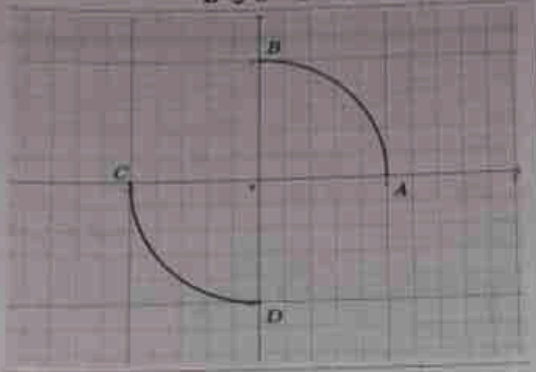
ومنه نستنتج أن L عدد حقيقي

كلمة فريق عكاشة

عندما كنا صغارا أحبينا المطر فكنا نلعب تحته ونستمتع به .

وعندما كبرنا أحبينا العلم فجمعنا شملنا لأجله. وعقدنا العزم على تسخير أنفسنا له

3-أ-انشاء النقط A ، B ، C و D



3-بـتعيين مجموعة النقط:

M لواحقها z نعلم أن $\overline{z_1} = z_2$ $\begin{cases} z = z_1 \\ \text{أو} \\ z = -\overline{z_2} \end{cases}$

تصبح لدينا

$$\begin{cases} z = e^{i\theta} \\ z = -e^{i\theta} \end{cases} \quad 0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

لدينا $z = -e^{i\theta}$

ونعلم أن $-1 = 1e^{i\pi}$

ومنه $z = -e^{i\theta} = e^{i\pi}e^{i\theta} = e^{i(\pi+\theta)}$

$$\begin{cases} z = e^{i\theta} \\ \text{أو} \\ z = e^{i(\pi+\theta)} \end{cases} : 0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

يكافئ:

$$OM = 0$$
$$(\vec{u}; \overrightarrow{OM}) = \theta \quad : M \neq 0$$
أو
$$(\vec{u}; \overrightarrow{OM}) = \pi + \theta$$
مع $0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}$

مجموعة النقط M من المستوي هي اتحاد القوسين $\overset{\frown}{AB}$ و $\overset{\frown}{CD}$ ونصف قطرهما 1 ومركزهما المبدأ O بالاتجاه المباشر.

88. موضوع مقترح رقم 09

الإسم على الويندوز : موضوع مقترح رقم 09 2019

1-حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة
$z^2 - 8z + 20 = 0$

نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o, \vec{u}, \vec{v})$ النقط A, B, C و D التي لواحقها على الترتيب
$-2i$ ، $4 - 2i$ ، $4 + 2i$ و 1

2- مثل هذه النقط في المعلم ثم استنتج طبيعة المثلث ABC.

من أجل نقطة M تختلف عن A ذات اللاحقة z نرفق النقطة M' ذات اللاحقة z' بحيث $z' = \frac{z-4-2i}{z+2i}$

3-عين مجموعة النقط M بحيث z' حقيقي.

4-عين مجموعة النقط M بحيث $|z'| = 1$.

5-بين أنه من أجل كل عدد مركب z يختلف عن $-2i$
$$z' - 1 = \frac{-4-4i}{Z+2i}$$

6-احسب $|-4-4i|$ ثم استنتج أن
$DM' \cdot AM = 4\sqrt{2}$

7-بين أنه إذا كانت M نقطة من الدائرة التي مركزها A ونصف قطرها 2 فإن M' تنتمي إلى دائرة يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

الحل

1-حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2 - 8z + 20 = 0$

$$\Delta = b^2 - 4(ac)$$
$$64 - 4(1)(20) = 64 - 80 = -16$$
$$= 16i^2 \ , \quad \sqrt{\Delta} = 4i$$
$$z_1 = \frac{8-4i}{2}$$
$$z_1 = 4 - 2i$$
ومنه $z_2 = \overline{z_1} = 4 + 2i$
$$S = \{4 - 2i\,; 4 + 2i\}$$

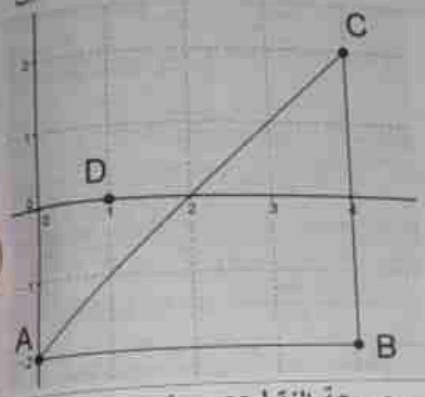
2-تمثيل النقط في المعلم $A \cdot B \cdot C \cdot D$.

$$z_A = -2i\,; A(0; -2)$$
$$z_B = 4 - 2i\,; B(4; -2)$$
$$z_C = 4 + 2i\,; C(4, 2)$$
$$z_D = 1\,; D(1, 0)$$

معرفة طبيعة المثلث ABC

$$\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} = \frac{-2i - 4 + 2i}{4 + 2i - 4 + 2i}$$
$$= -\frac{4}{4i} = \frac{-1(-i)}{i(-i)} = \frac{i}{1} = i$$
$$\left|\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}\right| = |i| = 1$$
$$\frac{BA}{BC} = 1$$
$$BA = BC$$
$$\arg\left(\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}\right) = \arg(i) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$
$$\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BA} = \frac{\pi}{2}$$

ومنه المثلث ABC قائم في B ومتساوي الساقين



3-تعيين مجموعة النقط M حيث $z' \in \mathbb{R}$

$$z' = \frac{z-(4+2i)}{z-(-2i)} = \frac{z-z_C}{z-z_A} = k', k' \in \mathbb{R}$$
$$arg\left(\frac{z-z_C}{z-z_A}\right) = k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$
$$(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{CM}) = k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

النقط A ، C و M في استقامية
ومنه مجموعة النقط M من أجل $z \in \mathbb{R}$ هي المستقيم (AC) باستثناء النقطة A

4-تعيين مجموعة النقط M بحيث $|z'| = 1$

$$|z'| = \left|\frac{z-4-2i}{z+2i}\right| = \left|\frac{z-z_C}{z-z_A}\right| = 1$$
$$\frac{CM}{AM} = 1$$
$$CM = AM$$

ومنه مجموعة النقط هي محور القطعة المستقيمة $[AC]$

5-البرهان أنه إذا كان: $z \neq -2i$ فإن $z' - 1 = \frac{-4-4i}{z+2i}$

$$z' - 1 = \frac{z-4-2i-1(z+2i)}{z+2i}$$

$$= \frac{-4-4i}{z+2i}$$

نحسب $|-4-4i|$

نعلم أن

$$|-4-4i| = \sqrt{(-4)^2+(-4)^2} = \sqrt{16+16}$$
$$= \sqrt{2\times 16} = 4\sqrt{2}$$

نستنتج أن $DM'.AM = 4\sqrt{2}$

$$|z'-1| = \left|\frac{-4-4i}{z+2i}\right|$$
$$|z'-1| = |z'_M - z_D| = DM'$$
$$\frac{|-4-4i|}{|z-(-2)|} = \frac{4\sqrt{2}}{|z-z_A|} = \frac{4\sqrt{2}}{AM}$$
$$DM' = \frac{4\sqrt{2}}{AM}$$

ب) $DM'.AM = 4\sqrt{2}$

ج) البرهان أن M' تنتمي الى دائرة

بما أن $DM'.AM = 4\sqrt{2}$

ولكن $AM = 2$

نصبح لدينا $DM'.2 = 4\sqrt{2}$

$$DM' = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$$

ومنه مجموعة النقط M هي دائرة (c') التي مركزها D ونصف قطرها $r' = 2\sqrt{2}$

89. موضوع مقترح رقم 10

الاسم في الموضوع : موضوع مقترح رقم 10 2019

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة

$$z^2 - 2(1-\sin\alpha)z + 2(1-\sin\alpha) = 0 \quad ...(E)$$

1-عين الحلين z_1 و z_2 بدلالة α حيث α عدد حقيقي تماما.

2-ضع $\alpha = \frac{\pi}{6}$ بين أن $z_1^{2019} + z_2^{2019} = -2$

II- المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(o,\vec{u},\vec{v})$ نعتبر النقط A, B, C التي لاحقاتها

$$z_A = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \qquad z_B = \overline{z_A}$$
$$z_C = 2z_A$$

1-عين قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n$ عددا حقيقيا موجبا تماما.

2-ليكن S التحويل النقطي الذي يحول النقطة M ذات اللاحقة z إلى النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث

$$z' = (1+z_A)z + 2z_B$$

عين طبيعة التحويل S ثم حدد عناصره المميزة.

3-(Γ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث

$$k \in \mathbb{Z} \; ; \; \arg(\bar{z} - z_B) = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

تحقق أن النقطة C تنتمي الى (Γ) ثم حدد طبيعة (Γ) وعناصرها.

الحل

1- تعيين z_1 و z_2

حل المعادلة (E)

$$z^2 - 2(1-\sin\alpha)z + 2(1-\sin\alpha) = 0 \quad ...(E)$$

نستعمل المميز:

$$\Delta = \left(-2(1-\sin\alpha)\right)^2 - 4(1)(2(1-\sin\alpha))$$
$$= 4(1+\sin^2\alpha - 2\sin\alpha) - 8 + 8\sin\alpha$$
$$= 4 + 4\sin^2\alpha - 8\sin\alpha - 8 + 8\sin\alpha$$
$$= 4\sin^2\alpha - 4 = 4(\sin^2\alpha - 1)$$

نعلم أن: $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$

ومنه $\sin^2\alpha - 1 = -\cos^2\alpha$

$$\Delta = -4i^2\cos^2\alpha$$
$$\sqrt{\Delta} = 2i\cos\alpha$$
$$z_1 = \frac{2(1-\sin\alpha) - 2i\cos\alpha}{2}$$
$$z_1 = 1 - \sin\alpha - i\cos\alpha$$
$$z_2 = \overline{z_1} = 1 - \sin\alpha + i\cos\alpha$$

2- البرهان أن $z_1^{2019} + z_2^{2019} = -2$

$$z_1 = 1 - \sin\frac{\pi}{6} - i\cos\frac{\pi}{6}$$
$$z_1 = 1 - \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$$
$$z_1 = \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$$
$$z_1 = e^{-i\frac{\pi}{3}}$$
$$z_2 = 1 - \sin\frac{\pi}{6} + i\cos\frac{\pi}{6}$$
$$z_2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$$
$$z_2 = \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$$
$$z_2 = e^{i\frac{\pi}{3}}$$
$$(z_1)^{2019} + (z_2)^{2019} = \left(e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)^{2019} + \left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^{2019}$$

حسب دستور موافر:

$$e^{-i2019\frac{\pi}{3}} + e^{i2019\frac{\pi}{3}} = e^{-i\left(3(673)\frac{\pi}{3}\right)} + e^{i\left(3(673)\frac{\pi}{3}\right)}$$
$$= e^{-i673\pi} + e^{i673\pi}$$
$$= \cos(-673\pi) + i\sin(-673\pi) + \cos(673\pi) + i\sin(673\pi)$$

نعلم أن $\begin{cases}\sin(-\alpha) = -\sin\alpha \\ \cos(-\alpha) = \cos\alpha\end{cases}$

$$\frac{b}{1-a}=\frac{1-i\sqrt{3}}{1-\left(\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$$

$$=\frac{1-i\sqrt{3}}{\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}}=\frac{2-2i\sqrt{3}}{-1-i\sqrt{3}}$$

نضرب في المرافق

$$=\frac{(2-2i\sqrt{3})(-1+i\sqrt{3})}{(-1-i\sqrt{3})(-1+i\sqrt{3})}$$

$$=\frac{-2+2i\sqrt{3}+2i\sqrt{3}+6}{4}$$

$$=\frac{4}{4}+\frac{4i\sqrt{3}}{4}=1+i\sqrt{3}=z_C$$

لأن $z_C=2z_A$

$$z_C=1+i\sqrt{3}$$

ومنه مركز التشابه المباشر S هي النقطة C

II-3-التحقق أن $C\in(T)$

$$\arg(\overline{z_C}-z_B)=\arg(2\overline{z_A}-z_B)$$

$$=\arg(2\overline{z_A}-\overline{z_A})$$

$$=\arg(\overline{z_A})=-\arg(z_A)$$

$$=-\left(\frac{\pi}{3}\right)+2k\pi$$

ومنه $C\in(\Gamma)$

تحديد طبيعة (Γ)

لدينا $\arg(\overline{z}-z_B)=-\frac{\pi}{3}+2k\pi$

ومنه $\arg\overline{(\overline{z}-z_B)}=+\frac{\pi}{3}+2k\pi$

$$\arg\left(\overline{\overline{z}}-\overline{z_B}\right)=\frac{\pi}{3}+2k\pi$$

$$\arg(z-\overline{z_B})=\frac{\pi}{3}+2k\pi$$

نعلم أن: $z_B=\overline{z_A}$

ومنه $\arg(z-z_A)=\frac{\pi}{3}+2k\pi$

$$(\vec{u};\overrightarrow{AM})=\frac{\pi}{3}+2k\pi$$

مع $C\in(\Gamma)$ أي

مجموعة النقط هي نصف مستقيم $]A,C)$

لتصبح لدينا

$$=\cos(673\pi)-i\sin(673\pi)+\cos(673\pi)+i\sin(673\pi)$$

$$=2\cos(673\pi)=2\cos(672\pi+\pi)$$

بما أن 672 عدد زوجي فنتخلص منه

$$2\cos(672\pi+\pi)=2\cos\pi$$

$$=2(-1)=-2$$

ومنه $(z_1)^{2019}+(z_2)^{2019}=-2$

II-1-تعيين n حيث $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n\in\mathbb{R}_+^*$

$z_A=e^{i\frac{\pi}{3}}$ و $z_B=\overline{z_A}=e^{-i\frac{\pi}{3}}$

$$\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n=\left(\frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{e^{-i\frac{\pi}{3}}}\right)^n=\left(e^{i\frac{\pi}{3}}.e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^n=\left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^n$$

$$=e^{i\frac{2n\pi}{3}}$$

$$=\cos\left(2n\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(2n\frac{\pi}{3}\right)$$

$\cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right)>0$ و $\sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right)=0$

$$\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n\in\mathbb{R}_+^*$$

أو $\arg\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n=2k\pi$

أي $\frac{2n\pi}{3}=2k\pi$

ومنه $\frac{n}{3}=k$ حيث $n=3k\in\mathbb{N}$

II-2-تحديد طبيعة التحويل S

$$z'=(1+z_A)z+2z_B$$

$$z'=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z+2\left(\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$=\left(\frac{3}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)z+1-i\sqrt{3}$$

$$\left|\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right|=\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{3}{4}}=\sqrt{\frac{12}{4}}=\sqrt{3}\neq 1$$

ومنه S تشابه مباشر نسبته $k=\sqrt{3}$

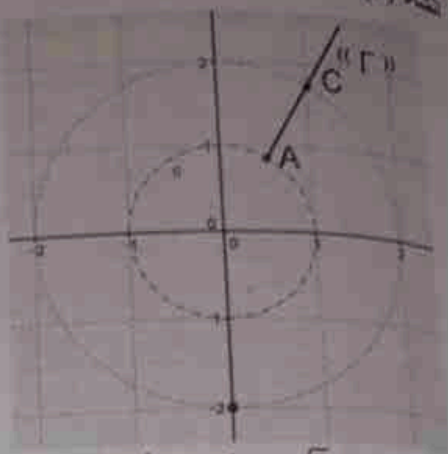
وزاويته θ:

$$\arg\left(\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\theta$$

$$\left.\begin{aligned}\cos\theta=\frac{\frac{3}{2}}{\sqrt{3}}=\frac{3}{2}\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\theta=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3}}=\frac{1}{2}\end{aligned}\right\}\theta=\frac{\pi}{6}+2k\pi$$

ومركزه $\frac{b}{1-a}$

لتكن (Γ) :



$$\begin{cases} z_A = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ z_C = 1 + i\sqrt{3} \end{cases}$$

90. موضوع مقترح رقم 11

الاسم على اليوتيوب : موضوع مقترح رقم 11 2019

إحل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z الآتية:

$$(z+1-\sqrt{3})(z^2+2z+4)=0$$

ii- المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(o,\vec{u},\vec{v})$ نعتبر النقط A, B وC التي لاحقتها

$$z_B = -1-i\sqrt{3} \qquad z_A = -1+\sqrt{3}$$
$$z_C = \overline{z_B}$$

1تحقق أن $z_B - z_A = i(z_C - z_A)$ ثم استنتج طبيعة المثلث ABC واحسب مساحته.

2اكتب على الشكل الجبري العدد المركب L حيث $L = \frac{z_C - z_A}{z_C}$

2تحقق أن $L = \frac{\sqrt{6}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$ ثم استنتج القيمة المضبوطة لـ $\tan\frac{\pi}{12}$.

3اعتبر التحويل النقطي S الذي يحول النقطة M ذات اللاحقة Z إلى النقطة M' ذات اللاحقة z' والمعرف بـ $z' = (z - z_B)L + z_B$

بين أن S تشابه مباشر يطلب تحديد عناصره المميزة.

4اكتب النقط A', B' وC' صور النقط A, B وC على الترتيب بالتحويل SoS.

احسب مساحة المثلث $A'B'C'$.

الحل:

I-1- حل في $\mathbb{C}$ المعادلة:

$$(z+1-\sqrt{3})(z^2+2z+4)=0$$
$$z+1-\sqrt{3}=0$$
$$z_0 = -1+\sqrt{3}$$
$$z^2+2z+4=0$$

نستعمل المميز لحل المعادلة:

$$\Delta = 4-16 = -12 = 12i^2$$
$$\sqrt{\Delta} = 2i\sqrt{3}$$
$$z_1 = \frac{-2-2i\sqrt{3}}{2}$$
$$z_1 = -1-i\sqrt{3}$$
$$z_2 = \overline{z_1} = -1+i\sqrt{3}$$
$$S = \{z_0, z_1, z_2\}$$

II) البرهان أن $z_B - z_A = i(z_c - z_A)$

يكفي أن نبرهن:

$$\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = i$$
$$\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \frac{-1-i\sqrt{3}+1-\sqrt{3}}{-1+i\sqrt{3}+1-\sqrt{3}} = \frac{-\sqrt{3}-i\sqrt{3}}{-\sqrt{3}+i\sqrt{3}}$$

نضرب في المرافق:

$$\frac{(-\sqrt{3}-i\sqrt{3})}{(-\sqrt{3}+i\sqrt{3})} \times \frac{(-\sqrt{3}-i\sqrt{3})}{(-\sqrt{3}-i\sqrt{3})}$$
$$\frac{3+3i+3i-3}{6} = \frac{6i}{6} = i$$

ومنه: $z_B - z_A = i(z_C - z_A)$

-استنتاج طبيعة المثلث ABC

$$\left|\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right| = |i| = 1$$
$$AB = AC \ldots . (1)$$
$$\arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right) = \arg(i) = \frac{\pi}{2}$$
$$(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \ldots . (2)$$

من 1 و 2 نستنتج أن المثلث ABC قائم في A ومتساوي الساقين.

حساب S_{ABC}

$$S_{ABC} = \frac{AB.AC}{2}$$
$$AB = |z_B - z_A| = |-1-i\sqrt{3}+1-\sqrt{3}|$$

$$|-\sqrt{3}-i\sqrt{3}|=\sqrt{3+3}=\sqrt{6}$$

وبما أن ABC مثلث متساوي الساقين فإن:

$$AB=AC=\sqrt{6}$$

$$S_{ABC}=\frac{\sqrt{6}\times\sqrt{6}}{2}=\frac{6}{2}=3(u.a)$$

2-كتابة L على الشكل الجبري:

$$L=\frac{z_C-z_A}{z_C}=\frac{-1+i\sqrt{3}+1-\sqrt{3}}{-1+i\sqrt{3}}$$

نضرب في المرافق

$$\frac{(-\sqrt{3}+i\sqrt{3})(-1-i\sqrt{3})}{(-1+i\sqrt{3})(-1-i\sqrt{3})}$$

$$L=\frac{\sqrt{3}+3(-i\sqrt{3}+3}{4}=\frac{3+\sqrt{3}}{4}+\frac{3-\sqrt{3}}{4}i$$

$$L=\frac{3+\sqrt{3}}{4}+\frac{3-\sqrt{3}}{4}i$$

2-ب-البرهان أن $L=\frac{\sqrt{6}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$

$$L=\frac{z_C-z_A}{z_C}=\frac{-1+i\sqrt{3}+1-\sqrt{3}}{-1+i\sqrt{3}}$$

$$L=\frac{-\sqrt{3}+i\sqrt{3}}{-1+i\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}(-1+i)}{-1+i\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}e^{i\frac{3\pi}{4}}}{2e^{i\frac{2\pi}{3}}}$$

$$|\sqrt{3}(-1+i)|=\sqrt{3}|-1+i|=\sqrt{3}.\sqrt{2}=\sqrt{6}$$

$$|-1+i\sqrt{3}|=2$$

$$\arg(-1+i\sqrt{3})=\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}+2k\pi$$

$$L=\frac{\sqrt{6}}{2}e^{i\left(\frac{3\pi}{4}\right)}e^{-i\left(\frac{2\pi}{3}\right)}=\frac{\sqrt{6}}{2}e^{i\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{2\pi}{3}\right)}$$

$$L=\frac{\sqrt{6}}{2}e^{i\left(\frac{\pi}{12}\right)}=L=\frac{\sqrt{6}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$$

استنتاج القيمة المضبوطة لـ $\tan\frac{\pi}{12}$

$$L=\frac{\sqrt{6}}{2}\cos\frac{\pi}{12}+\frac{i\sqrt{6}}{2}\sin\frac{\pi}{12}$$

$$=\frac{3+\sqrt{3}}{4}+\frac{3-\sqrt{3}}{4}i$$

$$\begin{cases}\frac{\sqrt{6}}{2}\cos\frac{\pi}{2}=\frac{3+\sqrt{3}}{4}\Rightarrow\cos\frac{\pi}{12}=\left(\frac{\frac{3+\sqrt{3}}{4}}{\frac{\sqrt{6}}{2}}\right)\\ =\left(\frac{3+\sqrt{3}}{4}\times\frac{2}{\sqrt{6}}\right)=\frac{3+\sqrt{3}}{2\sqrt{6}}\end{cases}$$

لدينا

$$\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\left(\sin\frac{\pi}{12}\right)}{\left(\cos\frac{\pi}{12}\right)}=\frac{\frac{3-\sqrt{3}}{2\sqrt{6}}}{\frac{3+\sqrt{3}}{2\sqrt{6}}}=\frac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}$$

نضرب في المرافق

$$\frac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}\times\frac{3-\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}=\frac{9+3-6\sqrt{3}}{9-3}$$

$$\frac{12}{6}-\frac{6\sqrt{3}}{6}=2-\sqrt{3}$$

ومنه: $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)=2-\sqrt{3}$

3-البرهان أن S تشابه مباشر:

لدينا

$$z'=(z-z_B)L+z_B$$

$$z'-z_B=(z-z_B)$$

$$z'-z_B=\frac{\sqrt{6}}{2}e^{i\frac{\pi}{12}}(z-z_B)$$

L عدد مركب حيث $\frac{\sqrt{6}}{2}\neq 1$

إذن S تشابه مباشر الذي نسبته $k=\frac{\sqrt{6}}{2}$ وزاويته

$$\theta=\frac{\pi}{12}+2k\pi$$

ومركزه النقطة B.

4-حساب $S_{A'B'C'}$

لدينا: $S_{ABC}=3(u.a)$

$$S_{A'B'C'}=k^2k^2S_{ABC}$$

$$S_{A'B'C'}=K^4S_{ABC}=\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^4(3)$$

$$\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2.\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2(3)$$

$$\left(\frac{6}{4}\right)\left(\frac{6}{4}\right)(3)=\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)(3)$$

$$S_{A'B'C'}=\frac{27}{4}(u.a)$$

$$-\left(-\right)\sqrt{\ }$$

91. موضوع مقترح رقم 12

الاسم على الموقع : موضوع مقترح رقم 12 2019

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ θ عدد حقيقي من المجال $]-\pi;\pi]$

I) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة ذات المجهول z التالية:

$(z^2-2z+2)(z^2-2(\sin\theta)z+1)=0$

II) A، B، C و D نقط من المستوي لاحقاتها على الترتيب:

$z_A=-\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

$z_B=1-i$ ، $z_C=\sin\theta+i\cos\theta$ ، $z_D=\overline{z_C}$ (يرمز $\overline{z_C}$ إلى مرافق z_C)

1-اكتب الأعداد z_A و z_B و z_C و z_D على الشكل الأسي.

2-E نقطة من المستوي لاحقتها z_E حيث $z_E=\frac{z_A}{z_B}$.

بيّن أن النقط C ، D و E تنتمي إلى دائرة يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

3-ليكن S تشابه المباشر الذي مركزه النقطة A وزاويته $\frac{\pi}{4}$ ونسبته $(2\sqrt{2}-2)$.

عيّن قيمة θ حتى تكون النقطة B صورة النقطة C بالتشابه المباشر S.

4-نضع $\theta=-\frac{3\pi}{4}$، عيّن قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون العدد $(z_D)^n$ تخيليا صرفا.

الحل

I) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة ذات المجهول z التالية:

$(z^2-2z+2)(z^2-2\sin\theta z+1)=0$

لدينا إما:

$z^2-2z+2=0$

$\Delta=4-4(2)=-4=(2i)^2$

$\sqrt{\Delta}=2i$

$z_1=\frac{2-2i}{2}=1-i$

$z_2=\frac{2+2i}{2}=1+i$

أو $z^2-2\sin\theta z+1=0$

$\Delta=4\sin\theta^2-4$

$=4(\sin\theta^2-1)=$

$-4\cos^2\theta$

$\sqrt{\Delta}=2\cos\theta$

$z_3=\frac{2\sin\theta-2i\cos\theta}{2}=\sin\theta-i\cos\theta$

$z_3=\frac{2\sin\theta-2i\cos\theta}{2}=\sin\theta+i\cos\theta$

ومنه S مجموعة الحلول هي $S=\{z_1,z_2,z_3,z_4\}$

II-1- كتابة z_D, z_C, z_B, z_A على الشكل الأسي

لدينا $z_A=-\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}=-\sqrt{2}e^{i\pi}e^{i\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

لأن $e^{i\pi}=-1$

$z_B=1-i \quad |z_B|=\sqrt{2}$ و

$\begin{cases}\cos\theta_B=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin\theta_B=-\frac{1}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}\Rightarrow\theta_B=-\frac{\pi}{4}$

ومنه $z_B=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$

$z_C=\sin\theta+i\cos\theta=e^{i\theta}$

$|z_C|=1$

$\begin{cases}\sin\theta=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\\ \cos\theta=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\end{cases}$

ومنه $z_C=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$

ومنه $z_E=e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}$

و $z_D=\overline{z_C}=e^{i\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)}$

2- إثبات أن النقط E, D, C تنتمي إلى نفس الدائرة (C)

$z_E=\frac{z_A}{z_B}=\frac{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}=e^{i\frac{\pi}{2}}$

ولدينا: $|z_C|=|z_D|=|z_E|=1$

أي:

$OA=OD=OE=1$

ومنه النقط E, D, C تنتمي إلى الدائرة (C) التي مركزها O ونصف قطرها 1

3-تعيين قيمة θ حتى تكون B صورة C بالتشابه S مع

$\theta\in]-\pi,\pi[$

بما أن التشابه S مركزه A

ونسبته $(2\sqrt{2}-2)$ وزاويته $\frac{\pi}{4}$ فإن

$z_B-z_A=(2\sqrt{2}-2)e^{i\frac{\pi}{4}}(z_C-z_A)$

إذن

$\frac{z_B-z_A}{(2\sqrt{2}-2)e^{i\frac{\pi}{4}}}=z_C-z_A$

92. موضوع مقترح رقم 13

الاسم على الويكيبوب : موضوع مقترح رقم 13 2019

1- m عدد حقيقي، نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية:

$$z^2 + (m+1)z + (2m-1) = 0 \dots (E)$$

- عين قيم العدد الحقيقي m التي من أجلها تقبل المعادلة (E) حلين مركبين غير حقيقيين.

2- لتكن $m = 3$، حل للمعادلة (E).

3- نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ النقط A، B، C و E التي لاحقاتها

$z_A = -2 + i$، $z_B = -2 - i$ و $z_C = \alpha$ و $z_E = \sqrt{3}$ حيث α عدد حقيقي و $\alpha > -2$

- بين أن قيمة α التي يكون من أجلها المثلث ABC متقايس الأضلاع هي $(-2 + \sqrt{3})$.

- نضع في كل ما يأتي $z_C = -2 + \sqrt{3}$:

4- أكتب العدد المركب: $\frac{z_C - z_E}{z_A - z_B}$ على الشكل الأسي ثم استنتج أن:

أ- المستقيمان (AB) و (EC) متعامدان.

ب- النقط A، B و E تنتمي إلى نفس الدائرة (γ) التي يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

5- ليكن r الدوران الذي يحوّل النقطة B إلى C ويحوّل C إلى A، عبارته المركبة هي :

$z' = az + \left(\frac{\sqrt{3}-6}{2}\right) + i\left(\frac{2\sqrt{3}-1}{2}\right)$ حيث a عدد مركب.

أ- أحسب العدد المركب a ثم استنتج زاوية الدوران r.

ب- تحقق أن النقطة G مركز ثقل المثلث ABC هي مركز الدوران r.

الحل

تعيين قيم العدد الحقيقي m التي من أجلها تقبل المعادلة E حلين مركبين غير حقيقيين

لدينا:

$$z^2 + (m+1)z + (2m-1) = 0 \dots (E)$$
$$\Delta = (m+1)^2 - 4(1)(2m-1)$$
$$= m^2 - 6m + 5$$
$$\Delta_m = 16$$
$$\sqrt{\Delta_m} = 4$$
$$m_1 = 1 \quad m_2 = 5$$

$$z_C = \frac{z_B - z_A}{(2\sqrt{2}-2)e^{i\frac{\pi}{4}}} + z_A$$
$$z_C = \frac{1 - i - 1 - i}{(2\sqrt{2}-2)e^{i\frac{\pi}{4}}} + 1 + i$$

نبسط نجد

$$z_C = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\left[\frac{\sqrt{2}-2}{2\sqrt{2}-2}\right]$$
$$= e^{i\frac{\pi}{4}}\left[\frac{2-2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-2}\right] = -e^{i\frac{\pi}{4}}$$

ومنه $z_C = e^{i\frac{5\pi}{4}}$

لكن لدينا $z_C = e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}$

أي $\frac{\pi}{2} - \theta = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$

ومنه $\theta = \frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{4} = \frac{(2-5)\pi}{4}$

أي $\theta = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi$

مع $k \in \mathbb{Z}$

لدينا: $\theta \in]-\pi, \pi[$ أي $\theta = -\frac{3\pi}{4}$

4-تعيين قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون $(z_D)^n$ تخيليا صرفا

لدينا $z_D = e^{-\frac{5i\pi}{4}}$

$$(z_D)^n = e^{-\frac{5ni\pi}{4}} = \cos\left(-\frac{5n\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{5n\pi}{4}\right)$$

حتى يكون $(z_D)^n$ تخيليا صرفا يجب أن يكون

$$\cos\left(-\frac{5n\pi}{4}\right) = 0$$

أي:

$$-\frac{5n\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi$$
$$-5n\pi = 2\pi + 4k\pi$$

أي:

$-5n\pi = 2\pi + 4k\pi$ أي

$-5n = 2 + 4k$ أي $-4n - n \equiv 2[4]$ لكن

$-4n \equiv 0[4]$

$n \equiv -2[4]$ أي $-n \equiv 2[4]$

$n \equiv -2 + 4[4]$

أي:

$n \equiv 2[4]$

ومنه $n = 4k + 2$ مع $k \in \mathbb{N}$

دراسة إشارة Δ

$$\Delta = (m-1)(m-5)$$

m	$-\infty$		1		5		$+\infty$
Δ	$+$	0	$-$	0	$+$		

ومنه $\Delta > 0$ لما $m \in]-\infty, 1[\cup]5, +\infty[$

و $\Delta < 0$ لما $1 < m < 5$

قيم m حتى المعادلة (E) يقبل حلين مركبين

$1 < m < 5$

2-نضع $m = 3$ نحل المعادلة (E_3)

لما $m = 3$ نجد $z^2 + 4z + 5 = 0$

$$\Delta = 16 - 20 = -4 = 4i^2$$

$$\sqrt{\Delta} = 2i$$

$$z_1 = \frac{-4-2i}{2} = -2-i$$

$$z_2 = \frac{-4+2i}{2} = -2+i$$

أي $S = \{-2-i\ ;\ -2+i\}$

3-إثبات أن قيم α التي من أجلها المثلث ABC متقايس أضلاع هي $(-2+\sqrt{3})$

يكون ABC متقايس الأضلاع إذا كان:

$$AB = AC = CB$$

$$AB = |z_B - z_A| = |-2-i+2-i| = |-2i|$$

$$= 2$$

$$AC = |z_C - z_A| = |\alpha + 2 - i|$$

$$= \sqrt{(\alpha+2)^2 + (-1)^2}$$

ومنه $AB = AC$

معناه:

$$\sqrt{(\alpha+2)^2 + 1} = 2$$

$$(\alpha+2)^2 = 3$$

$$\alpha = \sqrt{3} - 2$$

أو

$\alpha = -\sqrt{3} - 2 \Leftarrow$ مرفوض لأن $\alpha > -2$

أي قيمة α هي $\sqrt{3} - 2$

4-أ-كتابة العدد $\frac{z_C - z_E}{z_A - z_B}$ على الشكل الأسي

$$\frac{z_C - z_E}{z_A - z_B} = \frac{-2+\sqrt{3}-\sqrt{3}}{-2+i+2+i} = \frac{-2}{2i} = i = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

ومنه $\frac{z_C - z_E}{z_A - z_B} = e^{i\frac{\pi}{2}}$

ومنه $(AB) \perp (CE)$ لأن

$$\arg\left(\frac{z_C - z_E}{z_A - z_B}\right) = \left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{EC}\right)$$

$$= \frac{\pi}{2} + 2k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$$

ومنه نستنتج $(EC) \perp (AB)$

4-ب-استنتاج أن E, B, A تنتمي إلى نفس الدائرة (γ)

يتحقق ذلك إذا كان $KA = KB = KE = r$

حيث k مركز الدائرة (γ) و r نصف قطرها

حيث: $z_K = x + yi$

$$KA = |z_A - z_K| = |-2+i-x-yi|$$

$$KA = |(-2-x)+i(1-y)|$$

$$KA = \sqrt{(-2-x)^2 + (1-y)^2} \quad ...(1)$$

$$KB = \sqrt{(-2-x)^2 + (1+y)^2} \quad ...(2)$$

$$KE = \sqrt{\left(\sqrt{3}-x\right)^2 + y^2} \quad ...(3)$$

لدينا $KA = KB$

$$(-2-x)^2 + (1+y)^2 = (-2-x)^2 + (1-y)^2$$

$$(1+y)^2 = (1-y)^2$$

$$2y = -2y$$

أي $y = 0$

و $KA = KE$

$$(-2-x)^2 + (1-y)^2 = \left(\sqrt{3}-x\right)^2 + y^2$$

بالتبسيط نجد $4x + 2x\sqrt{3} + 2 - 2y = 0$

مع $y = 0$

$$x(4+2\sqrt{3}) + 2 = 0$$

$$x(4+2\sqrt{3}) = -2$$

ومنه

$$x = -\frac{2}{4+2\sqrt{3}} = -\frac{1}{2+\sqrt{3}}$$

بالضرب في المرافق:

$$x = -\frac{-1(2-\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}$$

نجد $x = -2+\sqrt{3}$

أي: $z_K = -2+\sqrt{3} = z_C$

ومنه النقط E, B, A تنتمي إلى نفس الدائرة (γ) التي مركزها (C) ونصف قطرها $r' = 2$

$$r' = EC = |z_C - z_E| = |-2+\sqrt{3}-\sqrt{3}|$$

$$= |-2| = 2$$

5-أ-حساب العدد المركب a

لدينا من المعطيات $r(B) = C$ و $r(C) = A$

$$z_{C'} = az_B + \left(\frac{\sqrt{3}-6}{3}\right) + i\left(\frac{2\sqrt{3}-1}{2}\right)$$

$$z_{A'} = az_C + \left(\frac{\sqrt{3}-6}{2}\right) + i\left(\frac{2\sqrt{3}-1}{2}\right)$$

بالطرح نجد

$$z_C - z_A = a(z_B - z_C)$$
$$a = \frac{z_C - z_A}{z_B - z_C} = \frac{-2+\sqrt{3}+2-i}{-2-i+2-\sqrt{3}}$$
بالضرب في المرافق و التبسيط نجد
$$a = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$$
استنتاج زاوية الدوران r
$$|a| = 1$$
$$\arg a = \theta \begin{cases} \cos\theta = -\frac{1}{2} \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{2\pi}{3}$$ لأن
ومنه زاوية الدوران r هي:
$$\theta = \frac{2\pi}{3}$$

5-بـتحقق أن النقطة G مركز ثقل ABC هي مركز الدوران r

لدينا $z_G = \frac{z_A+z_B+z_C}{3} = \frac{-2+i-2-i-2+\sqrt{3}}{3}$
$$z_G = \frac{-6+\sqrt{3}}{3}$$
والعبارة المركبة للدوران r هي
$$z' = az + b$$
مع مركزه
$$z_a = \frac{b}{1-a_a}$$
$$z_a = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z + \left(\frac{\sqrt{3}-6}{2}\right) + i\left(\frac{2\sqrt{3}-1}{2}\right)$$
لدينا
$$b = \frac{\sqrt{3}-6}{2} + i\left(\frac{2\sqrt{3}-1}{2}\right)$$
$$a = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$a_a = \frac{b}{1-a} = \frac{\frac{\sqrt{3}-6}{2} + i\left(\frac{2\sqrt{3}-1}{2}\right)}{1+\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}}$$
$$= \frac{(\sqrt{3}-6)+i(2\sqrt{3}-1)(3+i\sqrt{3})}{(3-i\sqrt{3})(3+i\sqrt{3})}$$
$$a_a = \frac{4\sqrt{3}-24}{12} = \frac{\sqrt{3}-6}{3} = \frac{-6+\sqrt{3}}{3} = z_G$$
ومنه G مركز الدوران r.

93. موضوع مقترح رقم 14

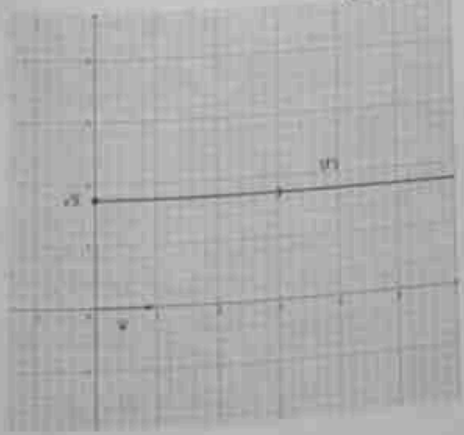
الاسم على اليوتيوب : موضوع مقترح رقم 16 2019

المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ ولتكن النقط A, B, M لاحقاتها z_A, z_B, z على الترتيب حيث
$$z_A = i\sqrt{3} \text{ و } z_B = \overline{z_A}$$
(Γ) مجموعة النقط M من المستوي (حيث $z \neq z_A$ و $z \neq z_B$) المعرفة بالعلاقة
$$\arg(z^2+3) = \arg(z+i\sqrt{3}) + 2k\pi \ldots (E)$$
مع $k \in \mathbb{Z}$.
-عين طبيعة المجموعة (Γ) ثم أنشئها.

الحل

-تعيين مجموعة النقط M من المستوي بحيث
$$\arg(z^2+3) = \arg(z+i\sqrt{3}) + 2k\pi$$
لدينا: $z^2+3 = z^2 - i^2\sqrt{3}^2$
$$\arg(z^2+3) = z^2 - (i\sqrt{3})^2 = (z-i\sqrt{3})(z+i\sqrt{3})$$
$$= \arg(z-i\sqrt{3}) + \arg(z+i\sqrt{3})$$
وبالتالي تصبح (E) كالتالي:
$$\arg(z+i\sqrt{3}) + \arg(z-i\sqrt{3}) = \arg(z+i\sqrt{3}) + 2k\pi$$
$$\arg(z-i\sqrt{3}) = 2k\pi$$
$$\arg(z-z_A) = 2k\pi$$
ومنه $(\vec{u}, \overrightarrow{AM}) = 2k\pi \; k \in z$
أي الشعاعان $\vec{u}$ و $\overrightarrow{AM}$ مرتبطان خطيا
$$\vec{u} \parallel \overrightarrow{AM}$$
ومنه مجموعة النقط هي نصف المستقيم $[AM)$ ماعدا A

انشاء (Γ)



94. موضوع مقترح رقم 15

أحل في مجموعة الاعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$ ..... (1)

اكتب الحلول على الشكل المثلثي

المستوي المركب منسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ ، لتكن النقط والتي لواحقها على الترتيب $z_A = z_1$ ، z_B ، $z_C = \overline{z_B}$ وليكن العدد المركب L حيث $L = \frac{(1-i)z_B}{z_C}$

اكتب العدد L على الشكل الاسي ثم احسب L^{2016}

اعط حسب قيم العدد الطبيعي n حتى يكون العدد L^n تخيلي صرف

بين انه يوجد دوران r مركزه B ويحول A الى C ، عين زاويته

استنتج طبيعة المثلث ABC واحسب مساحته

ليكن (E_1) مجموع النقط M ذات اللاحقة z بحيث يكون العدد $\frac{z-\sqrt{3}+i}{z-2i}$ حقيقي موجب

بين (E_2) مجموع النقط M ذات اللاحقة z بحيث $iz = -1 + i\sqrt{3} + 2ie^{i\theta}$ عندما θ يمسح $\mathbb{R}$

الحل

أحل في مجموعة الاعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة

$$z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$$
$$\Delta = -4 = 4i^2$$
$$\sqrt{\Delta} = 2i$$
$$z_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2\sqrt{3}+2i}{2} = \sqrt{3}+i$$
$$z_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2\sqrt{3}-2i}{2} = \sqrt{3}-i$$

مجموعة الحلول $S = \{z_1, z_2\}$

كتابة z_1 ، z_2 على الشكل المثلثي

كتابة z على الشكل $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$z_1 = \sqrt{3}+i$

$$r = |z_1| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (1)^2} = 2$$

$$\theta_{z_1} = \arg(z_1): \begin{cases} \cos\theta_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta_2 = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta_1 = \frac{\pi}{6}$$

$$z_1 = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$$
$$z_2 = \overline{z_1} = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$$

2-أ-كتابة L على الشكل الأسي:

لدينا $L = \frac{(1-i)z_B}{z_C}$

و $(1-i) = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$

و $z_B = z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$ ، $z_C = z_2 = 2e^{-i\frac{\pi}{6}}$

ومنه $L = \frac{\left(\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)2e^{i\frac{\pi}{6}}}{2e^{-i\frac{\pi}{6}}}$

وعليه $L = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}e^{i\frac{\pi}{6}}e^{i\frac{\pi}{6}}$

$$L = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$$

حساب L^{2016}

لدينا

$$L^{2016} = \left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}\right)^{2016} = (\sqrt{2})^{2016}e^{i\frac{2016\pi}{12}}$$

ومنه

$$L^{2016} = \left((\sqrt{2})^2\right)^{1008}\left(\cos\frac{2016\pi}{12} + i\sin\frac{2016\pi}{12}\right)$$
$$L^{2016} = (2)^{1008}(\cos 168\pi + i\sin 168\pi)$$
$$= (2)^{1008}(1+0) = 2^{1008}$$

2-ب-تعين قيم n حتى يكون L^n تخيلي صرف

لدينا $L^n = \left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}\right)^n = \sqrt{2}^n e^{i\frac{n\pi}{12}}$

ومنه $L^n = \sqrt{2}^n\left(\cos\frac{n\pi}{12} + i\sin\frac{n\pi}{12}\right)$

يكون L^n تخيلي صرف اذا كان

$\sqrt{2}^n\cos\frac{n\pi}{12} = 0$ و $\sqrt{2}^n\sin\frac{n\pi}{12} \neq 0$

وعليه : $\sqrt{2}^n\cos\frac{n\pi}{12} = 0$

$$\cos\frac{n\pi}{12} = 0$$
$$\frac{n\pi}{12} = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

أي $n = 6 + 12k$

3-أ-البرهان أنه يوجد دوران r

لدينا B مركز الدوران r و r يحول A الى C أي $r(A) = C$

ومنه $z_C - z_B = a(z_A - z_B)$ أي $a = \frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}$

$$a = \frac{\sqrt{3}-i-\sqrt{3}-i}{2i-\sqrt{3}-i} = \frac{-2i(-\sqrt{3}-i)}{(-\sqrt{3}+i)(-\sqrt{3}-i)}$$

وعليه $a = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$|a| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$$

ومنه يوجد دوران r مركزه B ويحول A الى C وزاويته

$$\theta = \arg(a) = \begin{cases} \cos\theta = -\frac{1}{2} \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

ومنه $\theta = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$

3-استنتاج طبيعة المثلث ABC

لدينا $\left|\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}\right| = \left|-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = 1$

ومنه $BC = BA$ و $\arg\left(\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}\right) = \frac{2\pi}{3}$

أي $(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{AC}) = \frac{2\pi}{3}$

ومنه المثلث ABC متساوي الساقين

حساب مساحة المثلث ABC :

لتكن B' المسقط العمودي لـ B على (AC)

ومنه $S_{ABC} = \frac{AC \times BB'}{2}$

حيث B' هي منتصف $[AC]$ لأن ABC متساوي الساقين

$$z_{B'} = \frac{z_A + z_C}{2} = \frac{2i + \sqrt{3} - i}{2}$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

$AC = |z_C - z_A| = |\sqrt{3} - i - 2i| = |\sqrt{3} - 3i|$

أي $AC = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

و $BB' = |z_{B'} - z_B| = \left|\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i - \sqrt{3} - i\right|$

ومنه $BB' = \left|-\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}i\right| = 1$

$S_{ABC} = \frac{AC \times BB'}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ ua

4-تعيين مجموعة النقط M

لدينا $\frac{z - \sqrt{3} + i}{z - 2i} \in \mathbb{R}_+$

معناه: $\frac{z - (\sqrt{3} - i)}{z - (2i)} = \frac{z_M - z_C}{z_M - z_A} \in \mathbb{R}_+$

أي $(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{CM}) = 2k\pi$

ومنه مجموعة النقط حتى يكون العدد الحقيقي موجب هي المستقيم (AC) باستثناء القطعة $[AC]$ والنقطة A

4-تعيين (E_2) :

لدينا $z = -1 + i\sqrt{3} + 2ie^{i\theta}$

بالضرب المرافق في (-1) نجد :

$$-1(iz) = -1(-i) + (-i)(i\sqrt{3}) + (-i)2ie^{i\theta}$$

ومنه $z = i + \sqrt{3} + 2e^{i\theta}$

$z - (\sqrt{3} + i) = 2e^{i\theta}$

$z_M - z_B = 2e^{i\theta}$

نأخذ المعاملة نجد : $|z_M - z_B| = 2$

$$\begin{cases} BM = 2 \\ (\vec{u};\overrightarrow{BM}) = \theta \end{cases}$$

ومنه مجموعة النقط M هي دائرة مركزها B ونصف قطرها $r = 2$

95. موضوع مقترح رقم 16

(الأستاذ على اليوتيوب : موضوع مقترح رقم 02 لسنة 2018)

نعتبر كثير الحدود $P(z)$ المعرف بـ:

$$P(z) = z^3 - (3 + 2\sqrt{3})z^2 + (7 + 4\sqrt{3})z - (5 + 2\sqrt{3})$$

I-1-تحقق أن : $p(z) = (z - 1)Q(z)$

2-عين $Q(z)$ ثم حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة $p(z) = 0$

II-المستوي منسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ نعتبر النقط A, B, C صور الأعداد $z_A = 1$ ، $z_B = 1 + \sqrt{3} - i$ ، $z_C = 1 + \sqrt{3} + i$ على الترتيب

1-اكتب $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ على الشكل المثلثي ثم استنتج طبيعة المثلث ABC

2-نعتبر النقطة ω صورة العدد $1 + \frac{2\sqrt{3}}{3}$ ، بين أن ω مركز الدائرة (C) المحيطة بالمثلث ABC

3-حدد (E) مجموع النقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث: $\left|\frac{z_C - z}{z_B - z}\right| = 1$

4-عين (Γ') مجموع النقط M من المستوي ذات اللاحقة z التي تحقق:

$$\arg\left(\frac{z-1}{z-1-\sqrt{3}-i}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad ; \quad (k \in \mathbb{Z})$$

الحل

1-التحقق أن: $p(z) = (z - 1)Q(z)$

حتى تكون $p(z) = (z - 1)Q(z)$

يجب أن يكون $p(1) = 0$

لدينا

$$p(1) = 1^3 - (3 + 2\sqrt{3})1^2 + (7 + 4\sqrt{3})1 - (5 + 2\sqrt{3})$$
$$= 8 - 8 + 4\sqrt{3} - 4\sqrt{3} = 0$$

ومنه 1 جذر لـ $p(z)$ أي يمكن كتابة

$p(z) = (z - 1)Q(z)$

2-تعيين $Q(z)$

لدينا $p(z) = (z - 1)Q(z)$

$Q(z) = z^2 + az + b$ حيث

$$p(z) = (z-1)(z^2+az+b)$$
$$= z^3 + az^2 + bz - z^2 - az - b$$
$$= z^3 + (a-1)z^2 + (b-a)z - b$$
$$= z^3 - (3+2\sqrt{3})z^2 + (7+4\sqrt{3})z - (5+2\sqrt{3})$$

بالمطابقة نجد:

$$-b = -(5+2\sqrt{3})$$
$$b = (5+2\sqrt{3})$$
$$a-1 = -(3+2\sqrt{3})$$
$$a = -2-2\sqrt{3} = -2(1+\sqrt{3})$$

وعليه $Q(z) = z^2 - 2(1+\sqrt{3})z + 5 + 2\sqrt{3}$

حل المعادلة: $p(z) = 0$

لدينا $p(z) = 0$

أي $p(z) = (z-1)Q(z) = 0$

$$= (z-1)(z^2 - 2(1+\sqrt{3})z + 5 + 2\sqrt{3}) = 0$$

إما $\begin{cases} z-1 = 0 \\ z_0 = 1 \end{cases}$

أو

$$z^2 - 2(1+\sqrt{3})z + 5 + 2\sqrt{3}$$
$$\Delta = -4 = 4i^2$$
$$\sqrt{\Delta} = 2i$$
$$z_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2} = \frac{2(1+\sqrt{3}) - 2i}{2}$$
$$= 1 + \sqrt{3} - i$$
$$z_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2} = \frac{2(1+\sqrt{3}) + 2i}{2}$$
$$= 1 + \sqrt{3} + i$$

ومنه الحلول $S = \{z_0, z_1, z_2\}$

II-1-كتابة $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ على الشكل المثلثي

لدينا $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{1+\sqrt{3}+i-1}{1+\sqrt{3}-i-1} = \frac{(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}+i)}{(\sqrt{3}-i)(\sqrt{3}+i)}$

ومنه $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\left|\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = \left|\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = 1$$

$$\theta_1 = \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \arg\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) =$$

$\begin{cases} \cos\theta_1 = \frac{1}{2} \\ \sin\theta_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

ومنه $\theta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$

وعليه $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = e^{i\frac{\pi}{3}}$

استنتاج طبيعة المثلث ABC

لدينا $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{i\frac{\pi}{3}}$

$$\left|\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = 1$$

أي $AC = AB$ ..... (1)

و $\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$

أي $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ .....(2)

من (1) و (2) نستنتج أن ABC متقايس الأضلاع

2-إثبات أن W مركز الدائرة (C) المحيطة بالمثلث ABC

حتى تكون w مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABC يكفي أن نبرهن أن $wA = wB = wC = 2$

$$wA = |z_A - z_w| = \left|1 - 1 - \frac{2\sqrt{3}}{3}\right| = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$wA = |z_B - z_w| = \left|1 + \sqrt{3} - i - 1 - 2\frac{\sqrt{3}}{3}\right|$$
$$= \left|\frac{\sqrt{3}}{3} + i\right|$$
$$wB = \sqrt{\frac{12}{9}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$wC = |z_C - z_w| = \left|1 + \sqrt{3} + i - 1 - \frac{2\sqrt{3}}{3}\right|$$
$$= \left|\frac{\sqrt{3}}{3} + i\right| = 2\frac{\sqrt{3}}{3}$$

ومنه $wA = wB = wC = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

ومنه w مركز الدائرة (C) المحيطة بالمثلث ABC

3-تحديد (E) حيث $\left|\frac{z_C - z}{z_B - z}\right| = 1$

لتكن z لاحقة M ومنه $\left|\frac{z_C - z_M}{z_B - z_M}\right| = 1$

أي $MC = MB$

ومنه مجموعة النقط هي محور القطعة المستقيمة $[BC]$ باستثناء النقطة B

4-تعيين (Γ') حيث:

$$\arg\left(\frac{z-1}{z-1-\sqrt{3}-i}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

لدينا $\arg\left(\frac{z-1}{z-1-\sqrt{3}-i}\right) = \arg\left(\frac{z-z_A}{z-z_C}\right)$

$$= (\overrightarrow{CM}; \overrightarrow{AM}) = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

ومنه مجموعة النقط M هي الدائرة (z') قطرها $[CA]$ باستثناء النقطتين A و C

96. موضوع مقترح رقم 17

تاسم علي الوتيوت - موضوع مقترح رقم 03 2018

1-ليكن $p(z)$ كثير الحدود للمتغير المركب z حيث:

$$p(z) = z^3 + z^2 - 4z + 6$$

1-بين أنه من أجل كل عدد مركب z : $\overline{p(z)} = p(\overline{z})$

2-تحقق أن $1 + i$ جذر لكثير الحدود $p(z)$ ، ثم استنتج جذرا آخر له

3-حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $p(z) = 0$

II-نعتبر في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ ، النقط A ، B و C التي لاحقتها $z_A = -1$ ، $z_B = 1 + i$ و $z_C = \overline{z_B}$ على الترتيب

1-التحويل النقطي S ، يرفق بكل نقطة $M(z)$ من المستوي النقطة $M'(z')$ حيث $z' = (1 + i)z + i$

1-أعط طبيعة التحويل S؟ عين عناصره المميزة

1-لتكن M نقطة تختلف عن A ، ماطبيعة المثلث AMM' ؟

2-n عدد طبيعي و M_n نقطة من المستوي تختلف عن A لاحقتها العدد المركب z_n

نضع $M_0 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n :

$$M_{n+1} = S(M_n)$$

2-أبرهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي :

$$z_n = (1 + i)^n - 1$$

2-عين قيم n الطبيعية التي من أجلها تكون النقط O ، A و M_n في استقامية

الحل

1-1-تبيان أن $\overline{p(z)} = p(\overline{z})$

لدينا $\overline{p(z)} = \overline{z^3 + z^2 - 4z + 6} = \overline{z^3} + \overline{z^2} - \overline{4z} + 6$

$= \overline{z}^3 + \overline{z}^2 - 4\overline{z} + 6 = p(\overline{z})$

2-التحقق أن $1 + i$ جذر لـ $p(z)$

لدينا $p(1+i) = (1+i)^3 + (1+i)^2 - 4(1+i) + 6$

$= (1+i)^2(1+i+1) - 4 - 4i + 6$

$= -6 + 4i - 4i + 6 = 0$

ومنه $p(1+i) = 0$

أي $(1 + i)$ جذر لـ $p(z)$

استنتاج جذر آخر لـ $p(z)$

لدينا $\overline{p(z)} = p(\overline{z})$

لدينا $p(1+i) = 0$

ومنه $p\left(\overline{1+i}\right) = 0$

ومنه $p(1-i) = 0$

وعليه $(1 - i)$ جذر لـ $p(z)$

3-حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $p(z) = 0$

لدينا $(1 + i)$ و $(1 - i)$ جذران لـ $p(z)$

معناه $p(z) = [z - (1+i)][z - (1-i)][z - \alpha]$

حيث α عدد مطلوب.

تعيين α:

لدينا:

$p(z) = [z^2 - (1-i)z - (1+i)z + (1-i)(1+i)][z - \alpha]$

ومنه

$p(z) = z^3 + (-\alpha - 2)z^2 + (2\alpha + 2)z - 2\alpha$

ولدينا $p(z) = z^3 + z^2 - 4z + 6$

بالمطابقة نجد

$-\alpha - 2 = 1$

ومنه $\alpha = -3$

ملاحظة $\alpha = -3 \Leftarrow -2\alpha = 6$

ومنه حل المعادلة $p(z) = 0$

$z' - (-3) = 0 \Rightarrow z = -3$

ومنه الحلول $S = \{1 - i\ ,1 + i, -3\}$

II-1-1-تحديد طبيعة S وعناصره المميزة

لدينا $z' = (1 + i)z + i$

$z' = az + b$

لدينا $a = 1 + i \in \mathbb{C}$

و $|a| = |1 + i| = \sqrt{2} \neq 1$

ومنه S تشابه مباشر نسبته $k = |1 + i| = \sqrt{2}$

وزاويته θ :

$$\theta = \arg(1+i) = \begin{cases} \cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

ومنه $\theta = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

ومركزه w

$$w = \frac{b}{1-a} = \frac{i}{1-(1+i)} = -1 = z_A$$

ومنه النقطة A مركز التشابه

1-ب-طبيعة المثلث AMM'

$z' = (1 + i)z + i$

أي

97. موضوع مقترح رقم 18

1-نعتبر في المستوي المركب المنسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ النقط A, B, C لواحقها على الترتيب

$z_A = 2 \quad z_B = 1 + \sqrt{3}i \quad z_C = 1 - \sqrt{3}i$

1-أ-اكتب كل من: z_A ، z_B و z_C على الشكل الأسي

1-ب-بين أن النقط A, B, C تنتمي لدائرة يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها

2-انشئ النقط A ، B و C ثم عين نوع الرباعي $OBAC$

3-نسمي (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث: $|z| = |z - 2|$

بين أن المجموعة (Γ) هي مستقيم يطلب تعيين معادلة ديكارتية له

4-حل في $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z:

$z^2 - 2z + 4 = 0$ نسمي z_0 الحل الذي جزؤه التخيلي موجب و z_1 الحل الآخر

5-أ-بين أن: $\left(\frac{z_0}{2}\right)^{2017} + \left(\frac{z_1}{2}\right)^{1993} = 1$

5-ب-عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون $(z_0)^n$ عدد حقيقي سالب

الحل

1-أ-كتابة z_A ، z_B ، z_C على الشكل الأسي

أي تكتب $z = re^{i\theta}$

$z_A = 2$

$r = |z_A| = \sqrt{2^2} = 2$

$\theta_A = \arg(2) = 2\pi$

ومنه $z_A = 2e^{i2\pi}$

$z_B = 1 + \sqrt{3}i$

$|z_B| = |1 + \sqrt{3}i| = \sqrt{1+3} = 2$

$\theta_B = \arg(1 + \sqrt{3}i) = \begin{cases} \cos\theta_B = \frac{1}{2} \\ \sin\theta_B = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ ؛

أي: $\theta_B = \frac{\pi}{3}$

ومنه $z_B = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$

$z_C = 1 - \sqrt{3}i$

لدينا $z_C = \overline{z_B}$

ومنه $z_C = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$

$\frac{z'-z}{z-z_A} = \frac{(1+i)z+i-z}{-1-z} = \frac{i(z+1)}{-(z+1)} = -i$

$\left|\frac{z_M - z_A}{z_M - z_A}\right| = |-i| = 1$ أي

$MM' = MA$ ..... (1) ومنه

$\arg\frac{z_M - z_A}{z_M - z_A} = \arg(-i) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ و

$\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MM'}\right) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ..... (2) أي

من (1) و(2) نستنتج أن المثلث AMM' قائم في M ومتساوي الساقين

2-البرهان بالتراجع :

نسمي $p(n)$ الخاصية $z_n = (1+i)^n - 1$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}$

من أجل $n = 0$

$z_0 = (1+i)^0 - 1 = 0 = z_A$

ومنه $p(0)$ صحيحة نفرض صحة $p(n)$

ونبرهن صحة $p(n+1)$ من أجل $n+1$ أي

$z_{n+1} = (1+i)^{n+1} - 1$

لدينا $M_{n+1} = S(M_n)$

$z_{n+1} - z_A = (1+i)(z_n - z_A)$

لأن $z' - z_A = (1+i)(z - z_A)$

لدينا $z_A = -1$

ومنه $z_{n+1} + 1 = (1+i)(z_n + 1)$

ولدينا من الفرضية $z_n + 1 = (1+i)^n$

ومنه

$z_{n+1} + 1 = (1+i)(1+i)^n = (1+i)^{n+1}$

أي $p(n+1)$ صحيحة من أجل كل $n+1$

ومنه الاستدلال بالتراجع محقق أي

$z_n = (1+i)^n - 1$

صحيحة من اجل كل $n \in \mathbb{N}$

2-تعيين قيمة n الطبيعية التي من أجلها النقط O ، A ، M_n على استقامية

لدينا لاحقة النقط M_n هي النقطة z_n ومنه

$z_n = (1+i)^n - 1$

النقط $M_n, A, 0$ على استقامية معناه :

$\arg\frac{z_n - z_A}{z_0 - z_A} = \arg\frac{(1+i)^n - 1 - (-1)}{0 - (-1)} = k\pi : k \in \mathbb{N}$

ومنه $= \arg(1+i)^n = k\pi$

أي $n\arg(1+i) = k\pi$

$n\frac{\pi}{4} = k\pi$

وعليه قيم n هي : $n = 4k \quad k \in \mathbb{N}$

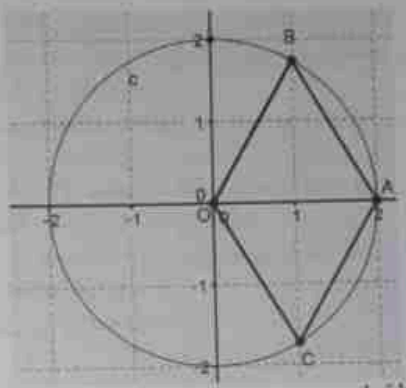
1-بيّن أن النقط C,B,A تنتمي لنفس الدائرة

بما أن $|z_A| = |z_B| = |z_C| = 2$

معناه: $OA = OB = OC = r = 2$

ومنه النقط C,B,A تنتمي الى نفس الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها $r = 2$

2- انشاء النقطة C,B,A



ملاحظة: لرسم $z_C; z_B$ نستعين بالدائرة التي مركزها Oونصف قطرها $r = 2$ والمستقيم ذو المعادلة $x = 1$

تعيين طبيعة الرباعي $OBAC$

لدينا $z_{\overrightarrow{OB}} = z_B - z_O = 1 + i\sqrt{3}$

$z_{\overrightarrow{CA}} = z_A - z_C = 2 - 1 + i\sqrt{3} = 1 + i\sqrt{3}$

ومنه $z_{\overrightarrow{OB}} = z_{\overrightarrow{CA}}$

أي الرباعي $OBAC$ متوازي اضلاع

لكن $OA = OB = 2$

و $BC = |z_C - z_B| = |-2i\sqrt{3}| = 2\sqrt{3}$

ومنه الرباعي $OBAC$ معين

3-البرهان أن مجموعة النقط (Γ) هي مستقيم

لدينا $|z| = |z - 2|$

و $z_A = 2$ ، $z_O = 0$ ومنه

$|z - z_O| = |z - z_A|$

أي $OM = AM$

ومنه مجموعة النقطة M هي محور القطعة المستقيمة $[OA]$

لتكن $M(x,y)$

ومنه $OM = AM$

$\Rightarrow \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x-2)^2 + (y-0)^2}$

نربع الطرفين نجد

$x^2 + y^2 = x^2 + 4 - 4x + y^2$

ومنه $4 - 4x = 0$

وعليه معادلته محور القطعة : $x = 1$

4-حل المعادلة :

لدينا $z^2 - 2z + 4 = 0$

$\Delta = -12 = 12i^2$

$\sqrt{\Delta} = 2i\sqrt{3}$

ومنه $z_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2+2i\sqrt{3}}{2}$

$z_1 = 1 + i\sqrt{3}$

$z_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2-2i\sqrt{3}}{2} = 1 - i\sqrt{3}$

ومنه الحلول: $S = \{1 + i\sqrt{3}; 1 - i\sqrt{3}\}$

5-أ-اثبات أن: $\left(\frac{z_B}{2}\right)^{2017} + \left(\frac{z_A}{2}\right)^{1993} = 1$

نلاحظ أن: $z_0 = z_B = 1 + i\sqrt{3} = 2e^{\frac{i\pi}{3}}$

و $z_1 = z_C = 1 - i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$

ومنه $\left(\frac{z_B}{2}\right)^{2017} = \left(2\frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{2}\right)^{2017} = \left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^{2017}$

$= \cos\left(\frac{2017\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2017\pi}{3}\right)$

$\left(\frac{z_C}{2}\right)^{1993} = \cos\left(-\frac{1993\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{1993\pi}{3}\right)$

ومنه:

$$\left(\frac{z_B}{2}\right)^{2017} + \left(\frac{z_C}{2}\right)^{1993} = \cos\left(\frac{2017\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2017\pi}{3}\right) + \cos\left(-\frac{1993\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{1993\pi}{3}\right)$$

$$\left(\frac{z_B}{2}\right)^{2017} + \left(\frac{z_C}{2}\right)^{1993} = \cos\left(\frac{(1+672\times3)\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{(1+672\times3)\pi}{3}\right) + \cos\left(-\frac{(664\times3+1)\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{(1+664\times3)\pi}{3}\right)$$

$$\left(\frac{z_B}{2}\right)^{2017} + \left(\frac{z_C}{2}\right)^{1993} = \cos\left(672\pi + \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(672\pi + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(-664\pi - \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-664\pi - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\left(\frac{z_B}{2}\right)^{2017} + \left(\frac{z_C}{2}\right)^{1993} = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} + \cos-\frac{\pi}{3} + i\sin-\frac{\pi}{3}$$

$$= \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\left(\frac{z_O}{2}\right)^{2017} + \left(\frac{z_A}{2}^{1993}\right) = 1$$

قيمة العدد الطبيعي n حتى يكون $(z_O)^n$ عددا

$$(z_O)^n = (z_B)^n = \left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)$$

$$1 = 2^n\left(\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) + i\sin\right)$$

$(z_O)^n \in \mathbb{R}_-$ اذا كان

$$\begin{cases} \cos n\frac{\pi}{3} \leq 0 \\ \sin\left(n\frac{\pi}{3}\right) = 0 \quad : 2^n > 0 \end{cases}$$

$$\cos n\frac{\pi}{3} \leq 0$$

$$\frac{n\pi}{3} = \pi + 2k\pi \quad : k \in \mathbb{N}$$

n حتى يكون $(z_O)^n \in \mathbb{R}_-$ هي

$$n = 3 + 6K : k \in \mathbb{N}$$

98. موضوع مقترح رقم 19

الاسم على اليوتيوب : موضوع مقترح رقم 05 2018

...ستوي المنسوب إلى معلم متعامد ...

...النقط A و B لاحقاتهما على ...

$$z_B = 3 - i \ , z_A = 4 + 2i$$

...على الشكل الجبري ثم على الشكل المثلثي ...

...المركب $\frac{z_B - z_A}{z_B}$

...استنتج طبيعة المثلث ABO

...التحويل النقطي R في المستوي الذي يرفق ...

...النقطة M لاحقتها z النقطة M' لاحقتها z' والذي ...

...ل النقطة A إلى B ويحول النقطة B إلى النقطة ...

...أن العبارة المركبة للتحويل النقطي R هي:

$$z' = -iZ + 1 + 3i$$

...عناصر طبيعة التحويل R وعناصره المميزة.

...لاحقة النقطة C صورة النقطة O ...

...استنتج طبيعة الرباعي $ABOC$.

...مجموعة النقط M من المستوي لاحقتها Z

$$|z - 4 - 2i| = |z|$$

...$z \neq 2 + i$ نضع: $L = \frac{z' - 2 - i}{z - 2 - i}$ بيّن أن L ...

موضوع مقترح رقم 19

2-عين قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها L^n عددا حقيقيا

3-بين أن:

$$(z' - 2 - i)^2 + (z - 2 - i)^2 = 0$$

الحل

1-كتابة $\frac{z_B - z_A}{z_B}$ على الشكل الجبري

لدينا

$$\frac{z_B - z_A}{z_B} = \frac{3 - i - (4 + 2i)}{3 - i}$$

$$= \frac{-1 - 3i}{3 - i} \times \frac{3 + i}{3 + i}$$

ومنه

$$= -\frac{10i}{10} = -i$$

كتابة $\frac{z_B - z_A}{z_B}$ على الشكل المثلثي:

لدينا

$$\left|\frac{z_B - z_A}{z_B}\right| = |-i| = 1$$

$$\arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_B}\right) = \arg(-i) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \ : k \in \mathbb{Z}$$

ومنه

$$\frac{z_B - z_A}{z_B} = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

2-استنتاج طبيعة المثلث ABO

لدينا

$$\frac{z_B - z_A}{z_B - z_O} = 1e^{\frac{i\pi}{2}}$$

ومنه

$$\frac{AB}{OB} = 1$$

أي

$$(1) \ldots\ldots AB = OB$$

و

$$\arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_B - z_O}\right) = -\frac{\pi}{2}$$

أي

$$(2) \ldots\ldots \left(\overrightarrow{OB}; \overrightarrow{AB}\right) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}$$

من (1) و (2) نستنتج أن المثلث ABO قائم في B ومتساوي الساقين

II-1-تبيان عبارة R هي: $z' = -iz + 1 + 3i$

لدينا: R يحول A الى B معناه $R(A) = B$

R يحول B الى O معناه $R(B) = O$

ومنه

$$z_B = az_A + b$$

$$z_O = a\,z_B + b$$

بالطرح نجد:

$$a = \frac{z_B - z_O}{z_A - z_B} = \frac{3 - i}{4 + 2i - 3 + i}$$

$$= \frac{(3-i)(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)} = -\frac{10i}{10} = -i$$

ومنه

$$a = -i$$

لدينا

$$z_O = a\,z_B + b$$

ومنه

$$b = a\,z_B = i\,z_B$$

أي

$$b = i(3 - i) = 1 + 3i$$

وعليه عبارة R هي

$$z' = -iz + 1 + 3i$$

2-تعيين طبيعة التحويل R

لدينا $z' = -iz + 1 + 3i$

و $|-i| = 1$ و $-i \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$

ومنه R دوران زاويته: $\theta = \arg(-i) = -\frac{\pi}{2}$

ومركزه w

$$z_w = \frac{b}{1-a} = \frac{1+3i}{1+i}$$

$$z_w = \frac{(1+3i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{4+2i}{2}$$

ومنه لاحقة المركز هي: $z_w = 2 + i$

ومنه: $z' - z_w = -i(z - z_w)$

3-تعيين z_C

لدينا z_C لاحقة C صورة النقطة O بالتحويل R

أي $R(O) = C$

ومنه: $z_C = iz_0 + 1 + 3i$

$z_C = 1 + 3i$

4-استنتاج طبيعة الرباعي $ABOC$

بما أن $R(A) = B$ و $R(B) = 0$ و $R(O) = C$

و R دوران وزاويته $\theta = -\frac{\pi}{2}$

ومنه نستنتج أن الرباعي $ABOC$ مربع

III-1-تعيين مجموعة النقط M :

$|z - 4 - 2i| = |z|$

لدينا $|z - 4 - 2i| = |z|$

معناه $|z - (4 + 2i)| = |z - 0|$

أي $|z - z_A| = |z - z_O|$

ومنه $AM = OM$

وعليه مجموعة النقط M هي محور القطعة المستقيمة $[AO]$

البرهان أن $L = i$

لدينا $L = \frac{z'-z-i}{z-z-i} = \frac{z'-(z+i)}{z-(z+i)} = \frac{z'-z_w}{z-z_w}$

و w مركز الدوران R

ومنه $z' - z_w = -i(z - z_w)$

أي $L = \left(\frac{z'-z_w}{z-z_w}\right) = -i$

III-2-تعيين قيم n بحيث $L^n \in \mathbb{R}$

لدينا مما سبق $L = -i = e^{-\frac{i\pi}{2}}$

أي $L = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

ومنه $L^n = \left(\cos\left(-\frac{n\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{n\pi}{2}\right)\right)^n$

يكون $L^n \in \mathbb{R}$ إذا كان: $-\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = 0$

ومنه $\frac{n\pi}{2} = k\pi$

ومنه قيم n : $n = 2k; k \in \mathbb{N}$

III-3-البيان أن $(z-2-i)^2 + (z-2-i)^2 = 0$

لدينا

$$(z-2-i)^2 + (z-2-i)^2$$
$$= (z-(2+i))^2 + (z-(2+i))^2$$

لدينا $(z' - z_w) = -i(z - z_w)$

ومنه:

$$(z-2-i)^2 + (z-2-i)^2 = [-i(z-z_w)]^2 + (z-z_w)^2$$
$$= -(z-z_w)^2 + (z-z_w)^2$$
$$= 0$$

99. موضوع مقترح رقم 20

الشبكة على الموقع : موضوع مقترح رقم 20 2018 06

1-نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ كثير الحدود للمتغير z التالية $P(z) = z^3 - 5z^2 + 8z - 6$

نتحقق أن $P(3) = 0$ ثم حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z) = 0$

2-المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(o, \vec{u}, \vec{v})$ نعتبر النقط A, B, C و D التي لواحقها على الترتيب

$z_A = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ $\quad z_B = \overline{z_A}$

$z_C = 2z_B$ $\quad z_D = Re(z_C + z_A)$

2-أ-بين أن النقط A, B, C تنتمي إلى نفس الدائرة التي يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

2-ب-احسب طويلة وعمدة العدد المركب $\frac{z_C - z_D}{z_A - z_D}$ ثم فسر النتيجة هندسيا، ما طبيعة المثلث ACD.

2-ج-عين $z_{D'}$ لاحقة النقطة D' حتى يكون الرباعي $ADBD'$ معين

3-نعتبر التحويل النقطي T الذي يرفق بكل نقطة $M(z)$ من المستوي النقطة $M'(z')$ حيث

$z' - (-1 + i) = e^{i\frac{\pi}{2}}(z - 1 + i)$

3-أ-عين طبيعة التحويل T وعناصره المميزة.

3-ب-عين لاحقة النقطة E صورة النقطة O بالتحويل T ثم بين أن المستقيمين (AB) و (CE) متعامدين.

4-أ- θ عدد حقيقي، عين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث: $z - z_C = z_A \cdot \overline{z_A} e^{i\theta}$ لما θ يمسح $\mathbb{R}$ كل

4-3-عين مجموعة النقط M ذات اللاحقة Z حيث:

$\arg\left(\frac{z-z_A}{z-z_B}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

الحل

$p(z) = 0$ ب) تحقق أن

$p(z) = z^3 - 5z^2 + 8z - 6$

$p(3) = (3)^3 - 5(3)^2 + 8(3) - 6$

$= 27 - 45 + 24 - 6$

$= 0$

ج) حل المعادلة $p(z) = 0$

$p(3) = 0$ معناه 3 جذر لـ $p(z)$

$p(x) = (x-3)(x^2 + ax + b)$

استنتج الكتابة (الثانية) احسب قيمة a و b

	$z^3 - 5z^2 + 8z - 6$	$z - 3$
−	$z^3 - 3z^2$	$z^2 - 2z + 2$
	$0 - 2z^2 + 8z - 6$	
−	$-2z^2 + 6z$	
	$0 + 2z - 6$	
−	$0 + 2z - 6$	
	0	

$p(z) = (z-3)(z^2 - 2z + 2)$

$p(z) = 0$ ومنه

$z - 3 = 0$ أو $z^2 - 2z + 2 = 0$

$z_0 = 3$

$\Delta = -4 = 4i^2$

$\sqrt{\Delta} = 2i$

$z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2 - 2i}{2} = 1 - i$

$z_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2 + 2i}{2} 1 + i$

ومنه الحلول: $S: (z_0, z_1, z_2)$

د) البرهان أن النقط C, B, A تنتمي الى نفس الدائرة

$z_A = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$

$= \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$

$z_A = 1 + i$

لدينا $z_B = \overline{z_A} = \overline{(1+i)}$

ومنه $= 1 - i$

ولدينا $z_C = 2z_B = 2(1-i)$

ومنه $z_C = 2 - 2i$

$z_D = Re(z_C + z_B)$

و $z_D = Re(2 + 2i + 1 + i)$

$z_D = 3$

تنتمي النقط A ، B و C الى نفس الدائرة اذا تحقق

$Aw = Bw = CW = 1$

حيث w مركز الدائرة

ليكن $w = x + yi$

ولبرهن أن $Aw^2 = Bw^2 = Cw^2 = 1^2$

$Aw^2 = (x-1)^2 + (y-1)^2$

$Bw^2 = (x-1)^2 + (y+1)^2$

$Cw^2 = (x-2)^2 + (y+2)^2$

لدينا $Aw^2 = Bw^2$

معناه

$(x-1)^2 + (y-1)^2 = (x-1)^2 + (y+1)^2$

أي $y^2 + 1 - 2y = y^2 + 1 + 2y$

$4y = 0$

$y = 0$

ولدينا $Bw^2 = Cw^2$

معناه:

$(x-1)^2 + (y+1)^2 = (x-2)^2 + (y+2)^2$

وحسنا $y = 0$

بعد التبسيط نجد:

$2x = 8 - 2$

وعليه $x = 3$

ومنه $z_w = 3 = z_D$

ومنه النقط $C; B; A$ تنتمي الى نفس الدائرة التي

مركزها D ونصف قطرها $r = \sqrt{5}$

$r = DA = \sqrt{(3-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$

2-طبيعة وعمدة العدد $\frac{z_C - z_D}{z_A - z_D}$

لدينا

$\frac{z_C - z_D}{z_A - z_D} = \frac{2 - 2i - 3}{1 + i - 3} = \frac{-1 - 2i}{-2 + i} \times \frac{-2 - i}{-2 - i}$

$= \frac{5}{5}i = i$

و

$\arg\left(\frac{z_C - z_D}{z_A - z_D}\right) = \arg(i) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi : k \in Z$

التفسير الهندسي:

لدينا $\left|\frac{z_C - z_D}{z_A - z_D}\right| = 1$

معناه $\frac{DC}{DA} = 1$ ومنه $(1) \ldots\ldots DC = DA$

$\arg\left(\frac{z_C - z_D}{z_A - z_D}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \ : k \in Z$

معناه: $(2) \ldots\ldots (\overrightarrow{DA}; \overrightarrow{DC}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \ : k \in Z$

استنتاج طبيعة ACD

من (1) و (2) نستنتج أن المثلث ACD قائم في D ومتساوي الساقين

2-تعيين $z_{D'}$:

حتى يكون الرباعي $ADBD'$ يجب أن يكون متوازي أضلاع أولا

أي $z_{\overrightarrow{AD}} = z_{\overrightarrow{D'B}}$

لدينا $z_{\overrightarrow{AD}} = z_D - z_A = 3 - 1 - i = 2 - i$

ومنه $z_{\overrightarrow{D'B}} = z_B - z_{D'} = 1 - i - z_{D'}$

$2 - i = 1 - i - z_{D'}$

$z_{D'} = 1 - 1 - 2 + i$

ومنه $z_{D'} = -1$

3-أ-طبيعة التحويل T :

لدينا $z' - 1 + i = e^{i\frac{\pi}{2}}(z - 1 + i)$

ومنه $z' - (1 - i) = e^{i\frac{\pi}{2}}(z - (1 - i))$

أي $z' - z_B = e^{i\frac{\pi}{2}}(z - z_B)$

و $e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$

و $|i| = 1$

ومنه T دوران زاويته $\theta = \arg(i) = \frac{\pi}{2}$

ومركزه النقطة B

تعيين z_E

لدينا E صورة النقطة O بالتحويل T

أي $T(O) = E$

ومنه $z_E - 1 + i = e^{i\frac{\pi}{2}}(z_O - 1 + i)$

ومنه $z_E = i(0 - 1 + i) + 1 - i$

أي $= -2i$

البرهان أن $(AB) \perp (CE)$

حتى يكون $(CE) \perp (AB)$ يجب أن يكون

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CE} = 0$

لدينا $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{CE}\begin{pmatrix}0-2\\-2+2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}$

ومنه $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CE} = (0 \times -2) + (-2 \times 0) = 0$

وعليه $(AB) \perp (CE)$

4-أ-تعيين مجموعة النقط M : $z - z_C = z_A.\overline{z_A}e^{i\theta}$

لدينا $z_A.\overline{z_A} = (1+i)(1-i) = 1 - i^2 = 2$

ومنه $z - z_C = 2e^{i\theta}$

أي $|z - z_C| = 2$

$CM = 2$

و $\arg(z - z_C) = \theta$

ومنه مجموعة النقط هي دائرة مركزها C ونصف قطرها $r = 2$

4-ب-تعيين مجموعة النقط M

$$\arg\left(\frac{z - z_A}{z - z_B}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

لدينا

$$\arg\left(\frac{z - z_A}{z - z_B}\right) = (\overrightarrow{BM}; \overrightarrow{AM}) = (\overrightarrow{MB}; \overrightarrow{MA})$$
$$= \frac{\pi}{2} + k\pi$$

ومنه مجموعة النقط هي دائرة التي قطرها $[AB]$ باستثناء A و B

100. موضوع مقترح رقم 21

الأستاذ على اليوتيوب : موضوع مقترح رقم 07 2018

نعرف في $\mathbb{C}$ مجموعة الأعداد المركبة المعادلة (E) ذات المجهول Z التالية

$$z^2 - 4ie^{i\frac{\pi}{6}} = 0 \ldots (E)$$

1-تحقق أن المعادلة (E) تكتب على الشكل

$$\left(z - 2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)\left(z + 2e^{i\frac{\pi}{3}}\right) = 0$$

2-حل ثم اكتب على الشكل الجبري حلول المعادلة (E).

3-$(o, \vec{u}, \vec{v})$ معلم متعامد ومتجانس للمستوي الوحدة على المحورين $1cm$ نعتبر النقط A, B, C و D ذات اللواحق على الترتيب

$$z_A = 1 + i\sqrt{3}\ ,\ z_B = -z_A$$
$$z_C = z_A - \overline{z_B}\ ,\ z_D = 4 + 2i\sqrt{3}$$

3-أ-احسب طويلة وعمدة z_A و z_C ثم علم النقط A, B, C

3-ب-بين أن النقطة D مرجح الجملة المثقلة $\{(A,1);(B,-1);(C,1)\}$

3-جـ-احسب ثم فسر بيانيا العدد المركب $\frac{z_A - z_B}{z_D - z_C}$

استنتج طبيعة الرباعي $ABCD$.

3-أ- حساب طويلة وعمدة z_C بدلالة z_A

$$z_A = 1 + i\sqrt{3}$$

$$|z_A| = \sqrt{(1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$$

$$\theta = \arg z_A \begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{2} \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$\theta = \frac{\pi}{3}$$

ومنه $\arg(z_A) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

$$z_B = -z_A = -1 - i\sqrt{3}$$

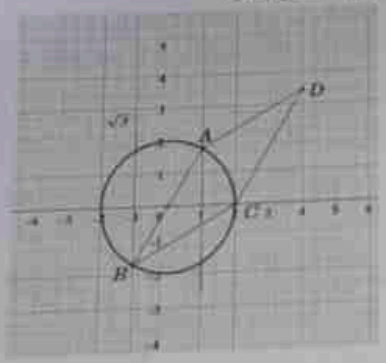
ومنه $z_C = z_A - \overline{z_B}$

ومنه $z_C = 1 + i\sqrt{3} + 1 - i\sqrt{3} = 2$

وعليه $|z_C| = |2| = 2$

$$\arg(z_C) = \arg(2) = 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

تعليم النقط C, B, A



لتعليم النقط B, A نستعين بدائرة مركزها O ونصف قطرها

$$r = |z_A| = |z_B| = 2$$

والمستقيم ذو المعادلة $x = 1$

$$C(2,0)$$

1-ب- البرهان أن D مرجح الجملة

$$\{(A,1);(B,-1);(C,-1)\}$$

لدينا $\frac{z_A - z_B + z_C}{1-1+1} = 1 + i\sqrt{3} + 1 + i\sqrt{3} + 2$

$$= 4 + 2i\sqrt{3} = z_D$$

ومنه D مرجح الجملة المثقلة

$$\{(A,1);(B,-1);(C,-1)\}$$

بين أن العدد $2\left(\frac{z_A}{2}\right)^{2018} - \left(\frac{z_A}{z_B}\right)^{1439}$ تخيلي

حدد (Γ) مجموعة النقط $M(z)$ التي تحقق $\arg(z_B z) - \arg(z_A \overline{z}) = 2k\pi \quad / k \in \mathbb{Z}$

الحل

1- تحقق أن المعادلة E تكتب على الشكل

$$\left(z - 2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)\left(z + 2e^{i\frac{\pi}{3}}\right) = 0$$

لدينا $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$

$$\left(z - 2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)\left(z + 2e^{i\frac{\pi}{3}}\right) = z^2 - 4e^{i\frac{\pi}{3}} \cdot e^{i\frac{\pi}{6}}$$

$$= z^2 - 4e^{i\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}}$$

$$= z^2 - 4e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

ومنه

$$\left(z - 2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)\left(z + 2e^{i\frac{\pi}{3}}\right) = z^2 - \left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^2$$

وهو المطلوب

2- حل المعادلة E في C

لدينا E تكافئ المعادلة

$$\left(z - 2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)\left(z + 2e^{i\frac{\pi}{3}}\right) = 0$$

ومنه $z - 2e^{i\frac{\pi}{3}} = 0$

يكافئ:

$$z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{3}} = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$= 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 + i\sqrt{3}$$

ومنه $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$

أو:

$z + 2e^{i\frac{\pi}{3}} = 0$

$$z = -2e^{i\frac{\pi}{3}}$$

لدينا $-2e^{i\frac{\pi}{3}} = -2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$$z_2 = -2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 - i\sqrt{3}$$

ومنه $z_2 = -1 - i\sqrt{3}$

2-حساب والتفسير بيانيا العدد $\frac{z_A-z_B}{z_D-z_C}$

لدينا $\frac{z_A-z_B}{z_D-z_C}=\frac{1+i\sqrt{3}-(-1-i\sqrt{3})}{4+2i\sqrt{3}-2}$

$=\frac{2+2i\sqrt{3}}{2+2i\sqrt{3}}=1$

التفسير البياني

لدينا $\left|\frac{z_A-z_B}{z_D-z_C}\right|=|1|$

ومنه $|z_A-z_B|=|z_D-z_C|$

ومنه $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CD}$

-استنتاج طبيعة الرباعي $ABCD$

لدينا مما سبق $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CD}$

ومنه نستنتج أن الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع

4-اثبات أنّ العدد $2\left(\frac{z_A}{2}\right)^{2018}-\overline{\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^{1439}}$ تخيلي صرف

لدينا $2\left(\frac{z_A}{2}\right)^{2018}=2\left(\frac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{2}\right)^{2018}$

$=2\left(\cos\frac{2018\pi}{3}+i\sin\frac{2018\pi}{3}\right)$

$=2\cos\left((3\times672+2)\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left((3\times672+2)\frac{\pi}{3}\right)$

$=2\cos\left(672\pi+\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(672\pi+\frac{2\pi}{3}\right)$

ومنه $2\left(\frac{z_A}{2}\right)^{2018}=2\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}$

$2\left(\frac{z_A}{2}\right)^{2018}=2\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-1+i\sqrt{3}$

ولدينا

$\overline{\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^{1439}}=\left(\overline{\frac{z_A}{-z_A}}\right)^{1439}=(-1)^{1439}$

$=(-1)^{1439}=-1$

ومنه

$2\left(\frac{z_A}{2}\right)^{2018}-\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^{1439}=-1+i\sqrt{3}-(-1)$

$2\left(\frac{z_A}{2}\right)^{2018}-\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^{1439}=i\sqrt{3}$

و $\left(i\sqrt{3}\right)$ عدد تخيلي صرف

5-تعيين (Γ) مجموعة النقط التي تحقق

$\arg(z_Bz)-\arg(z_A\overline{z})=2k\pi \quad k\in\mathbb{Z}$

$\arg(z_Bz)=\arg(z_B)+\arg(z)$

$\arg(z_Bz)=\arg(-z_A)+\arg(z)$

$\arg(z_Bz)=\arg(-1)+\arg(z_A)+\arg(z)$

$\arg(z_Bz)=\pi+\frac{\pi}{3}+\arg(z)\ldots\ldots\ldots(1)$

$\arg(z_A\overline{z})=\arg(z_A)+\arg(\overline{z})$

$\arg(z_A\overline{z})=\frac{\pi}{3}-\arg(z)\ldots(2)$

من (1) و (2) نجد:

$\arg(z_Bz)-\arg(z_A\overline{z})$

$=$

$\pi+\frac{\pi}{3}+\arg(z)-\frac{\pi}{3}+\arg(z)$

$=$

$2k\pi$

ومنه $2\arg(z)=-\pi+2k\pi$

أي $\arg(z)=-\frac{\pi}{2}+k\pi \quad k\in\mathbb{Z}$

$\left(\vec{u},\overrightarrow{OM}\right)=-\frac{\pi}{2}+k\pi \quad k\in\mathbb{Z}$

ومنه مجموعة النقط (Γ) هي محور التراتيب باستثناء المبدأ O.

101. موضوع مقترح رقم 22

تعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(o,\vec{u},\vec{v})$، النقط A, B و C التي لواحقها على الترتيب i، $\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ و -1

1-نعتبر التحويل S المعرف بـ:

$z'=2e^{i\frac{\pi}{3}}z+1-i$

1-أ-اكتب العبارة المركبة لهذا التحويل بشكل أبسط.

1-ب-ماطبيعة التحويل S وماعناصره المميزة؟

2-أ-عيّن لواحق النقط A', B', C' صور النقط A, B, C بالتحويل S.

2-ب-بين أن المثلثين ABC و $A'B'C'$ متشابهان

3-عين لاحقة النقطة G حيث G مرجح الجملة $\{(A,3);(B,1);(C,-2)\}$

3-أ-عين لاحقة النقطة G' مرجح الجملة $\{(A',3);(B',1);(C',-2)\}$

3-ب-عين z_G حيث $G'=S(G)$، ماذا تستنتج؟

4-نعتبر التحويل T الذي يرفق بكل نقطة M النقطة M' حيث

$\overrightarrow{MM'}=3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}$

4-أ-بين أن $\overrightarrow{GM'}=\overrightarrow{MG}$

4-ب-ماطبيعة التحويل T وماعناصره المميزة؟

4-ج-عين لواحق النقط D, E و F صور النقط A, B و C بالتحويل T.

4-د-بين أن المثلثين ABC و EDF متقايسان.

الحل

1-أ-كتابة العبارة المركبة لهذا التحويل بشكل أبسط

لدينا $z'=2e^{i\frac{\pi}{3}}z+1-i$

$z' = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)z + 1 - i$

$z' = (1 + i\sqrt{3})z + 1 - i$

1-ب-طبيعة التحويل و عناصره المميزة

لدينا $|1 + \sqrt{3}| = \sqrt{1+3} = 2 \neq 1$

ومنه التحويل تشابه مباشر نسبته $k = 2$

وزاويته $\theta = \frac{\pi}{3}$

ومركزه هو $z_\Omega = \frac{b}{1-a} = \frac{1-i}{1-(1+i\sqrt{3})}$

$z_\Omega = \frac{(1-i)(1\sqrt{3})}{(-i\sqrt{3})(1\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{3}(1+i)}{3}$

ومنه $z_\Omega = \frac{\sqrt{3}}{3}(1+i)$

2-أ-تعيين اللواحق التي نقاطها A', B', C' صور A, B و C بالتحويل S

تعيين $z_{A'}$

$z_{A'} = (1 + i\sqrt{3})z_A + 1 - i$

$= (1 + i\sqrt{3})i + 1 - i$

$z_{A'} = -\sqrt{3} + 1$

تعيين $z_{B'}$

$z_{B'} = (1 + i\sqrt{3})z_B + 1 - i$

$= (1 + i\sqrt{3})(1 - i) + 1 - i$

$= 1 - i + i\sqrt{3} + \sqrt{3} + 1 - i$

$z_{B'} = 2 + \sqrt{3} + i(\sqrt{3} - 2)$

تعيين $z_{C'}$

$z_{C'} = (1 + i\sqrt{3})(-1) + 1 - i$

$z_{C'} = -i(\sqrt{3} + 1)$

2-ب-إثبات أن المثلثين متشابهين ABC و $A'B'C'$

$\begin{cases} A' = S(A) \\ B' = S(B) \\ C' = S(C) \end{cases}$

المثلث $A'B'C'$ صورة المثلث ABC بالتشابه S ومنه المثلثين متشابهان

3-تعيين لاحقة G مرجح $\{(A,3);(B,1);(C,-2)\}$

$z_G = \frac{3z_A + z_B - 2z_C}{2} = \frac{3i + 1 - 1 + 2}{2}$

$z_G = \frac{3 + 2i}{2}$

3-أ-تعيين G' مرجح $\{(A',3);(B',1);(C',-2)\}$

$z_{G'} = \frac{3z_{A'} + z_{B'} - 2z_{C'}}{2} = \frac{5 - 2\sqrt{3} + 3i\sqrt{3}}{2}$

3-ب-تعيين $z_{G'}$ بحيث $G' = S(G)$

$z_{G'} = (1 + i\sqrt{3})\left(\frac{3+2i}{2}\right) + 1 - i$

$= \frac{3 + 2i + 3i\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + 2 - 2i}{2}$

ومنه $z_{G'} = \frac{5 - 2\sqrt{3} + 3i\sqrt{3}}{2}$

ومنه نستنتج أن التشابه S يحافظ على المرجح

4-أ-إثبات أن $\overrightarrow{GM'} = \overrightarrow{MG}$

$3 + 1 - 2 \neq 0$

$3\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MG}$

$\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GM'} = 2\overrightarrow{MG}$ أي

$\overrightarrow{GM'} = \overrightarrow{MG}$ ومنه

4-ب-طبيعة التحويل T و عناصره المميزة

$\overrightarrow{GM'} = -\overrightarrow{GM}$

ومنه التحويل T هو تحاك نسبته $k = -1$ ومركزه النقطة G

4-ج-تعيين لواحق F, E, D صور C, B, A بالتحويل T

لدينا $z' - z_G = z_G - z$

أي $z' = -z + 2z_G$

$z_D' = 2z_G - z_A$

لدينا $z_D = 2\left(\frac{3+2i}{2}\right) - i = 3 + i$

أي $z_B = 3 + i$

لدينا $z_E = 2z_G - z_B$

ومنه $= 2\left(\frac{3+2i}{2}\right) - 1 + i = 2 + 3i$

أي $z_E = 2 + 3i$

$z_F = 2z_G - z_C$

$= 2\left(\frac{3+2i}{2}\right) + 1 = 4 + 2i$

$z_F = 4 + 2i$

4-د-إثبات أن المثلثان ABC و EDF متقايسان

بما أن المثلث EDF صورة المثلث ABC بالتحاكي T

$\begin{cases} D = T(A) \\ E = T(B) \\ F = T(C) \end{cases}$

صورة المثلث ABC هي EDF بالتحاكي T و $k = -1$ إذن هو تقايس

إذن المثلثين ABC و EDF متقايسان.

102. موضوع مقترح رقم 23

الأستاذ اليعقوبي : موضوع مقترح رقم 09 2018

1-عين العددين المركبين a و b علما أن

$$\begin{cases} \overline{a}-\overline{b}=1+3i \\ a+ib=-1+3i \end{cases}$$

2-في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$، نعتبر النقط A و B لاحقتهما على الترتيب: $a=3+i$ ، $b=2+4i$

ونفرض الإنسحاب T الذي شعاعه $\overrightarrow{AB}$.

2-أ-عين لاحقة النقطة C صورة النقطة O بالانسحاب T.

2-ب-احسب العدد $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_O}$ ثم اكتبه على الشكل الأسي.

ماذا تستنتج بالنسبة للقطعتين $[AC]$ و $[OB]$؟

2-جـ-استنتج مماسيق طبيعة الرباعي $OABC$ ثم عين لاحقة E مركز تناظر الرباعي $OABC$

3-نعتبر التشابه المباشر S الذي مركزه O ويحوّل B إلى C

3-أ-أعط الكتابة المركبة للتشابه المباشر S.

3-ب-ماهي صورة النقطة A بالتشابه المباشر S؟

3-جـ-نضع $S^4=SoSoSoS$

-أعط الكتابة المركبة للتحويل S^4 وماطبيعة هذا التحويل؟

الحل

1-تعيين العددين المركبين بحيث

$$\begin{cases} \overline{a}-\overline{b}=1+3i \ldots(1) \\ a+ib=-1+3i \ldots(2) \end{cases}$$

من (1) نجد $\overline{\overline{a}-\overline{b}}=1-3i$

$$\begin{cases} a-b=1-3i \\ a+bi=3i-1 \end{cases}$$

بالطرح نجد

$$-b(1+i)=2-6i$$
$$-b-bi=2-6i$$
$$b=\frac{6i-2}{1+i}$$

ومنه $b=2+4i$

من (1) نجد $a=1-3i+b=3+i$

$$a=3+i$$

2-أتعيين لاحقة C صورة O بالإنسحاب T الذي شعاعه

$$z'=z+b$$
$$z'=z+z_{\overrightarrow{AB}}$$
$$z_C=z_O+z_B-z_A$$
$$z_C-z_O=z_B-z_A$$
$$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{AB}$$

ومنه $z_C=-1+3i$

2-ب-كتابة $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_O}$ على الشكل الجبري ثم الأسي

$$L=\frac{z_C-z_A}{z_B-z_O}=\frac{-1+3i-3-i}{2+4i}=\frac{(-4+2i)(2-4i)}{(2+4i)(2-4i)}$$
$$=\frac{-8+16i+4i+8}{20}=i=e^{i\frac{\pi}{2}}$$

-الإستنتاج

لدينا: $AC=OB$

$$(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{AC})=\frac{\pi}{2}+2k\pi$$

القطعتان $[AC]$ و $[OB]$ متقاسيتان ومتعامدتان.

2-جـ-إستنتاج طبيعة الرباعي $OABC$

طبيعة الرباعي $OABC$

$OABC$ متوازي أضلاع $\Leftarrow \overrightarrow{OC}=\overrightarrow{AB}$

القطران متعامدان و متقايسان إذن $\begin{cases} (AC)\perp(OB) \\ AC=OB \end{cases}$

الرباعي $OABC$ مربع

-تعيين z_E بحيث E منتصف $[OB]$

$$z_E=\frac{z_O+z_B}{2}=\frac{0+2+4i}{2}$$
$$z_E=1+2i$$

3-أ-الكتابة المركبة للتشابه المباشر S

$$Z'=aZ+b$$

لدينا مركزه O إذن $b=0$

ومنه $z'=az$ يحول B إلى C

$$a=\frac{z_C}{z_B}=\frac{(-1+3i)(2-4i)}{(2+4i)(2-4i)}$$
$$a=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$$

ومنه $z'=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)z$

$$|a|=\frac{\sqrt{2}}{2}=k$$

أي $\arg a=\frac{\pi}{4}=\theta$

$$z'=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}z$$

3-جـ-إيجاد صورة A بالتشابه S

$$z' = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}z_A = \frac{(1+i)(3+i)}{2} = 1+2i$$
$$= z_E$$

ومنه E صورة A بالتشابه S

3-جـ-تبيان أن $S^4 = SoSoSoS$

الكتابة المركبة للتحويل S^4

لدينا S^4 هو مركب 4 تشابهات مباشرة فهو تشابه مباشر ونسبته $k' = k^4 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4$

$$k' = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

وزاويته $\theta' = 4\theta = 4.\frac{\pi}{4} = \pi$

ومنه $z' = \frac{1}{4}e^{i\pi}z$

مع $\sin\pi = 0$

أي $z' = -\frac{1}{4}z$

ومنه S^4 تحاك نسبته $-\frac{1}{4}$. ومركزه O.

103. موضوع مقترح رقم 24

1-حل في C المعادلة ذات المجهول z

$$(z-i)(z^2+2z+2) = 0$$

2- المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(o,\vec{u},\vec{v})$ النقط A, B, C و D لواحقها على الترتيب $z_A = i$ ، $z_B = 2$ ، $z_C = -1-i$ ، $z_D = 1-2i$

2-أتحقق أن النقطة D مرجح الجملة $\{(A,1);(B,-1);(C,-1)\}$

2-جـ-اكتب العدد $\frac{z_D-z_A}{z_B-z_C}$ على الشكل الأسي، ثم عين طبيعة الرباعي $ACDB$.

2-جـ-اكتب العدد المركب $-4+4i$ على الشكل الأسي، ثم احسب $(-4+4i)^{2018}$.

3-من أجل كل نقطة $M(z)$ من المستوي تختلف عن B، نرفق النقطة $M'(z')$ حيث $z' = \frac{iz-4+2i}{z-2}$

3-أتحقق أن $z'-i = \frac{-4+4i}{z-2}$

3-جـ-تبيان أن $AM' \times BM = 4\sqrt{2}$ و $\left(\vec{u};\overrightarrow{AM'}\right) + \left(\left(\vec{u};\overrightarrow{BM}\right)\right) = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ مع $k \in \mathbb{Z}$

4-(Γ) هي مجموعة النقط M من المستوي بحيث $\arg(z'-i) = \frac{\pi}{4}$

نتحقق أن النقطة E ذات اللاحقة $z_E = 2+i$ تنتمي إلى (Γ)، ثم عين طبيعة المجموعة (Γ).

الحل

1-حل في C المعادلة ذات المجهول z

$$(z-i)(z^2+2z+2) = 0$$

إما $z_0 = i$

أو $z^2+2z+2 = 0$

$$\Delta = 4-8 = -4 = (2i)^2$$
$$\sqrt{\Delta} = 2i$$
$$z_1 = -1-i \quad , \quad z_2 = -1+i$$

ومنه $S = \{z_0, z_1, z_2\}$

2-أتحقق أن D مرجح الجملة $\{(A,1);(B,-1);(C,-1)\}$

$$z_D = \frac{z_A - z_B - z_C}{-1} = \frac{i-2+1+i}{-1}$$
$$= -2i+1 = z_D$$

ومنه D مرجح الجملة المعطاة

2-جـ-كتابة العدد $\frac{z_D-z_A}{z_B-z_C}$ على الشكل الأسي

$$\frac{z_D-z_A}{z_B-z_C} = \frac{1-2i-i}{2+1+i} = \frac{(1-3i)(3-i)}{(3+i)(3-i)}$$
$$= -\frac{10i}{10}$$
$$= -i$$
$$|-i| = 1$$
$$\arg(-i) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$$
$$\frac{z_D-z_A}{z_B-z_C} = e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

تعيين طبيعة الرباعي $ABCD$

نعلم أن D مرجح للجملة $\{(A,1);(B,-1);(C,-1)\}$

ومنه $z_A - z_B - z_C = -z_D$

$$z_A - z_B = z_C - z_D$$
$$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{DC}$$

ومنه الرباعي متوازي الأضلاع

لدينا $\frac{z_D-z_A}{z_B-z_C} = e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i$

$$|-i| = 1 \Rightarrow AD = CB$$

و $\left(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{BC}\right) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$

ومنه قطرا الرباعي متعامدان ومتقايسان أي $ABCD$ مربع.

2-جـ-كتابة العدد المركب $-4+4i$ على الشكل الأسي ثم حساب $(-4+4i)^{2018}$

لدينا $|-4+4i| = \sqrt{16+16} = 4\sqrt{2}$

ومنه

$\cos\theta = -\frac{4}{4\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad \sin\theta = \frac{4}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

إذن $\theta = \frac{3\pi}{4}$

وعليه $-4+4i = 4\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$

-حساب $(-4+4i)^{2018}$

لدينا

$(-4+4i)^{2018} = \left(4\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}\right)^{2018}$

ومنه

$\left(4\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}\right)^{2018} = (4\sqrt{2})^{2018}\, e^{i\frac{3\pi\times 2018}{4}}$

$\left(4\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}\right)^{2018} = \cos\frac{6054\pi}{4} + i\sin\frac{6054\pi}{4}$

لدينا $6054 = 4(1513) + 2$ ومنه

$\left(4\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}\right)^{2018} = \left(\cos(\pi+\frac{\pi}{2}) + i\sin(\pi+\frac{\pi}{2})\right)(4\sqrt{2})^{2018}$

$\left(4\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}\right)^{2018} = (0-i)(4\sqrt{2})^{2018}$

$\left(4\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}\right)^{2018} = -i(4\sqrt{2})^{2018}$

ومنه:

$(-4+4i)^{2018} = -i(4\sqrt{2})^{2018}$

3-أ-التحقق أن $z'-i = \frac{-4+4i}{z-2}$

لدينا $z'-i = \frac{i(z-4+2i)}{z-2} - \frac{i(z-2)}{z-2}$

أي $= \frac{i(z-4+2i-i(z-2)}{z-2}$

ومنه $z'-i = \frac{-4+4i}{z-2}$

3-ب-تبيان أن $AM' \times BM = 4\sqrt{2}$

لدينا $z'-i = \frac{-4+4i}{z-2}$

ومنه $|z'-z_A| = \left|\frac{-4+4i}{z-z_B}\right|$

أي $AM' = \frac{4\sqrt{2}}{BM}$

ومنه $AM' \times BM = 4\sqrt{2}$

-البرهان أن $(\vec{u}, \overrightarrow{AM'}) + (\vec{u}, \overrightarrow{BM}) = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$

$\arg(z'-z_A) = \arg(-4+4i) - \arg(z-z_B)$

$\arg(z'-z_A) + \arg(z-z_B)$

$= \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

$(\vec{u}, \overrightarrow{AM'}) + (\vec{u}, \overrightarrow{BM}) = \frac{3}{4}\pi + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

4-أ-التحقق أن $E \in (\Gamma)$ لاحقتها $z_E = 2+i$

$\arg(2+i-i) = \arg\left(\frac{-4+4i}{2+i-2}\right)$

$= \arg(4+4i)$

إذن $\arg(4+4i) = \frac{\pi}{4}$ ومنه E تنتمي إلى (Γ)

4-ب-تعيين طبيعة المجموعة (Γ)

$\arg(z'-i) = \frac{\pi}{4}$

معناه $\arg\left(\frac{-4+4i}{z-z_B}\right) = \frac{\pi}{4}$

$\arg(-4+4i) - \arg(z-z_B) = \frac{\pi}{4}$

$\arg(z-z_B) = \frac{\pi}{2}$

ومنه $(\vec{u}, \overrightarrow{BM}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

$\vec{u} \perp \overrightarrow{BM}$

ومنه مجموعة النقط (Γ) هي نصف مستقيم $[BE) - \{B\}$ معادلته $x = 2$

104. موضوع مقترح رقم 25

الاسم على اليوتوب : موضوع مقترح رقم 11 2018

I-نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة $z^2 - 2(1-\sin\alpha)z + 2(1-\sin\alpha) = 0 \ldots (E)$ حيث α عدد حقيقي (نرمز بـ z_1 و z_2 إلى حلي المعادلة (E).

1-عين الحلين z_1 و z_2 بدلالة α.

2-لتكن $\alpha = \frac{\pi}{6}$ بين أن $z_1^{2018} + z_2^{2018} = -1$

II- المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(o, \vec{u}, \vec{v})$

نعتبر النقط A, B, C التي لواحقها

$z_A = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ، $z_B = \overline{z_A}$ ، $z_C = 2z_A$

1-عين قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n$ عدد حقيقيا موجبا تماما

2-ليكن S التحويل النقطي الذي يحول النقطة M ذات اللاحقة z الى النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث $z' = (1+z_A)z + 2z_B$

-عين طبيعة التحويل S ثم حدد عناصره المميزة.

3-(Γ) مجموعة النقطة M ذات اللاحقة z حيث $\arg(\overline{z} - z_B) = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ مع $k \in \mathbb{Z}$

1-تعيين قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n$ عدد حقيقيا موجبا تماما

$$\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n = \left(\frac{e^{i\left(\frac{\pi}{3}\right)}}{e^{-\frac{i\pi}{3}}}\right)^n = \left(e^{i\frac{\pi}{3}} - e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^n = \left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^n$$

$$= e^{\frac{2in\pi}{3}}$$

$$= \cos\frac{2n\pi}{3} + i\sin\frac{2n\pi}{3}$$

يكون $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n$ حقيقيا موجبا تماما

$$\cos\frac{2n\pi}{3} > 0 \text{ و } \sin\frac{2n\pi}{3} = 0$$

معناه $\frac{2n\pi}{3} = 2k\pi$

أي $n = 3k \quad k \in \mathbb{N}$

2-تعيين طبيعة التحويل S وعناصره المميزة

$$z' = (1 + z_A)z + 2z_B$$

$$= \left(1 + \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z + 2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$z' = \left(\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z + 1 - i\sqrt{3}$$

$$\left|\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{3} \neq 1$$

ومنه S هو تشابه مباشر نسبته $K = \sqrt{3}$ وزاويته

$$\arg z' = \theta \begin{cases} \cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

ومركزه $z_I = \frac{b}{1-a} = 1 + i\sqrt{3} = z_C$

3- التحقق أن C تنتمي إلى (Γ)

(Γ)- مجموعة النقط M بحيث

$$\arg(\overline{z} - z_B) = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

$$\arg(\overline{z_C} - z_B) = \arg\left(1 - i\sqrt{3} - \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$$

$$= \arg\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

$$|\overline{z_C} - z_B| = \left|\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = 1$$

تحديد طبيعتها

لدينا $\arg(\overline{z} - z_B) = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$

التحقق أن النقطة C تنتمي إلى (Γ)، ثم حدد طبيعة (Γ) وعناصره

الحل

1-تعيين الحلين z_1 و z_2 بدلالة α

نحل

$$z^2 - 2(1 - \sin\alpha z) + 2(1 - \sin\alpha) = 0 \quad ...(E)$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$= [2(1 - \sin\alpha)]^2 - 4(1)(2(1 - \sin\alpha))$$

ومنه

$$\Delta = 4 + 4\sin^2\alpha - 8 + \sin\alpha - 8 + 8\sin\alpha$$

أي

$$\Delta = -4 + 4\sin^2\alpha = 4[-1 + \sin^2\alpha] = -4\cos^2\alpha$$

وعليه $\Delta = (2\cos\alpha i)^2 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 2\cos\alpha i$

$$z_1 = \frac{2(1 - \sin\alpha) + 2i\cos\alpha)}{2}$$

$$z_2 = \frac{2(1 - \sin\alpha) - 2i\cos\alpha)}{2}$$

$$z_1 = 1 - \sin\alpha + i\cos\alpha$$

$$z_2 = 1 - \sin\alpha - i\cos\alpha$$

2-البرهان أن $z_1^{2018} + z_2^{2018} = -1$

من أجل $\alpha = \frac{\pi}{6}$

$$z_1 = 1 - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$z_2 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}} \qquad z_2 = e^{-\frac{i\pi}{3}}$$

$$(z_1)^{2018} = \left(e^{\frac{i2018\pi}{3}}\right)$$

$$(z_1)^{2018} = \cos\left(672\pi + \frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(672\pi + \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$= \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$(z_2)^{2018} = \cos\left(-672\pi - \frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-672\pi - \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$= \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$(z_1)^{2018} + (z_2)^{2018} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}$$

ومنه

$$(z_1)^{2018} + (z_2)^{2018} = -1$$

الأعداد المركبة من الأقسام إلى البناء

$\arg(z - z_B) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad k \in \mathbb{N}$ ①

ومنه $\arg(z - z_B) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$

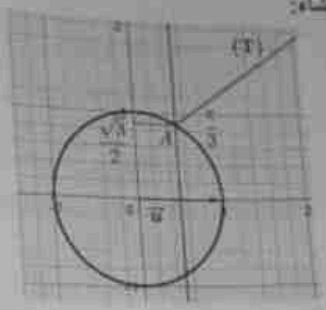
$\arg(z - z_A) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$

التفسير الهندسي $(\vec{u}, \overrightarrow{AM}) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$

ومنه مجموعة النقط هي نصف المستقيم $[AC)$

منشؤه A ويحمل زاوية $\frac{\pi}{3}$ باستثناء A.

الإنشاء:



105. موضوع مقترح رقم 26

الإتمام على الثنويات - موضوع مقترح رقم 12 2018

1-حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة

$(z-2)\left[z^2 - 2(2+\sqrt{3})z + 8 + 4\sqrt{3}\right] = 0$

2-نعتبر النقط C, B, A في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O, \vec{u}, \vec{v})$ لواحقها على الترتيب

$z_C = 2 + \sqrt{3} - i \; ; z_B = 2 + \sqrt{3} + i \; ; z_A = 2$

2-أ-اكتب على الشكل الأسي العدد $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$ واستنتج طبيعة المثلث ABC ثم أنشئ النقط C, B, A

2-ب-برهن أن النقطة C هي صورة النقطة B بالدوران r المركزه المبدأ O وزاويته $-\frac{\pi}{6}$

2-جـ-استنتج عمدة للعدد z_B ثم عين القيم المضبوطة لكل من $\cos\frac{\pi}{12}$ و $\sin\frac{\pi}{12}$

3-M نقطة من المستوي $(M \neq O)$ لاحقتها $z = ke^{i\theta}$ حيث $k > 0$ و $\theta \in \mathbb{R}$

M_1 صورة النقطة M بالدوران r و M' نظيرة M_1 بالنسبة إلى حامل محور الفواصل

3-أ-اثبت أن z' لاحقة النقطة M' تساوي $ke^{i\left(\frac{\pi}{6} - \theta\right)}$.

3-ب-عين قيم θ التي تحقق $z' = z$

-استنتج مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z التي تكون من أجلها $z' = z$

الحل

1-حل المعادلة في $\mathbb{C}$

$(z-2)\left[z^2 - 2(2+\sqrt{3})z + 8 + 4\sqrt{3}\right] = 0$

إما $(z-2) = 0$

أي: $z_0 = 2$

أو $z^2 - 2(2+\sqrt{3})z + 8 + 4\sqrt{3} = 0$

$\Delta = (2(2+\sqrt{3})^2 - 4(8+4\sqrt{3})$

$\Delta = -4 = (2i)^2$

$\sqrt{\Delta} = 2i$

ومنه:

$z_1 = \frac{2(2+\sqrt{3}) - 2i}{2} = 2 + \sqrt{3} - i$

$z_2 = \frac{2(2+\sqrt{3}) + 2i}{2} = 2 + \sqrt{3} + i$

ومنه:

$z_1 = 2 + \sqrt{3} - i$

$z_2 = 2 + \sqrt{3} + i$

ومنه $S = \{z_0, z_1, z_2\}$

2-أ-كتابة العدد $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$ على الشكل الأسي

واستنتاج طبيعة المثلث ABC ثم إنشاء C, B, A

$\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \frac{2 + \sqrt{3} + i - 2}{2 + \sqrt{3} - i - 2} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = L$

$\left|\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$

$\arg L = \theta \begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{2} \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$

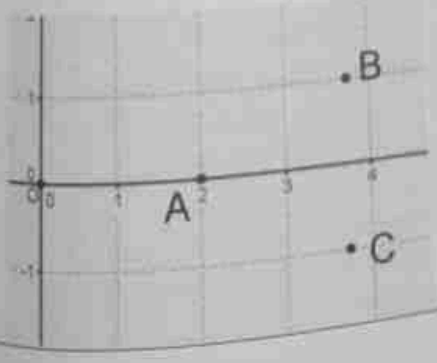
$L = e^{i\frac{\pi}{3}} + 2k\pi$

لدينا $AB = AC$ ومنه $L = 1$

$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ و

ومنه المثلث متقايس الأضلاع

إنشاء النقط C, B, A



2-بين البرهان أن C هي صورة B بالدوران R الذي مركزه O وزاويته $-\frac{\pi}{6}$

يكفي أن نبرهن $z_C = e^{-\frac{i\pi}{6}} z_B$

$$e^{-\frac{i\pi}{6}} z_B = \left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) z_B$$

$$e^{-\frac{i\pi}{6}} z_B = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)(2+\sqrt{3}+i)$$

$$e^{-\frac{i\pi}{6}} z_B = 2+\sqrt{3}-i = z_C$$

ومنه C صورة B بالدوران R

2-جـ استنتاج عمدة z_B والقيمة المضبوطة لـ $\cos\frac{\pi}{12}$ و $\sin\frac{\pi}{12}$

نلاحظ أن $z_C = \overline{z_B}$

$$\frac{\overline{z_B}}{z_B} = e^{-\frac{i\pi}{6}}$$

$$\arg(\overline{z_B}) - \arg(z_B) = -\frac{\pi}{6}$$

أي $-\arg z_B - \arg z_B = -\frac{\pi}{6}$

إذن $2\arg z_B = \frac{\pi}{6} \Longrightarrow \arg z_B = \frac{\pi}{12}$

تعيين القيمة المضبوطة لـ $\cos\frac{\pi}{12}$ و $\sin\frac{\pi}{12}$

$$z_B = |z_B|e^{\frac{i\pi}{12}} = |z_B|\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)$$

$$|z_B| = |2+\sqrt{3}+i| = \sqrt{(2+\sqrt{3})^2+1} = \sqrt{8+4\sqrt{3}}$$

$$|z_B| = 2\sqrt{2+\sqrt{3}}$$

$$z_B = 2\sqrt{2+\sqrt{3}}\cos\frac{\pi}{12} + 2i\sqrt{2\sqrt{3}}\sin\frac{\pi}{12}$$

$$z_B = 2+\sqrt{3}+i$$

ومنه:

$$2\sqrt{2+\sqrt{3}}\cos\frac{\pi}{12} = 2+\sqrt{3}$$

و $2\sqrt{2\sqrt{3}}\sin\frac{\pi}{12} = 1$

نجد

$$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{2+\sqrt{3}}}$$

و

$$\sin\frac{\pi}{12} = \frac{1}{2\sqrt{2+\sqrt{3}}}$$

3-أ-أثبت أن z' لاحقة النقطة M' تساوي $z' = ke^{i(\pi-\theta)}$

لدينا $z_1 = e^{-\frac{i\pi}{6}} z$

و $z' = \overline{z_1}$

ومنه: $z' = e^{\frac{i\pi}{6}}\overline{z}$

لكن $z = ke^{i\theta}$ ومنه $\overline{z} = ke^{-i\theta}$

$$z' = e^{i\frac{\pi}{6}}.ke^{-i\theta}$$

$$z' = ke^{i\left(\frac{\pi}{6}-\theta\right)}$$

3-بـ تعيين قيم θ التي تحقق $z' = z$

$$z' = ke^{i\left(\frac{\pi}{6}-\theta\right)}$$

لدينا $z' = z$ معناه

$$ke^{i\left(\frac{\pi}{6}-\theta\right)} = ke^{i\theta}$$

إذن $\frac{\pi}{6} - \theta + 2k\pi = \theta$

ومنه $\theta = \frac{\pi}{12} + k\pi$

-استنتاج مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z التي تكون من أجلها $z' = z$

$$z = ke^{i\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{12}-k\pi\right)} = ke^{i\left(\frac{\pi}{12}+k'\pi\right)} = z'$$

$k > 0 \quad k \in \mathbb{Z}$:

$$\arg(z) = \frac{\pi}{12} - k'\pi$$

$$\arg(z - z_0) = \frac{\pi}{12} - k'\pi$$

$$(\vec{u}, \overrightarrow{OM}) = \frac{\pi}{12} + k'\pi$$

$$\arg(z_B) = \frac{\pi}{12}$$

ومنه مجموعة النقط هي المستقيم (OB) ماعدا O ويعين بزاوية $(\vec{u}, \overrightarrow{OM}) = \frac{\pi}{12} + k'\pi$

106. موضوع مقترح رقم 27

التمرين على الموضوع : موضوع مقترح رقم 01 2017

a عدد حقيقي من المجال $[0;\pi]$، z عدد مركب و
$f(z)$ كثير حدود معرف بـ:
$$f(z) = z^3 - (1-2\sin\alpha)z^2 + (1-2\sin\alpha)z - 1$$
1-تحقق أن العدد 1 جذر لـ $f(z)$.
2-عين العددين الحقيقين a و b حيث:
$$f(z) = (z-1)(z^2+az+b)$$
3-حل في C المعادلة: $f(z)=0$.

4-المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$، ولتكن النقط A، B و C لواحقها z_1, z_2, z_3 على الترتيب حيث: $z_1 = 1$،
$z_2 = -\sin\alpha + i\cos\alpha$،
$z_3 = -\sin\alpha - i\cos\alpha$
أ-اكتب على الشكل الأسي كل من: z_1, z_2, z_3.
ب-حدد طبيعة المثلث ABC، ثم عين قيمة α حتى يكون قائم في A.
جـ-G مركز ثقل المثلث ABC، ماهي لاحقتها؟
-عين مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق:
$$\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\| = \|3\overrightarrow{MO}\|$$

الحل

1-أ-التحقق أن 1 جذر لـ $f(z)$

$$f(1) = 1^3 - (1-2\sin\alpha)\times 1^2 + (1-2\sin\alpha)\times 1 - 1$$
أي
$$= 1 - 1 + 2\sin\alpha + 1 - 2\sin\alpha - 1 = 0$$
ومنه $f(1)=0$
إذن 1 جذر لـ $f(z)$

1-ب-تعيين العددين الحقيقين a و b بحيث

لدينا $f(z) = (z-1)(z^2+az+b)$
$$f(z) = (z-1)(z^2+az+b)$$
$$= z^3 + az^2 + bz - z^2 - az - b$$
$$= z^3 - (a-1)z^2 + (b-a)z - b$$
$$= z^3 - (1-2\sin\alpha)3^1 + (1-2\sin\alpha)z - 1$$
بالمطابقة نجد
لدينا $a-1 = -(1-2\sin\alpha)$
$-b = -1$
ومنه $b = 1$
لدينا $a = -1 + 2\sin\alpha + 1$
$a = 2\sin\alpha$

1-جـ-حل في C المعادلة $f(z)=0$

لدينا $f(z) = (z-1)(z^2+2\sin\alpha\, z+1) = 0$
إما $z_1 = 1$ أي $z-1=0$
أو $z^2 + 2\sin\alpha\, z + 1 = 0$
يوجد حلان:
أي $\Delta = b^2 - 4ac$
$\Delta = (2\sin\alpha)^2 - 4(1)(1)$
$\Delta = 4\sin^2\alpha - 4$
$\Delta = 4(\sin^2\alpha - 1)$
لدينا $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$
أي $\sin^2\alpha - 1 = -\cos^2\alpha$
ومنه $\Delta = -4\cos^2\alpha$
ونعلم أن: $-1 = i^2$
$\Delta = 4\cos^2\alpha\, i^2$
لدينا $\sqrt{\Delta} = \sqrt{4i^2\cos^2\alpha} = 2i\cos\alpha$
ومنه $z_2 = \frac{-2\sin\alpha + 2i\cos\alpha}{2}$
أي $z_2 = -\sin\alpha + i\cos\alpha$
أي $z_3 = \overline{z_2} = -\sin\alpha - i\cos\alpha$
ومنه حلول المعادلة $f(z)=0$ هي:
$S\{z_1 ; z_2 ; z_3\}$

2-أ-كتابة z_1 ، z_2 ، z_3 على الشكل الأسي

لدينا $z = re^{i\theta} = r(\cos\theta + i\sin\theta)$
ومنه $z_1 = e^{2i\pi}$
لدينا $z_2 = -\sin\alpha + i\cos\alpha$
$z_2 = i^2\sin\alpha + i\cos\alpha$
$z_2 = i[i\sin\alpha + \cos\alpha]$
$z_2 = 1e^{\frac{i\pi}{2}}e^{i\alpha}$
$z_2 = e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}$
$z_3 = \overline{z_2} = e^{-i\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}$

2-ب-تحديد طبيعة المثلث ABC

لدينا النقط $A(1,0)$ ، $B(-\sin\alpha, \cos\alpha)$ ، $C(-\sin\alpha, -\cos\alpha)$
$$AB = |z_B - z_A| = |z_2 - z_1|$$
$$= |-\sin\alpha + i\cos\alpha - 1|$$
$$= |(-(\sin\alpha - 1 - 1) + i\cos\alpha|$$
$$= \sqrt{(-\sin\alpha - 1)^2 + \cos^2\alpha}$$
$$= \sqrt{1+1+2\sin\alpha}$$
ومنه $AB = \sqrt{2(1+\sin\alpha)}$
لدينا $AC = |z_C - z_A| = |-\sin\alpha - i\cos\alpha - 1|$

107. موضوع مقترح رقم 28

الأستاذ على الموقوب : موضوع مقترح رقم 02 2017

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.

1-حل في C المعادلة ذات المجهول المركب z التالية:

$(z-2i)(z^2-2z+2)=0$

نعطي الحلول على الشكل الجبري و الشكل الأسي.

2-نعتبر النقطتين A ; B ذات اللاحقتين على الترتيب:

$z_A=1+i$ ، $z_B=2i$

من أجل كل عدد مركب يختلف عن Z_A لدينا:

$z'=\frac{z-2i}{z-1-i}$

1-نعتبر (E) مجموعة النقط $M(x;y)$ ذات اللاحقة z بحيث Z' تخيلي صرف.

بين أن B نقطة من (E). عين مجموعة النقط (E).

2-نعتبر (F) مجموعة النقط $M(x;y)$ ذات اللاحقة z بحيث $|z'|=1$.

عين مجموعة النقط (F).

الحل

1-حل في C المعادلة

$(z-2i)(z^2+2z+2)=0$

-الشكل الجبري لحلول المعادلة

لدينا اما $z_1=2i$ أي $3-2i=0$

أي $z^2+2z+2=0$

$\Delta=b^2-4ac$

$=4-4(1)(2)$

$=-4=4i^2$

أي $\sqrt{\Delta}=2i$

$z_2=\frac{2-2i}{2}=1-i$ $z_2=1-i$

$z_3=\overline{z_2}=1+i$

ومنه $S=\{2i\ ,\ 1+i\ ,1-i\}$

الشكل الاسي لحلول المعادلة :

لدينا $z_1=2i=2e^{i\frac{\pi}{2}}$

و $|z_2|=|z_3|=\sqrt{2}$

بالنسبة لـ z_2

$\cos\alpha_1=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin\alpha_1=\frac{\sqrt{2}}{2}$

ومنه $\alpha_1=\frac{\pi}{4}$

أي: $z_2=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

$=\sqrt{(-\sin\alpha-1)^2+(-\cos\alpha)^2}$ أي

$=\sqrt{2(1+\sin\alpha)}$

$AB=AC$ ومنه

ومنه مثلثة المثلث ABC متساوي الساقين

تعيين قيمة α حتى يكون ABC قائم في A

لدينا ABC قائم معناه $\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{CA}=0$

$\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}1+\sin\alpha\\-\cos\alpha\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix}1+\sin\alpha\\\cos\alpha\end{pmatrix}$

لدينا $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BA}=0$

معناه $(1+\sin\alpha)^2-\cos^2\alpha=0$

و $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$

ومنه $\sin^2\alpha-1=-\cos^2\alpha$

ومنه $(1+\cos^2\alpha)^2+\sin^2\alpha-1=1$

أي $\sin^2\alpha+1+2\sin\alpha+\sin^2\alpha-1=0$

ومنه $2\sin^2\alpha+2\sin\alpha=0$

$2\sin\alpha(\sin\alpha+1)=0$

لما $\sin\alpha=0$ أي $\alpha=k\pi$ $k\in z$

و $\sin\alpha=-1$ $\alpha=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$ $k\in z$

مرفوض لأن $\alpha\in[0;\pi]$

$\alpha=\pi k$

لدينا $k=0$ أي $\alpha=0$; $k=1$ أي $\alpha=\pi$

ومنه قيم α حتى يكون ABC قائم في A هي

$\alpha=\{0,1\}$

2-جسم مركز ثقل المثلث ABC .تعيين لاحقتها :

بما أن G مركز ثقل ABC فهي مرجح للجملة المنقطة

$(A,1),(B,1)(C,1)$

ومنه $z_G=\frac{1z_A+1z_B+1z_C}{1+1+1}$

$z_G=\frac{1-\sin\alpha+i\cos\alpha-\sin\alpha-i\cos\alpha}{3}$

أي $z_G=\frac{1-2\sin\alpha}{3}$.

.تعيين مجموعة النقط من المستوي :

$\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|3\overrightarrow{MO}\right\|$

بما أن G مركز ثقل المثلث ABC فإن

$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$

$\left\|3\overrightarrow{MG}\right\|=\left\|3\overrightarrow{MO}\right\|$

$MG=MO$

ومنه مجموعة النقط التي تحقق

$\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|3\overrightarrow{MO}\right\|$

هي محور القطعة المستقيمة $[GO]$

الأعداد المركبة من الأنشطة إلى الثانية

$z_3 = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$

شكليا: $z_3 = \overline{z_2}$ لدن:

2-أ-إثبات أن B نقطة من E وتعيين المجموعة (E)

لاحقة B هي تخيلي صرف لأن $z_B = 2i$ أي

$$z' = \frac{2i-2i}{2i-1-i} = \frac{0}{-1+i} = 0$$

ومنه $B \in (E)$

ب-تعيين مجموعة النقط M من المستوى (E)

لدينا $z' = \frac{z-z_B}{z-z_A} = \frac{z-(2i)}{z-(1+i)}$

لدينا z' تخيلي صرف معناه $k \in z$

$$\arg z' = \arg\left(\frac{z-z_B}{z-z_A}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\arg z' = (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}) = \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$$

ومنه MAB مثلث قائم في M أي :

مجموعة النقط هي الدائرة التي قطرها $[AB]$

باستثناء النقطة A مركزها منتصف القطعة $[AB]$

ونصف قطرها R بحيث $R = \frac{AB}{2}$

2-ب-تعيين مجموعة النقط (F)

لدينا $|z'| = \left|\frac{z-2i}{z-1-i}\right| = 1$

ومنه $|z-2i| = |z-1-i|$

أي $|z-z_B| = |z-z_A|$

$BM = AM$

أي مجموعة النقط (F) هي محور القطعة المستقيمة $[AB]$

108. موضوع مقترح رقم 29

الأستاذ على الوجوب : موضوع مقترح رقم 03 2017

نعتبر العددين المركبين z_1 و z_2 حيث:

$z_1 = 3 + i\sqrt{3}$ و $z_2 = -\sqrt{3} + 3i$

1-اكتب العددين z_1 و z_2 على الشكل الأسي.

2-في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس المباشر $(O;\vec{u};\vec{v})$ نعتبر النقط A ، B و E التي لواحقها z_1 و z_2 و $z_3 = z_1 + z_2$ على الترتيب.

أ-برهن أن المثلث OAB قائم و متساوي الساقين

ب-استنتج أن الرباعي $OAEB$ مربع.

3-أ-بين أن $OE = 2\sqrt{6}$ و أن $(\vec{u};\overrightarrow{OE}) = \frac{5\pi}{12}$

ب-عين القيمتين المضبوطتين لكل من $\cos\frac{5\pi}{12}$ و $\sin\frac{5\pi}{12}$.

ج-احسب z_3^{2016}.

د-عين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون العدد $\left(\frac{z_3}{2\sqrt{6}}\right)^n$ حقيقيا.

نص الإجابة

1-كتابة z_1 و z_2 على الشكل الاسي :

لدينا $z_1 = 3 + \sqrt{3}i$

$$|z_1| = \sqrt{9+3} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$\arg(z_1) = \theta_1 \begin{cases} \cos\theta_1 = \frac{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta_1 = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \theta_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

ومنه $z_1 = 2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$

لدينا $|z_2| = \sqrt{9+3} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

$$\arg(z_2) = \theta_2 \begin{cases} \cos\theta_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = -\frac{1}{2} \\ \sin\theta_2 = \frac{\sqrt{3}\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \theta_2 = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

$z_2 = 2\sqrt{3}e^{i\frac{2\pi}{3}}$

2-أ-البرهان أن OAB مثلث قائم ومتساوي الساقين

لدينا $z_E = z_A + z_B$

و $z_{\overrightarrow{OE}} = z_{\overrightarrow{OA}} + z_{\overrightarrow{OB}}$

$\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$

لدينا $z = \frac{z_B - z_O}{z_A - z_O} = \frac{2\sqrt{3}e^{i\frac{2\pi}{3}} - 0}{2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}} - 0}$

$$z = \frac{e^{i\frac{2\pi}{3}}}{e^{i\frac{\pi}{6}}} = e^{i\frac{3\pi}{6}} = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$\frac{z_B - z_O}{z_A - z_O} = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

نستنتج $\frac{OA}{OB} = 1$ أي $OA = OB$

ومنه المثلث متساوي الساقين

و $\arg(z) = \frac{\pi}{2}$ أي $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}) = \frac{\pi}{2}$

ومنه المثلث OAB مثلث قائم في O

وفي الأخير نستنتج أن المثلث OAB مثلث قائم في O ومتساوي الساقين.

2-ب-استنتاج أن الرباعي $OAEB$ مربع :

مما سبق وجدنا $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$

ومنه الرباعي $OAEB$ متوازي الأضلاع

لكن $OB = OA$

$(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}) = \frac{\pi}{2}$

أي الرباعي $OAEB$ مربع

109. موضوع مقترح رقم 30

الاسم على اليوتيوب : موضوع مقترح رقم 12 2017

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ كثير الحدود $P(z)$ ذا المجهول z حيث: $P(z) = z^3 - 8$

1-تحقق أن $(z-2)(z^2+2z+4) = z^3 - 8$.

إستنتج حلول المعادلة $z^3 - 8 = 0$

نعتبر في المستوي المركب $(O;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})$. النقط A, B, C ذات اللواحق

$z_A = -1 + i\sqrt{3}$ ، $z_B = \overline{z_A}$ و $z_C = 2$

2-اكتب z_A و z_B على الشكل الأسي.

-إستنتج ان النقط A, B, C تنتمي إلى نفس الدائرة يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها.

3-بين أن $z_A^{2017} = 2^{2016} z_A$. ثم استنتج نتيجة ما يلي $(z_A^{2017} + z_B^{2017} + z_C^{2017})$.

4-اكتب العدد المركب $L = \frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}$ على الشكل الجبري ثم الأسي.

-اعط تفسيرا هندسيا لطويلة وعمدة العدد المركب L.إستنتج طبيعة المثلث ABC.

الحل

1-التحقق أن :

$$(z-2)(z^2+2z+4) = z^2 - 8$$

لدينا

$$\begin{aligned}(z-2)(z^2+2z+4) &= z^3 + 2z^2 + 4z - 2z^2 - 4z - 8 \\ &= z^3 - 8\end{aligned}$$

وهو المطلوب.

استنتاج حلول المعادلة $z^3 - 8 = 0$

لدينا $z^3 - 8 = (z-2)(z^2+2z+4)$

ومنه $(z-2)(z^2+2z+4) = 0$

أي $z - 2 = 0$ أي $z = 2$

و $z^2 + 2z + 4 = 0$

يوجد حلان:

$$\Delta = 4 - 4(1)(4) = -12 = 12i^2$$

ومنه $\sqrt{\Delta} = \sqrt{12i^2} = 2i\sqrt{3}$

أي

$$z_1 = \frac{-2 - 2i\sqrt{3}}{2} = -1 - i\sqrt{3}$$

و $z_2 = \frac{-2+2i\sqrt{3}}{2} = -1 + i\sqrt{3}$

اذن الحلول هي :

$$s = \{2, -1 - i\sqrt{3}, -1 + i\sqrt{3}\}$$

المتتالية الهندسية

$(\vec{u};\overrightarrow{OE}) = \frac{5\pi}{12}$ و $OE = 2\sqrt{6}$ ل

المثلث OAE قائم في A أي $OA^2 + AE^2 = OE^2$

$OE^2 = OA^2 + OB^2$

$OE^2 = 12 + 12 \Rightarrow OE = \sqrt{24}$

$OE = 2\sqrt{6}$ ومنه

$(\vec{u};\overrightarrow{OE}) = (\vec{u};\overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OE})$

لدينا علاقة شال :

$(\vec{u};\overrightarrow{OE}) = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} = \frac{2\pi}{12} + \frac{3\pi}{12} = \frac{5\pi}{12}$

ومنه $(\vec{u};\overrightarrow{OE}) = \frac{5\pi}{12}$

3-تعيين القيمتين المضبوطتين لكل من $\cos\frac{5\pi}{12}$ و $\sin\frac{5\pi}{12}$

1) $z_E = 2\sqrt{6}e^{i\frac{5\pi}{12}} = 2\sqrt{6}\left(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}\right)$

لدينا $z_E = z_1 + z_2 = 3 + i\sqrt{3} - \sqrt{3} + 3i$

$z_E = (3-\sqrt{3}) + i(3+\sqrt{3})$ ...2)

بالمطابقة نجد $\cos\frac{5\pi}{12} = \frac{3-\sqrt{3}}{2\sqrt{6}}$ و $\sin\frac{5\pi}{12} = \frac{3+\sqrt{3}}{2\sqrt{6}}$

3-حساب z_3^{2016}

$$z_3 = 2\sqrt{6}e^{i\frac{15\pi}{12}}$$

$$z_3^{2016} = \left[2\sqrt{6}\left(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}\right)\right]^{2016}$$

$$= (2\sqrt{6})^{2016}[\cos 840\pi + i\sin 840\pi]$$

ومنه: $z_3^{2016} = (2\sqrt{6})^{2016}$

3-تعيين قيم العدد الطبيعي n بحيث $\left(\frac{z_3}{2\sqrt{6}}\right)^n$ حقيقيا :

$$\left(\frac{z_3}{2\sqrt{6}}\right)^n = \left(\frac{2\sqrt{6}e^{i\frac{5\pi}{12}}}{2\sqrt{6}}\right)^n = e^{in\frac{n5\pi}{12}}$$

$$= \cos\frac{n5\pi}{12} + i\sin\frac{n5\pi}{12}$$

من أجل $\left(\frac{z_3}{2\sqrt{6}}\right)^n \in \mathbb{R}$

$$\sin\left(\frac{n5\pi}{12}\right) = 0$$

ومنه $\frac{5n\pi}{12} = k\pi \; ; k \in \mathbb{N}$

أي $5n\pi = 12k\pi$ وعليه $5n = 12k$

ومنه $n = 12\frac{k}{5}$ بحيث k يكون من مضاعفات 5

أي $k' = 5k$ ومنه $n = 12k'$

ومنه مجموع قيم n بحيث $\left(\frac{z_3}{2\sqrt{6}}\right)^n \in \mathbb{R}$

هي $n = 12k'$

$$z_A^{2017} + z_B^{2017} + z_C^{2017} = 2^{2016}(-1 + i\sqrt{3}) + 2^{2016}(-1 - i\sqrt{3}) + 2.2^{2016}$$

ومنه :

$$= 2^{2016}(-1 + i\sqrt{3} - 1 - i\sqrt{3} + 2) = 0$$

4-كتابة L على الشكل الجبري ثم الاسي :

لدينا

$$L = \frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = \frac{-1 - i\sqrt{3} - 2}{-1 + i\sqrt{3} - 2}$$

ومنه بالضرب بالمرافق :

$$L = \frac{(-3 - i\sqrt{3})(3 - i\sqrt{3})}{(-3 + i\sqrt{3})(-3 - i\sqrt{3})}$$

$$L = \frac{(-3 - i\sqrt{3})^2}{(-3)^2 - (i\sqrt{3})^2}$$

$$L = \frac{(-3)^2 + (i\sqrt{3})^2 + 6i\sqrt{3}}{(-3)^2 - (i\sqrt{3})^2}$$

$$L = \frac{(9 - 3 + 6i\sqrt{3})}{12}$$

$$L = \frac{6 + 6i\sqrt{3}}{12}$$

$$L = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

الشكل الاسي للعدد L :

$$|L| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$$

$$\begin{cases} \cos\theta_L = \frac{1}{2} \\ \sin\theta_L = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$$

ومنه: $L = e^{i\frac{\pi}{3}}$

اعطاء تفسير هندسي لطويلة وعمدة L

لدينا

$$|L| = \left|\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right| = \frac{CB}{CA} = 1$$

ومنه $CB = CA$

$$\theta = \arg(L) = \arg\left(\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right) = (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$$

$$\theta = \frac{\pi}{3}$$

استنتاج طبيعة المثلث ABC :

لدينا $CB = CA$

و $\arg(L) = \frac{\pi}{3}$

ومنه المثلث ABC متقايس الاضلاع

الأعداد المركبة من الأقصى إلى اليمين

2- كتابة z_A و z_B و z_C على الشكل الاسي :

أي $z = re^{i\theta}$

لدينا $r = |z_A| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$

$$\begin{cases} \cos\theta = \frac{x}{r} = -\frac{1}{2} \\ \sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$ و

ومنه $\theta_A = \frac{2\pi}{3}$

أي $z_A = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$

لدينا $z_B = \overline{z_A}$

ومنه $z_B = 2e^{-i\frac{2\pi}{3}}$

$z_C = 2e^{i2\pi}$

استنتاج أن النقط A ، B ، C تنتمي الى نفس الدائرة

لدينا : $|z_A| = |z_B| = |z_C| = 2$

أي $|z_A - z_O| = |z_B - z_O| = |z_C - z_O|$

ومنه $OA = OB = OC$

ومنه النقط A ، B و C تنتمي الى نفس الدائرة التي مركزها المبدأ O ونصف قطرها $r = 2$

3-البرهان أن $z_A^{2017} = 2^{2016} z_A$

لدينا: $z_A^{2017} = \left(2e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^{2017}$

ومنه:

$$z_A^{2017} = 2^{2017} e^{i\frac{2(2017)2\pi}{3}}$$

$$z_A^{2017} = 2^{2017} e^{i\frac{4034\pi}{3}}$$

ومنه

$$z_A^{2017} = 2^{2017} e^{i(3\times1344+1)\left(\frac{\pi}{3}\right)}$$

$$z_A^{2017} = 2^{2017} e^{i\left(1344\pi + \frac{2\pi}{3}\right)}$$

$$z_A^{2017} = 2^{2017} e^{i\left(3(1344)\left(\frac{\pi}{3}\right) + \frac{2\pi}{3}\right)}$$

$$z_A^{2017} = 2^{2017} e^{i\left((1344)(\pi) + \frac{2\pi}{3}\right)}$$

ومنه $z_A^{2017} = 2^{2017} e^{i\frac{2\pi}{3}}$

$z_A^{2017} = 2^{2016} 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$

ومنه $z_A^{2017} = 2^{2016} z_A$

إستنتاج نتيجة : $\left(z_A^{2017} + z_B^{2017} + z_C^{2017}\right)$

لدينا $z_B = \overline{z_A}$ $z_A^{2017} = 2^{2016} z_A$

ومنه $z_B^{2017} = (\overline{z_A})^{2017} = 2^{2016}\overline{z_A} = 2^{2016} z_B$

أي $z_B^{2017} = 2^{2016}(-1 - i\sqrt{3})$

$z_C^{2017} = 2^{2017}$

ومنه :

$$z_2 = \frac{6+10i}{2} = 3+5i$$

$$S = \{z_0, z_1, z_2\}$$

1-كتابة L على الشكل الجبري و الشكل المثلثي:

لدينا :

$$L = \frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = \frac{3-5i-(7+3i)}{3+5i-(7+3i)} = \frac{-4-8i}{-4+2i}$$

بالضرب في المرافق :

$$L = \frac{(-4-8i)(-4-2i)}{(-4+2i)(-4-2i)} = \frac{40i}{20} = 2i$$

الشكل المثلثي للعدد L :

$$|L| = |2i| = \sqrt{2^2} = 2$$

$$\arg(L) = \theta$$

$$\begin{cases} \cos\theta = 0 \\ \sin\theta = \frac{2}{2} = 1 \end{cases}$$

ومنه $\theta = \frac{\pi}{2}$

$$L = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$$

2-نوع التحويل S_1

لدينا S_1 يحول A الى B ومنه $z_B = a\,z_A + b$

و مركزه C أي $z_C = a\,z_C + b$

ومنه بالطرح : $z_B - z_C = a(z_A - z_C)$

أي $a = \frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = 2i$

ومنه $z_B - z_C = 2i(z_A - z_C)$

بما أن $|a| = |2i| = 2 \neq 1$

فإن S_1 هو تشابه مباشر

مركزه C و نسبته $K = |a| = 2$ وزاويته

$$\arg(a) = \arg(2i) = \frac{\pi}{2}$$

استنتاج طبيعة ABC

لدينا $\arg\left(\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right) = \frac{\pi}{2}$

ومنه $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \frac{\pi}{2}$

و $\frac{CB}{CA} = 2$

ومنه المثلث ABC قائم في النقطة C

$\left((\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \frac{\pi}{2}\right)$ لأن

3-تعيين التشابه المباشر S_2

لدينا S_2 يحول النقطة A الى النقطة B ومنه

$$z_B = a\,z_A + b$$

ومركزها D أي $z_D = a\,z_D + b$

ومنه $\frac{z_B - z_D}{z_A - z_D} = a = \frac{4-8i}{4+2i}$

$a = \frac{-40i}{20} = -2i$: بالضرب بالمرافق

110. موضوع مقترح رقم 31

التمرين على الوحدات : موضوع مقترح رقم 13 2017

حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة

$(z^2 - 6z + 34)(\bar{z} + 1 + 3i) = 0$

في المستوي المركب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ نعتبر النقط A, B, C و D لواحقها على الترتيب

$z_A = 3 + 5i$ ، $z_B = 3 - 5i$

$z_C = 7 + 3i$ ، $z_D = -1 + 3i$

1- اكتب العدد المركب L على الشكل الجبري ثم على الشكل المثلثي حيث $L = \frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}$.

2- ما نوع التحويل النقطي S_1 الذي مركزه C ويحول النقطة A إلى B بطلب تعيين عناصره المميزة ثم استنتج طبيعة المثلث ABC.

3- عين تشابه مباشر S_2 الذي مركزه D ويحول النقطة A إلى B مع تحديد عناصره المميزة ثم استنتج طبيعة المثلث ABD.

4- عين طبيعة التحويل $S_2 \circ S_1$ ثم عين عناصره المميزة.

5- بين أن النقط A, B, C و D تنتمي إلى نفس الدائرة يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها.

M-6 نقطة من المستوي لاحقها z، عين مجموعة النقط M من المستوي في كل من الحالتين

أ- $(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD})(\overrightarrow{AB}) = 0$.

ب-

$|z - z_A|^2 + |z - z_B|^2 + |z - z_C|^2 + |z - z_D|^2 = 100$

الحل

حل المعادلة

$$(z^2 - 6z + 34)(\bar{z} + 1 + 3i) = 0$$

لدينا $(z^2 - 6z + 34)(\bar{z} + 1 + 3i) = 0$

ومنه $(z^2 - 6z + 34) = 0$

أو $\bar{z} + 1 + 3i = 0$

لدينا $\bar{\bar{z}} = z$

ومنه $\overline{\bar{z} + (1 + 3i)} = \bar{0}$

$\bar{\bar{z}} + \overline{(1 + 3i)} = 0$

ومنه $z_0 = -1 + 3i$

و $z^2 - 6z + 34 = 0$

$\Delta = -100 = 100i^2$

$\Rightarrow \sqrt{\Delta} = 10i$

$$z_1 = \frac{6 - 10\,i}{2} = 3 - 5i$$

الأعداد المركبة من الأول إلى الثاني

لدينا طويلة α : $|\alpha| = |-2i| = 2 \neq 1$

ومنه وجود تشابه مباشر S_2 نسبته $k' = |\alpha| = 2$

ومركز D وزاويته θ :

$$\theta' = \arg(\alpha) = \arg(-2i) = -\frac{\pi}{2}$$

استنتاج طبيعة ABD

لدينا $\left|\frac{z_B - z_D}{z_A - z_D}\right| = 2$

أي : $\frac{DB}{DA} = 2 \neq 1$

و $\arg\left(\frac{z_B - z_D}{z_A - z_D}\right) = -\frac{\pi}{2}$

أي $(\overrightarrow{DA}; \overrightarrow{DB}) = -\frac{\pi}{2}$

ومنه المثلث ABD قائم في النقطة D

4-تعيين طبيعة التحويل $S_2 \circ S_1$ مع تعيين العناصر المميزة

لدينا $S = S_2 \circ S_1$

و S_1 تشابه مباشر نسبته : $k = 2$

و زاويته $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$

و S_2 تشابه مباشر نسبته : $k' = 2$

و زاويته $\theta' = -\frac{\pi}{2}$

ومنه $S = S_2 \circ S_1$ هو تشابه مباشر نسبته

$k'' = k \times k' = 4$

وزاويته : $\theta'' = \theta_1 + \theta' = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0$

ومنه $\theta'' = 2k\pi$

إيجاد مركز التحويل $S_2 \circ S_1$

لدينا العبارة المركبة لـ S_1 :

$$z_1 - z_C = 2i\,(z - z_C)$$
$$z_1 = 2iz - 2i\,z_C + z_C$$

ومنه $= 2iz - 2i\,(7 + 3i) + (7 + 3i)$

$$= 2iz + 13 - 11i$$

والعبارة المركبة لـ S_2 :

$$z_2 - z_D = -2i(z - z_D)$$
$$z_2 = -2i(z - z_D) + z_D$$
$$z_2 = -2iz - 7 + i$$

لدينا $m \xrightarrow{S_1} m_1 \xrightarrow{S_2} m'$: $S_2 \circ S_1$

$S_2 \circ S_1 = z_2 = -2i(z_1) - 7 + i$

ومنه $z_2 = -2i(2iz + 13 - 11i) - 7 + i$

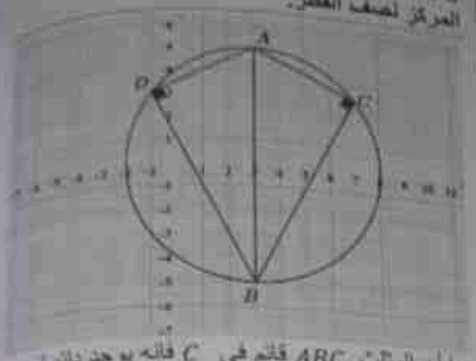
ومنه $S_2 \circ S_1 : z_2 = 4z - 29 - 25i$

ومنه المركز w :

$$z_w = \frac{b}{1-a} = \frac{-29 - 25i}{1 - 4} = \frac{29}{3} + \frac{25}{3}i$$

$$z_w = \frac{29}{3} + \frac{25}{3}i$$

5-أثبت أن النقط تنتمي الى نفس الدائرة مع تعين المركز ونصف القطر.



بما أن المثلث ABC قائم في C فإنه يوجد دائرة تحيط بروؤسه قطرها هو وتر المثلث أي $[AB]$

وبما أن المثلث ABD قائم في D فإنه يوجد دائرة تحيط بروؤسه قطرها هو وتره أي $[AB]$

ومنه النقط A، B و D تنتمي الى نفس الدائرة التي مركزها I ومنتصف $[AB]$ حيث :

$$z_I = \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{3 + 5i + 3 - 5i}{2} = 3$$

ونصف قطرها $r = \frac{[AB]}{2}$

ومنه $r = \frac{\sqrt{(3-3)^2 + (-5-5)^2}}{2} = \frac{\sqrt{100}}{2} = 5$

6-أ- تعين مجموع النقط M:

$$\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\right)\left(\overrightarrow{AM}\right) = 0$$

لتكن H مركز ثقل الرباعي $ADBC$ أي مرجح الجملة $[(A,1),(B,1),(D,1),(C,1)]$

ومنه

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = (1+1+1+1)\overrightarrow{MH}$$
$$= 4\,\overrightarrow{MH}$$

$$\left(\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} = \vec{0}\right) = (\alpha + \beta + \gamma)\overrightarrow{MG}$$
$$(\alpha + \beta + \gamma) \neq 0$$

ومنه $4\,\overrightarrow{MH}\,(\overrightarrow{AB}) = 0$

$4 \neq 0$

أي $\overrightarrow{MH}\,\overrightarrow{AB} = 0$ ومنه مجموع النقط في المستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة H و $\overrightarrow{AB}$ ناظمي له

$$z_H = \frac{z_A + z_B + z_C + z_D}{4}$$
$$= \frac{3 + 5i + 3 - 5i + 7 + 3i - 1 + 3i}{4}$$
$$= 3 + \frac{3}{2}i$$

تحقق أن النقطة B تنتمي إلى مجموعة (Ω).
تعرف على هذه المجموعة (Ω).

الحل

1-العبارة المركبة لدوران R

$$z' - z_0 = e^{-i\left(\frac{\pi}{3}\right)}(z - z_0)$$

لدينا المركز هو O ومنه

$$z' = e^{2i\frac{\pi}{3}} z$$

$$z' = \left[\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right] z$$

ومنه $z' = \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) z$

2-التحقق أن $z_{A'} = \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) z_A$

لدينا $\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(3\sqrt{3} - 2 + 3i + 2\sqrt{3}i)$

$$= -\frac{1}{2}[1 + i\sqrt{3}][3\sqrt{3} - 2 + 3i + 2i\sqrt{3}]$$

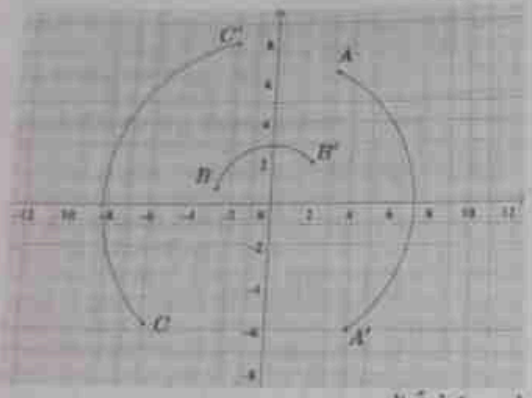
$$= -\frac{1}{2}[3\sqrt{3} - 2 + 3i + 2i\sqrt{3} + 9i - 2i\sqrt{3} - 3\sqrt{3} - 6]$$

$$= -\frac{1}{2}(-8 + 12i)$$

$$= 4 - 6i$$

ومنه A' صورة A بالدوران R.

انشاء النقط :



شرح كيفية الرسم :

يتم رسم C, B, A بعد رسم الصور C', B', A' حيث نقوم برسم قوس نحو الاتجاه الموجب مركزه المبدأ وزاويته $\frac{2\pi}{3}$ هناك تقع القطعة A وبنفس الطريقة نرسم النقطتين C, B

تعيين مجموعة النقط:

$$|z - z_A|^2 + |z - z_B|^2 + |z - z_C|^2 + |z - z_D|^2 = 100$$

$$|z - z_A|^2 = AM^2 = (x-3)^2 + (y-2)^2 = x^2 + y^2 - 6x - 10y + 34$$

$$|z - z_B|^2 = BM^2 = (x-3)^2 + (y+5)^2 = x^2 + y^2 - 6x + 10y + 34$$

$$|z - z_C|^2 = CM^2 = (x-7)^2 + (y-3)^2 = x^2 + y^2 - 14x - 6y + 58$$

$$|z - z_D|^2 = DM^2 = (x+1)^2 + (y-3)^2 = x^2 + y^2 + 2x - 6y + 10$$

ومنه $x^2 - 6x + y^2 - 3y + 9 = 0$

$$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{a^2+b^2}{4} - c$$ لدينا

ومنه $(x-3)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{36+9}{4} - 9 = \frac{45}{4} - \frac{36}{4} = \frac{9}{4}$

$$(x-3)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$$

ومنه مجموع النقط هي دائرة مركزها $M\left(3; \frac{3}{2}\right)$

وطول نصف قطرها $r' = \frac{3}{2}$

111. موضوع مقترح رقم 32

الإسم على الويندوز : موضوع مقترح رقم 14 2017

في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.نعتبر النقط C, B, A ذات اللواحق

$$z_A = (3\sqrt{3} - 2) + i(3 + 2\sqrt{3}),$$

$$z_B = (-1 - \sqrt{3}) + i(-1 + \sqrt{3}),$$

$$z_C = (-4\sqrt{3} + 1) + i(-\sqrt{3} - 4)$$

1-أعط العبارة المركبة للدوران R الذي مركزه O مبدأ المعلم و زاويته $-\frac{2\pi}{3}$.

2-تحقق أن التحويل R يحول النقطة A إلى النقطة A' ذات اللاحقة $4 - 6i$.

ونقبل أنه يحول النقط B, C إلى B', C' ذات اللواحق على الترتيب $-2 + 8i, 2 + 2i$.

علّم النقط A', B', C' ثم استخدم الدور لإنشاء A, B, C مع الشرح.

3-احسب $z_A - z_B + z_C$

استنتج ان O مبدأ المعلم هو مرجح للنقط A, B, C المرفقة بالمعاملات $1, -1, 1$. على الترتيب.

4-تعرف المجموعة (Ω) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق

$$\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\|$$

112. موضوع مقترح رقم 33

الأستاذ على الوتيوب : موضوع مقترح رقم 15 2017

1-حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة
$(z-2)(z^2-2z+4)=0$

2- المستوي المركب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.

لتكن النقط A, B و C التي لواحقها على الترتيب z_A و z_B و z_C حيث
$z_A=2\ ,\ z_B=1+i\sqrt{3}\ ,\ z_C=1-i\sqrt{3}$

أ-اكتب شكلا أسيا لكل من z_B و z_C.

ب-اكتب على الشكل الجبري العدد $\left(\frac{z_C}{2}\right)^{2015}$.

جـ-عين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون z_B^n عددا حقيقي سالبا.

3-أ-اكتب على الشكل الأسي العدد $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$

3-ب-استنتج أن C هي صورة B بتحويل نقطي، يطلب تعيينه بدقة ثم عين عناصره المميزة.

4-حدد مع التعليل طبيعة الرباعي $OBAC$.

الحل

1-حل المعادلة $(z-2)(z^2-2z+4)=0$

لدينا: $z-2=0$

$z_0=2$

أو: $z^2-2z+4=0$

معادلة من الدرجة الثانية:

$\Delta=4-16=12i^2$

ومنه $\sqrt{\Delta}=2i\sqrt{3}$

يوجد حلان:

$$z_1=\frac{2+2i\sqrt{3}}{2}=1+i\sqrt{3}$$

$$z_2=\frac{2-2i\sqrt{3}}{2}=1-i\sqrt{3}$$

$S\{z_0,z_1,z_2\}$

2-أ-كتابة الشكل الأسي: $re^{i\theta}$

$z_B=1+i\sqrt{3}$

ومنه $r=|z_B|=\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=2$

$$\arg(z_B)=\begin{cases}\cos\theta_B=\frac{x}{r}=\frac{1}{2}\\ \sin\theta_B=\frac{y}{r}=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$$

3-حساب $z_A-z_B+z_C$

$z_A-z_B+z_C$
$=$
$(3\sqrt{3}-2)+i(3+2\sqrt{3})-(-1-\sqrt{3})$
$+$
$i(-1+\sqrt{3})+(-4\sqrt{3}+1)+i(-\sqrt{3}-4)$
$=$
$3\sqrt{3}-2+3i+2i\sqrt{3}+1+\sqrt{3}+i-i\sqrt{3}$
$+$
$-4\sqrt{3}+1-i\sqrt{3}-4i$
$=0$

ومنه:

$z_A-z_B+z_C=0$

استنتاج أن O هي مرجع النقط C, B, A

لدينا:

$z_A-z_B+z_C=z_{\overrightarrow{OA}}-z_{\overrightarrow{OB}}+z_{\overrightarrow{OC}}=0$

أي $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$

ومنه O مرجح الجملة المثقلة

$\{(A,1),(B,-1),(C,1)\}$

4-أ- التحقق أن B تنتمي الى (Ω)

$$\left\|\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BB}+\overrightarrow{BC}\right\|=\left\|\overrightarrow{BA}-2\overrightarrow{BB}+\overrightarrow{BC}\right\|$$

ومنه

$$\left\|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right\|-\left\|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right\|=0$$

ومنه النقطة B تنتمي (Ω)

4-ب-التعرف على المجموعة (Ω)

$$\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|$$

بما أن O مرجح الجملة المثقلة

$\{(A,1),(B;-1),(C,1)\}$

$\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MO}$

$\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BC}$
$=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}$

ولتكن G مرجح الجملة $\{(A,1),(B,1)\}$

ومنه $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{BG}$

أي $\left\|\overrightarrow{MO}\right\|=\left\|2\overrightarrow{BG}\right\|$

$MO=2BG$

ومنه النقط M هي دائرة مركزها المبدأ O ونصف قطرها: $r=2BG$

ومنه $\theta = \frac{2\pi}{3}$

ومنه الشكل الأسي : $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{i\left(\frac{2\pi}{3}\right)}$

3-ب-استنتاج ان C هي صورة B بتحويل نقطي تعين عناصره المميزة:

لدينا : $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{i\left(\frac{2\pi}{3}\right)}$

ومنه $z_C - z_A = e^{i\frac{2\pi}{3}}(z_B - z_A)$

بما ان $\left|\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = 1$

فإن التحويل هو دوران R مركزه A ويحول B الى C وزاويته $\theta = \frac{2\pi}{3}$

4-تحديد طبيعة الرباعي $OBAC$

لدينا $z_{\overrightarrow{OB}} = z_B - z_O = 1 + i\sqrt{3}$

$z_{\overrightarrow{CA}} = z_A - z_C = 2 - 1 + i\sqrt{3}$

$z_{\overrightarrow{CA}} = 1 + i\sqrt{3}$

ولدينا $z_{\overrightarrow{OB}} = z_{\overrightarrow{CA}}$

$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{CA}$

ومنه الرباعي هو متوازي اضلاع

113. موضوع مقترح رقم 34

الاسم على اليوتيوب : موضوع مقترح رقم 16 2017

1-في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ نعتبر النقط A, B و C . لواحقها على الترتيب

$z_A = 1 + 3i$ ، $z_B = 2 + 4i$ ، $z_C = 1 + z_A$

أ-اكتب $z_B - z_A$ على الشكل الأسي.

ب-عين z_G لاحقة النقطة G مركز ثقل المثلث ABC.

2-أ-اكتب العبارة المركبة للتحاكي T الذي مركزه G ونسبته -2.

ب-عين إحداثيي النقطة H سابقة النقطة C بالتحويل T,ثم تحقق أن H منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$.

3-(γ) مجموعة النقط M لاحقتها z حيث $z = z_A + ke^{i\frac{\pi}{4}}$ و k يتغير في $\mathbb{R}_+$.

أ-عين قيسا للزاوية الموجهة $(\vec{u};\overrightarrow{AB})$.

ب-تحقق أن المجموعة (γ) هي نصف المستقيم $[AB)$.

4-بين أن: $\frac{z_C - z}{z_B - z_A} = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{-i\frac{\pi}{4}} - k)$ ثم تحقق أن النقطة H تنتمي إلى (γ).

-استنتج ان المستقيمين (AB) و (CH) متعامدان.

$\theta_B = \frac{\pi}{3}$

$z_B = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$

$z_C = \overline{z_B}$

$z_C = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$

3-أ-كتابة العدد $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ على الشكل الأسي :

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{1 + i\sqrt{3} + i\sqrt{3} - 3}{4}$$

$$= -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$r = \left|-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = 1$$

$$\theta = \arg\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \begin{cases} \cos\theta = -\frac{1}{2} \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

4-المكتوبة $\left(\frac{z_C}{2}\right)^{2015}$ على الشكل الجبري :

$\left(\frac{z_C}{2}\right)^{2015} = 2^{2015}e^{-i\frac{2015}{3}\pi}$

$\left(\frac{z_C}{2}\right)^{2015} = 2^{2015}e^{-i\left(\frac{3(671)+2\pi}{3}\right)}$

$$\left(\frac{z_C}{2}\right)^{2015} = e^{-i\left(671\pi+\frac{2\pi}{3}\right)} = e^{-i\left(670\pi+\pi+\frac{2\pi}{3}\right)}$$

$$= e^{-i\left(335(2\pi)+\frac{5\pi}{3}\right)}$$

$$= e^{-i\frac{5\pi}{3}}$$

$$= \cos\left(-\frac{5\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{3}\right)$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

2-تعين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون z_B^n حقيقيا صرفا

$$(z_B)^n = \left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^n = 2^n e^{i\frac{\pi}{3}} = 2^n e^{i\frac{n\pi}{3}}$$

$$= 2^n\left(\cos\left(n\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(n\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

يكون $z_B^n \in \mathbb{R}_-$ اذا كان $\cos\left(n\frac{\pi}{3}\right) \leq 0$

$$\sin\left(n\frac{\pi}{3}\right) = 0$$

$$\frac{n\pi}{3} = (2k+1)\pi$$

$$n = 3(2k+1)$$

$$n = 6k + 3 \quad k \in \mathbb{N}$$

الحل

1-كتابة $z_B - z_A$ على الشكل الأسي :

لدينا : $z_B - z_A = (2+4i) - (1+3i)$

$z_B - z_A = 1 + i$

$|z_B - z_A| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$ ومنه

$\arg(z_B - z_A) = \theta$: $\begin{cases} \cos\theta = \frac{a}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \frac{b}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

ومنه $\theta = \frac{\pi}{4}$

$z_B - z_A = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

1-تعيين لاحقة G :

بما أن G مركز ثقل المثلث ABC فهي مرجح الجملة $\{(A,1),(B,1),(C;1)\}$

$z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3}$

$z_G = \frac{1+3i+2+4i+1+i+3i}{3}$

ومنه $z_G = \frac{5}{3} + \frac{10}{3}i$

2-أكتابة العبارة المركبة للتحاكي T :

لدينا G مركز التحاكي T ومنه :

$z' - z_G = k(z - z_G)$ و $k = -2$

$z' - z_G = -2(z - z_G)$

أي $z' = -2z + 2z_G$

ومنه $z' = -2z + 5 + 10i$

2-تعيين احداثيتي النقطة H:

$z'_C = -2z_H + 5 + 10i$

أي $2 + 3i = -2z_H + 5 + 10i$

ومنه $2z_H = 3 + 7i$

أي $z_H = \frac{3}{2} + \frac{7}{2}i$

التحقق أن H منتصف $[AB]$

لدينا : $\frac{z_A + z_B}{2} = \frac{1+3i+2+4i}{2}$

$= \frac{3}{2} + \frac{7}{2}i = z_H$

ومنه H هي منتصف $[AB]$

3-أستعين قيم الزاوية الموجهة $(\vec{U}, \overrightarrow{AB})$

$(\vec{U}, \overrightarrow{AB}) = \arg(z_{AB})$

$= \arg(z_B - z_A) = \arg(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}) = \frac{\pi}{4}$

3-بـ-التحقق أن (γ) هي نصف المستقيم $[AB]$

لدينا $z = z_A + ke^{i\frac{\pi}{4}}$

$|z - z_A| = |ke^{i\frac{\pi}{4}}|$

$AM = |K| = K$; $k \in \mathbb{R}^+$

لكن لدينا $(\vec{U}, \overrightarrow{AB}) = \frac{\pi}{4}$

ومنه لدينا $z_B - z_A = ke^{i\frac{\pi}{4}}$

$\arg(z_B - z_A) = \frac{\pi}{4}$

$\beta \epsilon \gamma$

ومنه (γ) هي نصف المستقيم $[AB]$ الذي مبدؤه A ويميل بزاوية $\theta = \frac{\pi}{4}$ باستثناء النقطة A

4-إثبات أن $\frac{z_C - z}{z_B - z_A} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{-i\frac{\pi}{4}} - k\right)$

لدينا $\frac{z_C - z}{z_B - z_A} = \frac{z_C - z + z_A - z_A}{z_B - z_A} = \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} - \frac{z - z_A}{z_B - z_A}$

$= \frac{1 + z_A - z_A}{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}} - \frac{ke^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\frac{\pi}{4}} - \frac{k}{\sqrt{2}}$

(نلاحظ أن من سؤال 3-ب- $z = z_A + ke^{i\frac{\pi}{4}}$

ومنه $z - z_A = ke^{i\frac{\pi}{4}}$

ومنه $\frac{z_C - z}{z_B - z_A} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[e^{-i\frac{\pi}{4}} - k\right]$

التحقق أن النقطة H تنتمي الى (γ)

لدينا (γ) : $z = z_A + ke^{i\frac{\pi}{4}}$

حتى تكون $H \epsilon (\gamma)$ يجب :

$(\vec{U}, \overrightarrow{AM}) = \arg(z_{\overrightarrow{AM}}) = \arg(z_M - z_A) = \frac{\pi}{4}$

$z_H - z_A = \frac{3}{2} + \frac{7}{2}i - (1+3i) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$

$z_H - z_A = \frac{1}{2}(1+i)$

$\arg\left(\frac{1}{2}(1+i)\right) = \frac{\pi}{4}$

ومنه

$\arg\left(\frac{1}{2}(1+i)\right) = \frac{\pi}{4}$

ومنه $H \in (\gamma)$

استنتاج أن المستقيمين (AB) و (CH) متعامدان حتى يكون $(AB) \perp (CH)$ يكفي أن نجد أن

$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CH}) = \pm\frac{\pi}{2} + k\pi$

لدينا : $\frac{z_C - z_H}{z_B - z_A} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{i\frac{\pi}{4}} - k\right)$

$z_C - z_H = 2 + 3i - \left(\frac{3}{2} + \frac{7}{2}i\right)$

$$= \frac{1}{2}(1-i)$$

$$|z_C - z_H| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\arg(z_C - z_H) = \theta$$

$$\begin{cases} \cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

ومنه $\theta = -\frac{\pi}{4}$

أي $z_C - z_H = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$

ولدينا: $z_B - z_A = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

ومنه $\frac{z_C - z_H}{z_B - z_A} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}} = \frac{1}{2}e^{-i\frac{\pi}{2}}$

ومنه $= \frac{1}{2}e^{-i\frac{\pi}{2}}$

أي $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{HC}) = -\frac{\pi}{2}$

أي المستقيمان $(CH) \perp (AB)$

114. موضوع مقترح رقم 35

الأستاذ على الويتوب : موضوع مقترح رقم 17 2017

المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

m وسيط حقيقي. نعتبر التحويل النقطي T_m الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث

$$z' = (m+i)z + m - 1 - i$$

1-هل توجد قيمة للعدد m بحيث يكون T_m إنسحابا؟

2-عين العدد m بحيث يكون T_m دورانا. عين عندئذ المركز وزاوية له.

3-نضع فيما يلي $m = 1$.

أ-احسب لاحقة Ω النقطة الصامدة للتحويل T_m.

ب-من أجل كل عدد مركب z يختلف عن 1,أحسب $\frac{z'-1}{z-1}$.

-باستعمال تفسير هندسي لكل من الطويلة والعمدة للعدد $\frac{z'-1}{z-1}$، برهن أن T_1 هو تشابه مباشر يطلب تعيين عناصره المميزة.

4-نعرف في المستوي المتتالية النقطية (M_n) كمايلي $M_0 = O$ ومن أجل كل عدد طبيعي n

$M_{n+1} = T_1(M_n)$.

أ-مثل النقط M_4, M_3, M_2, M_1.

ب-من أجل كل عدد طبيعي n نضع $d_n = \Omega M_n$.

برهن أن (d_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها.

هل (d_n) متقاربة؟

الحل

1-معرفة وجود قيم $m \in \mathbb{R}$ حتى يكون T_m انسحاب

لدينا (T_m) : $z' = (m+i)z + m - 1 - i$

(T_m) انسحاب أي: $z' = z + b$

بالمطابقة: $m + i = 1$

$m = 1 - i$

ولدينا: $(1-i) \notin \mathbb{R}$

ومنه لا يوجد قيم للعدد الحقيقي m حتى يكون T_m انسحاب

2-تعيين m حتى يكون T_m دوران:

(T_m) دوران أي يكتب من الشكل $z' = az + b$

بحيث $a \in C$ و $|a| = 1$

ومنه $(m+i) \in \mathbb{C}$

$|m+i| = 1$

$m = 0$

قيم m حتى يكون (T_m) دوران هي $m = 0$

وعبارته $z' = iz - 1 - i$

زاويته θ : $\theta = \arg(i) = \frac{\pi}{2}$

ومركزه: $z_w = \frac{b}{1-a} = \frac{-1-i}{1-i}$

بالضرب بالمرافق نجد: $z_w = -\frac{(1+i)^2}{2} = -i$

ومنه لاحقة المركز لـ T_m هي $z_w = -i$

3-أ-حساب لاحقة Ω :

لدينا $z' = (1+i)z - i$

Ω نقطة صامدة للتحويل T_m أي $T_m(w) = w$

ومنه $z_w = (1+i)z_w - i$

أي $z_w(1+i-1) = i$

$z_w = \frac{i}{i} = 1$

ومنه $w(1,0)$

3-ب-حساب $\frac{z'-1}{z-1}$

$$z' = (1+i)z - i$$

$$\frac{z'-1}{z-1} = \frac{(1+i)z - i - 1}{z-1} = \frac{z + iz - i - 1}{z-1}$$

$$= \frac{z-1}{z-1} + \frac{iz-i}{z-1}$$

يكافئ:

$$= 1 + \frac{i(z-1)}{z-1}$$

الأعداد المركبة من الأنف إلى الذيل

$= 1 + i$

ومنه $\frac{z'-1}{z-1} = 1 + i$

البرهان أن T_1 تشابه مباشر:

لدينا $\left|\frac{z'-1}{z-1}\right| = |1 + i|$

و $z_w = 1$

ومنه $\left|\frac{z'-z_w}{z-1}\right| = \sqrt{2}$

أي $\frac{wM'}{wM} = \sqrt{2}$

ومنه $wM' = 2wM$

و $\arg\left(\frac{z'-1}{z-1}\right) = \arg(1 + i) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$

لأن:

$$\begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

أي $\arg\left(\frac{z'-w}{z-1}\right) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$

ومنه $(\overrightarrow{wM}, \overrightarrow{wM'}) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$

بما أن $\begin{cases} \left|\frac{z'-1}{z-1}\right| = \sqrt{2} \neq 1 \\ (1 + i) \in \mathbb{C} \end{cases}$

فإن T_1 هو تشابه مباشر الذي نسبته $k = \sqrt{2}$ وزاويته $\arg(\theta) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ومركزه النقطة w ذات اللاحقة $z_w = 1$

4-أ-تمثيل النقطة $M_4, M_3 M_2 M_1$

-إيجاد احداثيات النقط

لدينا $M_{n+1} = T_1(M_n)$

ومنه $z_{n+1} = (1 + i)z_n - i$

لدينا $M_0 = 0$

ومنه $z_1 = (1 + i)(0) - i = -i$

أي $M_1(0, -1)$

و $z_2 = (1 + i)(-i) - i = -i + 1 - i$

$z_2 = 1 - 2i$

ومنه $M_2(1, -2)$

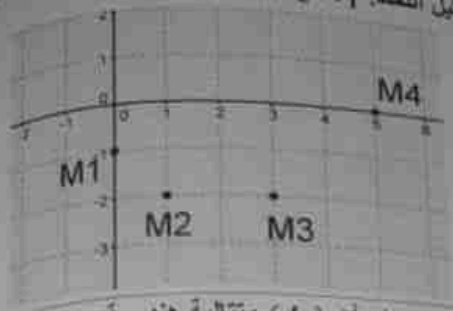
ومنه $z_3 = (1 + i)(1 - 2i) - i = 3 - 2i$

$M_3(3, -2)$

$z_4 = (1 + i)(3 - 2i) - i = 5$

$M_4(5, 0)$

تمثيل النقط: $M_4, M_3 M_2 M_1$



4-ب-البرهان أن (d_n) متتالية هندسية

(d_n) هندسية: $d_{n+1} = d_n \times q$

لدينا $d_n = wM_n = |z_n - z_w|$

ومنه $d_{n+1} = \Omega M_{n+1}$

ولدينا $M_{n+1} = T_1(M_n)$

ومنه $d_{n+1} = |(1 + i)z_n - i - 1|$

$d_{n+1} = |(1 + i)z_n - (1 + i)|$

$= |(1 + i)(z_n - 1)|$

$= |1 + i||z_n - z_w|$

$= \sqrt{2}\,\Omega M_n$

ومنه: $d_{n+1} = \sqrt{2}\, d_n$

ومنه (d_n) م هندسية أساسها $q = \sqrt{2}$ وحدها الأول

$d_0 = \Omega M_0 = |z_0 - z_w| = |0 - 1| = 1$

$d_n = \left(\sqrt{2}\right)^n$

حساب نهاية d_n

$\lim_{n \to +\infty} d_n = \lim_{n \to +\infty} \left(\sqrt{2}\right)^n = +\infty$

ومنه (d_n) متتالية متباعدة أي ليست متقاربة.

115. موضوع مقترح رقم 36

الاسم على اليوتيوب : موضوع مقترح رقم 18 2017

1- $P(z)$ كثير حدود للمتغير المركب z حيث:

$$P(z) = z^3 - 3z^2 + 3z + 7$$

أ- احسب $P(-1)$، ثم عين العددين الحقيقيين a و b حتى يكون

$$P(z) = (z+1)(z^2 + az + b)$$

ب- حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z) = 0$.

2- في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$، نعتبر النقط A, B, C و G.

ولاحقها على الترتيب

$z_A = -1$ ، $z_B = 2 + i\sqrt{3}$ ، $z_C = 2 - i\sqrt{3}$ و $z_G = 3$

أ- عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون $(z_B - z_A)^n$ عددا حقيقيا سالبا.

ب- احسب الأطوال AB، AC و BC ثم عين طبيعة المثلث ABC.

3- أ- اكتب $\frac{z_A - z_C}{z_G - z_C}$ على الشكل الأسي، ثم استنتج أن A صورة G بتحويل نقطي يطلب تعيينه.

ب- حدد مركز ونصف قطر الدائرة المحيطة بالمثلث ACG.

4- أ- بين أن النقطة G مرجح الجملة $\{(A;-1),(B;2),(C,2)\}$.

ب- عين مجموعة النقط M من المستوي حيث $\left\|-\overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{BM} + 2\overrightarrow{CM}\right\| = \left\|\overrightarrow{BM} - \overrightarrow{CM}\right\|$.

5- أنشئ النقطة H لاحقها $z_H = 1 + e^{i\frac{\pi}{6}}$ دون حساب، ثم عين بطريقة هندسية عمدة للعدد المركب z_H.

الحل

1- أ- حساب $p(-1)$

$$p(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 + 3(-1) + 7$$

ومنه $p(-1) = 0$

تعيين a ، b :

لدينا : $p(z) = z^3 - 3z^2 + 3z + 7$

لأن $p(-1) = 0$ أي -1 جذر لـ $p(z)$ فإن

$$p(z) = (z+1)(z^2 + az + b)$$

$$p(z) = z^3 + az^2 + bz + z^2 + az + b$$

$$p(z) = z^3 + z^2(a+1) + z(a+b) + b$$

بالمطابقة نجد:

$$\begin{cases} a+1 = -3 \\ a+b = 3 \\ b = 7 \end{cases}$$

$a + 1 = -3$

أي $a = -4$

و $a + b = 3$

ومنه $b = 3 - a = 3 - (-4)$

$b = 7$

ب- حل المعادلة $p(z) = 0$

$$(z+1)(z^2 - 4z + 7) = 0$$

$z + 1 = 0$

أو $z^2 - 4z + 7 = 0$

$z + 1 = 0$

أي $z_0 = -1$

و $z^2 - 4z + 7 = 0$

$\Delta = -12 = 12\,i^2$

$\sqrt{\Delta} = 2i\sqrt{3}$

$$z_1 = \frac{4 - 2i\sqrt{3}}{2} = 2 - i\sqrt{3}$$

$$z_2 = \frac{(4 + 2i\sqrt{3})}{2} = 2 + i\sqrt{3}$$

ومنه $S = (z_0, z_1, z_2)$

2- أ- تعيين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون $(z_B - z_A)^n$ وعدد حقيقيا سالب

لدينا $z_B - z_A = 3 + i\sqrt{3}$

$$|z_B - z_A| = \sqrt{3^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$\arg(z_B - z_A) = \theta$

$$\begin{cases} \cos\theta = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

ومنه $\theta = \frac{\pi}{6}$

$$(z_B - z_A)^n = \left(2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^n = (2\sqrt{3})^n e^{i\frac{n\pi}{6}}$$

$$(z_B - z_A)^n = (2\sqrt{3})^n \left(\cos\left(n\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{n\pi}{6}\right)\right)$$

$$\begin{cases} \cos\frac{n\pi}{6} \le 0 \\ \sin\left(\frac{n\pi}{6}\right) \neq 0 \end{cases}$$

$$\frac{n\pi}{6} = (2k+1)\pi$$

$$\frac{n}{6} = 2k + 1$$

$$n = 12k + 6 \qquad ,k \in \mathbb{N}$$

2-بـ-حساب الأطوال AB ، AC ، BC

$$AB = |z_B - z_A| = |2 + i\sqrt{3} + 1|$$
$$AB = |3 + i\sqrt{3}| = 2\sqrt{3}$$
$$AC = |z_C - z_A| = |3 - i\sqrt{3}|$$
$$AC = \sqrt{3^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2} = 2\sqrt{3}$$
$$BC = |z_C - z_B| = |-2i\sqrt{3}| = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

نلاحظ أن $AB = AC = BC$

ومنه نستنتج أن المثلث ABC متقايس الأضلاع

3-أ-كتابة $\frac{z_A - z_C}{z_C - z_C}$ على الشكل الأسي :

$$\frac{z_A - z_C}{z_C - z_C} = \frac{-3 + i\sqrt{3}}{1 + i\sqrt{3}}$$

بالضرب المرافق نجد:

$$\frac{z_A - z_C}{z_C - z_C} = \frac{4i\sqrt{3}}{4} = i\sqrt{3}$$
$$= \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}$$

لاستنتاج أن A صورة G بتحويل يطلب تعيينه

لدينا

$$\frac{z_A - z_C}{z_C - z_C} = i\sqrt{3} = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}$$

ومنه $z_A - z_C = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}(z_C - z_C)$

$$k = \sqrt{3} \neq 1$$
$$\theta = \frac{\pi}{2} \neq 2\pi$$

ومنه التحويل هو تشابه مباشر الذي نسبته $k = \sqrt{3}$ وزاويته $\theta = \frac{\pi}{2}$ مركزه النقطة C ويحول G الى A

3-بـ-إيجاد مركز ونصف قطر الدائرة المحيطة بالمثلث ACG

لدينا $\frac{z_A - z_C}{z_G - z_C} = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}$

$$(\overrightarrow{CG}, \overrightarrow{CA}) = \frac{\pi}{2}$$

ومنه المثلث ACG قائم في النقطة C

ومنه يوجد دائرة محيطة بروؤس المثلث ACG

وقطرها هو $[AG]$ ومركزها I ومنتصف $[AG]$

$$z_I = \frac{z_A + z_G}{2} = \frac{-1 + 3}{2} = 1$$

ونصف قطرها r

$$r = \frac{AG}{2} = \frac{|z_G - z_A|}{2} = \frac{|3 + 1|}{2} = 2$$

4-بـ-تبيان أن النقطة G مرجح الجملة $\{(A,-1),(B,2),(C,2)\}$

لأن $-1 + 2 + 2 = 3 \neq 0$

فإنه يوجد مرجح وحيد للنقط

تكون G مرجح اذا كان : $z_G = \frac{(-1)z_A + 2z_B + 2z_C}{3}$

$$\frac{(-1)(-1) + 2(2 + i\sqrt{3}) + 2(2 - i\sqrt{3})}{3}$$
$$= \frac{9}{3} = 3 = z_G$$

ومنه G مرجح للجملة $\{(A,-1),(B,2),(C,2)\}$

$$-\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

4-بـ-تعيين مجموعة النقطة M من المستوي:

لدينا $-\overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{BM} + 2\overrightarrow{CM} = 3\overrightarrow{GM}$

لأن G مرجح الجملة $\{(A,-1),(B,2),(C,2)\}$

و $\overrightarrow{BM} - \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{BC}$

ومنه $\left|\left|3\overrightarrow{GM}\right|\right| = \left|\left|\overrightarrow{BC}\right|\right|$

$$3GM = BC$$
$$GM = \frac{1}{3}BC$$

ومنه مجموع النقط M هي دائرة مركزها G

ونصف قطرها $r' = 2\frac{\sqrt{3}}{3}$

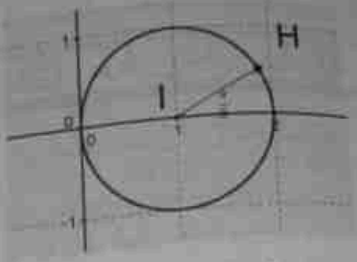
5-انشاء النقطة H

$$z_H = 1 + e^{i\frac{\pi}{6}}$$
$$z_H = z_I + e^{i\frac{\pi}{6}}$$
$$z_H - z_I = e^{i\frac{\pi}{6}}$$

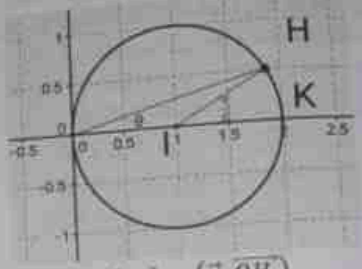
$$\begin{cases} |z_H - z_I| = 1 \\ \arg(z_H - z_I) = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \end{cases}$$

أي $IH = 1$ و $(\vec{U}, \overrightarrow{IH}) = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$

ليكن H هي نقطة تقاطع الدائرة التي مركزها I ونصف قطرها 1 و نصف المستقيم $[IH)$ بالاستثناء I والتي تصنع مع حامل محور الفواصل زاوية قياسها $\frac{\pi}{6}$



تعيين z_H بطريقة هندسية عمدة



$$\arg(z_H) = (\vec{u}, \overrightarrow{OH})$$

لدينا $\widehat{HOK} = \frac{1}{2}\widehat{HIK}$

لأنها زاوية مركزية وزاوية محيطية وتحصران نفس القوس $\widehat{HIK} = (\vec{U}, \overrightarrow{IH}) = \frac{\pi}{6}$

$$\widehat{HOK} = \frac{\pi}{12} = (\vec{U}, \overrightarrow{OH}) = \arg(z_H)$$

116. موضوع مقترح رقم 37

الأستاذ على اليوتيوب : موضوع مقترح رقم 04 2017

حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة (E):

$$(z + \sqrt{3} - 1)(z^2 - 2z + 4) = 0$$

ب- في المستوي المنسوب لمعلم متعامد و متجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ نعتبر النقط B, A و C التي لواحقها:

$$z_A = 1 - \sqrt{3}$$
$$z_B = 1 + i\sqrt{3}$$
$$z_C = 1 - i\sqrt{3}$$

1-اكتب كلا من z_B, z_A و z_C على الشكل الأسي،ثم بين أن $z_B^{2016} + z_C^{2016} = 2^{2017}$.

2-بيّن أن من أجل كل عدد طبيعي n فإن $z_B^n + z_C^n$ عدد حقيقي،ثم عين قيمة العدد الطبيعي n بحيث

$$z_B^n + z_C^n = 2^n$$

3-أعط تفسيرا هندسيا لطويلة و عمدة العدد المركب $\frac{z_A - z_C}{z_A - z_B}$

ثم استنتج طبيعة المثلث ABC.

4-عين اللاحقة z_G للنقطة G منتصف القطعة $[BC]$ ثم احسب الطولين BC و GA.

5-نسمي (S) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z و التي تحقق $BM^2 + CM^2 = 12 \ldots (1)$

- تحقق أنه من أجل كل نقطة M من المستوي المركب تكافئ:

$$\overrightarrow{BM^2}.\overrightarrow{CM^2} = 0 \ldots (2)$$

بين أن النقطة A تنتمي إلى المجموعة (S)،ثم حدد المجموعة (S) مع إعطاء عناصرها المميزة.

-علم بدقة النقط C, B, A و G ثم أنشئ المجموعة (S).

117. موضوع مقترح رقم 38

الأستاذ على اليوتيوب : موضوع مقترح رقم 05 2017

$P(z)$ كثير حدود معرف في المجموعة $\mathbb{C}$ بـ

$$P(z) = z^3 + 2\sqrt{3}z + 4$$

1-حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z) = 0$.

2-اكتب حلي المعادلة على الشكل المثلثي.

3-في المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس مباشر $(O, \vec{u}, \vec{v})$ نعتبر النقط B, A و C لاحقتها على الترتيب

$$z_A = 2i$$

$z_B = -\sqrt{3} + i$ و $z_C = -\sqrt{3} - i$

أ-اكتب كلا من الأعداد z_A, z_B و z_C على الشكل الأسي.

ب-علم النقط B, A و C ثم بين أنها تنتمي إلى نفس الدائرة (C) يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها.

4-نضع $L = \frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$.

أ- بيّن أن $L = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ثم اكتب العدد L على الشكل الأسي.

ب- فسر هندسيا الطويلة وعمدة العدد L ثم استنتج طبيعة المثلث ABC.

جـ-احسب مساحة المثلث ABC.

118. موضوع مقترح رقم 39

الأستاذ على اليوتيوب : موضوع مقترح رقم 06 2017

نضع من أجل كل عدد مركب z
$P(z) = z^3 - 3z^2 + 3z + 7$

1-أ-احسب $P(-1)$.

ب-عيّن العددين الحقيقيين a و b بحيث $P(z) = (z+1)(z^2 + az + b)$ ثم حل المعادلة $P(z) = 0$.

2-في المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$

أ-ليكن النقط G, C, B, A التي لواحقها على الترتيب $z_A = -1$ ، $z_B = 2 + i\sqrt{3}$ ، $z_C = 2 - i\sqrt{3}$، $z_G = 3$

ب-احسب المسافات CB, AC, AB واستنتج طبيعة المثلث ABC

ج-عيّن عمدة للعدد المركب $\frac{z_A - z_G}{z_C - z_G}$ واستنتج طبيعة المثلث GAC.

3-لتكن (E) مجموعة النقط M من المستوي بحيث $\overrightarrow{CG} \cdot \left(-\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\right) = 12$ ..... (1)

أ-اثبت أن G مرجح الجملة $\{(A;-1), (B;2), (C;2)\}$.

بـ-بيّن أن العلاقة (1) تكافئ العلاقة $\overrightarrow{GM} \cdot \overrightarrow{GC} = 4$

ثم اكتب معادلة ديكارتية للمجموعة (E).

119. موضوع مقترح رقم 40

الأستاذ على اليوتيوب : موضوع مقترح رقم 07 2017

r عدد حقيقي موجب تماما و θ عدد حقيقي حيث $\theta \in [0; \pi]$ نعتبر الأعداد المركبة

$z_0 = r(-\cos\theta + i\sin\theta)$

$z_2 = \sqrt{3}(1+i)$; $z_1 = r^2(\sin\theta + i\cos\theta)$.

1-اكتب كلا من الأعداد z_0, z_1 و z_2 على الشكل المثلثي.

2-أ-عيّن العددين الحقيقيين r و θ بحيث يكون $z_1 = \overline{z_0}$.

ب-عيّن عندئذ قيم العدد الحقيقي n بحيث يكون العدد $\left(\frac{z_0}{z_1}\right)^n$ حقيقيا.

3-لنفرض $r = 1$ و $\theta = \frac{\pi}{3}$.

في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس المباشر $(O; \vec{u}; \vec{v})$ نعتبر النقط A, B, C التي لواحقها z_0, z_1 و z_2 على الترتيب.

أ-عيّن z_G لاحقة النقطة G مرجح الجملة المثقلة $\{(A;2), (B;2), (C;-1)\}$.

ب-عيّن طبيعة (Γ) مجموعة النقط M من المستوي حيث $\left\|2\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\right\| = 3$.

120. موضوع مقترح رقم 41

الأستاذ على اليوتيوب : موضوع مقترح رقم 08 2017

نعتبر كثير الحدود للمتغير المركب z المعرف بـ
$P(z) = z^4 - 6z^3 + 24z^2 - 18z + 63$

1-أ-احسب $P(i\sqrt{3})$ و $P(-i\sqrt{3})$.

ب-بيّن انه توجد أعداد حقيقية a, b و c بحيث انه من أجل كل عدد مركب z ،
$P(z) = (z^2 + 3)(az^2 + bz + c)$

2-حل في $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z $P(z) = 0$.

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$

أ-مثل النقط $C, B; A$ و D ذات اللواحق على الترتيب
$z_C = 3 + 2i\sqrt{3}$ و $z_D = \overline{z_C}$
$z_A = i\sqrt{3}$ ، $z_B = -i\sqrt{3}$ ،

ب-اثبت ان النقط $C, B; A$ و D تنتمي إلى نفس الدائرة.

4-لتكن النقطة E نظيرة D بالنسبة إلى O.

بين أن $\frac{z_C - z_B}{z_E - z_B} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$ ثم عيّن طبيعة المثلث BEC.

121. موضوع مقترح رقم 42

الأستاذ على اليوتيوب : موضوع مقترح رقم 09 2017

1-نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ كثير الحدود
$P(z) = z^4 - 10z^3 + 38z^2 - 90z + 261$

أ-عيّن الأعداد الحقيقية a, b و c بحيث يكون من أجل $z \in \mathbb{C}$ $P(z) = (z^2 + 9)(az^2 + bz + c)$

ب-حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z) = 0$.

2-في المستوي المركب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ نعتبر النقط A, B, C و D.

التي لواحقها على الترتيب
$z_A = 3i$ ، $z_B = \overline{z_A}$
$z_C = 5 - 2i$ و $z_D = \overline{z_C}$

أ-عيّن لاحقة النقطة G مركز ثقل الرباعي $ABCD$.

ب-عيّن مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي حيث $\left\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\right\| = 10$.

جـ-عيّن مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي حيث $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 59$.

122. موضوع مقترح رقم 43

الاسم على اليوتيوب : موضوع مقترح رقم 10 2017

في المستوي المركب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، نعتبر النقط A, B و I التي لواحقها على الترتيب :

$z_A = -2$ ، $z_B = -1+i$ ، $z_I = i$

من أجل كل عدد مركب z حيث $z \neq -2$

نضع $z' = \frac{(z+1)i}{z+2}$

حيث M صورة العدد المركب z و M' صورة العدد z'.

1-أتحقق من أن $z' = \frac{i(z+1-i)}{z+2}$

برهن أنه إذا كانت النقطة M تنتمي إلى محور القطعة $[AB]$ فإن النقطة M' تنتمي إلى دائرة (C) يطلب تعيين عناصرها.

جـ-عين طبيعة (E) مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي بحيث يكون z' تخيلا صرفا.

2-أتحقق من أن $z'-i = \frac{1-i}{z+2}$.

بـ-استنتج أن $AM \times IM' = \sqrt{2}$ وأن

$(\vec{u},\overrightarrow{IM'}) + (\vec{u},\overrightarrow{AM}) = -\frac{\pi}{4}[2\pi]$.

جـ-بين أنه إذا كانت النقطة M تنتمي إلى الدائرة (Γ) ذات المركز A ونصف القطر 1 فإن النقطة M' تنتمي إلى مجموعة يطلب تعيينها.

3-لتكن النقطة E ذات اللاحقة $z_E = -\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

أ-بين أن النقطة E تنتمي إلى (Γ) ثم بين أن $(\vec{u},\overrightarrow{AE}) = \frac{\pi}{3}[2\pi]$.

ب-استعمال نتائج السؤال (2) أنشئ النقطة E' المرفقة بالنقطة E.

123. موضوع مقترح رقم 44

الاسم على اليوتيوب : موضوع مقترح رقم 11 2017

1-اختبر في $\mathbb{C}$ العددين المركبين $P = -3+3i$ و $L = 6\sqrt{2}(\cos\frac{17\pi}{12} + i\sin\frac{17\pi}{12})$.

1-عين طويلة و عمدة للعدد المركب P.

2- عين طويلة و عمدة للعدد المركب Z المعرف بالعلاقة $P \times Z = L$

3-عين الشكل المثلثي و الشكل الجبري للعدد Z.

4-اكتب العدد المركب L على شكله الجبري.

5-استنتج مما سبق القيمتين المضبوطتين لكل من $\cos(\frac{17\pi}{12})$ و $\sin(\frac{17\pi}{12})$.

6-تحقق من أن $\left(\frac{z}{2}\right)^{2012} + \left(\frac{z}{2}\right)^{1432} = -1$

124. موضوع مقترح رقم 45

الاسم على اليوتيوب : موضوع مقترح رقم 19 2017

المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، لتكن النقط A, B, C, D و H التي لواحقها على الترتيب $z_A = a$ ، $z_B = 1+\frac{a-1}{a}i$ ، $z_C = ia$ ، $z_D = -\frac{1}{a}i$ و $z_H = z_D + 1$ حيث a عدد حقيقي موجب تماما ويختلف عن 1.

1-أتحقق أن $z_B - z_D = \overline{z_D}(z_A - z_C)$.

ب-استنتج أن المستقيمين (AC) و (BD) متعامدان.

2-أ-عين الكتابة المركبة للتشابه المباشر S الذي يحول A إلى B ويحول C إلى D.

بـ-حدد z_Ω لاحقة المركز Ω للتحويل S، ثم عين العناصر المميزة الأخرى لهذا التحويل.

جـ-بين أن المثلثين OAC و BHD متشابهان، ثم حدد علاقة بين مساحتيهما.

3-لتكن (M_n) متتالية نقط من المستوي معرفة كمايلي $M_0 = A$ ومن أجل كل عدد طبيعي n $M_{n+1} = S(M_n)$ حيث z_n لاحقة النقطة M_n ونضع $U_n = |z_n - z_\Omega|$ من أجل كل عدد طبيعي n.

أ-بين أن (U_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

بـ-عين قيم a بحيث تكون (U_n) متتالية متقاربة.

جـ-نرمز بـ T_n إلى مجموع الأطوال القطع المستقيمة $[A\Omega], [M_1\Omega], \ldots\ldots, [M_n\Omega], [M_{n+1}\Omega]$.

-احسب المجموع T_n بدلالة n.

4-لتكن (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة Z التي تحقق $Z = a(1+e^{i\theta})$ حيث $\theta \in \mathbb{R}$

-حدد الطبيعة و العناصر المميزة لـ (Γ) لما يمسح العدد θ المجموعة $\mathbb{R}$.

125. موضوع مقترح رقم 46

الاسم على اليوتيوب : موضوع مقترح رقم 20 2017

1-عين العددين الحقيقين a و b بحيث $(a+i)^2 = 2+2i\sqrt{3}$ و $(b-i)^2 = 2-2i\sqrt{3}$

2-أ-حل في مجموعة الأعداد المركبة $(\mathbb{C})$ المعادلة ذات المجهول المركب z $z^2 - 4z + 16 = 0$

بـ-استنتج في المجموعة $(\mathbb{C})$ حلول المعادلة $z^2 - 4z + 16 = 0$

تمرين محلول رقم 125

تمرين محلول رقم 126

تمرين محلول رقم 127

128. موضوع مقترح رقم 49

الاسم على اليوتيوب : موضوع مقترح رقم 24 2017

1-حل في مجموعة الأعداد المركبة $(\mathbb{C})$ المعادلة $(z+1-i\sqrt{3})(z^2-2z+4)=0$.

2-معلم في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ النقط A, B و C التي لواحقها على الترتيب $z_A = 1+i\sqrt{3}$ ، $z_B = \overline{z_A}$ و $z_C = -1+i\sqrt{3}$

أ-اكتب على الشكل الجبري العدد المركب $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$ واستنتج أنه يمكن اعتبار B صورة لـ C بتحويل نقطي S يطلب تعيينه مع عناصره المميزة.

ب-عين z_D لاحقة النقطة D مرجح الجملة $[(A,-1);(B,1);(C,1)]$.

جـ-استنتج من أ و ب طبيعة الرباعي $ABCD$.

د-اكتب الأعداد المركبة z_C, z_B, z_A على الشكل الأسي.

هـ-عين (Γ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي تحقق $\arg((z-z_A)^2) = \arg(z_A, z_B, z_C)$ ثم عين معادلتها الديكارتية.

129. موضوع مقترح رقم 50

الاسم على اليوتيوب : موضوع مقترح رقم 25 2017

لكل سؤال من الأسئلة التالية إختر الاقتراح الصحيح مع التعليل

1-المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس مباشر $(O;\vec{u},\vec{v})$.

نعتبر النقطتان A و B لاحقتاهما على الترتيب 1 و i، مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث يكون $\frac{z-i}{z-1}$ حقيقي هي

أ-المستقيم (AB) باستثناء A

ب-القطعة المستقيمة $[AB]$ باستثناء A.

جـ-الدائرة التي قطرها $[AB]$ باستثناء A.

2-إذا كانت طويلة عدد مركب z هي 3 فإن مرافق z هو : أ- $\frac{3}{z}$ ب- $\frac{\sqrt{3}}{z}$ جـ- $\frac{9}{z}$

3-ليكن z عدد مركب $|z+i|$ هي

أ-$|z|+1$ ب-$\sqrt{z^2+1}$ جـ-$|iz-1|$

4-ليكن z عدد مركب غير معدوم حيث θ عمدة له، عمدة العدد المركب $\frac{-1+i\sqrt{3}}{z}$ هي

أ-$-\frac{\pi}{3}+\theta$ ب-$\frac{2\pi}{3}+\theta$ جـ-$\frac{2\pi}{3}-\theta$

5-لتكن النقطة Ω ذات اللاحقة $i-1$.

مجموعة النقط M ذات اللاحقة $z=x+iy$ وتحقق $|z-1+i|=|3-4i|$ لها معادلة من الشكل

أ-$y=-x+1$

ب-$(x-1)^2+y^2=\sqrt{5}$

جـ-$z=1-i+5e^{i\theta}$ حيث θ عدد حقيقي.

130. موضوع مقترح رقم 51

الاسم على اليوتيوب : موضوع مقترح رقم 20 2017

المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$

1-أوجد العددين Z_1 و Z_2 الجذران التربيعيان للعدد المركب $L=2-2i\sqrt{3}$ ثم اكتبهما على الشكل الأسي.

2-نعتبر النقط A, B و C ذات اللواحق

$z_A = 2i$ ، $z_B = \sqrt{3}+1$ و $z_C = \sqrt{3}-1$

أ-بين أن $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OC}$ وعين قيسا للزاوية الموجهة $(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{AC})$.

ب-استنتج طبيعة الرباعي $OABC$.

جـ-عين لاحقة Ω مركز الرباعي $OABC$.

3-أ-اكتب العبارة المركبة للتشابه S الذي يحول A إلى O و يحول C إلى B محددا عناصره المميزة.

ب-تحقق أن SoS تشابه مباشر نسبته $\frac{1}{3}$ وأحد أقياس زاويته π.

جـ-نضع f التحويل النقطي المعرف بـ $f = S \circ S \circ \ldots \circ S$. عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون f تحاكيا نسبته سالبة.

131. أجنبي 01 المملكة المغربية 2015

1- نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة التالية:

(E) : $z^2-(5+i\sqrt{3})z+4+4i\sqrt{3}=0$

1-أ- تحقق أن $(3-i\sqrt{3})^2$ هو مميز المعادلة (E)

1-ب- حدد a و b حلي المعادلة (E) (علما أن $b\in\mathbb{R}$)

1-ج- تحقق أن: $b=(1-i\sqrt{3})a$

2- المستوى المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس

لتكن A النقطة التي لاحقتها a

و B_1 النقطة التي لاحقتها b

2-أ- حدد العدد المركب b_1 الذي لاحقته النقطة B_1 صورة النقطة O بالدوران الذي مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$

2-ب- بين أن B هي صورة B_1 بالتحاكي الذي مركزه A ونسبته $\sqrt{3}$

2-ج- تحقق أن: $\arg\left(\frac{b}{b-a}\right)=\frac{\pi}{6}[2\pi]$

2-د- لتكن C نقطة، لاحقتها c تنتمي إلى الدائرة المحيطية بالمثلث OAB وتخالف O و A.

حدد عمدة للعدد المركب: $\frac{c}{c-a}$

الحل

1-أ- التحقق أن $(3-i\sqrt{3})^2$ هو مميز المعادلة (E)

لدينا:

(E) : $z^2-(5+i\sqrt{3})z+4+4i\sqrt{3}=0$

نحسب المميز:

$$\Delta=(5+i\sqrt{3})^2-4(4+4i\sqrt{3})$$
$$=25+10i\sqrt{3}-3-16-16i\sqrt{3}$$
$$=6-6i\sqrt{3}=9-6i\sqrt{3}-3$$
$$\Delta=(3-i\sqrt{3})^2$$

1-ب- تحديد a و b حلي المعادلة (E)

$$a=\frac{5+i\sqrt{3}-3+i\sqrt{3}}{2}=1+i\sqrt{3}$$

$$b=\frac{5+i\sqrt{3}+3-i\sqrt{3}}{2}=4$$

1-ج- التحقق من أن: $b=(1-i\sqrt{3})a$

لدينا:

$$a(1-i\sqrt{3})=(1+i\sqrt{3})(1-i\sqrt{3})$$
$$=1+3=4$$

إذن: $b=(1-i\sqrt{3})a$

2-أ- تحديد العدد المركب b_1

الصيغة المركبة للدوران: $R\left(A,\frac{\pi}{2}\right)$ هي:

بما أن $z'=e^{i\frac{\pi}{2}}(z-a)+a=i(z-a)+a$

فإن: $B_1=R(O)$

$$b_1=i(z_0-a)+a$$
$$=-ia+a$$
$$=-i(1+i\sqrt{3})+1+i\sqrt{3}$$
$$=-i+\sqrt{3}+1+i\sqrt{3}$$
$$=1+\sqrt{3}+i(\sqrt{3}-1)$$

2-ب- إثبات أن B هي صورة B_1 بالتحاكي الذي مركزه A ونسبته $\sqrt{3}$

الصيغة المركبة للتحاكي h $R\left(A,\frac{\pi}{2}\right)$

$z'=k(z-a)+a=\sqrt{3}(z-a)+a$

لتكن $B_1=R(B_1)$ إذن:

$b=\sqrt{3}(b_1-a)+a$

ولدينا: $b_1=ia+a$ ومنه:

$$b=\sqrt{3}[(-ia+a)-a]+a$$
$$=\sqrt{3}(-ia)+a$$
$$=a(1-i\sqrt{3})=b$$

إذن: $B=R(B_1)$ ومنه: $B_1=B$

2-ج- التحقق من أن: $\arg\left(\frac{b}{b-a}\right)=\frac{\pi}{6}[2\pi]$

لدينا:

$$\frac{b}{b-a}=\frac{b}{a-i\sqrt{3}a-a}=\frac{b}{-a\sqrt{3}i}=\frac{\frac{b}{a}}{-\sqrt{3}i}$$
$$=\frac{1-i\sqrt{3}}{-\sqrt{3}i}=\frac{2\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)}{\sqrt{3}\,-i}$$
$$=\frac{2\,e^{-\frac{\pi}{3}i}}{\sqrt{3}\,e^{-\frac{\pi}{2}i}}=\frac{2}{\sqrt{3}}e^{\frac{\pi}{6}i}$$

وبالتالي: $\arg\left(\frac{b}{b-a}\right)\equiv\frac{\pi}{6}[2\pi]$

2-د- تحديد عمدة للعدد المركب: $\frac{c}{c-a}$

بما أن C تنتمي إلى الدائرة المحيطية بالمثلث OAB فإن النقط O و A و B و C متداورة.

ومنه: $\frac{c-0}{c-a}\div\frac{b-0}{b-a}$

ومنه: $\arg\left(\frac{c-0}{c-a}\div\frac{b-0}{b-a}\right)\equiv 0[\pi]$

$\Leftrightarrow z' = e^{-i\frac{\pi}{2}}(z-w)+w$

$z' = -i(z-4-7i)+4+7i$

$z' = -iz-3-11$

2-ج- تحديد صورة النقطة C بالدوران R

لدينا من السؤال السابق $z' = -iz-3+11i$ ومنه فإن لاحقة صورة النقطة C بالدوران R يحقق $z' = -ic-3+11i$ ومنه فإن:

$c' = -i(6+7i)-3+11i$

$= 4+5i = a$

الشكل المثلثي للعدد

$\frac{4+5i-4-7i}{6+7i-4-7i} = -\frac{2i}{2} = -i$

$= i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

133. أجنبي 03 المملكة المغربية 2015

- حل في مجموعة الأعداد المركبة C المعادلة

$z^2 - 8\sqrt{3}z + 64 = 0$

2- نعتبر في المستوى المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمجانس $(O, \vec{u}, \vec{v})$، النقط A و B و C التي لواحقها على التوالي: $a = 8i$ و $b = 4\sqrt{3}-4i$ و $c = 2(4\sqrt{3}+4i)$

لتكن z لاحقة نقطة M من المستوى و z' لاحقة النقطة M' صورة M بالدوران R الذي مركزه O وزاويته $\frac{4\pi}{3}$

2- أ- بين أن $z' = \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$

2-ب- تحقق من أن النقطة B هي صورة النقطة A بالدوران R.

2 -ج-بين أن $\frac{a-b}{c-b} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ثم اكتب العدد $\frac{a-b}{c-b}$ على الشكل المثلثي.

2-د- استنتج أن المثلث ABC متساوي الأضلاع.

أ.أحد المركبة من الألف إلى الياء

$\arg\left(\frac{c}{c-a}\right) - \arg\left(\frac{b}{b-a}\right) = 0[\pi]$ ت:

ومنه: $\arg\left(\frac{c}{c-a}\right) = \frac{\pi}{2}[\pi]$

132. أجنبي 02 المملكة المغربية 2015

1- حل في مجموعة الأعداد المركبة C المعادلة:

$z^2 - 8z + 41 = 0$

2- نعتبر، في المستوى المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{u}, \vec{v})$ النقط A و B و C و Ω التي لاحقاتها على التوالي هي a و b و c و w بحيث

$a = 4+5i$

$w = 4+7i$ ، $c = 6+7i$ ، $b = 3+4i$ و

2-أ- احسب $\frac{c-b}{a-b}$ واستنتج أن النقط A و B و C على استقامة واحدة.

2-ب- ليكن z لاحقة النقطة M من المستوى و z' لاحقة النقطة M' صورة M بالدوران R الذي مركزه Ω وزاويته $-\frac{\pi}{2}$

بين أن $z' = -iz-3+11i$

2-ج- حدد صورة النقطة C بالدوران R ثم أعط شكلا مثلثيا للعدد

$\frac{a-w}{c-a}$

ح الحل

1- حل في مجموعة الأعداد المركبة C المعادلة:

لدينا: $z^2 - 8z + 41 = 0$

$\Delta = -100 = 100\,i^2$

يوجد حلان:

$z_1 = 4-5i$

$z_2 = 4+5i$

2-أ- حساب $\frac{c-b}{a-b}$ واستنتاج أن النقط A و B و C على استقامة واحدة.

$\frac{c-a}{a-b} = \frac{3-3i}{1-i} = 3 \in \mathbb{R}$

ومنه فإن النقط A و B و C نقط على استقامة واحدة.

2-ب-التبيان أن: $z' = -iz-3-11$

لدينا M' صورة M بالدوران R الذي مركزه Ω وزاويته: $-\frac{\pi}{2}$

ومنه: $\Leftrightarrow z'-w = e^{-i\frac{\pi}{2}}(z-w)$

الحل

1-أ- حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة:

$$z^2 - 8\sqrt{3}z + 64 = 0$$

$$\Delta = -64 = 64\,i^2$$

ومنه حلان:

$$z_1 = 4\sqrt{3} - 4i$$
$$z_2 = 4\sqrt{3} + 4i$$
$$S = \{4\sqrt{3} - 4i\,;\, 4\sqrt{3} + 4i\}$$

1-ب- إثبات أن $z' = \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$

لدينا:

$$R(M) = M' \Leftrightarrow z' = e^{i\frac{4\pi}{3}}(z - 0) + 0$$
$$\Leftrightarrow z' = \left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)z$$
$$\Leftrightarrow z' = \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$$

ومنه:

$$z' = \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$$

2-ب- إثبات أن B صورة A بالدوران R

لدينا:

$$\left(-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)a = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times 8i$$
$$= -4i + 4\sqrt{3}$$

إذن: $\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a = b$

ومنه: B صورة A بالدوران R.

2-ج-إثبات أن: $\frac{a-b}{c-b} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

لدينا:

$$\frac{a-b}{c-b} = \frac{8i - 4\sqrt{3} + 4i}{8\sqrt{3} + 8i - 4\sqrt{3} + 4i} = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{1 + i\sqrt{3}}$$
$$\left(\frac{-1 + i\sqrt{3}}{1 + i\sqrt{3}}\right)\left(\frac{1 - i\sqrt{3}}{1 - i\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

ومنه: $\frac{a-b}{c-b} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

لنكتب العدد $\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ على الشكل المثلثي:

لدينا:

$$\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = 1\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = \left[1\,,\frac{\pi}{3}\right]$$

استنتاج أن ABC متساوي الأضلاع:

لدينا: $\frac{a-b}{c-b} = \left[1\,,\frac{\pi}{3}\right]$

إذن:

$$\arg\left(\frac{a-b}{c-a}\right) = \frac{\pi}{3}[2\pi] \text{ و } \left|\frac{a-b}{c-b}\right| = 1$$

وبالتالي:

$$(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = \frac{\pi}{3}[2\pi] \text{ و } \left|\frac{a-b}{c-b}\right| = 1$$

ومنه:

$$(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = \frac{\pi}{3}[2\pi] \text{ و } \frac{BA}{BC} = 1$$

وبالتالي:

$$(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = \frac{\pi}{3}[2\pi] \text{ و } BA = BC$$

وهذا يعني أن:

المثلث ABC متساوي الأضلاع.

134. أجنبي 04 تونس 2017

1-أ- أحسب $(3+i)^2$

1-ب- حل في مجموعة الأعداد $\mathbb{C}$ المعادلة التالية:

$$z^2 + (1-3i)z - 4 - 3i = 0$$

2- لتكن:

$$P(z) = z^3 - (4+3i)z^2 - (9-12)z - 4 - 3i$$
$$P(z) = 0$$

2-أ- أثبت أن المعادلة $P(z) = 0$ تقبل حل حقيقي

2-ب- حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة $P(z) = 0$

3-المستوى المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O, \vec{u}, \vec{v})$ ولتكن النقط A, B, C و D لواحقها على الترتيب:

$z_A = 1 + +2i$ و $z_B = -2 + i$ و $z_C = -z_B$ و $z_D = 5$

3-أ- علم النقط A B C و D.

3-ب- بين أن $ABCD$ متوازي أضلاع.

4-أ-أكتب على الشكل الجبري: $\frac{z_A - z_B}{z_D - z_C}$

4-ب- استنتج أن المثلث ABC هو مثلث متساوي الساقين.

4-ج- أحسب الطول AC واستنتج مساحة متوازي الأضلاع $ABCD$.

$P(z) = 0$

معناه $z - 5 = 0$

أو: $z^2 + (1-3i)z - 4 - 3i = 0$

أي: $S = \{5,\ 1+2i\ ,-2+i\}$

3- تعيين النقط.

3-ب- إثبات أن $ABCD$ متوازي أضلاع.

$z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = -2 + i - 1 - 2i = -3 - i$

$z_{\overrightarrow{DC}} = z_C - z_D = = -3 - i$

لدينا: $z_{\overrightarrow{AB}} = z_{\overrightarrow{DC}}$

والنقط A، B، C ليست على استقامة واحدة، ومنه الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع.

4-أ-كتابة على الشكل الجبري: $\frac{z_A - z_B}{z_D - z_C}$

$$\frac{z_A - z_C}{z_D - z_C} = \frac{-1+3i}{3+i} = i$$

4-ب-استنتاج أن المثلث ABC هو مثلث متساوي الساقين

$\frac{z_A - z_C}{z_D - z_C} = i$، $\frac{z_{\overrightarrow{CA}}}{z_{\overrightarrow{CD}}} = i \in \mathbb{C}$

يكافئ: $\overrightarrow{CA} \perp \overrightarrow{CD}$ (1)

$\frac{z_A - z_C}{z_D - z_C} = i$

أي: $\left|\frac{z_A - z_C}{z_D - z_C}\right| = |i| = 1$

يكافئ: $\frac{AC}{DC} = 1$

يكافئ: $CA = CD$ (2)

من 1 و 2 نستنتج أن المثلث ABC هو مثلث متساوي الساقين

استنتاج مساحة متوازي الأضلاع $ABCD$.

$AC = |z_C - z_A| = \sqrt{10}$

$A(ABCD) = 2 \times A(ACD) = \frac{AC \times DC}{2}$

حالة: $AC = DC = AC^2 = \left(\sqrt{10}\right)^2$

ومنه: $A(ABCD) = 10(u.a)$

الحل

1-أ- حساب: $(3+i)^2$

$(3+i)^2 = 3^2 + 2(3)(i) + (i^2)$

$= 9 + 6i - 1 = 8 + 6i$

1-ب- حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة التالية:

$z^2 + (1-3i)z - 4 - 3i = 0$

نحسب المميز: $\sqrt{\Delta} = 3 + i$

نوجد حلان: $z_1 = -2 + i$

$z_2 = 1 + 2i$

ومنه: $S = \{-2+i\ ,1+2i\}$

2-أ- إثبات أن المعادلة $P(z) = 0$ تقبل حل حقيقي

نضع $z = x \in \mathbb{R}$ حيث $P(z) = 0$

$x^3 - x^2(4+3i) - x(9-12i) + 20 + 15i = 0$

$x^3 - 4x^2 - 3x^2 i - 9x + 12xi + 20 + 15i = 0 - x^2 = 0$

يكافئ:

$x^3 - 4x^2 - 9x + 20 + i(-3x^2 + 12x + 15) = 0$

يكافئ: $\begin{cases} x^3 - 4x^2 - 9x + 20 = 0 \\ -3x^2 + 12x + 15 = 0 \end{cases}$

يكافئ: $\begin{cases} x^3 - 4x^2 - 9x + 20 = 0 \\ x = 2 \quad \text{أو} \quad x = -1 \end{cases}$

يكافئ: $x = 5$

ومنه $P(z)$ تقبل حل حقيقي: $x = 5$

2-ب- حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة

$P(z) = 0$

لدينا:

$P(z) = (z-5)(az^2 + bz + c)$

$= az^3 + bz^2 + cz - 5az^2 - 5bz - 5c$

$= az^3 + (b-5a)z^2 + (c-5b)z - 5c$

$= z^3 - (4+3i)z^2 - (9-12i)z + 20 + 15i$

$\begin{cases} a = 1 \\ b - 5a = -4 - 3i \\ c - 5b = -9 - 12i \end{cases}$

يكافئ: $\begin{cases} a = 1 \\ b = 1 - 3i \\ c = -4 - 3i \end{cases}$

لدينا:

$P(z) = (z-5)(z^2 + (1-3i)z - 4 - 3i)$

كلمة فريق عكاشة

عندما كنا صغارا أحببنا المطر فكنا نلعب
تحته ونستمتع به .

وعندما كبرنا أحببنا العلم فجمعنا شملنا
لأجله. وعقدنا العزم على تسخير أنفسنا له .

FaceBook

مكتبة عكاشة Okacha BookStore

الأستاذ نور الدين

وفريق عكاشة

يتمنيان لك النجاح والتوفيق

عكاشة
BOOKSTORE
We can help you
يمكننا أن نساعدك

9 789931 723936