❧ المثلث القائم و الدائرة ❧

1 أنشئ، في كل حالة مثلثا ABC قائما في A ثم الدائرة المحيطة به.

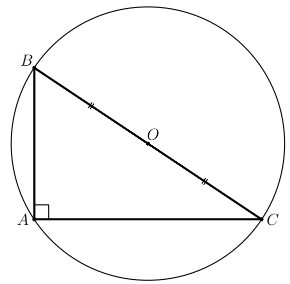
(1) $AB = 4\,\text{cm}$ و $AC = 6\,\text{cm}$.

(2) $AC = 7\,\text{cm}$ و $BC = 10\,\text{cm}$.

(3) $AB = 5\,\text{cm}$ و $\widehat{ABC} = 50°$.

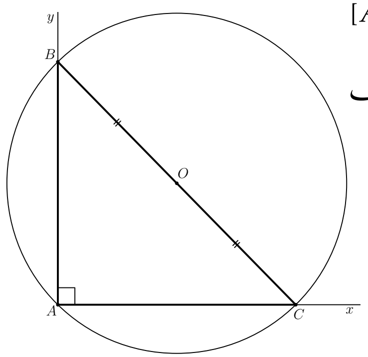
في الحالة الثانية، احسب محيط و مساحة الدائرة المحيطة بالمثلث ABC .

(1)



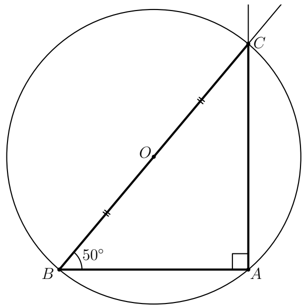
نرسم الضلع $[AC]$ ثم الزاوية $\widehat{A}$ (قائمة)، ثم الضلع $[AB]$ ، و أخيراً الضلع $[BC]$.
بما أنّ المثلث قائم، فإنّ مركز الدائرة المحيطة به هو منتصف الوتر.

(2)



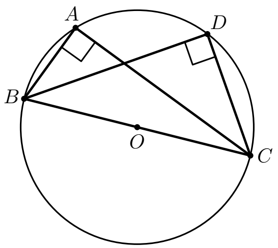
نبدأ برسم زاوية قائمة $\widehat{xAy}$ ثمّ نعيِّن النقطة C على الضلع $[Ax)$ بحيث $AC = 7\,\text{cm}$ ، بعدها نعيِّن النقطة B على الضلع $[Ay)$ بحيث $CB = 10\,\text{cm}$.
بما أنّ المثلث قائم، فإنّ مركز الدائرة المحيطة به هو منتصف الوتر.
في هذه الحالة، نصف قطر هذه الدائرة هو :
$OB = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2} \times 10\,\text{cm} = 5\,\text{cm}$
و بالتالي، محيط الدائرة المحيطة بالمثلث ABC يساوي :
$\mathscr{P} = 2 \times \pi \times OB \simeq 2 \times 3,14 \times 5 = 31,4\,\text{cm}$
و مساحتها تساوي :
$\mathscr{A} = \pi \times OB^2 \simeq 3,14 \times 5^2\,\text{cm}^2 = 3,14 \times 25\,\text{cm}^2 = 78,5\,\text{cm}^2$.

(3)



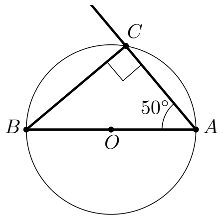
نرسم الضلع $[AB]$ ثم الزاوية $\widehat{A}$ (قائمة)، ثم الزاوية $\widehat{B} = 50°$.
الرأس C هو نقطة تقاطع ضلعَيّ هاتين الزاويتين.
بما أنّ المثلث قائم، فإنّ مركز الدائرة المحيطة به هو منتصف الوتر.

2 ليكن ABC و BCD مثلثين قائمين في A و D على الترتيب.
برهن أنّ النقطتين A و D تنتميان إلى الدائرة التي قطرها $[BC]$.



بما أنّ المثلث ABC قائم في A فإنّ وتره $[BC]$ قطر للدائرة المحيطة به.
و بما أنّ المثلث BCD قائم في D فإنّ وتره $[BC]$ قطر للدائرة المحيطة به.
هذا يعني أنّ النقطتين A و D تنتميان إلى الدائرة التي قطرها $[BC]$.

3 ارسم دائرة قطرها $[AB]$ ثمّ عيِّن عليها نقطة C بحيث $\widehat{BAC} = 50°$.
احسب قيس كل من $\widehat{ACB}$ و $\widehat{ABC}$ مع التبرير.



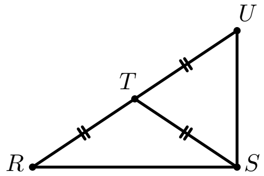
بما أنّ النقطة C تنتمي إلى الدائرة التي قطرها $[AB]$ فإنّ المثلث ABC قائم و وتره هو $[AB]$ (قائم في C) و بالتالي $\widehat{ACB} = 90°$ ،
منه $\widehat{ABC} = 180° - (50° + 90°) = 40°$.

4 ليكن RST مثلثا متساوي الساقين رأسه الأساسي T و لتكن U نظيرة R بالنسبة إلى T .
برهن أنّ المثلث RSU قائم في S .

بما أنّ U نظيرة R بالنسبة إلى T فإنّ $TR = TU$ أي T منتصف $[RU]$ و بالتالي $TU = \dfrac{1}{2}RU$.

لكن المثلث RST متساوي الساقين رأسه الأساسي T منه $TS = TR$.

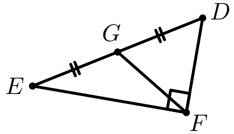
لدينا إذن $TS = TR = TU$ و $TS = \frac{1}{2}RU$.



في المثلث RSU ، $[TS]$ هو المتوسط المتعلق بالضلع $[RU]$ و طوله يساوي نصف طول هذا الضلع فحسب النظرية العكسية لنظرية « طول المتوسط المتعلق بالوتر في المثلث القائم » ، نستنتج أنّ المثلث RSU قائم و وتره هو الضلع $[RU]$ أي هذا المثلث قائم في S .

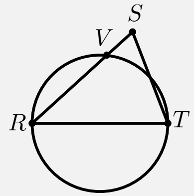
5 EDF مثلث قائم في F و G منتصف الوتر $[ED]$ بحيث $GF = 6{,}4\,\text{cm}$.

احسب الطول ED مع التبرير.



في المثلث DEF القائم في F ، $[GF]$ هو المتوسط المتعلق بالوتر $[DE]$ و بالتالي طوله يساوي نصف طول الوتر أي $GF = \frac{1}{2}DE$
منه $DE = 2GF = 2 \times 6{,}4\,\text{cm} = 12{,}8\,\text{cm}$.

6 RST مثلث كيفي و V نقطة تقاطع الضلع $[RS]$ مع الدائرة التي قطرها $[RT]$.



(1) ما هي طبيعة المثلث RVT ؟ علِّل.

(2) ماذا يمثل المستقيم (VT) بالنسبة للمثلث RST ؟ علِّل.

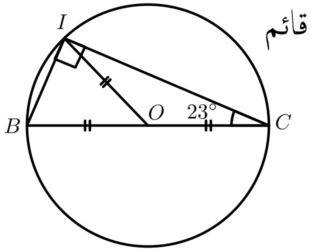
(1) المثلث RVT مرسوم داخل الدائرة التي قطرها $[RT]$ و بالتالي فهو قائم و وتره هو القطر $[RT]$.
إذن المثلث RVT قائم في V .

(2) في المثلث RST ، المستقيم (VT) يشمل الرأس T و يعامد الضلع المقابل $[RS]$ و بالتالي فهو الارتفاع المتعلق بالضلع $[RS]$.

7 $(\mathscr{C})$ دائرة مركزها O و $[BC]$ قطر لها. I نقطة من هذه الدائرة بحيث $\widehat{BCI} = 23°$.

(1) ارسم الشكل.

(2) احسب قيس كل من $\widehat{IBO}$ ، $\widehat{OIC}$ ، $\widehat{IOC}$ ، $\widehat{OIB}$ و $\widehat{IOB}$.



- المثلث BIC مرسوم داخل الدائرة $(\mathscr{C})$ التي قطرها $[BC]$ و بالتالي فهو قائم في الرأس I و وتره هو هذا القطر. لدينا إذن $\widehat{BIC} = 90°$ منه :
$\widehat{IBO} = \widehat{IBC} = 180° - (90° + 23°) = 67°$.
- المثلث OIC متساوي الساقين رأسه الأساسي O و بالتالي :
$\widehat{OIC} = \widehat{OCI} = 23°$.
- لدينا : $\widehat{IOC} = 180° - \left(\widehat{OCI} + \widehat{OIC}\right) = 180° - 2 \times 23° = 134°$.
- بما أنّ $\widehat{OIB} + \widehat{OIC} = 90°$ فإنّ : $\widehat{OIB} = 90° - \widehat{OIC} = 90° - 23° = 67°$.

[**طريقة أخرى** : المثلث OIB متساوي الساقين رأسه الأساسي O و بالتالي : $\widehat{OIB} = \widehat{IBO} = 67°$] .

- لدينا : $\widehat{IOC} = 180° - \left(\widehat{IBO} + \widehat{OIB}\right) = 180° - 2 \times 67° = 46°$.

[**طريقة أخرى** : $\widehat{IOB} = 180° - \widehat{IOC} = 180° - 134° = 46°$] .

سَهَري لِتَنْقِيحِ العُلُومِ أَلَذُّ لِي ... مِنْ وَصْلِ غَانِيَةٍ وَ طِيبِ عِنَاقِ
وَ صَرِيرُ أَقْلَامِي عَلَى صَفَحَاتِهَا ... أَحْلَى مِنَ الدَّوْكَاءِ وَ العُشَّاقِ
وَ أَلَذُّ مِنْ نَقْرِ الفَتَاةِ لِدُفِّهَا ... نَقْرِي لِأُلْقِي الرَّمْلَ عَنْ أَوْرَاقِي
وَ تَمَايُلِي طَرَبًا لِحَلِّ عَوِيصَةٍ ... فِي الدَّرْسِ أَشْهَى مِنْ مُدَامَةِ سَاقِ
وَ أَبِيتُ سَهْرَانَ الدُّجَى وَ تَبِيتُهُ ... نَوْماً وَ تَبْغِي بَعْدَ ذَاكَ لَحَاقِي ؟!