مستقيم المنتصفين

1
A، B و C ثلاث نقط ليست على نفس الاستقامة.
E هي نظيرة A بالنسبة إلى B و F هي نظيرة A بالنسبة إلى C .
برهن أنّ $FE = 2 \times BC$.

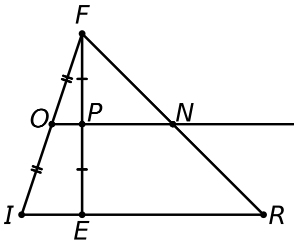
2
ارسم مثلثا EFG بحيث :
$EF = 8,4\,\text{cm}$ ، $FG = 5,2\,\text{cm}$ و $EG = 6,6\,\text{cm}$
ثمّ عيّن النقط I، J و K، منتصفات أضلاعه $[EF]$، $[FG]$ و $[EG]$ على الترتيب.
احسب محيط المثلث IJK مع التعليل.

3
$CIRE$ معيّن. K منتصف $[IR]$ و J منتصف $[RE]$.
برهن أنّ $(KJ) \perp (CR)$.

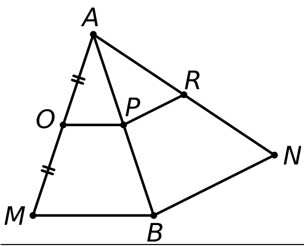
4
$COTE$ متوازي أضلاع مركزه A .
I منتصف $[OT]$ و J منتصف $[TE]$.
برهن أنّ الرباعي $AITJ$ متوازي أضلاع.

5
$ABCD$ مستطيل مركزه J بحيث : $AB = 8\,\text{cm}$ و $BC = 6\,\text{cm}$.
المستقيم الذي يشمل J و يعامد (AB)، يقطع $[AB]$ في I .
النقطة K هي منتصف $[BC]$.
احسب محيط الرباعي $IBKJ$ مع التعليل.

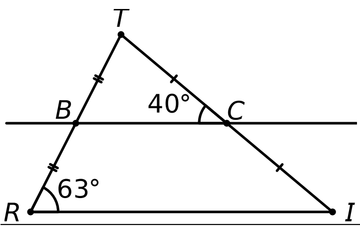
6
$COTE$ رباعي كيفي غير متصالب.
B، A، I و N منتصفات أضلاعه $[CO]$، $[OT]$، $[TE]$ و $[EC]$ على الترتيب.
(1) برهن أنّ الرباعي $BAIN$ متوازي أضلاع.
(2) ما الذي يمكن قوله عن $BAIN$ إذا كان $OE = CT$ ؟
(3) ما الذي يمكن قوله عن $BAIN$ إذا كان $(OE) \perp (CT)$ ؟

7


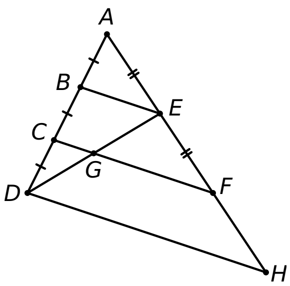
في الشكل المقابل :
$O \in [FI]$
$P \in [FE]$
$N \in [FR]$
$P \in [ON]$
$E \in [IR]$
(1) برهن أنّ $(IE) // (OP)$.
(2) برهن أنّ N منتصف $[FR]$.

8


في الشكل المقابل :
$(OP) // (MB)$
$(PR) // (BN)$
برهن أنّ $(OR) // (MN)$.

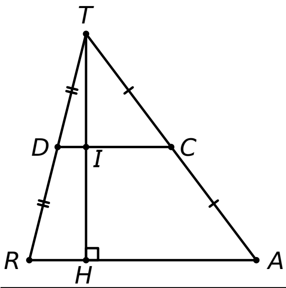
9


تمعن في الشكل المقابل ثم احسب قيس الزاوية $\widehat{RTI}$ مع التعليل.

10


تمعن في الشكل المقابل الذي فيه $(BE) // (DH)$.
(1) برهن أنّ $(BE) // (CF)$.
(2) برهن أنّ G منتصف $[DE]$.
(3) أثبت أنّ $FH = EF = AE$.

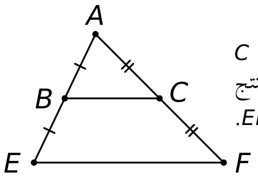
11
وحدة الطول هي السنتيمتر.
(1) ارسم مثلثا ABC بحيث $AB = 4$، $AC = 6$ و $BC = 3$.
(2) عيّن I، منتصف $[AC]$ ثم أنشئ D، نظيرة B بالنسبة إلى I .
ما طبيعة الرباعي $ABCD$ ؟ علّل.
(3) أنشئ F، نظيرة B بالنسبة إلى (AC) .
برهن أنّ $(AC) // (DF)$.

12


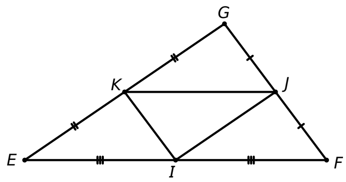
تمعن في الشكل المقابل ثم برهن أنّ مساحة المثلث TAR تساوي أربعة أضعاف مساحة المثلث TDC .

الحلول

1
بما أنّ E نظيرة A بالنسبة إلى B فإنّ B منتصف $[AE]$ ؛
و بما أنّ F نظيرة A بالنسبة إلى C فإنّ C منتصف $[AF]$.

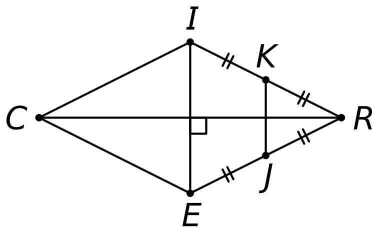


في المثلث AEF لدينا إذن : B منتصف $[AE]$ و C منتصف $[AF]$ فحسب نظرية مستقيم المنتصفين نستنتج أنّ $(BC) // (EF)$ و $BC = \frac{1}{2}EF$ منه $EF = 2 \times BC$.

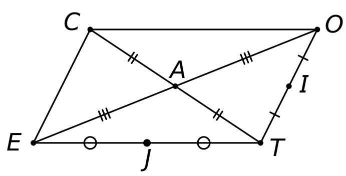
2


- في المثلث EFG لدينا : I منتصف $[FE]$ و J منتصف $[FG]$ فحسب نظرية مستقيم المنتصفين نستنتج أنّ $(IJ) // (EG)$ و $IJ = \frac{1}{2}EG$ إذن :
$IJ = EG \div 2 = 6,6\,\text{cm} \div 2 = 3,3\,\text{cm}$.
- في المثلث EFG لدينا : I منتصف $[FE]$ و K منتصف $[GE]$ فحسب نظرية مستقيم المنتصفين نستنتج أنّ $(IK) // (GF)$ و $IK = \frac{1}{2}GF$ إذن :
$IK = GF \div 2 = 5,2\,\text{cm} \div 2 = 2,6\,\text{cm}$.
- في المثلث EFG لدينا : J منتصف $[FG]$ و K منتصف $[GE]$ فحسب نظرية مستقيم المنتصفين نستنتج أنّ $(JK) // (FE)$ و $JK = \frac{1}{2}FE$ إذن :
$JK = FE \div 2 = 8,4\,\text{cm} \div 2 = 4,2\,\text{cm}$.

محيط المثلث IJK هو إذن :
$\mathcal{P} = IJ + IK + JK = 3,3\,\text{cm} + 2,6\,\text{cm} + 4,2\,\text{cm} = \mathbf{10,1}\,\text{cm}$

3


بما أنّ $CIRE$ معيّن فإنّ قطريه متعامدان أي $(CR) \perp (IE)$.
في المثلث IRE لدينا : K منتصف $[IR]$ و J منتصف $[RE]$ فحسب نظرية مستقيم المنتصفين نستنتج أنّ $(KJ) // (IE)$ و $KJ = \frac{1}{2}RE$).
لدينا إذن $(CR) \perp (IE)$ و $(KJ) // (IE)$ و بالتالي $(CR) \perp (KJ)$ (إذا عامد مستقيم أحد مستقيمين متوازيين فإنه يعامد الآخر).

4


belhocine : https://prof27math.weebly.com/

- في المثلث OTE لدينا : A منتصف $[OE]$ و I منتصف $[OT]$ فحسب نظرية مستقيم المتصفين نستنتج أنّ $(AI)//(ET)$ و $AI=\frac{1}{2}ET$.

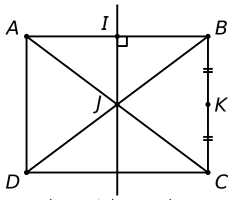
و بما أنّ $J\in[TE]$ فإنّ $(AI)//(JT)$ ....(1).

- في المثلث OTE لدينا : A منتصف $[OE]$ و J منتصف $[ET]$ فحسب نظرية مستقيم المتصفين نستنتج أنّ $(AJ)//(OT)$ و $AJ=\frac{1}{2}OT$.

و بما أنّ $I\in[OT]$ فإنّ $(AJ)//(TI)$ ....(2).

من (1) و (2) نستنتج أنّ الرباعي $AITJ$ متوازي أضلاع (فيه كل ضلعين متقابلين حاملاهما متوازيان).

5

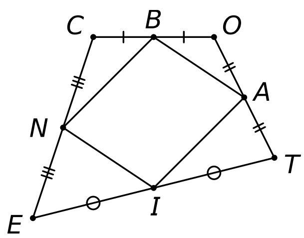


بما أنّ $ABCD$ مستطيل فإنّ قطريه متناصفان (و متقايسان) إذن J هي منتصف $[AC]$.
بما أنّ $(JI)\perp(AB)$ و $(BC)\perp(AB)$ فإنّ $(IJ)//(BC)$ (المستقيمان العموديان على نفس المستقيم هما مستقيمان متوازيان).

في المثلث ABC لدينا : J منتصف $[AC]$ و $(IJ)//(BC)$ فحسب النظرية العكسية لنظرية مستقيم المتصفين نستنتج أنّ المستقيم (IJ) يقطع الضلع الثالث $[AB]$ في منتصفه إذن I هي منتصف $[AB]$ ؛ كما نستنتج أنّ $IJ=\frac{1}{2}BC$ أي :
$IJ=BC\div 2=6\,\text{cm}\div 2=\mathbf{3}\,\text{cm}$.
و بما أنّ K منتصف $[BC]$ فإنّ $IJ=BK$.
في المثلث ABC لدينا : J منتصف $[AC]$ و K منتصف $[BC]$ فحسب نظرية مستقيم المتصفين نستنتج أنّ $(JK)//(AB)$ و $JK=\frac{1}{2}AB$ منه :
$JK=AB\div 2=8\,\text{cm}\div 2=\mathbf{4}\,\text{cm}$.
و بما أنّ I منتصف $[AB]$ فإنّ $IB=JK$.
في الأخير، محيط الرباعي هو :

$$\begin{aligned}\mathcal{P}&=IB+BK+KJ+JI\\&=2\times KJ+2\times JI\\&=2(KJ+JI)\\&=2\times 7\,\text{cm}=\mathbf{14}\,\text{cm}\end{aligned}$$

6



(1) • في المثلث COT لدينا : B منتصف $[OC]$ و A منتصف $[OT]$ فحسب نظرية مستقيم المتصفين نستنتج أنّ

$(BA)//(CT)$ و $BA=\frac{1}{2}CT$ ....(1)

• في المثلث CET لدينا : N منتصف $[CE]$ و I منتصف $[TE]$ فحسب نظرية مستقيم المتصفين نستنتج أنّ :

$(NI)//(CT)$ و $NI=\frac{1}{2}CT$ ....(2)

من (1) و (2) نستنتج أنّ $(BA)//(NI)$ و $BA=NI$ إذن للرباعي (غير المتصالب) $BAIN$ ضلعان متقابلان متقايسان و حاملاهما متوازيان و بالتالي فهو متوازي أضلاع.

(2) في المثلث COE لدينا : B منتصف $[OC]$ و N منتصف $[CE]$ فحسب نظرية مستقيم المتصفين نستنتج أنّ : $(NB)//(OE)$ و $NB=\frac{1}{2}OE$.
إذا كان $OE=CT$ فإنّ $NB=\frac{1}{2}CT$ أي $NA=AB$ و بالتالي $BAIN$ هو متوازي أضلاع له ضلعان متتاليان و متقايسان إذن فهو معيّن.

(3) من الأسئلة السابقة : $(BN)//(OE)$ و $(BA)//(CT)$ و بالتالي إذا كان $(OE)\perp(CT)$ فإنّ $(BA)\perp(BN)$ أي $\widehat{NBA}=90°$.
في الأخير، $BAIN$ هو متوازي أضلاع له زاوية قائمة إذن فهو مستطيل.

7

(1) في المثلث FIE لدينا : O منتصف $[FI]$ و P منتصف $[FE]$ فحسب نظرية مستقيم المتصفين نستنتج أنّ : $(OP)//(IE)$ و $OP=\frac{1}{2}IE$).

(2) بما أنّ $P\in[ON]$ ، $E\in[IR]$ و $(OP)//(IE)$ فإنّ $(PN)//(ER)$.
في المثلث FER لدينا إذن : P منتصف $[FE]$ و $(PN)//(ER)$ فحسب النظرية العكسية لنظرية مستقيم المتصفين نستنتج أنّ المستقيم (PN) يقطع الضلع الثالث $[FR]$ في منتصفه إذن N هي منتصف $[FR]$ (كما نستنتج أنّ $PN=\frac{1}{2}ER$).

8

حتى نبرهن أنّ $(MN)//(OR)$ ، سنبرهن أولا أنّ P منتصف $[AB]$ و أنّ R منتصف $[AN]$ ثم نطبق نظرية مستقيم المتصفين في المثلث AMN .

- **إثبات أنّ P منتصف $[AB]$** : في المثلث AMB لدينا : O منتصف $[AM]$ و $(OP)//(MB)$ فحسب النظرية العكسية لنظرية مستقيم المتصفين نستنتج أنّ المستقيم (OP) يقطع الضلع الثالث $[AB]$ في منتصفه إذن P هي منتصف $[AB]$.
- **إثبات أنّ R منتصف $[AN]$** : في المثلث ABN لدينا : P منتصف $[AB]$ و $(PR)//(BN)$ فحسب النظرية العكسية لنظرية مستقيم المتصفين نستنتج أنّ المستقيم (PR) يقطع الضلع الثالث $[AN]$ في منتصفه إذن R هي منتصف $[AN]$.
- **إثبات أنّ $(OR)//(MN)$** : في المثلث AMN لدينا :

O منتصف $[AM]$ و R منتصف $[AN]$ فحسب نظرية مستقيم المتصفين نستنتج أنّ : $(OR)//(MN)$.

9

في المثلث RTI لدينا : C منتصف $[TI]$ و B منتصف $[RT]$ فحسب نظرية مستقيم المتصفين نستنتج أنّ : $(RI)//(BC)$.
المستقيمان (BC) و (RI) متوازيان و مقطوعان بالقاطع (TR) نستنتج إذن أنّ الزاويتين المتماثلتين $\widehat{TBC}$ و $\widehat{TRI}$ متقايستان أي $\widehat{TBC}=\widehat{TRI}=63°$.
و بما أنّ مجموع أقياس زوايا المثلث يساوي $180°$ فإنّ :

$$\widehat{BTC}=180°-(63°+40°)=\mathbf{77°}$$

10

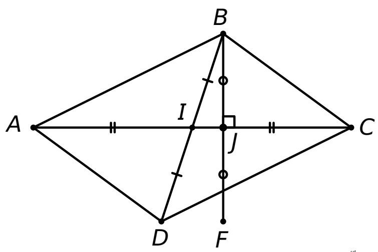
(1) في المثلث ACF لدينا : B منتصف $[AC]$ و E منتصف $[AF]$ فحسب نظرية مستقيم المتصفين نستنتج أنّ : $(CF)//(BE)$.

(2) في المثلث BDE لدينا : C منتصف $[BD]$ و $(BE)//(CF)$ فحسب النظرية العكسية لنظرية مستقيم المتصفين نستنتج أنّ المستقيم (CF) يقطع الضلع الثالث $[DE]$ في منتصفه إذن G هي منتصف $[DE]$.

(3) في المثلث DEH لدينا : G منتصف $[DE]$ و $(DH)//(CF)$ فحسب النظرية العكسية لنظرية مستقيم المتصفين نستنتج أنّ المستقيم (CF) يقطع الضلع الثالث $[EH]$ في منتصفه إذن F هي منتصف $[EH]$ و بالتالي :
$FH=EF=AE$

11

(1) انظر الشكل.
(2) انظر الشكل.
بما أنّ D نظيرة B بالنسبة إلى I فإنّ I منتصف $[BD]$.
قطرا الرباعي $ABCD$ هما إذن متناصفان و بالتالي فهو متوازي أضلاع.



(3) بما أنّ F نظيرة B بالنسبة إلى (AC) فإنّ المستقيم (AC) هو محور القطعة $[BF]$ و بالتالي إذا كانت J منتصف $[BF]$ فإنّ J تنتمي إلى المحور (AC) .
في المثلث BDF لدينا : I منتصف $[BD]$ و J منتصف $[BF]$ فحسب نظرية مستقيم المتصفين نستنتج أنّ : $(IJ)//(DF)$.
و بما أنّ النقطتين I و J تنتميان إلى المستقيم (AC) فإنّ $(DF)//(AC)$.

12

في المثلث TRA لدينا : D منتصف $[TR]$ و C منتصف $[TA]$ فحسب نظرية مستقيم المتصفين نستنتج أنّ : $(CD)//(RA)$ و $CD=\frac{1}{2}RA$.
لكن $(RA)\perp(TH)$ ، إذن $(CD)\perp(TH)$ (إذا عامد مستقيم أحد مستقيمين متوازيين فإنه يعامد الآخر) و هذا يعني أنّ (TH) هو الارتفاع المتعلق بالضلع $[CD]$ في المثلث TCD .
في المثلث TRH لدينا : D منتصف $[TR]$ و $(RH)//(CD)$ فحسب النظرية العكسية لنظرية مستقيم المتصفين نستنتج أنّ المستقيم (CD) يقطع الضلع الثالث $[TH]$ في منتصفه إذن I هي منتصف $[TH]$ و بالتالي $TI=\frac{1}{2}TH$.
مساحة المثلث TAR هي : $\mathcal{A}_{TAR}=\frac{1}{2}RA\times TH$
و مساحة المثلث TDC هي :

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{TDC}&=\tfrac{1}{2}CD\times TI\\&=\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2}RA\times\tfrac{1}{2}TH\right)\\&=\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{4}RA\times TH\right)\\&=\tfrac{1}{4}\left(\tfrac{1}{2}RA\times TH\right)\\&=\tfrac{1}{4}\mathcal{A}_{TAR}\end{aligned}$$

إذن $\mathcal{A}_{TAR}=4\times\mathcal{A}_{TDC}$.

belhocine : https://prof27math.weebly.com/