



التمرين الأول: (04 نقاط)

يراد عشوائياً تشكيل لجنة قسم تضم رئيساً و نائباً له من بين 4 أولاد و 5 بنات.

1. أحسب احتمال الأحداث التالية:

"A": اللجنة تضم ولداً وبنتاً "B": الرئيس ولد "C": النائب بنت "D": الرئيس ولد و النائب بنت"

2. أ- أحسب احتمال الحادثة: "F": النائب بنت علمًا أن الرئيس ولد"

ب- هل الحادثان B و C مستقلتان؟

3. ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب عدد الأولاد المتواجدون في اللجنة

- عين قيم المتغير العشوائي X ثم عرف قانون احتماله

التمرين الثاني(04ن)

لتكن (u_n) متتالية عددية معرفة على \mathbb{N} بالعلاقة التراجيعية: $u_{n+1} = e\sqrt{u_n}$ و $u_0 = e^3$.

1. برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > e^2$

2. أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) . هل هي متقاربة؟

3. نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = \ln(u_n) - 2$

أ- بين أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعين أساسها وحدتها الأولى.

ب- أكتب عبارة v_n بدلالة n ثم عبارة u_n بدلالة n .

ج- ما هي نهاية كل من المتتاليتين (u_n) و (v_n) .

4. أحسب بدلالة n الجداء P_n حيث: $P_n = u_0 \times u_1 \times \dots \times u_n$

التمرين الثالث(06ن):

I. تكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1\}$ بالعبارة: $g(x) = \frac{-x^2 + x + 1}{x - 1}$

1. أدرس تغيرات الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

2. أ- بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين $\alpha < 0 < \beta < 2$ حيث: $1 < \beta < 2$

ب- استنتج اشارة g(x) حسب كل قيم x من $\mathbb{R} - \{-1\}$

II. نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $[1, +\infty) \cup [0, +\infty)$ كليلاً:

$f(x) = x - 1 + \ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$ تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس (O, \vec{i}, \vec{j})

1. أ- أحسب $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ثم فسر النتيجتين هندسيا.

ب- أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

2. أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $[1, +\infty] \cup [-\infty, 0]$ فإن :

ب- أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

3. أ- بين ان المستقيم $y = x - 1$ مقايرب مائل للمنحنى (C_f) .

ب- أدرس الوضع النسيي للمنحنى (C_f) و (Δ) .

4. أنشئ (C_f) و (Δ) (نأخذ $f(\beta) \approx 2.58$ ، $f(\alpha) \approx -1.58$) .

5. ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة $f(x) = x - m$

الترميم الرابع (60ن)

I. g الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R} كا يلي : $g(x) = (2x + 1)e^x - 1$.

1. ادرس تغيرات الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها

2. احسب $g(0)$ ، ثم استنتج اشارة $(g(x))$ على \mathbb{R}

II. تعتبر الدالة العددية f المعرفة على \mathbb{R} بـ : $f(x) = x(e^x - 1)^2$ تمثيلها البياني في المعلم المتعامد والمتبعانس $(o; \vec{i}, \vec{j})$

1. احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

2. بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقايرب للمنحنى (C_f) عند $-\infty$ ثم ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ)

3. أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = (e^x - 1)g(x)$

ب- استنتاج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

4. اكتب معادلة $L(T)$ ماس (C_f) المار من مبدأ المعلم

5. أنشئ (T) و (Δ) ، (C_f) والمنحنى

6. ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة $f(x) = mx$

7. أ- بين أن : $h(x) = x - f(x) = 2(x-1)e^x + \frac{1}{4}(1-2x)e^{2x}$ دالة أصلية للدالة (f) على \mathbb{R}

ب- احسب $\int_0^{\ln 2} h(x) dx$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا

8. k الدالة المعرفة على \mathbb{R}^* بـ : $k(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$

-دون حساب عبارة $k(x)$ حدد اتجاه تغير الدالة k على مجموعة تعريفها

تصحيح موضوع حصة الدعم

التمرين الأول:

1. حساب احتمال الأحداث:

عدد الحالات الممكنة: $A_9^2 = 72$

$$P(A) = \frac{2A_4^1 \times A_5^1}{72} = \frac{40}{72}$$

$$P(B) = \frac{A_4^1 \times A_8^1}{72} = \frac{32}{72}$$

$$P(C) = \frac{A_8^1 \times A_5^1}{72} = \frac{40}{72}$$

$$P(D) = \frac{A_4^1 \times A_5^1}{72} = \frac{20}{72}$$

$$P(F) = P_B(C) = \frac{P(B \cap C)}{P(B)} - 2$$

$$P(B \cap C) = P(D) = \frac{20}{72}$$

$$P(F) = \frac{\frac{20}{72}}{\frac{32}{32}} = \frac{20}{32} \quad \text{ومنه:}$$

بـ- الحادستان B و C غير مستقلتان لأن:

$$\begin{cases} P(B \cap C) = \frac{20}{72} \\ \text{ومنه: } P(B) \times P(C) = \frac{32}{72} \times \frac{40}{72} = \frac{20}{81} \end{cases} \quad \text{لدينا:}$$

$$P(B \cap C) \neq P(B) \times P(C)$$

3. قيم المتغير العشوائي X :

$$X = \{0, 1, 2\}$$

$$P(X = 0) = \frac{A_5^2}{72} = \frac{20}{72}$$

$$P(X = 1) = P(A) = \frac{40}{72}$$

$$P(X = 2) = \frac{A_4^2}{72} = \frac{12}{72}$$

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{20}{72}$	$\frac{40}{72}$	$\frac{12}{72}$

التمرين الثاني:

$$\bullet u_0 = e^3 \quad \text{و} \quad u_{n+1} = e\sqrt{u_n}$$

• برهان أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > e^2$

لدينا: $u_0 = e^3 > e^2$ ومنه الخاصية محققة من أجل

$$n=0$$

نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل عدد طبيعي n أي:

$$u_n > e^2$$

وتبين صحتها من أجل العدد $(n+1)$ أي:

لدينا: $\sqrt{u_n} > e$ ومنه: $\sqrt{u_n} > \sqrt{e^2}$ ومنه:

$$u_{n+1} > e^2 \quad \text{ومنه} \quad e\sqrt{u_n} > e^2$$

ومنه: $e\sqrt{u_n} > e^2$ ومنه $u_{n+1} > e^2$ ومنه الخاصية صحيحة من أجل $(n+1)$ إذا حسب مبدأ

الاستدلال بالترابع هي صحيحة من أجل n :

3. دراسة اتجاه تغير المتالية (u_n) . هل هي متقاربة؟

$$u_{n+1} - u_n = e\sqrt{u_n} - u_n = \frac{(e\sqrt{u_n} - u_n)(e\sqrt{u_n} + u_n)}{e\sqrt{u_n} + u_n}$$

$$= \frac{e^2 u_n - u_n^2}{e\sqrt{u_n} + u_n} = \frac{u_n(e^2 - u_n)}{e\sqrt{u_n} + u_n}$$

لدينا: $e^2 - u_n < 0$ ومنه: $u_n > e^2$

إذا: $0 < u_{n+1} - u_n$ وعليه (u_n) متناقصة

- (u_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل بالعدد e^2 إذا

هي متقاربة نحو العدد l

3. أ- بين أن المتالية (v_n) هندسية يطلب تعين

أساسها وحدتها الأولى.

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \ln(u_{n+1}) - 2 \\ &= \ln(e\sqrt{u_n}) - 2 \\ &= \ln e + \ln(u_n)^{\frac{1}{2}} - 2 \\ &= -1 + \frac{1}{2} \ln u_n = \frac{1}{2}(-2 + \ln u_n) = \frac{1}{2}v_n \end{aligned}$$

ومنه: (v_n) متالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ وحدتها الأول:

$$v_0 = \ln u_0 - 2 = 1$$

ب- كتابة عبارة v_n بدلالة n ثم عبارة u_n بدلالة n :

$$v_n = v_0 \times q^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

لدينا: $v_n + 2 = \ln u_n$ ومنه: $v_n = \ln u_n - 2$

$$u_n = e^{v_n+2} = e^{\left(\frac{1}{2}\right)^n+2}$$

ج- نهاية كل من المتتاليتين (u_n) و (v_n) :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\left(\frac{1}{2}\right)^n+2} = e^2$$

1. أحسب بدلالة n الجداء P_n حيث:

$$\begin{aligned} P_n &= u_0 \times u_1 \times \dots \times u_n \\ &= e^{v_0+2} \times e^{v_1+2} \times \dots \times e^{v_n+2} \\ &= e^{v_0} \times e^2 \times e^{v_1} \times e^2 \times \dots \times e^{v_n} \times e^2 \\ &= e^{v_0+v_1+\dots+v_n} \times (e^2)^{n+1} \\ &= e^{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}} \\ &= e^{\frac{1-\frac{1}{2}}{2}} \times e^{2(n+1)} \\ &= e^{2\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]+2(n+1)} \end{aligned}$$

التمرين الثالث:

لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ بالعبارة:

$$g(x) = \frac{-x^2 + x + 1}{x - 1}$$

1. دراسة تغيرات الدالة g

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x) = -\infty$$

$$\lim_{x \xrightarrow{x \rightarrow 1} 1} g(x) = +\infty \quad , \quad \lim_{x \xrightarrow{x \rightarrow 1} 1} g(x) = -\infty$$

الدالة g قابلة للاشتتقاق على $\mathbb{R} - \{1\}$ ودالتها المشتقة:

$$g'(x) = \frac{-x^2 + 2x - 2}{(x-1)^2}$$

$$-x^2 + 2x - 2 = 0 \quad g'(x) = 0$$

ومنه: $\Delta = -8 < 0$ إذا الدالة g متناقصة

تماماً على مجال تعريفها

جدول تغيرات الدالة g

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$g'(x)$	-	-	-
$g(x)$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$

أ.2- تبيين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين α و β

$$\text{حيث: } 1 < \beta < 2 \quad -1 < \alpha < 0$$

- الدالة g مستمرة ورتبية على المجال $[-1, 0]$ و:

$$g(0) \times g\left(\frac{-1}{2}\right) < 0 \quad g(-1) = \frac{1}{2}, \quad g(0) = -1$$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $0 = g(x)$

تقبل حالاً α حيث: $-1 < \alpha < 0$

- الدالة g مستمرة ورتبية على المجال $[1, 2]$ و:

$$0 \in [-1, +\infty[\quad \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = +\infty \quad g(2) = -1$$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $0 = g(x)$

تقبل حالاً β حيث: $1 < \beta < 2$

ب- استنتاج اشارة $g(x)$ حسب كل قيم x من $\mathbb{R} - \{1\}$

x	$-\infty$	α	1	B	$+\infty$
$g(x)$	+	0	-	+	-

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$

$$f(x) = x - 1 + \ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$$

كما يلي:

1. أ- حساب النهايتين وتفسير النتيجة هندسياً:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty \quad , \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$$

ومنه المنحنى (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين عموديين

معادلة كل منهما: $x=1$ و $x=0$

أ.3- تبيين ان المستقيم (Δ) مقارب مائل للمنحنى (C_f)

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} [f(x) - y] = \lim_{|x| \rightarrow \infty} \ln\left(\frac{x}{x-1}\right) = 0$$

ومنه (Δ) مقارب مائل للمنحنى (C_f)

ب- دراسة الوضع النسيي للمنحنى (C_f) و (Δ)

$$f(x) - y = \ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$$

$$\frac{1}{x-1} = 0 \quad \text{ومنه: } \frac{x}{x-1} = 1 \quad \text{ومنه: } \ln\left(\frac{x}{x-1}\right) = 0$$

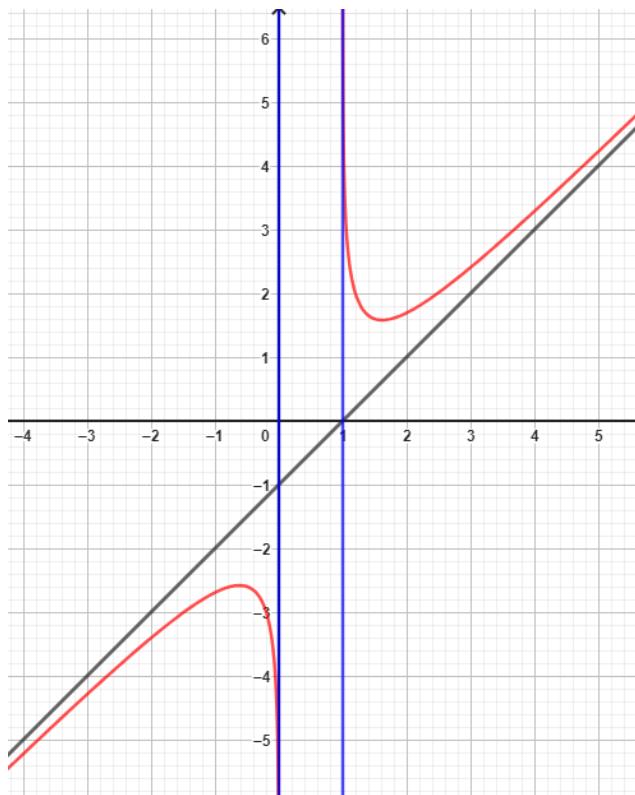
المعادلة لا تقبل حلول إذا لا توجد نقط تقاطع ومنه

إشارة الفرق من إشارة $x-1$ إذا:

تحت (Δ) على المجال $[-\infty, 0]$

فوق (Δ) على المجال $[1, +\infty]$

الإنشاء



ب- حساب النهايتين:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x-1) = -\infty \quad \text{لأن:} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1} \ln x = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1) = +\infty \quad \text{لأن:} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1} \ln x = 0 \end{cases}$$

أ- تبيين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من

$$f'(x) = -\frac{g(x)}{x} \quad \text{فإن:} \quad]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$$

الدالة f قابلة للاشتتقاق على مجال تعريفها و:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 + \frac{1(x-1) - 1 \times x}{(x-1)^2} \times \frac{x-1}{x} \\ &= 1 - \frac{1}{(x-1)^2} \times \frac{x-1}{x} \\ &= 1 - \frac{1}{x(x-1)} \\ &= \frac{x^2 - x - 1}{x(x-1)} = -\frac{1}{x} \left(\frac{-x^2 + x + 1}{x-1} \right) = -\frac{g(x)}{x} \end{aligned}$$

ب- دراسة اتجاه تغير الدالة f

$$\frac{-g(x)}{x}$$

x	$-\infty$	a	0	1	B	$+\infty$
$-g(x)$	-	0	+	+	-	0
x	-	-	0	+	+	+
$f'(x)$	+	0	-			- 0 +

ومنه الدالة f متزايدة على المجالين $[\beta, +\infty)$ و $(-\infty, \alpha]$

ومتناقصة على المجالين $[1, \beta]$ و $(\alpha, 0]$

جدول التغيرات الدالة f

x	$-\infty$	a	0	1	B	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-			- 0 +
$f(x)$	$\downarrow \downarrow \downarrow$	$f(a)$			$+\infty$	$+\infty$

5. المناقشة البيانية (مائلة)

حلول المعادلة $f(x) = x - m$ هي فواصل نقط تقاطع المنحني (C_f) مع المستقيم (Δ_m) ذات المعادلة $y = x - m$. ومنه: أي $m \in]-\infty, -1]$ المعادلة تقبل حل وحيد سالب.

- أي $m = 1$ المعادلة ليس لها حل $m \in]-1, +\infty[$ أي $m \in]-\infty, -1]$ المعادلة لها حل وحيد موجب

القرين الرابع:

$$D_g = \mathbb{R}, \quad g(x) = (2x+1)e^x - 1. \quad \text{I}$$

1. دراسة تغيرات الدالة g

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x+1)e^x - 1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2xe^x + e^x - 1 = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (2x+1)e^x - 1 = +\infty$$

حساب المشتقة:

الدالة g قابلة للاشتاقاق على \mathbb{R} ودالتها المشتقة:

$$g'(x) = 2e^x + (2x+1)e^x = (2x+3)e^x$$

إشارة (g') من إشارة (x)

$$x = -\frac{3}{2} \quad \text{تكافئ: } 2x+3=0$$

ومنه جدول تغيرات الدالة g هو:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+
$e^x - 1$	-	0	+
$f'(x)$	+	0	+

جدول تغيرات الدالة f

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	+
$f(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$

معادلة لـ (T) مماس (C_f) المار من مبدأ المعلم

$$(T): y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

المماس (T) يمر من المبدأ معناه:

$$f'(x_0)(0 - x_0) + f(x_0) = 0$$

$$-x_0(e^{x_0} - 1)g(x_0) + x_0(e^{x_0} - 1)^2 = 0 \quad \text{ومنه:}$$

2. احسب $g(0)$ ، ثم استنتج اشارة (g') على \mathbb{R}

$$g(x) = (2 \times 0 + 1)e^0 - 1 = 0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

$$D_f = \mathbb{R}, \quad f(x) = x(e^x - 1)^2. \quad \text{II}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x(e^x - 1)^2 = -\infty$$

تفسير النتيجة هندسيا

قيمة $\int_0^{\ln 2} h(x)dx$ هي مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات ذات المعادلات $y=x$ و $x=\ln 2$.

$$k(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) \quad k \text{. الدالة المعرفة على } \mathbb{R}^* \text{ بـ:}$$

- اتجاه تغير الدالة k

$$k'(x) = -\frac{1}{x^2} f'\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{المشتقة:}$$

إشارة $k'(x)$

$$-\frac{1}{x^2} < 0 \quad \text{لدينا}$$

ولدينا: $x=0$ لما $f'(x)=0$

و $x < 0$ لما $f'(x) > 0$ أو $x > 0$ لما $f'(x) < 0$ أو

وعليه: $\frac{1}{x}=0$ لما $f'\left(\frac{1}{x}\right)=0$ وهذا مستحيل

و $0 < \frac{1}{x} < 0$ لما $f'\left(\frac{1}{x}\right)$ أو $0 < \frac{1}{x} < 0$ أو

أي لما $x < 0$ أو $x > 0$

اذن الدالة k متزايدة على كل من المجالين $[-\infty; 0]$ و $[0; +\infty]$

$$x_0(e^{x_0}-1)[-g(x_0)+x_0(e^{x_0}-1)] = 0$$

$$-2x_0^2(e^{x_0}-1)e^{x_0} = 0$$

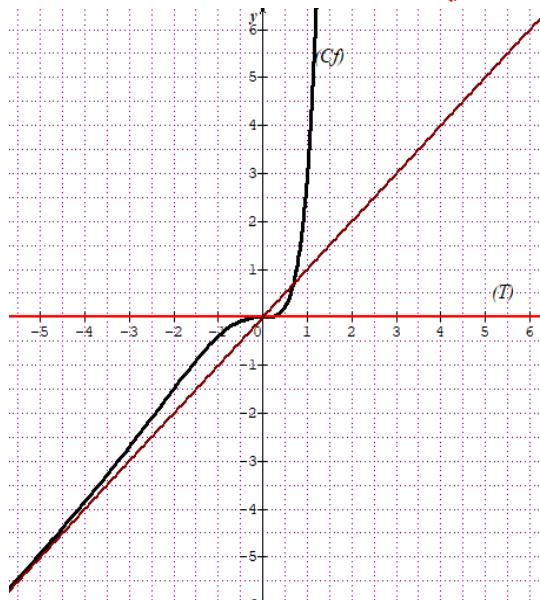
$$x_0 = 0$$

نجد

اذن معادلة المماس (T) هي $y=f'(0)(x-0)+f(0)$

ومنه $(T): y=0$

5. التمثيل البياني لـ (Δ) ، (T) والمنحنى (C_f)



6. المناقشة البيانية

حلول المعادلة $f(x)=mx$ هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيمات ذات المعادلة $y_m=mx$ فإذا:

$m \in [-\infty; 0]$ المعادلة تقبل حلاً وحيداً

$m \in [0; 1]$ المعادلة تقبل ثلاث حلول

$m \in [1; +\infty]$ المعادلة تقبل حلاً

7. أ. تبيّن أن: H دالةٌ أصليةٌ للدالة h على \mathbb{R}

$$\text{لدينا: } H(x) = 2(x-1)e^x + \frac{1}{4}(1-2x)e^{2x}$$

$$\text{ومنه: } H'(x) = 2e^x(x-1) + 2e^x + \frac{1}{4} \times 2e^{2x}(1-2x) - 2 \times \frac{1}{4}e^{2x}$$

$$\text{ومنه: } H'(x) = 2xe^x - xe^{2x} = x(e^x - e^{2x}) = x - f(x)$$

$$\text{بـ. حساب } \int_0^{\ln 2} h(x)dx$$

$$\int_0^{\ln 2} h(x)dx = \int_0^{\ln 2} [x - f(x)]dx$$

$$= \left[\frac{1}{4}e^{2x}(1-2x) + 2e^x(x-1) \right]_0^{\ln 2} = \ln 4 - \frac{5}{4}$$