ملف الأعداد المركبة

تمارين مقترحة مع الحلول و طرائق مهمة

التحضير الجيّد للبكالوريا

BAC 2019

وفّقكم الله

كتابة الأستاذ :

بلقاسم عبد الرزاق

الموسم الدراسي : 2018 - 2019

التمرين 01 :

1) عيّن العددين المركبين a وَ b علما أنّ : $\begin{cases}\overline{a}-\overline{b}=1+3i\\ a+ib=-1+3i\end{cases}$.

2) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$. نعتبر النقطتين A وَ B لاحقتاهما على الترتيب : $a=3+i$ وَ $b=2+4i$ ، وَ نفرض الإنسحاب T الذي شعاعه $\overrightarrow{AB}$.

أ) عيّن لاحقة النقطة C صورة O بالإنسحاب T .

ب) أحسب العدد $\dfrac{z_c-z_A}{z_B}$ ، ثمّ أكتبه على الشكل الأسي .

*) ماذا تستنتج بالنسبة للقطعتين $[AC]$ وَ $[OB]$ ؟ .

ج) إستنتج ممّا سبق طبيعة الرباعي $OABC$ ، ثمّ عيّن لاحقة E مركز تناظر الرباعي $OABC$.

3) نعتبر التشابه المباشر S الذي مركزه O وَ يحوّل B إلى C .

أ) أعط الكتابة المركّبة للتشابه المباشر S .

ب) ماهي صورة النقطة A بالتشابه S ؟ .

ج) نضع : $S^4=S\circ S\circ S\circ S$.

*) أعط الكتابة المركّبة للتحويل S^4 ، وَ ماطبيعة هذا التحويل ؟ .

حل التمرين 01 :

1) تعيين العددين المركبين a وَ b : --

لدينا الجملة : $\begin{cases} \overline{a}-\overline{b}=1+3i \\ a+ib=-1+3i \end{cases}$ ، أي : $\begin{cases} a-b=1-3i \,.......(1) \\ a+ib=-1+3i \,.....(2) \end{cases}$ بالطرح نجد : $-b-ib=2-6i$ ، أي :

$b(-1-i)=2-6i$ ، أي : $b=\dfrac{2-6i}{-1-i}$ ، ومنه : $\boxed{b=2+4i}$. و بالتعويض نجد : $\boxed{a=3+i}$.

2) أ) تعيين لاحقة C صورة O بالإنسحاب T : ---

بما أنّ C هي صورة O بالإنسحاب T فإن : $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{AB}$ ، و منه : $z_C=z_B-z_A$ ، أي : $\boxed{z_C=-1+3i}$.

ب) حساب العدد $\dfrac{z_C-z_A}{z_B}$ ، ثم كتابته على الشكل الأسي : ---

لدينا : $\dfrac{z_C-z_A}{z_B}=\dfrac{-1+3i-3-i}{2+4i}=\dfrac{-4+2i}{2+4i}=i$ ، أي : $\dfrac{z_C-z_A}{z_B}=i=e^{i\frac{\pi}{2}}$.

إذن : $\left|\dfrac{z_C-z_A}{z_B}\right|=1$ وَ $\arg\left(\dfrac{z_C-z_A}{z_B}\right)=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$ ، ومنه : $AC=OB$ وَ $\left(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{AC}\right)=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$.

إذن القطعتان $[AC]$ و $[OB]$ متقايستان و متعامدتان .

ج) إستنتاج مما سبق طبيعة الرباعي $OABC$ و تعيين لاحقة النقطة E : ---

بما أنّ $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{AB}$ فإنّ الرباعي $OABC$ متوازي أضلاع ، وَ بما أنّ $[AC]$، $[OB]$ متقايستان و متعامدتان فسيكون الرباعي $OABC$ مربّع .

E هي مركز تناظر الرباعي $OABC$ ، أي : هي منتصف القطرين ، و منه : $z_E=\dfrac{z_O+z_B}{2}=1+2i$.

3) أ) الكتابة المركبة للتشابه ---

لدينا : S مركزه O و يحوّل B إلى C أي : $z'-z_O=ke^{i\theta}(z-z_O)$ ، أي : $z'=ke^{i\theta}z$ ، و منه :

$z_C=ke^{i\theta}z_B$ ، أي : $\dfrac{z_C}{z_B}=ke^{i\theta}$.

نحسب $\dfrac{z_C}{z_B}$: $\dfrac{z_C}{z_B}=\dfrac{-1+3i}{2+4i}=\left(\dfrac{-1+3i}{2+4i}\right)\left(\dfrac{2-4i}{2-4i}\right)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}i$.

لدينا: $\begin{cases} \left|\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}i\right|=\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \arg\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}i\right)=\dfrac{\pi}{4}+2k\pi \end{cases}$ ، إذن عبارة التشابه S هي : $z'=\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}z$ أو $z'=\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}i\right)z$.

ب) صورة A بالتشابه S : --

لدينا : $z'=\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}i\right)z$ ، أي : $z'=\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}i\right)z_A$ ، أي: $z'=\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}i\right)(3+i)$ ، و منه: $z'=1+2i$.

إذن : E هي صورة A بالتشابه S .

ج) العبارة المركبة للتحويل S^4 ، و طبيعته : --

لدينا : $S^4=S\circ S\circ S\circ S$ ، أي أنّ : S^4 هو تشابه مباشر نسبته : $k=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^4=\dfrac{1}{4}$ ، وزاويته : $\theta=4\times\dfrac{\pi}{4}=\pi$ و مركزه : O .

- **الكتابة المركبة** : $z'=\dfrac{1}{4}e^{i\pi}z$ ، أي : $z'=-\dfrac{1}{4}z$ ، لأنّ : $e^{i\pi}=-1$. إذن التحويل S^4 هو **تحاكي** مركزه O و نسبته $-\dfrac{1}{4}$.

ب.ع # --

التمرين 02 :

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $\frac{2}{z+i}+\frac{2}{z-i}=4$ ، وَ الجملة : $\begin{cases}2a+b=2\\-a+b=-1+3i\end{cases}$.

2) في المستوي المركّب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ نعتبر النقط : A ، B ، C ، D لواحقها على الترتيب : $z_A=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ ، $z_B=\overline{z_A}$ ، $z_C=2i$ ، $z_D=1-i$.

أ) أكتب z_A وَ z_B على الشكل الأسي ، ثمّ أحسب العدد : $(z_A)^{2018}+(z_B)^{1439}$.

ب) تحقّق من أنّ : $z_A\times z_D=\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12})$ ، ثمّ إستنتج قيمة كل من : $\cos(\frac{\pi}{12})$ وَ $\sin(\frac{\pi}{12})$.

ج) عيّن قيمة العدد الطبيعي n بحيث يكون العدد $(\frac{z_A\times z_D}{\sqrt{2}})^n$ حقيقيا موجبا .

3) نرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z مع $z\neq 2i$ النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث : $z'=\frac{3i(z-1+i)}{z-2i}$

أ) تحقّق من أنّ : $OM'=3\times\frac{DM}{CM}$. إستنتج أنّه إذا كانت M تنتمي إلى محور القطعة $[CD]$ فإنّ M' تنتمي إلى مجموعة يطلب تحديدها .

ب) بيّن أنّ : $(\vec{u};\overrightarrow{OM'})=\frac{\pi}{2}+(\overrightarrow{CM};\overrightarrow{DM})+2k\pi$ ، حيث : $(k\in\mathbb{Z})$.

ج) إستنتج أنّه إذا كانت M تنتمي إلى الدائرة ذات القطر $[CD]$ ما عدا النقطة C فإنّ النقطة M' تنتمي إلى مجموعة يطلب تحديدها .

حل مختصر للتمرين 02 :

1) حل المعادلة : $\frac{2}{\overline{z-i}}+\frac{2}{\overline{z+i}}=4$ ، أي : $\frac{2}{z+i}+\frac{2}{z-i}=4$ ، أي : $\frac{2(z-i)+2(z+i)}{(z-i)(z+i)}=4$

و منه : $\frac{4z}{z^2+1}=4$ ، أي : $4z^2-4z+4=0$ ، إذن : $\begin{cases} z_1=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ z_2=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$.

لدينا الجملة : $\begin{cases} 2a+b=2 \\ -a+b=-1+3i \end{cases}$ بالطرح نجد : $3a=3-3i$ ، و منه : $a=1-i$ وَ $b=2i$.

2) أ) لدينا : $z_A=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ، أي : $z_A=e^{i\frac{\pi}{3}}$ ، و لدينا : $z_B=\overline{z_A}$ ، و منه : $z_B=e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

لدينا : $e^{i\frac{2018\pi}{3}}+e^{-i\frac{1439\pi}{3}}=(e^{i\frac{\pi}{3}})^{2018}+(e^{-i\frac{\pi}{3}})^{1439}=(z_A)^{2018}+(z_B)^{1439}$.

أي : $\begin{cases} \frac{2018\pi}{3}=\frac{2016\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}=672\pi+\frac{2\pi}{3} \\ \frac{1439\pi}{3}=\frac{1440\pi}{3}-\frac{\pi}{3}=480\pi-\frac{\pi}{3} \end{cases}$ ، و منه : $(z_A)^{2018}+(z_B)^{1439}=e^{i\frac{2\pi}{3}}+e^{i\frac{\pi}{3}}$ ،

أي : $(z_A)^{2018}+(z_B)^{1439}=(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})+(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})$ ، و منه : $(z_A)^{2018}+(z_B)^{1439}=i\sqrt{3}$.

ب) لدينا : $z_D=1-i=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ ، أي : $z_A\times z_D=e^{i\frac{\pi}{3}}\times\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4})}=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$.

و منه : $z_A\times z_D=\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12})$ ، و هو المطلوب .

إستنتاج القيم المضبوطة لـ : $\cos(\frac{\pi}{12})$ وَ $\sin(\frac{\pi}{12})$.

لدينا : $z_A\times z_D=(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})(1-i)$ ، أي : $z_A\times z_D=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i+\frac{\sqrt{3}}{2}i+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1+\sqrt{3}}{2}+i\frac{\sqrt{3}-1}{2}$

بالمطابقة بين الشكل المثلثي و الشكل الجبري للعدد $z_A\times z_D$ نجد :

$\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\frac{1+\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{2}}=\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ ، $\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\frac{\sqrt{3}-1}{2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

ج) لدينا : $(\frac{z_A\times z_D}{\sqrt{2}})^n=(e^{i\frac{\pi}{12}})^n=e^{i\frac{n\pi}{12}}$ ، إذن $(\frac{z_A\times z_D}{\sqrt{2}})^n$ حقيقيا موجبا إذا كان : $\frac{n\pi}{12}=0+2k\pi$

و منه : $n=24k$ ، أي : n مضاعف للعدد 24 .

3) **أ)** التحقق أنّ : $OM' = 3 \times \dfrac{DM}{CM}$ ، أي نحسب OM' و نحقّق من المساواة :

$OM' = |z'| = |3i| \times \dfrac{|z-1+i|}{|z-2i|} = 3 \times \dfrac{|z-z_D|}{|z-z_B|}$ ، و منه : $OM' = 3 \times \dfrac{DM}{CM}$ ، و هو المطلوب .

❖ إذا كانت M تنتمي إلى محور القطعة $[CD]$ معناه : $DM = CM$ ، أي : $\dfrac{DM}{CM} = 1$

و منه : $OM' = 3$ ، إذن M' ستكون تنتمي إلى **الدائرة** التي مركزها O وَ نصف قطرها 3 .

ب) بيان أنّ : $(\vec{u};\overrightarrow{OM'}) = \dfrac{\pi}{2} + (\overrightarrow{CM};\overrightarrow{DM}) + 2k\pi$ ، حيث $k \in \mathbb{Z}$.

لدينا : $(\vec{u};\overrightarrow{OM'}) = \arg(z') + 2k\pi$ ، أي : $(\vec{u};\overrightarrow{OM'}) = \arg\left[\dfrac{3i(z-1+i)}{z-2i}\right] + 2k\pi$ ، أي :

$(\vec{u};\overrightarrow{OM'}) = \arg(3i) + \arg(\dfrac{z-1+i}{z-2i}) + 2k\pi$ ، أي : $(\vec{u};\overrightarrow{OM'}) = \arg(3i) + \arg(\dfrac{z-z_D}{z-z_B}) + 2k\pi$

و منه : $(\vec{u};\overrightarrow{OM'}) = \dfrac{\pi}{2} + (\overrightarrow{CM};\overrightarrow{DM}) + 2k\pi$ ، و هو المطلوب .

❖ إذا كانت M تنتمي إلى الدائرة التي قطرها $[CD]$ ، أي : $(\overrightarrow{CM};\overrightarrow{DM}) = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$

و منه : $(\vec{u};\overrightarrow{OM'}) = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ ، أي : $(\vec{u};\overrightarrow{OM'}) = \pi + k\pi$.

إذن : M' ستكون تنتمي إلى حامل محور الفواصل ما عدا المبدأ O .

كتابة الأستاذ : بلقاسم عبدالرزاق

التمرين 03 :

1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة التالية : $(z^2-2z-3)(z^2-4z+7)=0$.

2) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ ، الوحدة : $(2cm)$ نعتبر النقط A ، B ، C و G لواحقها على الترتيب : $z_A=-1$ ، $z_B=2+i\sqrt{3}$ ، $z_C=2-i\sqrt{3}$ و $z_G=3$.

أ) علّم النقط : A ، B ، C و G .

ب) أحسب العدد : $\dfrac{z_A-z_C}{z_G-z_C}$ ، ثمّ إستنتج طبيعة المثلث GAC .

3) نعتبر (D) هي مجموعة النقط M من المستوي حيث : $(-\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}).\overrightarrow{CG}=12.......(1)$.

أ) برهن أنّ G هي مرجح الجملة : $\{(A;-1);(B;2);(C;2)\}$.

ب) بيّن أنّ العلاقة (1) تكافئ العلاقة $\overrightarrow{GM}.\overrightarrow{CG}=-4.......(2)$.

ج) تحقّق أنّ A تنتمي إلى المجموعة (D) .

د) برهن أنّ العلاقة (2) تكافئ العلاقة $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{CG}=0.......(3)$.

ه) إستنتج طبيعة المجموعة (D) ثمّ أنشئها .

التمرين 04 :

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس المباشر $(O;\vec{u};\vec{v})$ ، الوحدة : $(8cm)$.

*) نعتبر A هي النقطة ذات اللاحقة -1 وَ B النقطة ذات اللاحقة 1 .

*) لتكن (Γ) هي مجموعة النقط من المستوي التي تختلف عن A ، B و O ، نرفق بكل نقطة M من (Γ) لاحقتها z النقطة N ذات اللاحقة z^2 وَ النقطة P ذات اللاحقة z^3 .

1) بيّن أنّ النقط M ، N و P متمايزة مثنى مثنى .

2) نعتبر (C) هي مجموعة النقط M من (Γ) بحيث يكون المثلث MNP قائم في P .

أ) باستعمال مبرهنة فيثاغورس بيّن أنّ المثلث MNP قائم في P معناه : $|z+1|^2+|z|^2=1$.

ب) برهن أنّ : $|z+1|^2+|z|^2=1$ تكافئ $(z+\frac{1}{2})(\overline{z+\frac{1}{2}})=\frac{1}{4}$.

ج) إستنتج طبيعة المجموعة (C) .

3) نعتبر M نقطة من (Γ) لاحقتها z ، r هي طويلة z وَ α عمدته حيث : $\alpha\in]-\pi;\pi]$.

أ) برهن أنّ المجموعة (F) للنقط M من (Γ) بحيث تكون لاحقة P عدد حقيقي موجب تماما هي إتحاد ثلاث أنصاف مستقيمات .

ب) مثّل (C) وَ (F) في المعلم $(O;\vec{u};\vec{v})$.

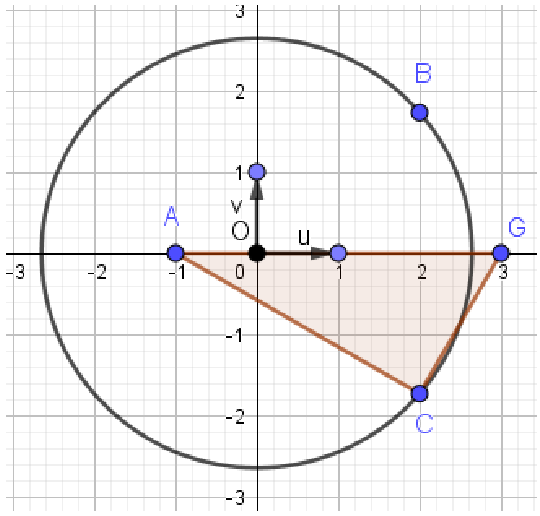
ج) عيّن لواحق النقط M من (Γ) بحيث يكون المثلث MNP قائما في P وَ لاحقة النقطة P عدد حقيقي موجب تماما .

حل مختصر للتمرين 03 :

1) حل المعادلة: $(z^2-2z-3)(z^2-4z+7)=0$.

إما : $(z^2-2z-3)=0$ أو $(z^2-4z+7)=0$ و منه : $\begin{cases} z_1=-1 \\ z_2=3 \end{cases}$ أو $\begin{cases} z_3=2-i\sqrt{3} \\ z_4=2+i\sqrt{3} \end{cases}$.

إذن : $S=\{-1;3;2-i\sqrt{3};2+i\sqrt{3}\}$.



2) أ) تعليم النقط :

ب) حساب العدد $\dfrac{z_A-z_C}{z_G-z_C}$:

$\dfrac{z_A-z_C}{z_G-z_C}=\dfrac{-3+i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}}$.

و منه : $\dfrac{z_A-z_C}{z_G-z_C}=i\sqrt{3}$ (تخيلي صرف)

أي : $(\overrightarrow{CG};\overrightarrow{CA})=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$ ، و منه : المثلث GAC قائم في C .

3) أ) لنبرهن أنّ النقطة G هي مرجح الجملة $\{(A;-1);(B;2);(C;2)\}$:

نحسب لاحقة المرجح و يجب أن نجدها هي نفسها لاحقة النقطة G .

أي : $z=\dfrac{-z_A+2z_B+2z_C}{3}=\dfrac{9}{3}=3=z_G$ ، و منه : G هي مرجح الجملة $\{(A;-1);(B;2);(C;2)\}$.

ب) لدينا العلاقة : $(-\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}).\overrightarrow{CG}=12.....(1)$ تكافئ $3\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{CG}=12$ ، أي : $\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{CG}=4$

و منه : $\overrightarrow{GM}.\overrightarrow{CG}=-4\ ....(2)$ ، و هو المطلوب .

ج) التحقّق أنّ $A\in(D)$: نعوض M بـ A في العلاقة (2) ، أي : $\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{CG}=-4\ ...(2)$ ثم نحقق من المساواة

- لنحسب الجداء $\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{CG}$:

لدينا : $\overrightarrow{GA}\begin{pmatrix}-4\\0\end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{CG}\begin{pmatrix}1\\i\sqrt{3}\end{pmatrix}$ ، و منه : $\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{CG}=(-4\times1)+(0\times i\sqrt{3})=-4$.

إذن : المساواة محققة ، أي أنّ : $A\in(D)$. $(\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{CG}=-4)$

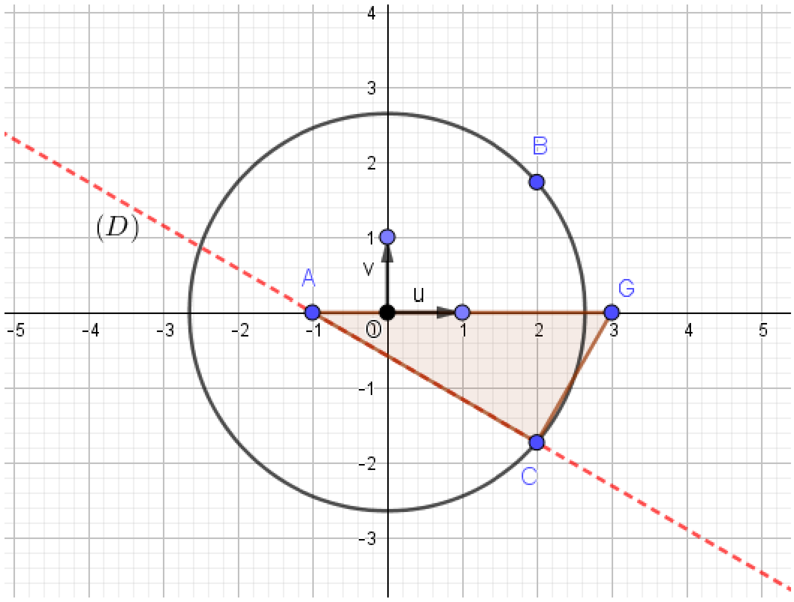
د) لدينا : $\begin{cases}\overrightarrow{GM}.\overrightarrow{CG}=-4\\ \overrightarrow{GA}.\overrightarrow{CG}=-4\end{cases}$ بالطرح نجد : $\overrightarrow{GM}.\overrightarrow{CG}-\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{CG}=0$ ، أي : $(\overrightarrow{GM}-\overrightarrow{GA}).\overrightarrow{CG}=0$ ،

أي : $(\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{AG}).\overrightarrow{CG}=0$ ، و منه : $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{CG}=0.......(3)$ ، و هو المطلوب .

ه) لدينا : $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{CG}=0$ ، هذا يعني أنّ : $(AM)\perp(CG)$.

إذن : مجموعة النقط M هي المستقيم المار بالنقطة A و العمودي على (CG) ، أي : هي المستقيم (AC) .

*) الإنشاء :



حل مختصر للتمرين 04 :

لدينا النقط : $A(-1)$ ، $B(1)$ و النقط : $M(z)$ ، $N(z^2)$ ، $P(z^3)$ هذه الأخيرة تختلف عن A ، B و O .

1) لنبيّن أنّ النقط M ، N و P متمايزة مثنى مثنى :

أي تكون : $M \neq N$ ، $M \neq P$ و $N \neq P$.

- نعلم أنه : $M = N$ معناه : $z = z^2$ ، أي : $z^2 - z = 0$ ، أي : $z(z-1) = 0$ ، و منه : $z = 0$ أو $z = 1$

أي أنّ : $M = O$ أو $M = B$ ، لكن M تختلف عن O و B ، إذن : $M \neq N$.

- و أيضا : $M = P$ معناه : $z = z^3$ ، أي : $z^3 - z = 0$ ، أي : $z(z^2-1) = 0$ ، أي : $z = 0$ أو $z^2 - 1 = 0$

و منه : $z = 0$ أو $z = 1$ أو $z = -1$ ، أي أنّ : $M = O$ أو $M = B$ أو $M = A$.

لكن M تختلف عن O ، B و A ، إذن : $M \neq P$.

- كذلك بنفس الطريقة نبيّن أنّ $N \neq P$.

إذن مما سبق نستنتج أنّ النقط M ، N و P متمايزة مثنى مثنى .

2) أ) المثلث MNP قائم في P معناه : $MN^2 = MP^2 + NP^2$ ، أي : $|z_N - z_M|^2 = |z_P - z_M|^2 + |z_P - z_N|^2$

أي : $|z^2 - z|^2 = |z^3 - z|^2 + |z^3 - z^2|^2$ ، أي : $|z(z-1)|^2 = |z(z^2-1)|^2 + |z^2(z-1)|^2$ ، أي :

$|z|^2.|z-1|^2 = |z|^2.|z-1|^2.|z+1|^2 + |z^2|^2|z-1|^2$ ، بما أنّ : $z \neq 1$ و $z \neq 0$ يمكن الإختزال بعد القسمة

على $|z|^2.|z-1|^2$ ، فنتحصل على : $1 = |z+1|^2 + |z|^2$ ، و منه : $|z+1|^2 + |z|^2 = 1$ و هو المطلوب .

ب) لدينا : $|z+1|^2 + |z|^2 = 1$ معناه : $(z+1)(\bar{z}+1) + z.\bar{z} = 1$ ، لأنّ : $|z|^2 = z.\bar{z}$ ، أي تصبح :

$z.\bar{z} + z + \bar{z} + 1 + z.\bar{z} = 1$ ، أي : $2z.\bar{z} + z + \bar{z} = 0$.

و من جهة أخرى لدينا : $\overline{(z+\frac{1}{2})(z+\frac{1}{2})} = \frac{1}{4}$ تعني : $(z+\frac{1}{2})(\bar{z}+\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$ ، أي تصبح :

$z.\bar{z} + \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}\bar{z} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$ ، أي : $z.\bar{z} + \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}\bar{z} = 0$ (نضرب في 2) نجد : $2z.\bar{z} + z + \bar{z} = 0$.

إذن : من هذا و ذاك نستنتج أنّ المساواة $\left|z+1\right|^2+\left|z\right|^2=1$ تكافئ المساواة $(z+\frac{1}{2})\overline{(z+\frac{1}{2})}=\frac{1}{4}$.

ج) طبيعة المجموعة (C) :

(C) هي مجموعة النقط M من (Γ) بحيث يكون المثلث MNP قائم في P .

أي : $(z+\frac{1}{2})\overline{(z+\frac{1}{2})}=\frac{1}{4}$ ، أي : $\left|z+\frac{1}{2}\right|^2=\frac{1}{4}$ ، أي : $\left|z+\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$ ، و منه : $EM=\frac{1}{2}$.

حيث : $z_E=-\frac{1}{2}$ ، إذن المجموعة (C) هي الدائرة التي مركزها E و نصف قطرها $\frac{1}{2}$ ما عدا النقطتين O و A .

3) (F) هي مجموعة النقط M من (Γ) بحيث تكون لاحقة P عدد حقيقي موجب تماما .

أ) P عدد حقيقي موجب تماما أي : z^3 عدد حقيقي موجب تماما ، أي أنّ : $\arg(z^3)=0+2k\pi$ ، أي :

$3\arg(z)=2k\pi$ ، أي : $\arg(z)=\frac{2k\pi}{3}$ ، و منه : $\alpha=\frac{2k\pi}{3}$ مع $(k\in\mathbb{Z})$ ، لكن : $-\pi<\alpha\le\pi$ ،

أي : $-\pi<\frac{2k\pi}{3}\le\pi$ ، أي : $-1<\frac{2k}{3}\le1$ ، أي : $-3<2k\le3$ ، أي : $-\frac{3}{2}<k\le\frac{3}{2}$ ، و منه :

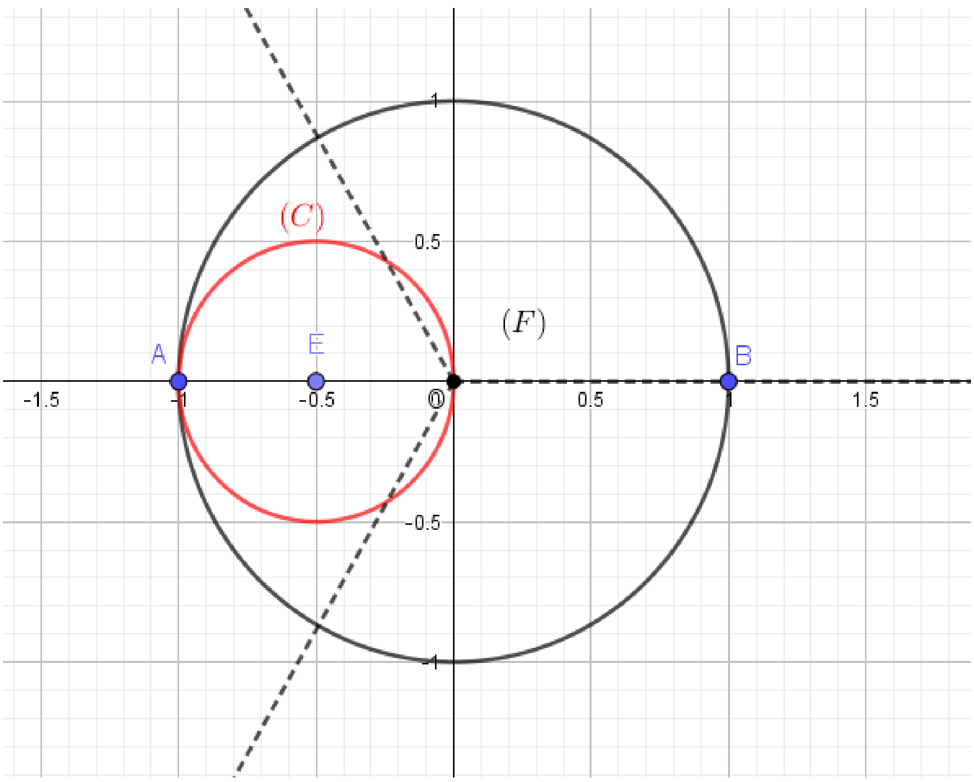
$k\in\{-1;0;1\}$ ، و منه : $\alpha=-\frac{2\pi}{3}$ أو $\alpha=0$ أو $\alpha=\frac{2\pi}{3}$.

إذن : $\arg(z)=0$ أو $\arg(z)=\frac{2\pi}{3}$ أو $\arg(z)=-\frac{2\pi}{3}$.

أي أنّ : المجموعة (F) تكون : نصف المستقيم $[Ox)$ ما عدا النقطتين O و B أو نصف المستقيم الذي مبدؤه O و يشكل زاوية قيسها $\frac{2\pi}{3}$ مع حامل محور الفواصل ما عدا النقطة O أو نصف المستقيم الذي مبدؤه O و يشكل زاوية قيسها $-\frac{2\pi}{3}$ مع حامل محور الفواصل ما عدا النقطة O .

إذن : مجموعة النقط (F) هي إتحاد ثلاث أنصاف مستقيمات .

ب) التمثيل :



ج) بما أنّ المثلث MNP قائم في P و z_P موجب تماما ، إذن : M تنتمي إلى تقاطع المجموعتين (C) و (F) .

لدينا : (C) معرفة بالعلاقة $\left|z+1\right|^2+\left|z\right|^2=1$ لأنّ : $M\in(C)$ ، أي : $z.\bar{z}+\frac{1}{2}(z+\bar{z})=0$ ، حيث :

$z=r.e^{i\frac{2k\pi}{2}}$ مع $k\in\{-1;0;1\}$ لأنّ : $M\in(F)$.

*) نعلم أنّ : $z.\bar{z}=\left|z\right|^2$ وَ $z+\bar{z}=2\operatorname{Re}(z)$ ، أي : $z.\bar{z}=r^2$ وَ $z+\bar{z}=2\times r.\cos(\frac{2k\pi}{3})$.

إذن : $z.\bar{z}+\frac{1}{2}(z+\bar{z})=0$ تعني : $r^2+\frac{1}{2}\times 2r.\cos(\frac{2k\pi}{3})=0$ ، أي : $r^2+r.\cos(\frac{2k\pi}{3})=0$ ، أي :

$r\left[r+\cos(\frac{2k\pi}{3})\right]=0$ ، نعلم أنّ : $(r>0)$ ، إذن : $r+\cos(\frac{2k\pi}{3})=0$.

*) لما $k=0$ يكون : $r+1=0$ ، و منه : $r=-1$ (مرفوض) .

*) لما $k=1$ يكون : $r+\cos(\frac{2\pi}{3})=0$ ، أي : $r-\frac{1}{2}=0$ ، و منه : $r=\frac{1}{2}$.

*) لما $k=-1$ يكون : $r+\cos(-\frac{2\pi}{3})=0$ ، أي : $r-\frac{1}{2}=0$ ، و منه : $r=\frac{1}{2}$.

إذن : $r=\frac{1}{2}$ ، أي : $z_1=\frac{1}{2}.e^{i\frac{2\pi}{3}}$ وَ $z_2=\frac{1}{2}.e^{-i\frac{2\pi}{3}}$ ، و بالتالي توجد نقطتان تحققان المطلوب .

ب.ع#

التمرين 05 :

المستوي المركّب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ (الوحدة $6cm$) .

نعتبر التحويل f للمستوي الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث : $z' = ze^{i\frac{5\pi}{6}}$.

و لتكن النقطة M_0 ذات اللاحقة z_0 ، حيث : $z_0 = e^{i\frac{\pi}{2}}$.

نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $M_{n+1} = f(M_n)$ وَ نسمي z_n لاحقة النقطة M_n .

1) عيّن الطبيعة و العناصر المميزة للتحويل f ، ثمّ علّم النقط : M_0 ، M_1 ، M_2 ، M_3 .

2) برهن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n يكون : $z_n = e^{i(\frac{\pi}{2}+n\frac{5\pi}{6})}$.

3) نعتبر n و p عددان طبيعيان . برهن أنّ النقطتان M_n وَ M_p متطابقتان إذا وافقط إذا كان $(n-p)$ مضاعفا لـ 12 .

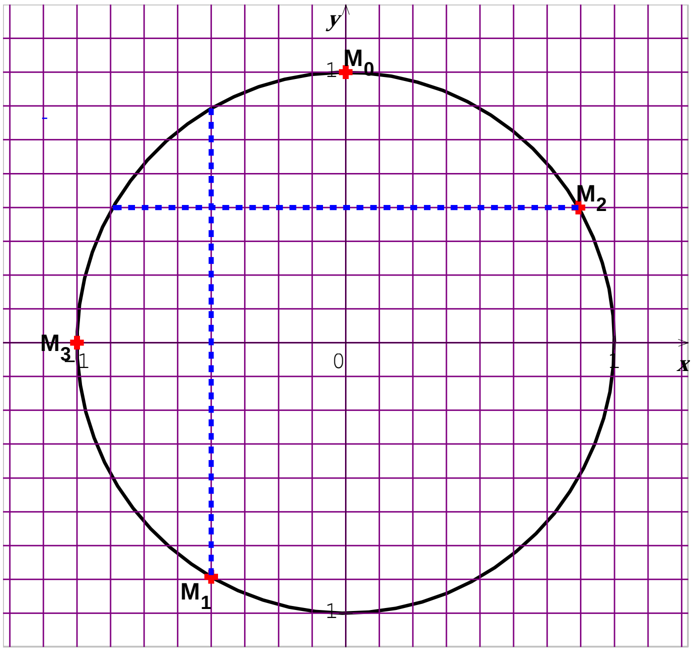
4) أ) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $12x - 5y = 3$ علما أنّ الثنائية $(4;9)$ حل خاص لها .

ب) إستنتج مجموعة الأعداد الطبيعية n بحيث تكون النقطة M_n تنتمي إلى نصف المستقيم $[Ox)$.

حل التمرين 05 :

1) طبيعة التحويل f : $z' = ze^{i\frac{5\pi}{6}}$ $\Leftarrow$ f هو دوران مركزه O وَ زاويته $\frac{5\pi}{6}$.

2) البرهان من أجل كل عدد طبيعي n : $z_n = e^{i(\frac{\pi}{2}+n\frac{5\pi}{6})}$ ، لنستعمل البرهان بالتراجع :



✓ نحقّق من أجل $n = 0$: $z_0 = e^{i(\frac{\pi}{2}+0\times\frac{5\pi}{6})}$ ،

أي : $z_0 = e^{i(\frac{\pi}{2})}$ ، (**محقّقة**) .

✓ نفرض صحة : $z_n = e^{i(\frac{\pi}{2}+n\frac{5\pi}{6})}$.

✓ نبرهن صحة : $z_{n+1} = e^{i(\frac{\pi}{2}+(n+1)\frac{5\pi}{6})}$.

البرهان : نعلم أنّ : $z_{n+1} = e^{i\frac{5\pi}{6}} z_n$ ، وَ لدينا فرضا :

$z_n = e^{i(\frac{\pi}{2}+n\frac{5\pi}{6})}$ ، أي : $z_{n+1} = e^{i\frac{5\pi}{6}} \times e^{i(\frac{\pi}{2}+n\frac{5\pi}{6})}$ ،

أي : $z_{n+1} = e^{i\left[\frac{5\pi}{6}+\frac{\pi}{2}+n\frac{5\pi}{6}\right]}$ ، أي : $z_{n+1} = e^{i\left[\frac{\pi}{2}+(n+1)\frac{5\pi}{6}\right]}$

إذن : من أجل كل عدد طبيعي n يكون : $z_n = e^{i(\frac{\pi}{2}+n\frac{5\pi}{6})}$.

3) M_n وَ M_p متطابقتان معناه أنّ : $z_n = z_p$ ، أي : $e^{i(\frac{\pi}{2}+p\frac{5\pi}{6})} = e^{i(\frac{\pi}{2}+n\frac{5\pi}{6})}$ ، و هذا معناه أنّ :

$\frac{\pi}{2}+n\frac{5\pi}{6} = \frac{\pi}{2}+p\frac{5\pi}{6}+2k\pi$ ، أي : $n\frac{5\pi}{6} = p\frac{5\pi}{6}+2k\pi$ ، أي : $n\times 5\pi = p\times 5\pi + 12k\pi$

أي : $5n = 5p + 12k$ ، أي : $5n - 5p = 12k$ ، ومنه : $5(n-p) = 12k$. $12 / 5(n-p)$ وَ 12

أوّلي مع 5 ، حسب غوص : 12 يقسم $(n-p)$ ، أي أنّ : $(n-p)$ مضاعف لـ 12 .

4) أ) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة $12x-5y=3$: $12x-5y = 12(4)-5(9)$ ، أي : $12(x-4) = 5(y-9)$

حسب غوص نستنتج أنّ : $\begin{cases} x = 5k+4 \\ y = 12k+9 \end{cases}$ حيث : $k \in \mathbb{Z}$.

ب) $M_n \in [Ox)$ معناه أنّ : z_n حقيقي موجب ، أي : $\arg(z_n) = 0 + 2k\pi$ ، أي :

$\frac{\pi}{2}+n\frac{5\pi}{6} = 2k\pi$ ، أي : $3\pi + 5n\pi = 12k\pi$ ، أي : $3+5n = 12k$ ، أي : $12k - 5n = 3$.

إذن : $n = y = 12k+9$ مع $k \in \mathbb{N}$.

#ع.ب

التمرين 06 :

1) أ) نعتبر (r_n) المتتالية الهندسية التي حدها الأول r_0 و أساسها $\frac{2}{3}$ ، مع $r_0 > 0$.

❖ عبّر عن r_n بدلالة r_0 و n .

ب) نعتبر (θ_n) المتتالية الحسابية التي حدها الأول θ_0 و أساسها $\frac{2\pi}{3}$ ، مع $\theta_0 \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right[$.

❖ عبّر عن θ_n بدلالة θ_0 و n .

ج) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $z_n = r_n.(\cos\theta_n + i\sin\theta_n)$ ، علما أنّ : $z_0 \times z_1 \times z_2 = 8$.

❖ عيّن الطويلة و العمدة لكل من : z_1 و z_2 .

2) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ وحدته : $4cm$.

نسمي M_n النقطة ذات اللاحقة z_n .

أ) علم النقط : M_0 ، M_1 ، M_2 و M_3 .

ب) عبّر عن : $\left\|\overrightarrow{M_nM_{n+1}}\right\|$ بدلالة n .

ج) نضع : $L_n = \left\|\overrightarrow{M_0M_1}\right\| + \left\|\overrightarrow{M_1M_2}\right\| + ... + \left\|\overrightarrow{M_nM_{n+1}}\right\|$.

❖ عبّر عن L_n بدلالة n .

❖ مـاهي نهاية L_n لما n يؤول إلى $+\infty$ ؟ .

حل التمرين 06 :

1) أ) التعبير عن r_n بدلالة r_0 و n : $r_n = r_0 \times q^n$ و منه : $r_n = r_0 . (\frac{2}{3})^n$.

ب) التعبير عن θ_n بدلالة θ_0 و n : $\theta_n = \theta_0 + \frac{2\pi}{3} n$ و منه : $\theta_n = \theta_0 + \frac{2n\pi}{3}$.

ج) لدينا : $z_0 \times z_1 \times z_2 = 8$.

*) $|z_0 \times z_1 \times z_2| = |8|$ أي : $|z_0| \times |z_1| \times |z_2| = 8$ أي : $r_0 \times r_1 \times r_2 = 8$ و نعلم أنّ : $r_0 \times r_2 = r_1^2$

إذن : $r_1 \times r_1^2 = 8$ أي : $r_1^3 = 8$ و عليه : $r_1 = 2$.

*) $\arg(z_0 \times z_1 \times z_2) = \arg(8) + 2k\pi$ أي : $\arg(z_0) + \arg(z_1) + \arg(z_2) = 0 + 2k\pi$ ، أي :

$\theta_0 + \theta_1 + \theta_2 = 2k\pi$ و نعلم أنّ : $\theta_0 + \theta_2 = 2\theta_1$ ، إذن : $3\theta_1 = 2k\pi$ و عليه : $\theta_1 = \frac{2k\pi}{3}$.

نعلم أنّ : $\theta_0 = \theta_1 - \frac{2\pi}{3}$ و منه : $\theta_0 = \frac{2k\pi}{3} - \frac{2\pi}{3}$ و لدينا أيضا : $\theta_0 \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right[$ ، أي :

$0 \le \frac{2k\pi}{3} - \frac{2\pi}{3} < \frac{\pi}{2}$ ، أي : $0 \le \frac{2k}{3} - \frac{2}{3} < \frac{1}{2}$ ، أي : $\frac{2}{3} \le \frac{2k}{3} < \frac{1}{2} + \frac{2}{3}$ ، أي : $\frac{2}{3} \le \frac{2k}{3} < \frac{7}{6}$

أي : $\frac{6}{3} \le 2k < \frac{21}{6}$ ، أي : $2 \le 2k < \frac{21}{6}$ ، و منه : $1 \le k < \frac{21}{12}$ ، إذن : $k = 1$.

و منه سنجد أنّ : $\theta_0 = 0$.

*) حساب r_1 و r_2 :

لدينا : $r_1 = 2$ ، أي : $r_2 = r_1 \times \frac{2}{3}$ ، و منه : $r_2 = \frac{4}{3}$. إذن : $r_0 = 3$ و $r_3 = \frac{8}{9}$.

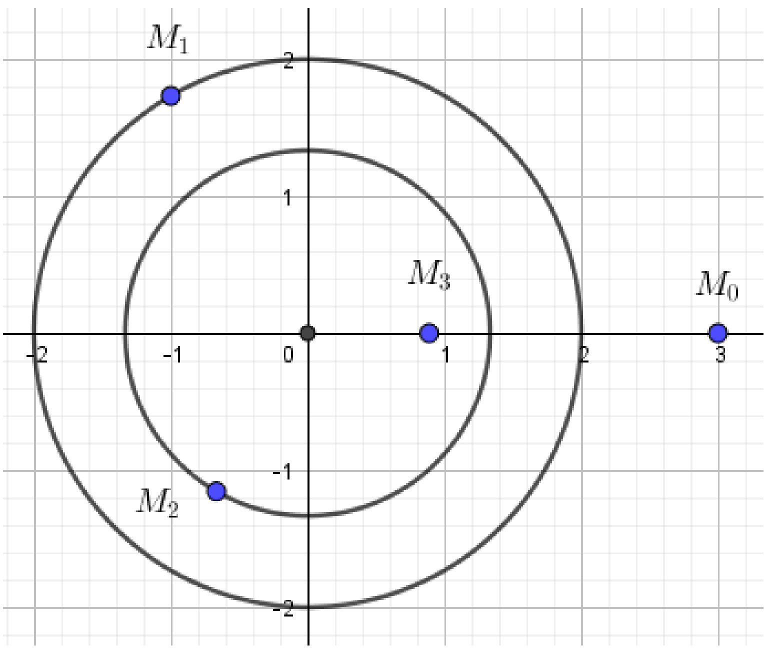
*) حساب θ_1 و θ_2 :

لدينا : $\theta_1 = \theta_0 + \frac{2\pi}{3}$ و منه : $\theta_1 = \frac{2\pi}{3}$. لدينا : $\theta_2 = \theta_1 + \frac{2\pi}{3}$ و منه : $\theta_2 = \frac{4\pi}{3}$ و $\theta_3 = 2\pi$.

2) تعليم النقط :

لدينا : $z_0 = 3$ ، $z_1 = -1 + i\sqrt{3}$

$z_2 = -\frac{2}{3} - i\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ، $z_3 = \frac{8}{9}$



ب) التعبيّر عن $\left\|\overrightarrow{M_nM_{n+1}}\right\|$ بدلالة n :

نعلم أنّ : $\left\|\overrightarrow{M_nM_{n+1}}\right\| = |z_{n+1} - z_n|$.

لدينا : $z_n = r_n.e^{i(\theta_n)}$ ، أي : $z_n = r_0 \times (\frac{2}{3})^n.e^{i(\frac{2n\pi}{3})}$ ، و منه : $z_n = 3\times(\frac{2}{3})^n.e^{i(\frac{2n\pi}{3})}$.

و لدينا : $z_{n+1} = r_{n+1}.e^{i(\theta_{n+1})}$ ، و منه : $z_{n+1} = 3\times(\frac{2}{3})^{n+1}.e^{i(\frac{2(n+1)\pi}{3})}$.

إذن : $z_{n+1} - z_n = 3\times(\frac{2}{3})^{n+1}.e^{i(\frac{2(n+1)\pi}{3})} - 3\times(\frac{2}{3})^n.e^{i(\frac{2n\pi}{3})}$ ، أي :

$z_{n+1} - z_n = 3\times(\frac{2}{3})^n.e^{i(\frac{2n\pi}{3})}\left[\frac{2}{3}.e^{i(\frac{2\pi}{3})} - 1\right]$ ، أي : $z_{n+1} - z_n = 3(\frac{2}{3})^n.e^{i(\frac{2n\pi}{3})}\left[\frac{2}{3}(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) - 1\right]$

أي : $z_{n+1} - z_n = 3(\frac{2}{3})^n.e^{i(\frac{2n\pi}{3})}\times(-\frac{1}{3} + i\frac{\sqrt{3}}{3} - 1)$ ، أي : $z_{n+1} - z_n = 3(\frac{2}{3})^n.e^{i(\frac{2n\pi}{3})}\times(-\frac{4}{3} + i\frac{\sqrt{3}}{3})$

و منه : $|z_{n+1} - z_n| = 3\times(\frac{2}{3})^n\times\frac{\sqrt{19}}{3}$ ، أي : $|z_{n+1} - z_n| = \sqrt{19}\times(\frac{2}{3})^n$.

و عليه : $\left\|\overrightarrow{M_nM_{n+1}}\right\| = \sqrt{19}\times(\frac{2}{3})^n$.

ج) لدينا : $L_n = \left\|\overrightarrow{M_0M_1}\right\| + \left\|\overrightarrow{M_1M_2}\right\| + ... + \left\|\overrightarrow{M_nM_{n+1}}\right\|$

*) التعبير عن L_n بدلالة n :

$L_n = \sqrt{19}(\frac{2}{3})^0 + \sqrt{19}(\frac{2}{3})^1 + \sqrt{19}(\frac{2}{3})^2 + ... + \sqrt{19}(\frac{2}{3})^n$ ، أي :

$L_n = \sqrt{19}\left[(\frac{2}{3})^0 + (\frac{2}{3})^1 + (\frac{2}{3})^2 + ... + (\frac{2}{3})^n\right]$.

نلاحظ أنّ : $\left[(\frac{2}{3})^0 + (\frac{2}{3})^1 + (\frac{2}{3})^2 + ... + (\frac{2}{3})^n\right]$ هو مجموع متتالية هندسية أساسها $\frac{2}{3}$ و حدها الأول 1

عدد حدودها $(n+1)$ حدا .

إذن : $L_n = \sqrt{19}\left[1\times\frac{1-(\frac{2}{3})^{n+1}}{1-\frac{2}{3}}\right]$ ، أي : $L_n = \sqrt{19}\times 3\left[1-(\frac{2}{3})^{n+1}\right]$ ، و منه : $L_n = 3\sqrt{19}\left[1-(\frac{2}{3})^{n+1}\right]$

*) حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} L_n$:

لدينا : $\lim\limits_{n\to+\infty}(\frac{2}{3})^{n+1} = 0$ ، و منه : $\lim\limits_{n\to+\infty} L_n = 3\sqrt{19}$.

كتابة الأستاذ : بلقاسم عبدالرزاق

التمرين 07 :

في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ (وحدته $2cm$) .

نعتبر النقط C,B,A التي لواحقها على الترتيب : $z_A=2$ ، $z_B=1+i\sqrt{3}$ و $z_C=1-i\sqrt{3}$.

I) 1) أ) أعط الشكل الأسي لـ z_B ثمّ لـ z_C .

ب) علّم النقط : C,B,A .

2) عيّن طبيعة الرباعي $OBAC$.

3) عيّن و أنشئ المجموعة (D) للنقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث : $|z|=|z-2|$.

II) نرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z $(z\neq z_A)$ النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث : $z'=\dfrac{-4}{z-2}$.

1) أ) حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z=\dfrac{-4}{z-2}$.

ب) إستنتج النقطتين المرفقتين بالنقطتين B وَ C .

ج) عيّن و علّم النقطة G' النقطة المرفقة بالنقطة G مركز الثقل للمثلث OAB .

2) أ) برهن أنّه من أجل كل z يختلف عن 2 يكون : $|z'-2|=\dfrac{2|z|}{|z-2|}$.

ب) بيّن أنه إذا كانت M نقطة كيفية من المجموعة (D) المذكورة في الجزء الأوّل فإنّ M' تنتمي إلى المجموعة (T) يطلب تعيينها ثمّ إنشائها .

التمرين 08 :

في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ (وحدته $2cm$) .

نفرض النقطتين : A وَ B لاحقتاهما على الترتيب : $z_A=i$ ، $z_B=1+2i$.

1) برّر أنّه يوجد تشابه مباشر S حيث : $S(A)=B$ وَ $S(O)=A$.

2) أ) بيّن أنّ الكتابة المركبة للتشابه S هي : $z'=(1-i)z+i$.

ب) عيّن العناصر المميزة لـ S (نسمي Ω المركز) .

3) نعتبر متتالية النقط (A_n) حيث : A_0 هي المبدأ O و من أجل كل عدد طبيعي n : $A_{n+1}=S(A_n)$.

نسمي z_n لاحقة A_n (لدينا إذن : $A_0=O$ ، $A_1=A$ ، $A_2=B$) .

أ) برهن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n يكون : $z_n=1-(1-i)^n$.

ب) عيّن بدلالة n لاحقتي الشعاعين : $\overrightarrow{\Omega A_n}$ وَ $\overrightarrow{A_nA_{n+1}}$.

❖ قارن بين طويلتي هذين الشعاعين و احسب قيسا للزاوية $(\overrightarrow{\Omega A_n};\overrightarrow{A_nA_{n+1}})$.

ج) إستنتج طريقة إنشاء النقطة A_{n+1} بمعرفة النقطة A_n ثمّ أنشئ A_3 وَ A_4 .

د) عيّن النقط A_n التي تنتمي إلى المستقيم (ΩB) .

حل التمرين 07 :

I) 1) أ) إعطاء الشكل الأسي لـ z_B ثمّ لـ z_C :

*) لدينا : $z_B = 1+i\sqrt{3}$ ، أي : $\begin{cases} |z_B| = 2 \\ \arg(z_B) : \begin{cases} \cos\theta = \dfrac{1}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Big\rangle \theta = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$ و منه : $z_B = 2.e^{\frac{\pi}{3}}$.

*) نلاحظ أنّ : $z_C = \overline{z_B}$ ، و منه : $z_C = 2.e^{-\frac{\pi}{3}}$.

ب) تعليم النقط : (**أنظر الشكل أسفله**) .

2) طبيعة الرباعي $OBAC$:

- لدينا : $z_A - z_B = z_C - z_O$ ، أي أنّ : $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OC}$ ، إذن الرباعي $OBAC$ متوازي أضلاع .

- و من جهة أخرى لدينا : $|z_B| = |z_C|$ أي أنّ : $OB = OC$ ، إذن الرباعي $OBAC$ هو معين .

3) طبيعة المجموعة (D) :

لدينا : $|z| = |z-2|$ ، أي : $OM = AM$ ، و منه : (D) هي محور القطعة $[OA]$.

II) لدينا : $z' = \dfrac{-4}{z-2}$ مع $(z \neq z_A)$.

1) أ) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z = \dfrac{-4}{z-2}$ ، هذه الأخيرة تكافئ : $z^2 - 2z + 4 = 0$ مع $(z \neq 2)$.

نجد : $\Delta = (2\sqrt{3}i)^2$ ، و منه : $z_1 = 1+i\sqrt{3}$ و $z_2 = 1-i\sqrt{3}$.

ب) مما سبق نستنتج أنّ النقطة المرفقة بالنقطة B هي B نفسها و النقطة المرفقة بالنقطة C هي C نفسها أيضا .

ج) لدينا : النقطة G هي مركز الثقل للمثلث OAB ، أي : $z_G = \dfrac{z_O + z_A + z_B}{3}$ ، و منه : $z_G = 1 + i\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

إذن : $z_{G'} = \dfrac{-4}{z_G - 2}$ ، أي : $z_{G'} = \dfrac{-4}{1+i\dfrac{\sqrt{3}}{3}-2}$ و منه بعد الحساب نجد : $z_{G'} = 3+i\sqrt{3}$.

*) تعليم $z_{G'}$: (**أنظر الشكل أسفله**)

2) أ) البرهان أنّ : $|z'-2| = \dfrac{2|z|}{|z-2|}$.

لدينا : $|z'-2| = \left|\dfrac{-4}{z-2} - 2\right|$ ، أي : $|z'-2| = \left|\dfrac{-4-2z+4}{z-2}\right|$ ، أي : $|z'-2| = \left|\dfrac{-2z}{z-2}\right|$ ، و منه :

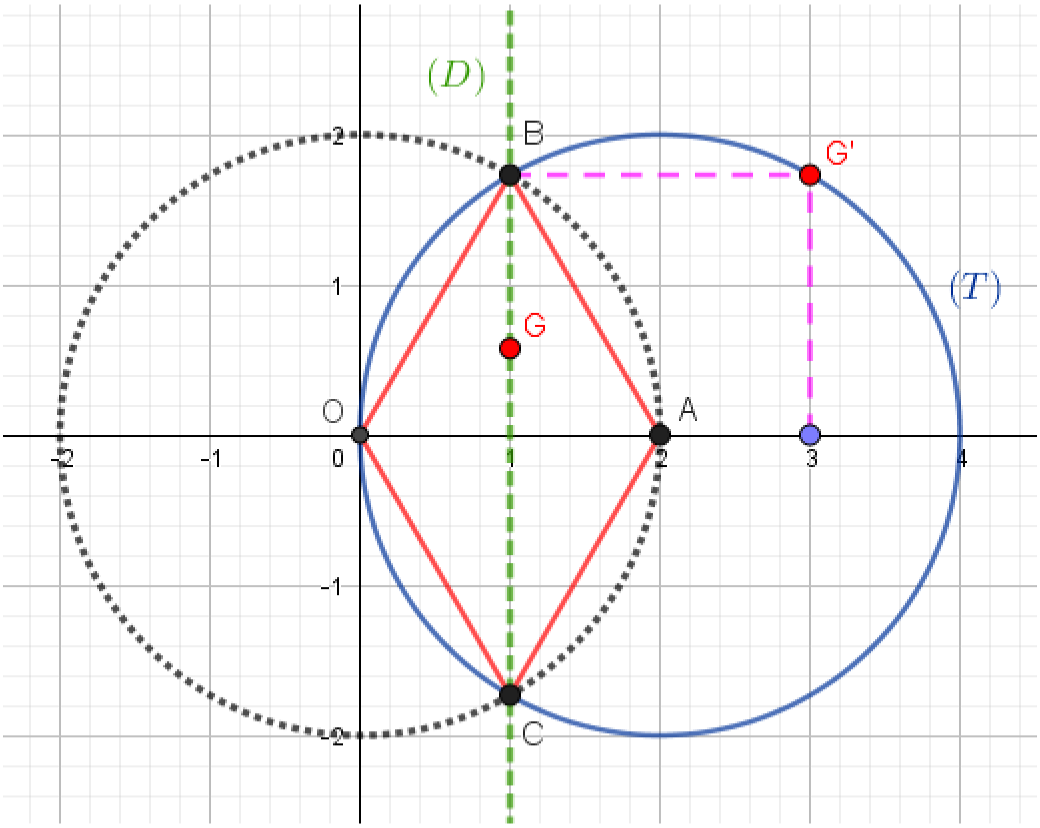
$|z'-2| = \dfrac{2|z|}{|z-2|}$ و هو المطلوب .

ب) إذا كانت M تنتمي إلى المجموعة (D) فإنّ : $OM = AM$ ، أي : $|z| = |z-2|$.

و منه : المساواة $\left|z'-2\right| = \dfrac{2\left|z\right|}{\left|z-2\right|}$ تصبح : $\left|z'-2\right| = 2$ ، أي أنّ : $AM' = 2$.

إذن : M' ستكون تنتمي إلى الدائرة (T) التي مركزها A و نصف قطرها 2 .

*) الإنشاء :



حل التمرين 08 :

1) بما أنّ : A تختلف عن B وَ A تختلف عن O ، فإنّه يوجد **تشابه مباشر** S يحوّل A إلى B و يحول O إلى A .

2) أ) تبيين أن الكتابة المركبة لـ S هي : $z' = (1-i)z + i$.

لدينا : $\begin{cases} S(A) = B \\ S(O) = A \end{cases}$ أي : $\begin{cases} z_B = az_A + b \\ z_A = az_O + b \end{cases}$ بالطرح نجد : $z_B - z_A = a(z_A - z_O)$ ، أي :

$a = \dfrac{z_B - z_A}{z_A - z_O} = \dfrac{1+2i-i}{i}$ ، و منه : $a = 1-i$. نعوض قيمة a في $z_A = az_O + b$ نجد : $z_A = b$ ، أي :

$b = i$ ، إذن الكتابة المركبة للتشابه S هي : $z' = (1-i)z + i$ ، و هو المطلوب .

- توجد طريقة أخرى لتبيين ذلك .

ب) العناصر المميزة للتشابه S :

لدينا : $a = 1-i$ ، أي : $\begin{cases} \left|a\right| = \sqrt{2} \\ \arg(a) = -\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi \end{cases}$ و لدينا : $z_\Omega = \dfrac{b}{1-a} = 1$ ، أي : $\Omega(1;0)$.

إذن العناصر المميزة للتشابه S هي : نسبته $\sqrt{2}$ ، زاويته $-\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$ و مركزه Ω .

3) أ) لنبرهن بالتراجع على أنّه من أجل كل عدد طبيعي n يكون : $z_n = 1-(1-i)^n$

- لنتحقق من أجل $n=0$ ، أي : $z_0 = 1-(1-i)^0$ ، أي : $z_0 = 0$ ، و منه : z_0 لاحقة A_0 (محققة) .

- نفرض صحة : $z_n = 1-(1-i)^n$ و نبرهن صحة : $z_{n+1} = 1-(1-i)^{n+1}$:

لدينا : $A_{n+1} = S(A_n)$ ، أي : $z_{n+1} = (1-i)z_n + i$ و لدينا فرضا أنّ : $z_n = 1-(1-i)^n$ ، أي :

$z_{n+1} = (1-i)\left[1-(1-i)^n\right] + i$ ، أي : $z_{n+1} = 1-i-(1-i)(1-i)^n + i$ ، و منه :

$z_{n+1} = 1-(1-i)^{n+1}$ ، إذن : من أجل كل عدد طبيعي n يكون : $z_n = 1-(1-i)^n$.

ب) تعيين بدلالة n لاحقتي الشعاعين $\overrightarrow{\Omega A_n}$ و $\overrightarrow{A_n A_{n+1}}$:

❖ $z_{\overrightarrow{\Omega A_n}} = z_n - z_\Omega$ ، أي : $z_{\overrightarrow{\Omega A_n}} = 1-(1-i)^n - 1$ ، و منه : $z_{\overrightarrow{\Omega A_n}} = -(1-i)^n$.

❖ $z_{\overrightarrow{A_n A_{n+1}}} = z_{n+1} - z_n$ ، أي : $z_{\overrightarrow{A_n A_{n+1}}} = 1-(1-i)^{n+1} - 1 + (1-i)^n$ ، و منه : $z_{\overrightarrow{A_n A_{n+1}}} = i(1-i)^n$.

*) المقارنة بين طويلتي الشعاعين $\overrightarrow{\Omega A_n}$ و $\overrightarrow{A_n A_{n+1}}$:

❖ $\left\|\overrightarrow{\Omega A_n}\right\| = \Omega A_n$ ، أي : $\Omega A_n = \left|-(1-i)^n\right| = \left|1-i\right|^n$ ، و منه : $\Omega A_n = (\sqrt{2})^n$.

❖ $\left\|\overrightarrow{A_n A_{n+1}}\right\| = A_n A_{n+1}$ ، أي : $A_n A_{n+1} = \left|i(1-i)^n\right| = |i|.\left|1-i\right|^n$ ، و منه : $A_n A_{n+1} = (\sqrt{2})^n$.

إذن نستنتج أنّ : $\left\|\overrightarrow{\Omega A_n}\right\| = \left\|\overrightarrow{A_n A_{n+1}}\right\|$ أي : $\Omega A_n = A_n A_{n+1}$.

*) حساب قيسا للزاوية $(\overrightarrow{\Omega A_n};\overrightarrow{A_n A_{n+1}})$: $(\overrightarrow{\Omega A_n};\overrightarrow{A_n A_{n+1}}) = \arg\left(\dfrac{z_{\overrightarrow{A_n A_{n+1}}}}{z_{\overrightarrow{\Omega A_n}}}\right) + 2k\pi$ ، أي :

$(\overrightarrow{\Omega A_n};\overrightarrow{A_n A_{n+1}}) = \arg\left[\dfrac{i(1-i)^n}{-(1-i)^n}\right] + 2k\pi = \arg(-i) + 2k\pi$.

و منه : $(\overrightarrow{\Omega A_n};\overrightarrow{A_n A_{n+1}}) = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ مع $k \in \mathbb{Z}$.

ج) إستنتاج طريقة إنشاء النقطة A_{n+1} بمعرفة النقطة A_n :

لدينا : $(\overrightarrow{\Omega A_n};\overrightarrow{A_n A_{n+1}}) = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ ، أي : $(\overrightarrow{A_n \Omega};\overrightarrow{A_n A_{n+1}}) = -\dfrac{\pi}{2} + \pi + 2k\pi$ ،

و منه : $(\overrightarrow{A_n \Omega};\overrightarrow{A_n A_{n+1}}) = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ مع $k \in \mathbb{Z}$.

و لدينا من قبل أنّ : $\Omega A_n = A_n A_{n+1}$ ، إذن النقطة A_{n+1} هي صورة النقطة Ω بالدوران الذي مركزه A_n و زاويته

$\dfrac{\pi}{2}$ ، فبذلك سيكون المثلث $\Omega A_n A_{n+1}$ متقايس الضلعين و قائم في A_n .

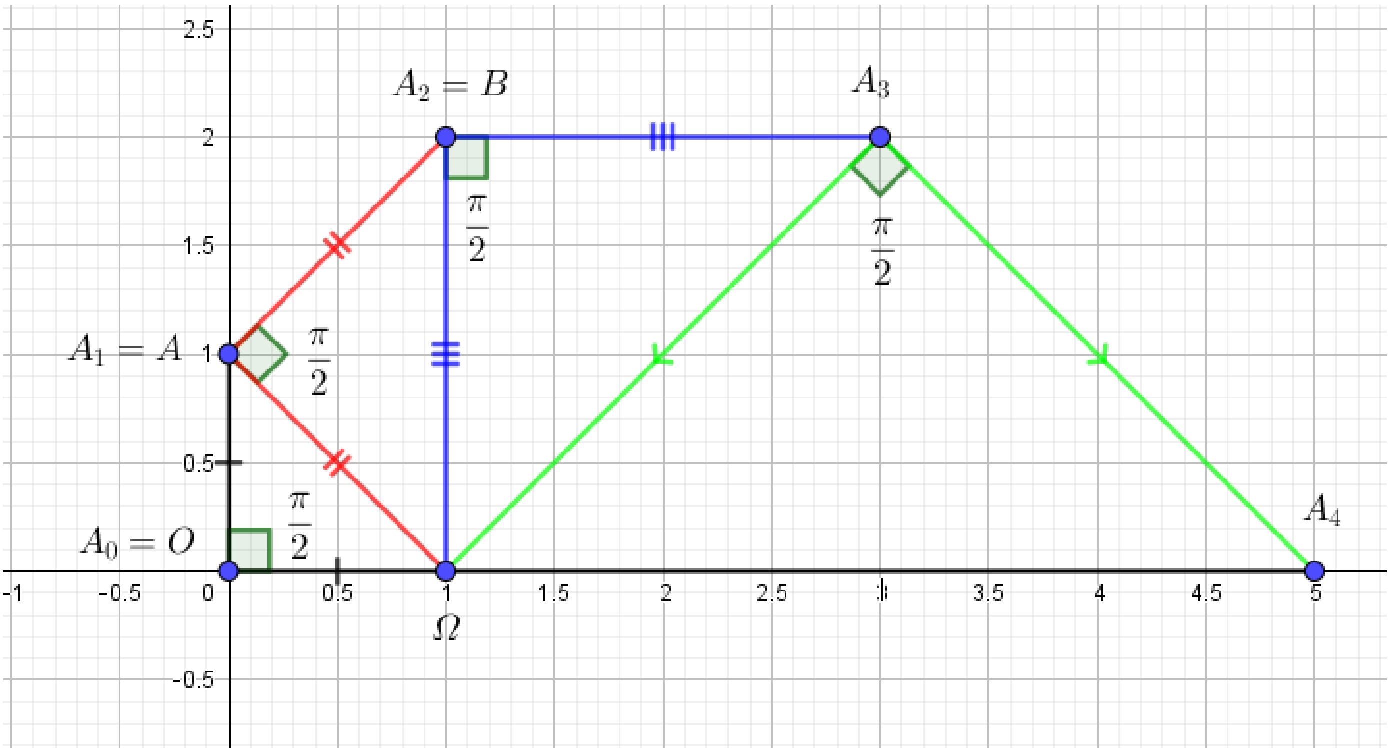
*) إنشاء النقطتين A_3 و A_4 :

أولا ننشئ كل من النقط : $A_0 = O$ ، $A_1 = A$ ، $A_2 = B$ و $\Omega(1;0)$ ، بعدها سنلاحظ أنّ كل من المثلثين

ΩAB و ΩOA المتقايسا الضلعين و القائمين في A و O على الترتيب .

إذن لإنشاء النقطتين A_3 و A_4 نقوم بإنشاء المثلثين $\Omega B A_3$ و $\Omega A_3 A_4$ المتقايسا الضلعين و القائمين في B و A_3

على الترتيب . (**أنظر إلى الشكل الموالي**) :



د) تعيّن النقط A_n التي تنتمي إلى المستقيم (ΩB) :

لدينا : $A_n \in (\Omega B)$ يعني أنّ النقط Ω ، B و A_n على إستقامة واحدة ، أي : $(\overrightarrow{\Omega A_n};\overrightarrow{\Omega B}) = k\pi$ مع $k \in \mathbb{Z}$

و منه : $(\overrightarrow{\Omega A_n};\overrightarrow{\Omega A_2}) = k\pi$ ، أي : $\arg(\frac{z_{\overrightarrow{\Omega A_n}}}{z_{\overrightarrow{\Omega A_2}}}) = k\pi$ ، أي : $\arg\left[\frac{-(1-i)^n}{-(1-i)^2}\right] = k\pi$ ، و منه :

$\arg\left[(1-i)^{n-2}\right] = k\pi$ ، أي : $(n-2)\arg(1-i) = k\pi$ ، أي : $(n-2)(-\frac{\pi}{4}) = k\pi$ ، و منه :

$n-2 = -4k$ ، إذن : $n = -4k+2$ مع $k \in \mathbb{Z}^-$ لأنّ $n \in \mathbb{N}$.

و عليه فسيكون : $n \in \{2;6;10;14;.....\}$.

إذن النقط A_n التي تنتمي للمستقيم (ΩB) هي : A_2 ، A_6 ، A_{10} ، A_{14} ، .... إلخ .

كتابة الأستاذ : بلقاسم عبدالرزاق

التمرين 09 :

I) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$.

نعتبر النقط : A ، B و C التي لواحقها على الترتيب : $z_A = 1+i$ ، $z_B = i$ و $z_C = -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$.

1) بيّن أنه يوجد تشابه مباشر S يحوّل A إلى B و يحوّل B إلى C .

2) أعط العبارة المركبة لـ S ثمّ استنتج العناصر المميزة له .

3) نعتبر النقطة A_0 ذات اللاحقة $z_0 = 2$ و النقطتان A_n ، A_{n+1} لاحقتاهما z_n و z_{n+1} حيث : $z_{n+1} = \frac{1+i}{2}z_n$.

أ) أحسب كلا من : z_1, z_2, z_3, z_4 ثمّ علّم النقط : A_0, A_1, A_2, A_3, A_4 .

ب) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون : $z_n = 2\times(\frac{\sqrt{2}}{2})^n .\ e^{i\frac{n\pi}{4}}$.

ج) ما هي أوّل نقطة A_n تنتمي إلى القرص الذي مركزه O و نصف قطره $0{,}1$ ؟ .

II) تحتوي علبة على 30 كرة مرقّمة من 1 إلى 30 لا نفرق بينها عند اللمس ، نسحب عشوائيا كرة واحدة من العلبة و نسجل رقمها n $(1 \le n \le 30)$ ثمّ نعلّم النقطة A_n ذات اللاحقة z_n (المذكورة في السؤال 3 -ب-).

- أحسب إحتمال كل حادثة :

A : " النقطة A_n تنتمي إلى حامل محور الفواصل " .

B : " النقطة A_n تنتمي إلى حامل محور التراتيب " .

C : " النقطة A_n تنتمي إلى المستقيم ذو المعادلة $y = x$ " .

حل التمرين 09 :

I) 1) بما أنّ : A تختلف عن B وَ A تختلف عن C ، فإنّه يوجد **تشابه مباشر** S يحوّل A إلى B ، و يحوّل B إلى C .

2) العبارة المركبة للتشابه S : $\boxed{z' = az+b}$. لدينا : $S(A)=B$ وَ $S(B)=C$ ، و منه :

$\begin{cases} z_B = az_A + b \\ z_C = az_B + b \end{cases}$ بالطرح نجد : $z_B - z_C = a(z_A - z_B)$ ، و منه : $a = \frac{z_B - z_C}{z_A - z_B} = \frac{i+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i}{1+i-i}$ ،

و منه : $a = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$. نختار : $z_B = az_A + b$ ، أي : $i = (\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i)(1+i)+b$ ، و منه : $b = 0$.

إذن العبارة المركبة للتشابه S هي : $\boxed{z' = (\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i)z}$.

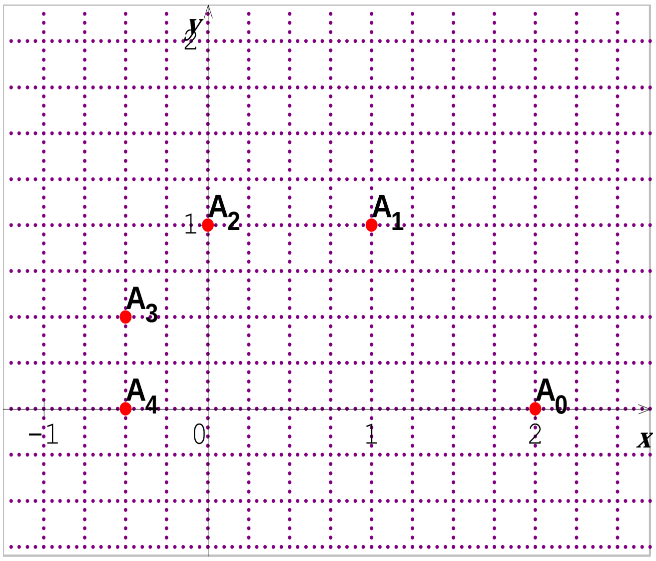
العناصر المميزة لـ S : **النسبة :** $k = \left|\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ، **الزاوية :** $\arg(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i) = \frac{\pi}{4}$ ، **المركز :** المبدأ O .

3) أ) حساب : z_4, z_3, z_2, z_1 ، ثمّ تعليم النقط : A_4, A_3, A_2, A_1, A_0 .

لدينا : $z_{n+1} = \frac{1+i}{2}z_n$ ، أي : $z_1 = \frac{1+i}{2}z_0 = \frac{1+i}{2}\times 2 = 1+i$ $z_2 = \frac{1+i}{2}z_1 = \frac{1+i}{2}\times 1+i = i$ ،

$z_3 = \frac{1+i}{2}z_2 = \frac{1+i}{2}\times i = -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$ ، $z_4 = \frac{1+i}{2}z_3 = -\frac{1}{2}$

تعليم النقط : (**أنظر الشكل المقابل**) .



ب) برهان أنّ : $z_n = 2\times(\frac{\sqrt{2}}{2})^n.\ e^{i\frac{n\pi}{4}}$.

- التحقق من أجل $n = 0$ ، أي : $z_0 = 2$ (**محققة**) .

- نفرض صحة : $z_n = 2\times(\frac{\sqrt{2}}{2})^n.\ e^{i\frac{n\pi}{4}}$.

- و نبرهن صحة : $z_{n+1} = 2\times(\frac{\sqrt{2}}{2})^{n+1}.\ e^{i\frac{(n+1)\pi}{4}}$.

لدينا فرضا : $z_n = 2\times(\frac{\sqrt{2}}{2})^n.\ e^{i\frac{n\pi}{4}}$ ، أي : $z_{n+1} = \frac{1+i}{2}\times 2(\frac{\sqrt{2}}{2})^n.\ e^{i\frac{n\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\times 2(\frac{\sqrt{2}}{2})^n.\ e^{i\frac{n\pi}{4}}$ ،

أي : $z_{n+1} = 2\times(\frac{\sqrt{2}}{2})^{n+1}.\ e^{i(\frac{\pi}{4}+\frac{n\pi}{4})}$ ، و منه : $z_{n+1} = 2\times(\frac{\sqrt{2}}{2})^{n+1}.\ e^{i\frac{(n+1)\pi}{4}}$ و هو المطلوب .

إذن : من أجل كل عدد طبيعي n : $z_n = 2\times(\frac{\sqrt{2}}{2})^n.\ e^{i\frac{n\pi}{4}}$.

ج) النقطة A_n تكون في القرص الذي مركزه O و نصف قطره $0,1$:

معناه أنّ : $OA_n \leq 0,1$ ، أي : $|z_n| \leq 0,1$ ، أي : $2\times(\frac{\sqrt{2}}{2})^n \leq 0,1$ ، أي : $(\frac{\sqrt{2}}{2})^n \leq 0,05$ ، و منه :

$\ln(\frac{\sqrt{2}}{2})^n \leq \ln(0,05)$ ، أي : $n\ln(\frac{\sqrt{2}}{2}) \leq \ln(0,05)$ ، ومنه : $n \geq \frac{\ln(0,05)}{\ln(\frac{\sqrt{2}}{2})}$ ، أي : $n \geq 8,64$.

إذن : $n \in \{9;10;11;12;........\}$ و منه : أوّل نقطة تكون في القرص الذي مركزه O و نصف قطره $0,1$ هي : A_9 .

II) A: "النقطة A_n تنتمي إلى محور الفواصل" معناه أنّ : z_n حقيقي ، أي : $\arg(z_n) = k\pi$ ، أي : $\frac{n\pi}{4} = k\pi$

أي : $\frac{n}{4} = k$ ، و منه : $n = 4k$ ، (n مضاعف لـ 4) أي : $n \in \{4;8;12,16;20;24;28\}$. إذن : $p(A) = \frac{7}{30}$.

B: "النقطة A_n تنتمي إلى محور التراتيب" معناه أنّ : z_n تخيلي صرف ، أي : $\arg(z_n) = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ، أي :

$\frac{n\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ، و منه : $n = 4k+2$ ، أي : $n \in \{2;6;10,14;18,22,26;30\}$. إذن : $p(B) = \frac{8}{30} = \frac{4}{15}$.

C: "النقطة A_n تنتمي إلى المستقيم ذو المعادلة $y = x$" ، أي أنّ : $\arg(z_n) = \frac{\pi}{4} + k\pi$ ، أي : $\frac{n\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + k\pi$

أي : $\frac{n}{4} = \frac{1}{4} + k$ ، ومنه : $n = 4k+1$ ، أي : $n \in \{1;5;9;13;17;21,25,29\}$. إذن : $p(C) = \frac{8}{30} = \frac{4}{15}$.

كتابة الأستاذ : بلقاسم عبدالرزاق

التمرين 10 :

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$.

- نعتبر A و B نقطتان لاحقاتاهما على الترتيب : $a=1$ و $b=-1$.

- نرفق بكل نقطة M من المستوي ذات اللاحقة z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث : $z'=\dfrac{z-1}{z+1}$ مع $z\neq-1$

1) أ) عيّن و أنشئ المجموعة (Δ) للنقط M ذات اللاحقة z حيث يكون z' عدداً حقيقياً .

ب) عيّن و أنشئ المجموعة (Δ') للنقط M ذات اللاحقة z حيث يكون z' تخيلياً صرفاً.

ج) عيّن و أنشئ المجموعة (D) للنقط M ذات اللاحقة z حيث يكون : $|z'|=1$.

2) أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد مركب z يختلف عن -1 يكون : $(z'-1)(z+1)=-2$.

ب) إستنتج أنّ : $AM'\times BM=2$ و $(\vec{u};\overrightarrow{AM'})+(\vec{u};\overrightarrow{BM})=\pi+2k\pi$.

3) بيّن أنّه إذا كانت M تنتمي إلى الدائرة (T) ذات المركز B و نصف القطر 2 فإنّ M' تنتمي إلى الدائرة (T') يطلب تعيينها .

4) نرفق بكل نقطة $M(z)$ من المستوي النقطة N ذات اللاحقة $-\bar{z}$.

❖ بيّن أنّه إذا كانت M تختلف عن B فإنّ M' تنتمي إلى نصف المستقيم $[AN)$.

5) نعتبر K النقطة ذات اللاحقة : $t=-2+i\sqrt{3}$.

أ) أكتب $(t+1)$ على الشكل الأسي .

ب) بيّن أنّ النقطة K تنتمي إلى الدائرة (T) .

6) باستعمال الأسئلة السابقة ، أعط إنشاءاً للنقطة K' المرفقة بالنقطة K بواسطة العلاقة : $z'=\dfrac{z-1}{z+1}$.

حل التمرين 10 :

1) أ) يكون z' عدداً حقيقياً معناه : $z'=0$ أو $\arg(z')=k\pi$ ، أي : $\frac{z-1}{z+1}=0$ أو $(\overrightarrow{BM};\overrightarrow{AM})=k\pi$

أي : $\begin{cases} z-1=0 \\ z+1\neq 0 \end{cases}$ أو $(\overrightarrow{BM};\overrightarrow{AM})=k\pi$ ، و منه : المجموعة (Δ) للنقط M ذات اللاحقة z حيث يكون z' عدداً حقيقياً هي المستقيم (AB) ما عدا النقطة B .

ب) يكون z' تخيلياً صرفاً معناه : $z'=0$ أو $\arg(z')=\frac{\pi}{2}+k\pi$

أي : $\frac{z-1}{z+1}=0$ أو $(\overrightarrow{BM};\overrightarrow{AM})=\frac{\pi}{2}+k\pi$ ، أي : $\begin{cases} z-1=0 \\ z+1\neq 0 \end{cases}$ أو المثلث AMB قائم في M .

و منه : المجموعة (Δ') للنقط M ذات اللاحقة z حيث يكون z' عدداً تخيلياً صرفاً هي الدائرة ذات القطر AB ما عدا النقطة B .

ج) يكون $|z'|=1$ ، أي : $\left|\frac{z-1}{z+1}\right|=1$ ، أي : $|z-1|=|z+1|$ ، أي : $AM=BM$.

و منه : المجموعة (D) للنقط M ذات اللاحقة z حيث يكون $|z'|=1$ هي محور قطعة المستقيم $[AB]$.

2) أ) لنبيّن أنّ : $(z'-1)(z+1)=-2$.

$(z'-1)(z+1)=(\frac{z-1}{z+1}-1)(z+1)$ ، أي : $(z'-1)(z+1)=(\frac{z-1-z-1}{z+1})(z+1)$ ،

أي : $(z'-1)(z+1)=(\frac{-2}{z+1})(z+1)$ ، و منه : $(z'-1)(z+1)=-2$ و هو المطلوب .

ب) لدينا : $(z'-1)(z+1)=-2$ ، أي : $|z'-1|.|z+1|=2$ و $\arg\left[(z'-1)(z+1)\right]=\pi+2k\pi$

أي : $AM'\times BM=2$ و $\arg(z'-1)+\arg(z+1)=\pi+2k\pi$.

و منه : $AM'\times BM=2$ و $(\vec{u};\overrightarrow{AM'})+(\vec{u};\overrightarrow{BM})=\pi+2k\pi$ ، و هو المطلوب .

3) إذا كانت M تنتمي إلى الدائرة (T) ذات المركز B و نصف القطر 2 هذا يعني أنّ : $BM=2$.

أي : $AM'\times BM=2$ تصبح : $AM'\times 2=2$ و منه : $AM'=1$.

إذن : M' ستكون تنتمي إلى الدائرة (T') ذات المركز A و نصف القطر 1 .

4) لإثبات أنّ : $M'\in[AN)$ يكفي تبيين أنّ : $\overrightarrow{AN}$ و $\overrightarrow{AM}$ مرتبطين خطيا و لهما نفس الإتجاه ، أي أنّ :

$(\overrightarrow{AN};\overrightarrow{AM'})=0+2k\pi$.

*) لنحسب $(\overrightarrow{AN};\overrightarrow{AM'})$:

حسب علاقة شال يكون لدينا : $(\overrightarrow{AN};\overrightarrow{AM'}) = (\overrightarrow{AN};\vec{u}) + (\vec{u};\overrightarrow{AM'}) + 2k\pi$ ، أي :

$(\overrightarrow{AN};\overrightarrow{AM'}) = -(\vec{u};\overrightarrow{AN}) + (\vec{u};\overrightarrow{AM'}) + 2k\pi$ ، أي : $(\overrightarrow{AN};\overrightarrow{AM'}) = -\arg(z_N - z_A) + (\vec{u};\overrightarrow{AM'}) + 2k\pi$

أي : $(\overrightarrow{AN};\overrightarrow{AM'}) = -\arg(-\bar{z} - 1) + (\vec{u};\overrightarrow{AM'}) + 2k\pi$ أي : $(\overrightarrow{AN};\overrightarrow{AM'}) = \arg(-z - 1) + (\vec{u};\overrightarrow{AM'}) + 2k\pi$

أي : $(\overrightarrow{AN};\overrightarrow{AM'}) = \arg\left[-(z+1)\right] + (\vec{u};\overrightarrow{AM'}) + 2k\pi$ ، أي :

$(\overrightarrow{AN};\overrightarrow{AM'}) = \arg(-1) + \arg(z+1) + (\vec{u};\overrightarrow{AM'}) + 2k\pi$ ، أي :

$(\overrightarrow{AN};\overrightarrow{AM'}) = \pi + \arg(z+1) + (\vec{u};\overrightarrow{AM'}) + 2k\pi$ ، أي : $(\overrightarrow{AN};\overrightarrow{AM'}) = \pi + (\vec{u};\overrightarrow{BM}) + (\vec{u};\overrightarrow{AM'}) + 2k\pi$

و نعلم أنّ : $(\vec{u};\overrightarrow{AM'}) + (\vec{u};\overrightarrow{BM}) = \pi + 2k\pi$ ، أي : $(\overrightarrow{AN};\overrightarrow{AM'}) = 2\pi + 2k\pi$.

و منه : $(\overrightarrow{AN};\overrightarrow{AM'}) = 0 + 2k\pi$ و عليه فإنّ : $M' \in [AN]$.

5) أ) لدينا : K لاحقتها $t = -2 + i\sqrt{3}$ ، أي : $t + 1 = -1 + i\sqrt{3}$.

$|t+1| = \left|-1 + i\sqrt{3}\right| = 2$ ، أي : $t + 1 = 2(\frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})$ ، و منه : $t + 1 = 2.e^{-i\frac{2\pi}{3}}$.

ب) لنبيّن أنّ النقطة K تنتمي إلى الدائرة (T) :

*) نحسب الطول BK : $BK = \left|z_K - z_B\right| = \left|-2 + i\sqrt{3} + 1\right| = \left|-1 + i\sqrt{3}\right|$ ، و منه : $BK = 2$.

إذن : النقطة K تنتمي إلى الدائرة (T) ذات المركز B و نصف القطر 2 .

6) *) بما أنّ : النقطة K تنتمي إلى الدائرة (T) ، فحسب السؤال (3) : النقطة K' ستكون تنتمي إلى الدائرة (T') ذات المركز A و نصف القطر 1 .

*) و حسب السؤال (4) : النقطة K' ستكون تنتمي إلى نصف المستقيم $[AN)$ حيث : $z_N = -\overline{z_K}$.

أي : $z_N = 2 + i\sqrt{3}$.

- من هذا و ذاك نستنتج أنّ النقطة K' هي نقطة تقاطع الدائرة (T') مع نصف المستقيم $[AN)$.

❖ **ملاحظة : يبقى الإنشاء يتم بطريقة عادية فكل الأمور واضحة .**

كتابة الأستاذ : بلقاسم عبدالرزاق

التمرين الأول :

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O\ ;\ \vec{u}\ ;\vec{v})$.

لتكن النقط C, B, A لواحقها على الترتيب : $z_C=-1+3i$, $z_B=2+4i$, $z_A=3+i$.

1. نفرض الانسحاب T الذي شعاعه $\overrightarrow{OA}$. بين أن صورة C بهذا الانسحاب هي B .

2. أحسب العدد المركب $\frac{z_C}{z_A}$ و اكتبه على الشكل الأسي . استنتج طبيعة المثلث OAC، ثم طبيعة الرباعي $OABC$.

3. عين لاحقة النقطة E مركز الدائرة المحيطة بالرباعي $OABC$.

4. نعتبر $(\mathcal{C})$ هي مجموعة النقط M من المستوي حيث : $\left\|\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=4\sqrt{5}$.

أ) تحقق أن النقطة O تنتمي إلى المجموعة $(\mathcal{C})$.

ب) عين طبيعة المجموعة $(\mathcal{C})$ ثم أنشئها .

التمرين الثاني :

في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O\ ;\ \vec{u}\ ;\vec{v})$ وحدته 2cm ، نعتبر الدوران r الذي مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{4}$.

1. أعط العبارة المركبة للدوران r .

2. نفرض النقطة A_0 لاحقتها $z_0=2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n نضع : A_{n+1} هي صورة A_n بالدوران r .

أ) عبر عن العدد z_{n+1} لاحقة النقطة A_{n+1} بدلالة z_n لاحقة النقطة A_n .

ب) أحسب الأعداد : z_4, z_3, z_2, z_1 ، ثم علم النقط : $A_4, A_3, A_2, A_1\ A_0$ في المعلم $(O\ ;\ \vec{u}\ ;\vec{v})$.

3. أ) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي يكون : $z_n=2e^{i\frac{n\pi}{4}}$.

ب) علم النقطتين A_{1440} و A_{2019} .

4. أ) عين قيم العدد الطبيعي n حتى تكون النقطة A_n مطابقة للنقطة A_0 .

ب) عين قيم العدد الطبيعي n حتى تكون النقطة A_n في المسقيم ذي المعادلة : $y=-x$.

التمرين الثالث :

1 . حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $-z^2+4z-\frac{25}{4}=0$.

- إستنتج حلول المعادلة : $-\left(z+1-\frac{1}{2}i\right)^2+4\left(z+1-\frac{1}{2}i\right)-\frac{25}{4}=0$.

2. في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O\ ;\ \vec{u}\ ;\vec{v})$ وحدته 2cm .

– علم النقط D , C , B , A لواحقها على الترتيب : $z_A=1-i$, $z_B=1+2i$, $z_C=2+\frac{3}{2}i$, $z_D=2-\frac{3}{2}i$

– ما طبيعة الرباعي ABCD ؟ .

3. نعتبر M نقطة من المستقيم (AB) ترتيبها α والنقطة N هي صورة M بالدوران الذي مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

– عين قيمة العدد α حتى تكون N على إستقامية مع النقطتين O و A .

4. عين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث يكون العدد $\frac{z-1+i}{z-1-2i}$ حقيقيا سالبا تماما .

التمرين الرابع :

1 . حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-4z+5=0$.

2. في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O\ ;\ \vec{u}\ ;\vec{v})$

نفرض النقطتين $B(2+i)$, $A(2-i)$ و نعتبر التحاكي h الذي مركزه O ونسبته 2 .

ولتكن I منتصف القطعة $[AB]$. عين لاحقة النقطة E صورة I بالتحاكي h .

3. أحسب العدد $\frac{z_B-z_A}{z_E}$. إستنتج طبيعة الرباعي $OAEB$ ، ثم أحسب مساحته .

4. عين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث : $|z_A-z|^2+|z_B-z|^2=4$.

حلول التمارين النموذجية في التحويلات النقطية

حل التمرين الأول :

1) لإثبات أنّ النقطة B هي صورة C بالإنسحاب T الذي شعاعه $\overrightarrow{OA}$ يكفي أن نبيّن أنّ : $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{OA}$ ، أي : $z_B - z_C = z_A - z_O$ ، بعد الحساب نجد أنّ المساواة محققة ، و منه صورة C بالإنسحاب T هي B .

2)*) حساب العدد $\frac{z_C}{z_A}$: بعد الحساب نجد : $\frac{z_C}{z_A}=i$.

*) الشكل الأسي للعدد $\frac{z_C}{z_A}$: $\frac{z_C}{z_A}=e^{i\frac{\pi}{2}}$.

*) لدينا : $|z_C|=|z_A|$ و $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OC})=\frac{\pi}{2}+2k\pi$

و منه : المثلث OAC متقايس الضلعين و قائم في A .

*) طبيعة الرباعي $OABC$:

بما أنّ : $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{OA}$ إذن : $OABC$ متوازي أضلاع ، لكن
المثلث OAC متقايس الضلعين و قائم في A ، إذن الرباعي $OABC$ هو مربع .

3)لدينا : E هي منتصف القطرين $[OB]$ و $[AC]$ و منه :

$z_E = \frac{z_O+z_B}{2}=\frac{2+4i}{2}=1+2i$.

4) لدينا : $(C):\left\|\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=4\sqrt{5}$

المساواة تكافئ : $\left\|4\overrightarrow{ME}\right\|=4\sqrt{5}$ لأنّ : E هي مرجح الجملة المثقلة $\{(A;1);(B;1);(C;1);(O;1)\}$ ، أي : $\left\|\overrightarrow{ME}\right\|=\sqrt{5}$

أ) التحقق أنّ $O\in(C)$: نعوض O بـ M و نحسب $\left\|\overrightarrow{ME}\right\|$ ، نجد : $\left\|\overrightarrow{ME}\right\|=|z_E-z_O|=|1+2i|=\sqrt{5}$.

و منه : $O\in(C)$.

ب) طبيعة المجموعة (C) :

بما أنّ : $\left\|\overrightarrow{ME}\right\|=\sqrt{5}$ ، أي : $ME=\sqrt{5}$ ، و منه :

المجموعة (C) هي الدائرة التي مركزها E و نصف قطرها $\sqrt{5}$

حل التمرين الثاني :

1) العبارة المركبة للتحويل r : $z'-z_O=e^{i\frac{\pi}{4}}(z-z_O)$

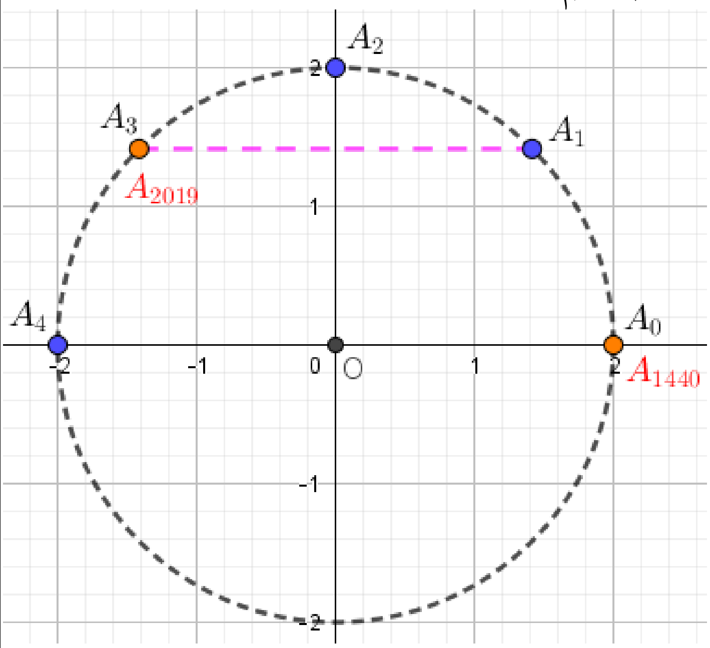
و منه : $z'=e^{i\frac{\pi}{4}}.z$ أو : $z'=(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2})z$.

2) أ) بما أنّ النقطة A_{n+1} هي صورة A_n بواسطة r ، إذن : $z_{n+1}=(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2})z_n$.

ب) *) حساب الأعداد :

$z_1=\sqrt{2}+i\sqrt{2}$ ، $z_2=2i$ ، $z_3=-\sqrt{2}+i\sqrt{2}$ ، $z_4=-2$.

*) تعليم النقط :



3) أ) البرهان أنّ : $z_n=2.e^{i\frac{n\pi}{4}}$.

- نتحقق من أجل $n=0$ ، أي : $z_0=2$ (محققة) .

- نفرض أنّ : $z_n=2.e^{i\frac{n\pi}{4}}$.

- و لنثبت أنّ : $z_{n+1}=2.e^{i\frac{(n+1)\pi}{4}}$.

نعلم أنّ : $z_{n+1}=e^{i\frac{\pi}{4}}.z_n$ و فرضا لدينا : $z_n=2.e^{i\frac{n\pi}{4}}$

أي : $z_{n+1}=e^{i\frac{\pi}{4}}\times 2.e^{i\frac{n\pi}{4}}$ ، أي : $z_{n+1}=2.e^{i(\frac{\pi}{4}+\frac{n\pi}{4})}$

و منه : $z_{n+1}=2.e^{i(n+1)\frac{\pi}{4}}$ ، إذن : من أجل كل عدد طبيعي n يكون : $z_n=2.e^{i\frac{n\pi}{4}}$.

ب) تعليم النقطتين A_{1440} و A_{2019} : **(أنظر الشكل أعلاه)**

*) لدينا : $z_{1440}=2.e^{i(\frac{1440\pi}{4})}=2.e^{i380\pi}=2.e^{i\times0}=2$

إذن : النقطة A_{1440} تنطبق على النقطة A_0 .

*) لدينا : $z_{2019}=2.e^{i(\frac{2019\pi}{4})}=2.e^{i(504\pi+\frac{3\pi}{4})}=2.e^{i\frac{3\pi}{4}}$

أي : $z_{2019}=z_3$ ، و منه النقطة A_{2019} تنطبق على A_3 .

4) أ) النقطة A_n تنطبق على A_0 إذا كان z_n حقيقيا موجبا

أي : $\arg(z_n)=0+2k\pi$ ، أي : $\frac{n\pi}{4}=2k\pi$

أي : $\frac{n}{4}=2k$ ، و منه : $n=8k$ (n مضاعف لـ 8) .

ب) النقطة A_n تنتمي للمستقيم ذو المعادلة : $y=-x$

أي : $\arg(z_n)=-\frac{\pi}{4}+k\pi$ ، أي :

$\frac{n\pi}{4}=-\frac{\pi}{4}+k\pi$ ، أي : $\frac{n}{4}=-\frac{1}{4}+k$ ،

و منه : $n=4k-1$.

حل التمرين الثالث :

1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $-z^2+4z-\frac{25}{4}=0$.

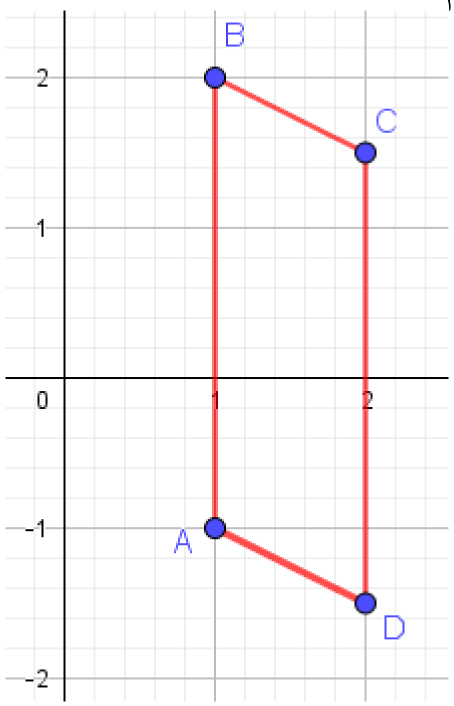
نجد : $\Delta=(3i)^2$ و $z_1=2-\frac{3}{2}i$ ، $z_2=2+\frac{3}{2}i$

*) إستنتاج حلول المعادلة :

مما سبق لدينا : $z+1-\frac{1}{2}i=2-\frac{3}{2}i$ أي : $z=1-i$

أو $z+1-\frac{1}{2}i=2+\frac{3}{2}i$ ، أي : $z=1+2i$.

2) *) تعليم النقط :



*) طبيعة الرباعي $ABCD$:

من خلال الشكل نلاحظ أنّ الرباعي هو متوازي أضلاع

- لنبين ذلك :

بعد الحساب نجد أنّ : $z_D-z_A=z_C-z_B$ ، و منه :

$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$ ، إذن الرباعي $ABCD$ هو متوازي أضلاع .

3) لدينا : النقطة M نقطة من (AB) و بما أنّ للنقطتين A و B نفس الفاصلة 1 فستكون : $M(1;\alpha)$.

لدينا : النقطة N هي صورة M بالدوران الذي مركزه O و زاويته $\frac{\pi}{2}$ ، أي : $z_N-z_O=e^{i\frac{\pi}{2}}(z_M-z_O)$ ، أي :

$z_N=i(z_M)$ ، أي : $z_N=i(1+i\alpha)$ ، أي :

$z_N=i-\alpha$ ، و منه : $z_N=-\alpha+i$.

*) تكون النقطة N على إستقامية مع O و A إذا كان : العدد $\frac{z_N-z_O}{z_A-z_O}$ حقيقيا ، أي : $(\frac{-\alpha+1}{1-i})\in\mathbb{R}$.

أي : $\frac{z_N}{z_A}=\frac{-\alpha-1}{2}+i\frac{1-\alpha}{2}$.

إذن : تكون N على استقامية مع O و A إذا كان :

$\frac{1-\alpha}{2}=0$ ، و منه : $\alpha=1$.

4) العدد $\frac{z-1+i}{z-1-2i}$ حقيقي سالب معناه أنّ :

$\frac{z-1+i}{z-1-2i}\neq 0$ و $\arg(\frac{z-1+i}{z-1-2i})=\pi+2k\pi$

أي : $\begin{cases} z\neq z_A \\ z\neq z_B \end{cases}$ و $\arg(\overrightarrow{BM};\overrightarrow{AM})=\pi+2k\pi$.

و منه : مجموعة النقط M هي قطعة المستقيم $[AB]$ ماعدا النقطتين A و B .

حل التمرين الرابع :

1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-4z+5=0$.

نجد : $\Delta=(2i)^2$ و $z_1=2+i$ ، $z_2=2-i$.

2) لدينا : I هي منتصف $[AB]$ ، أي أنّ : $z_I=2$.

لدينا : النقطة E هي صورة I بالتحاكي h ، أي :

$\overrightarrow{OE}=2\overrightarrow{OI}$ ، أي : $z_E=2.z_I$ ، و منه : $z_E=4$.

3) حساب العدد $\frac{z_B-z_A}{z_E}$:

بعد الحساب نجد : $\frac{z_B-z_A}{z_E}=\frac{1}{2}i$.

*) طبيعة الرباعي $OAEB$:

لدينا : I منتصف $[AB]$ و أيضا منتصف $[OE]$ ، أي :

القطران متناصفان ، إذن الرباعي $OAEB$ متوازي أضلاع

و بما أنّ : $\frac{z_B-z_A}{z_E}=\frac{1}{2}i$ ، أي : $\arg(\overrightarrow{OE};\overrightarrow{AB})=\frac{\pi}{2}$

إذن : القطران متعامدان ، و عليه سيكون الرباعي $OAEB$ معيّن .

*) حساب مساحة الرباعي $OAEB$:

$S_{OAEB}=\frac{AB\times OE}{2}=\frac{4}{2}=2(u.a)$.

4) تعيين مجموعة النقط M :

لدينا : $|z_A-z|^2+|z_B-z|^2=4$ ، أي :

$MA^2+MB^2=4$ ، نعلم أنّ : $AB^2=4$

و منه : $MA^2+MB^2=AB^2$ (مبرهنة فيثاغورس)

إذن : مجموعة النقط M هي الدائرة التي قطرها AB .

ملاحظة : يمكن وضع $z=x+iy$ فنجد معادلة الدائرة .

بالتوفيق للجميع في بكالوريا 2019

الأستاذ : ب.ع

نفرض في كل ما يلي المستوي مركب و مزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O\,,\vec{u}\,,\vec{v})$.

عين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z في كل حالة من الحالات الآتية : (كل سؤال مستقل عن الآخر) .

1) $|z| = 3$.
2) $|z-1+2i| = 5$.
3) $|\overline{z}| = 4$.
4) $|\overline{z}+2-3i| = 2$.
5) $|z-2+i| = |z+1-2i|$.
6) $|\overline{z}-2+i| = |\overline{z}+1-2i|$.
7) $z\times\overline{z} = 3$.
8) $(z-2)(\overline{z}-2) = 4$.
9) $z+\overline{z} = 0$.
10) $z-\overline{z} = 0$.
11) $Re(z) = 4$
12) $Re(z)+Im(z) = 0$
13) $Re(z^2) = 0$.
14) $Im(z^2) = 0$.
15) $|z| \leq 2$.
16) $|z| \geq 2$.
17) $3 \leq |z| \leq 4$.
18) $\left|\frac{z-2+i}{z}\right| = 1$.
19) $|z-1| < |z+1-2i|$.
20) $|z-2| = |\overline{z}+i|$.
21) $|iz+3| = |z+4+i|$.
22) $|2\overline{z}+1| = 1$.
23) $|z|^2 = z+\overline{z}$.
24) $\left|\frac{iz+1+i}{z+2}\right| = 1$.
25) $|z-i| = |1-z|$.

....

26) $z = 1+2i+3e^{i\theta}\ ,\ (\theta\in\mathbb{R})$.
27) $z = 2-i+ke^{i\frac{\pi}{3}}\ ,\ (\mathrm{k}\in\mathbb{R}^+)$.
28) $z = 2-i+ke^{i\frac{\pi}{3}}\ ,\ (\mathrm{k}\leq 0)$
29) $z = 2-i+ke^{i\frac{\pi}{3}}\ ,\ (\mathrm{k}\in\mathbb{R})$.
30) $z = 2-i+ke^{i\frac{\pi}{3}}\ ,\ (\mathrm{k}\in\mathbb{R}^*)$.
31) $\arg(z) = \frac{\pi}{3}+2k\pi$, (k عددصحيح).
32) $\arg(z) = \frac{\pi}{3}+k\pi$, (k عددصحيح) .
33) $\arg(\overline{z}) = \frac{\pi}{3}+k\pi$, (k عددصحيح).
34) $\arg(z-1+2i) = \frac{\pi}{4}+2k\pi$, .
35) $\arg(z-1+2i) = \frac{\pi}{4}+k\pi$, .
36) $\arg(\overline{z}+2-3i) = -\frac{\pi}{6}+2k\pi$.
37) العدد $\left(\frac{z-1+2i}{z+i}\right)$ حقيقي غير معدوم .
38) العدد $\left(\frac{z-1+2i}{z+i}\right)$ حقيقي سالب تماما .
39) العدد $\left(\frac{z-1+2i}{z+i}\right)$ حقيقي موجب تماما .
40) العدد $\left(\frac{z-1+2i}{z+i}\right)$ تخيلي صرف .
41) باك 2015 :

$z = k(1+i)e^{i\frac{7\pi}{12}}$ مع k يمسح $\mathbb{R}^+$.

42) $\arg\left(\frac{z}{\overline{z}}\right) = 2k\pi$.
43) $\arg(-z) = \arg(\overline{z})+2k\pi$.
44) $arg(z)-arg(-\overline{z}) = \frac{\pi}{3}+2k\pi$
45) $\overline{z} = 1-2i+k(1-i)e^{i\frac{\pi}{4}}$ مع $(k>0)$.
46) $z = 2-ke^{i\frac{\pi}{6}}$ مع $(k>0)$.

....

تذكير : في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس :

1. كل مستقيم له معادلة من الشكل : $ax+by+c=0$. حيث $a\,,b$ عددان غير معدومين معا .

2. كل دائرة لها معادلة من الشكل : $(x-a)^2+(y-b)^2 = R^2$. النقطة $\omega(a\,;b)$ هي المركز و R هو نصف القطر .

حلول أسئلة مجموعة النقط في الأعداد المركبة

كل جواب فيما يلي مستقل عن الآخر :

الخاصية	التفسير الهندسي	مجموعة النقط M
1) $\lvert z\rvert=3$	$OM=3$.	هي الدائرة التي مركزها O و نصف قطرها 3 .
2) $\lvert z-1+2i\rvert=5$.	$AM=5$ ، مع $A(1;-2)$.	هي الدائرة التي مركزها A و نصف قطرها 5 .
3) $\lvert\overline{z}\rvert=4$ أي : $\lvert z\rvert=4$.	$OM=4$.	هي الدائرة التي مركزها O و نصف قطرها 4 .
4) $\lvert\overline{z}+2-3i\rvert=2$ أي : $\lvert z-(-2-3i)\rvert=2$.	$BM=2$ ، مع $B(-2;-3)$	هي الدائرة التي مركزها B و نصف قطرها 2 .
5) $\lvert z-2+i\rvert=\lvert z+1-2i\rvert$	$AM=BM$ مع $\begin{cases}A(2;-1)\\B(-1;2)\end{cases}$	هي المستقيم المحوري لقطعة المستقيم $[AB]$.
6) $\lvert\overline{z}-2+i\rvert=\lvert\overline{z}+1-2i\rvert$ أي: $\lvert z-2-i\rvert=\lvert z+1+2i\rvert$	$AM=BM$ مع $\begin{cases}A(2;1)\\B(-1;-2)\end{cases}$	هي المستقيم المحوري لقطعة المستقيم $[AB]$.
7) $z\times\overline{z}=3$ أي : $\lvert z\rvert^2=3$ أي : $\lvert z\rvert=\sqrt{3}$.	$OM=\sqrt{3}$.	هي الدائرة التي مركزها O و نصف قطرها $\sqrt{3}$.
8) $(z-2)(\overline{z}-2)=4$ أي : $(z-2)\overline{(z-2)}=4$ أي : $\lvert z-2\rvert^2=4$ أي : $\lvert z-2\rvert=2$	$AM=2$ ، مع $A(2;0)$.	هي الدائرة التي مركزها A و نصف قطرها 2 .
9) $z+\overline{z}=0$ أي : $2\operatorname{Re}(z)=0$ أي : $\operatorname{Re}(z)=0$	$M(x;y)$ هي صورة z حيث : $x=0$.	هي حامل محور التراتيب (yy') .
10) $z-\overline{z}=0$ أي : $2\operatorname{Im}(z)=0$ أي : $\operatorname{Im}(z)=0$.	$M(x;y)$ هي صورة z حيث : $y=0$.	هي حامل محور الفواصل (xx') .
11) $\operatorname{Re}(z)=4$	$M(x;y)$ هي صورة z حيث : $x=4$.	هي المستقيم الموازي لحامل محور التراتيب ذو المعادلة : $x=4$.

12) $\mathrm{Re}(z)+\mathrm{Im}(z)=0$	من أجل كل نقطة M من المستوي تكون إحداثييها متعاكستان .	هي المستقيم ذو المعادلة $y=-x$ (المنصف الثاني) .
13) $\mathrm{Re}(z^2)=0$ أي : $x^2-y^2=0$ ، أي : $y=x$ أو $y=-x$.		هي إتحاد المنصف الأول و المنصف الثاني .
14) $\mathrm{Im}(z^2)=0$ أي : $x.y=0$ أي : $x=0$ أو $y=0$.		هي إتحاد حاملي محوري الإحداثيات (الفواصل و التراتيب) .
15) $\|z\|\leq 2$	$OM\leq 2$.	هي القرص الذي مركزه O و نصف قطره 2 .
16) $\|z\|\geq 2$	$OM\geq 2$.	هي المستوي ما عدا القرص المفتوح الذي مركزه O و نصف قطره 2 .
17) $3\leq\|z\|\leq 4$	$3\leq OM\leq 4$.	هي الحلقة المحددة بين القرص الذي مركزه O و نصف قطره 3 و القرص الذي مركزه O و نصف قطره 4 .
18) $\left\|\frac{z-2+i}{z}\right\|=1$ أي : $\|z-2+i\|=\|z\|$.	$AM=OM$ مع $A(2;1)$.	هي المستقيم المحوري لقطعة المستقيم $[OA]$.
19) $\|z-1\|<\|z+1-2i\|$ أي : $\|z-1\|<\|z-(-1+2i)\|$	$AM<BM$ مع $\begin{cases}A(1;0)\\B(-1;2)\end{cases}$ حيث تكون M أقرب إلى A	هي نصف المستوي المحدّد بالمستقيم المحوري لقطعة المستقيم $[AB]$ و الذي يشمل A .
20) $\|z-2\|=\|\bar{z}+i\|$ أي : $\|z-2\|=\|z-i\|$.	$AM=BM$ مع $\begin{cases}A(2;0)\\B(0;1)\end{cases}$	هي المستقيم المحوري لقطعة المستقيم $[AB]$.
21) $\|iz+3\|=\|z+4+i\|$ أي : $\|i\|.\left\|z+\frac{3}{i}\right\|=\|z+4+i\|$ أي : $\|z-3i\|=\|z+4+i\|$ أي : $\|z-3i\|=\|z-(-4-i)\|$	$AM=BM$ مع : $\begin{cases}A(0;-3)\\B(-4;-1)\end{cases}$	هي المستقيم المحوري لقطعة المستقيم $[AB]$.

22) $\left\|2\bar{z}+1\right\|=1$ أي : $2.\left\|\bar{z}+\frac{1}{2}\right\|=1$ أي : $\left\|z+\frac{1}{2}\right\|=\frac{1}{2}$.	$AM=\frac{1}{2}$ مع : $A(-\frac{1}{2};0)$	هي الدائرة التي مركزها A و نصف قطرها $\frac{1}{2}$
23) $\left\|z\right\|^2=z+\bar{z}$ أي : $x^2+y^2=2x$ أي : $x^2+y^2-2x=0$ أي : $(x-1)^2-1+y^2=0$ و منه : $(x-1)^2+y^2=1$.	هذه الأخيرة هي معادلة دائرة .	هي الدائرة التي مركزها $\Omega(1;0)$ و نصف قطرها 1 .
24) $\left\|\frac{iz+1+i}{z+2}\right\|=1$ أي : $\left\|iz+1+i\right\|=\left\|z+2\right\|$ أي : $\left\|i\right\|.\left\|z+\frac{1}{i}+1\right\|=\left\|z+2\right\|$ أي : $\left\|z+1-i\right\|=\left\|z+2\right\|$.	$AM=BM$ مع $\begin{cases}A(1;-1)\\B(2;0)\end{cases}$	هي المستقيم المحوري لقطعة المستقيم $[AB]$.
25) $\left\|z-i\right\|=\left\|1-z\right\|$ أي : $\left\|z-i\right\|=\left\|z-1\right\|$.	$AM=BM$ مع : $\begin{cases}A(0;1)\\B(1;0)\end{cases}$	هي المستقيم المحوري لقطعة المستقيم $[AB]$.
26) $z=1+2i+3e^{i\theta}$ أي : $z-z_A=3e^{i\theta}$ ، و منه : $\left\|z-z_A\right\|=3$.	$AM=3$ مع $A(1;2)$	هي الدائرة التي مركزها A و نصف قطرها 3 .
27) $z=2-i+ke^{i\frac{\pi}{3}}$. لدينا : $k\in\mathbb{R}^+$ أي نميز حالتين : *) لما $k=0$ يكون : $z=2-i$ أي : $z=z_A$. *) لما $k>0$ يكون : $z-z_A=ke^{i\frac{\pi}{3}}$ أي تصبح : $\arg(z-z_A)=\frac{\pi}{3}$.	*) $M=A$ مع $A(2;-1)$. *) $(\vec{u};\overrightarrow{AM})=\frac{\pi}{3}+2k\pi$.	*) هي النقطة A . هي نصف المستقيم الذي مبدؤه A و يشكل زاوية قيسها $\frac{\pi}{3}$ مع حامل محور الفواصل .

28) $z=2-i+ke^{i\frac{\pi}{3}}$. لدينا : $k\leq 0$ أي نميز حالتين : *) لما $k=0$ يكون : $z=2-i$ أي : $z=z_A$. *) لما $k<0$ يكون : $z=2-i+ke^{i(\pi+\frac{\pi}{3})}$ ، و منه : $z-z_A=ke^{i\frac{4\pi}{3}}$ ، أي : $\arg(z-z_A)=\frac{4\pi}{3}$.	*) $M=A$ مع $A(2;-1)$. *) $(\vec{u};\overrightarrow{AM})=\frac{4\pi}{3}+2k\pi$.	*) هي النقطة A . *)هي نصف المستقيم الذي مبدؤه A و يشكل زاوية قيسها $\frac{4\pi}{3}$ مع حامل محور الفواصل .
29) $z=2-i+ke^{i\frac{\pi}{3}}$. لدينا : $k\in\mathbb{R}$ ، نميز 3 حالات : *) لما $k=0$ أي : $z=z_A$. *) $k>0$ ، $\arg(z-z_A)=\frac{\pi}{3}$. *) $k<0$ ، $\arg(z-z_A)=\frac{4\pi}{3}$	*) $M=A$ مع $A(2;-1)$. $\left\{(\vec{u};\overrightarrow{AM})=\frac{\pi}{3}+2k\pi\right.$	*) هي النقطة A . *) هي المستقيم المار بالنقطة A و يشكل زاوية قيسها $\frac{\pi}{3}$ مع حامل محور الفواصل .
30) $z=2-i+ke^{i\frac{\pi}{3}}$. لدينا : $k\in\mathbb{R}^*$ ، واضح أنّه تكون حالتين فقط نستثني النقطة A . أي : $\arg(z-z_A)=\frac{\pi}{3}+k\pi$. مع : $z\neq z_A$.	*) $M\neq A$. *) $(\vec{u};\overrightarrow{AM})=\frac{\pi}{3}+k\pi$.	هي المستقيم المار بالنقطة A و يشكل زاوية قيسها $\frac{\pi}{3}$ مع حامل محور الفواصل باستثناء النقطة A .
31) $\arg(z)=\frac{\pi}{3}+2k\pi$. مع : $z\neq 0$.	*) $M\neq O$. *) $(\vec{u};\overrightarrow{OM})=\frac{\pi}{3}+2k\pi$.	هي نصف المستقيم الذي مبدؤه O و يشكل زاوية قيسها $\frac{\pi}{3}$ مع حامل محور الفواصل ، باستثناء المبدأ O .
32) $\arg(z)=\frac{\pi}{3}+k\pi$. مع : $z\neq 0$.	*) $M\neq O$. *) $(\vec{u};\overrightarrow{OM})=\frac{\pi}{3}+k\pi$.	هي المستقيم المار بـــ O و يشكل زاوية قيسها $\frac{\pi}{3}$ مع حامل محور الفواصل باستثناء المبدأ O

33) $\arg(\bar{z})=\frac{\pi}{3}+k\pi$ أي : $\arg(z)=-\frac{\pi}{3}+k\pi$ مع $z\neq 0$	*) $M\neq O$. *) $(\vec{u};\overrightarrow{OM})=-\frac{\pi}{3}+k\pi$.	هي المستقيم المار بـ O و يشكل زاوية قيسها $-\frac{\pi}{3}$ مع حامل محور الفواصل باستثناء المبدأ O .
34) $\arg(z-1+2i)=\frac{\pi}{4}+2k\pi$ مع $z\neq 1-2i$ أي : $z\neq z_A$.	*) $M\neq A$. *) $(\vec{u};\overrightarrow{AM})=\frac{\pi}{4}+2k\pi$.	هي نصف المستقيم الذي مبدؤه A و يشكل زاوية قيسها $\frac{\pi}{4}$ مع حامل محور الفواصل ، باستثناء النقطة A .
35) $\arg(z-1+2i)=\frac{\pi}{4}+k\pi$ مع $z\neq 1-2i$ أي : $z\neq z_A$.	*) $M\neq A$. *) $(\vec{u};\overrightarrow{AM})=\frac{\pi}{4}+k\pi$.	هي المستقيم المار بـ A و يشكل زاوية قيسها $-\frac{\pi}{3}$ مع حامل محور الفواصل باستثناء A .
36) لدينا : $\arg(\bar{z}+2-3i)=-\frac{\pi}{6}+2k\pi$ أي: $\arg(z+2+3i)=\frac{\pi}{6}+2k\pi$ مع $z\neq -2-3i$ أي : $z\neq z_A$.	*) $M\neq A$. *) $(\vec{u};\overrightarrow{AM})=\frac{\pi}{6}+2k\pi$.	هي نصف المستقيم الذي مبدؤه A و يشكل زاوية قيسها $\frac{\pi}{6}$ مع حامل محور الفواصل ، ما عدا النقطة A .
37) $\frac{z-1+2i}{z+i}$ حقيقي غيرمعدوم أي : $\frac{z-1+2i}{z+i}\neq 0$ و $\arg(\frac{z-z_A}{z-z_B})=k\pi$.	*) $M\neq A$ و $M\neq B$ حيث : $A(1;-2)$ و $B(0;-1)$ *) $(\overrightarrow{BM};\overrightarrow{AM})=k\pi$ أي أنّ : النقط $M;B;A$ في إستقامية .	هي المستقيم (AB) باستثناء النقطتين A و B
38) $\frac{z-1+2i}{z+i}$ حقيقي سالب تماما ، أي : $\frac{z-1+2i}{z+i}\neq 0$ و $\arg(\frac{z-z_A}{z-z_B})=\pi+2k\pi$.	*) $M\neq A$ و $M\neq B$ حيث : $A(1;-2)$ و $B(0;-1)$ *) $(\overrightarrow{BM};\overrightarrow{AM})=\pi+2k\pi$.	هي قطعة المستقيم $[AB]$ ما عدا النقطتين A و B .
39) $\frac{z-1+2i}{z+i}$ حقيقي موجب تماما ، أي : $\frac{z-1+2i}{z+i}\neq 0$ و $\arg(\frac{z-z_A}{z-z_B})=2k\pi$.	*) $M\neq A$ و $M\neq B$ حيث : $A(1;-2)$ و $B(0;-1)$ *) $(\overrightarrow{BM};\overrightarrow{AM})=0+2k\pi$. أي أنّ : M تكون خارج القطعة $[AB]$.	هي المستقيم (AB) ما عدا القطعة $[AB]$.

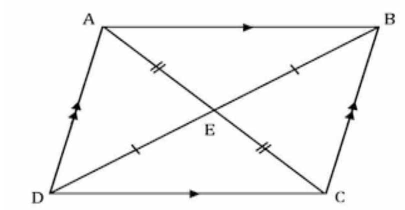
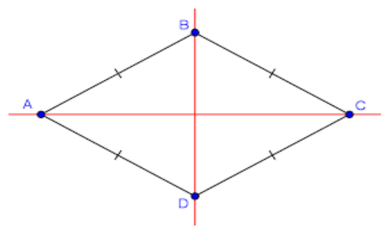
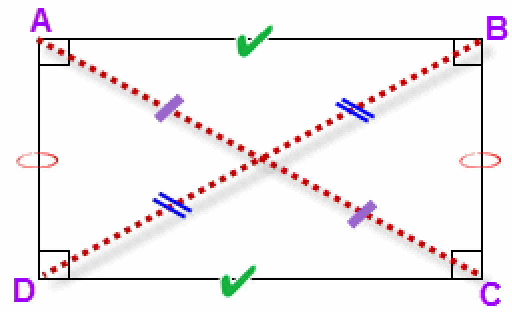
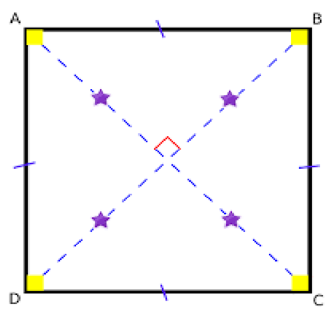
40) $\frac{z-1+2i}{z+i}$ تخيلي صرف أي : $\frac{z-1+2i}{z+i}=0$ و $\arg(\frac{z-z_A}{z-z_B})=\frac{\pi}{2}+k\pi$.	*) $M=A$ و $M\neq B$ حيث : $A(1;-2)$ و $B(0;-1)$ *) $(\overrightarrow{BM};\overrightarrow{AM})=\frac{\pi}{2}+k\pi$. أي : المثلث ABM قائم في M	هي الدائرة التي قطرها $[AB]$ باستثناء النقطة B
41) $z=k(1+i)e^{i\frac{7\pi}{12}}$ أي : $z=k.\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}.e^{i\frac{7\pi}{12}}$ أي : $z=k.\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{6}}$ مع $k\in\mathbb{R}^+$. *)إما $k=0$ أي : $z=0$ ، أو *) $\arg(z)=\frac{5\pi}{6}+2k\pi$.	*) $M=O$. *) $(\vec{u};\overrightarrow{OM})=\frac{5\pi}{6}+2k\pi$.	هي نصف المستقيم الذي مبدؤه O و زاويته $\frac{5\pi}{6}$ ما عدا المبدأ O .
42) $\arg(\frac{z}{\bar{z}})=2k\pi$ أي : $\arg(z)-\arg(\bar{z})=2k\pi$ أي : $\arg(z)+\arg(z)=2k\pi$ ، و منه : $\arg(z)=k\pi$.	*) $M\neq O$. معناه أنّ z حقيقي غير معدوم .	هي حامل محور الفواصل ما عدا المبدأ O .
43) $\arg(-z)=\arg(\bar{z})+2k\pi$ تصبح : $\pi+\arg(z)=-\arg(z)+2k\pi$ أي : $2\arg(z)=-\pi+2k\pi$ و منه : $\arg(z)=-\frac{\pi}{2}+k\pi$.	*) $M\neq O$. معناه أنّ z تخيلي صرف .	هي حامل محور التراتيب ما عدا المبدأ O .
44) لدينا : $\arg(-z)-\arg(-\bar{z})=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ أي : $2\arg(z)=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ و منه : $\arg(z)=\frac{\pi}{6}+k\pi$.	*) $M\neq O$. *) $(\vec{u};\overrightarrow{OM})=\frac{\pi}{6}+k\pi$.	هي المستقيم المار بـ O و يشكل زاوية قيسها $\frac{\pi}{6}$ مع حامل محور الفواصل باستثناء المبدأ O

45) لدينا : $(k>0)$ أي : $\bar{z}=1-2i+k(1-i)e^{i\frac{\pi}{4}}$ أي : $\bar{z}=1-2i+k(\sqrt{2}.e^{-i\frac{\pi}{4}})e^{i\frac{\pi}{4}}$ أي : $\bar{z}=1-2i+k.\sqrt{2}$ $z=1+k.\sqrt{2}+2i$ ، $(k>0)$	إذن : $\begin{cases}\mathrm{Re}(z)=1+k.\sqrt{2}>1\\ \mathrm{Im}(z)=2\end{cases}$	هي نصف المستقيم المعرف بـــ : $\begin{cases}\mathrm{Re}(z)>1\\ \mathrm{Im}(z)=2\end{cases}$.
46) $z=2-k.e^{i\frac{\pi}{6}}$ ، $(k>0)$ أي : $z=2+k.e^{i(\frac{\pi}{6}+\pi)}$ أي : $z-2=k.e^{i\frac{7\pi}{6}}$ مع $(k>0)$. و منه : $\arg(z-z_A)=\frac{7\pi}{6}+2k\pi$.	*) $M\neq A$ مع $A(2;0)$. *) $(\vec{u};\overrightarrow{AM})=\frac{7\pi}{6}+2k\pi$.	هي نصف المستقيم الذي مبدؤه A و زاويته $\frac{7\pi}{6}$ باستثناء النقطة A .

بالتوفيق للجميع في بكالوريا 2019

الأستاذ : بلقاسم عبدالرزاق

أهم الطرق للتعرف على طبيعة رباعي

يكون الرباعي ABCD	إذا كان :	بالأعداد المركبة
متوازي الأضلاع  	1) $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$ .... أو : 2) للقطرين $[AC]$ و $[BD]$ نفس المنتصف .	أي : $z_D - z_A = z_C - z_B$ .... أي : $z_A + z_C = z_B + z_D$
معين  	1) $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{B}$ و $AB = BC$ .... أو : 2) القطران $[AC]$ و $[BD]$ متناصفان و متعامدان .	أي : $z_D - z_A = z_C - z_B$ و $\lvert z_B - z_A\rvert = \lvert z_C - z_B\rvert$ .... أي : $z_A + z_C = z_B + z_D$ و العدد $\frac{z_C - z_A}{z_D - z_B}$ تخيلي صرف .
مستطيل  	1) $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$ و المثلث ABC قائم في B . ... أو : 2) القطران $[AC]$ و $[BD]$ متناصفان و متقايسان .	أي : $z_D - z_A = z_C - z_B$ و العدد $\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}$ تخيلي صرف . ... أي : $z_A + z_C = z_B + z_D$ و $\lvert z_C - z_A\rvert = \lvert z_D - z_B\rvert$
مربع  	1) $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$ و المثلث ABC قائم في B و متساوي الساقين .... أو : 2) القطران $[AC]$ و $[BD]$ متناصفان و متعامدان ومتقايسان.	أي : $z_D - z_A = z_C - z_B$ والعدد : $\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B} = \pm$ .... أي : $z_A + z_C = z_B + z_D$ والعدد : $\frac{z_C - z_A}{z_D - z_B} = \pm i$.

تنبيه : توجد طرق أخرى . إنما اخترنا الأكثر استعمالا .

#ب.ع